

EL LIBRO COMO UNIVERSO,
LA EDUCACIÓN EN LIBRO

SÍGUENOS
www.editorialaulamagna.com
facebook.com/editorialaulamagna/
linkedin.com/company/editorialaulamagna

McGrawHill | AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas

Con ejercicios y códigos en Python y Matlab

Este libro es un manual especializado sobre la modelización matemática de la evolución de los activos y productos financieros, su valoración y la gestión del riesgo asociado a los mismos. Además de abordar la componente teórica de los conceptos anteriores, en el libro se proponen soluciones numéricas a los problemas más comunes a los que se enfrentan las instituciones financieras en su día a día. Los distintos capítulos del libro vienen acompañados de ejercicios y los códigos en Python y Matlab para generar la mayoría de resultados que se muestran en las tablas y en las figuras. En la página web (<https://quantfinancebook.com/>) y en el canal de YouTube Computations in Finance (<https://youtube.com/ComputationsInFinance>), se proporcionan otros recursos tales como ejercicios resueltos y cursos online basados en los contenidos del libro.

El libro comienza con un repaso de conceptos estadísticos básicos y con la introducción al modelado de activos financieros, continuando con un incremento gradual de la complejidad de los modelos presentados, hasta llegar a los modelos más avanzados que se utilizan actualmente en la industria bancaria. Por ello, este manual es perfecto para introducirse en el mundo de las finanzas cuantitativas, como libro de referencia para cursos universitarios de grado y máster dedicados a esta temática o como texto de consulta para profesionales quants.



McGrawHill | AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE



AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas
Con ejercicios y códigos en Python y Matlab

Cornelis W. Oosterlee
Lech A. Grzelak
Álvaro Leitao Rodríguez

AM

Cornelis W. Oosterlee • Lech A. Grzelak
Álvaro Leitao Rodríguez

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas

Con ejercicios y códigos en Python y Matlab



Cornelis W. Oosterlee
Desde 2021, profesor de Matemática Financiera y miembro del Mathematical Institute en la Universidad de Utrecht (Países Bajos). Antes trabajó en el Centro Nacional para las Matemáticas y la Informática de Países Bajos (CWI) y en la Universidad Técnica de Delft.



Lech A. Grzelak
Es quant senior en el departamento de ingeniería financiera del Rabobank, en los Países Bajos. Además, ejerce de profesor asistente en la Universidad Técnica de Delft, donde imparte un curso sobre Finanzas Cuantitativas. Lech se doctoró en el área de análisis numérico en 2011.



Álvaro Leitao Rodríguez
Es investigador asociado en el grupo M2NICA y en el CITIC, ambos pertenecientes a la Universidad da Coruña. Álvaro obtuvo su doctorado en matemática aplicada por la Universidad Técnica de Delft en 2017.

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas

Con ejercicios y códigos en Python y Matlab

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas

Con ejercicios y códigos
en Python y Matlab

Cornelis W. Oosterlee
Lech A. Grzelak
Álvaro Leitao Rodríguez



AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Modelos matemáticos y métodos numéricos en finanzas cuantitativas
Con ejercicios y códigos en Python y Matlab

Primera edición: 2021

ISBN: 9788418808241

ISBN eBook: 9788418808678

Depósito Legal: SE 1698-2021

© del texto:

Cornelis W. Oosterlee

Lech A. Grzelak

Álvaro Leitao Rodríguez

© de esta edición:

Editorial Aula Magna, 2021. McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

editorialaulamagna.com

info@editorialaulamagna.com

Impreso en España – Printed in Spain

Quedan prohibidos, dentro de los límites establecidos en la ley y bajo los apercibimientos legalmente previstos, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, ya sea electrónico o mecánico, el tratamiento informático, el alquiler o cualquier otra forma de cesión de la obra sin la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. Diríjase a info@editorialaulamagna.com si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

*Aan mijn lieve familie, Anasja, Wim, Mathijs, Wim en Agnes (Kees).
Dedykowane ukochanej Annie, mamie, bratu oraz całej rodzinie (Lech).
Dedicado a Mela, a meus pais e a miña familia e amigos (Álvaro).*

Agradecimientos

Nos gustaría mostrar nuestro agradecimiento a varias personas e instituciones por su inestimable aportación para llevar este proyecto a un final exitoso.

En primer lugar, nos gustaría dar las gracias a nuestros centros de trabajo por su apoyo, al Centro Nacional de Matemáticas e Informática (CWI) de Ámsterdam y al Instituto de Matemáticas Aplicadas (DIAM) de la Universidad Técnica de Delft, ambos en los Países Bajos, al Centro de Investigación en TIC (CITIC) y al Departamento de Matemáticas de la Universidad de A Coruña, en España. También, expresamos nuestra más sincera gratitud a nuestros colegas y amigos del CWI, del DIAM, de Rabobank, del CITIC y del grupo M2NICA. Muy especialmente, deseamos dar las gracias a Nada Mitrovic por su gran ayuda e implicación.

En los últimos años hemos compartido conversaciones y llevado a cabo colaboraciones muy fructíferas tanto con los miembros de nuestros respectivos grupos como también con distintos profesores e investigadores invitados. En particular, queremos agradecer la aportación y cooperación de nuestros estimados colegas Peter Forsyth, Luis Ortiz Gracia, Mike Staunton, Carlos Vázquez, Andrea Pascucci, Yuying Li, Karel in't Hout, Ana María Ferreiro y José Antonio García.

Agradecemos las valiosas y detalladas correcciones, propuestas de mejora e indicaciones sobre el contenido y su presentación aportadas por, entre otros, Natalia Borovykh, Tim Dijkstra, Clarissa Elli, Irfan Ilgin, Marko Iskra, Fabien Le Floc'h, Patrik Karlsson, Erik van Raaij, María Suárez Taboada, Sacha van Weeren, Felix Wolf y Thomas van der Zwaard.

Los estudiantes de doctorado y posdoctorado con los que hemos trabajado y colaborado durante nuestra carrera académica han sido de gran inspiración. Por ello, damos las gracias a, en orden alfabético, Kristoffer Andersson, Anastasia Borovykh, Ki Wai Chau, Bin Chen, Fei Cong, Fang Fang, Qian Feng, Andrea Fontanari, Xinzhen Huang, Shashi Jain, Prashant Kumar, Coen Leentvaar,

Álvaro Leitao (Kees y Lech), Shuaiqiang Liu, José Germán López Salas, Peiyao Luo, Alberto Manzano, Joel Pérez Villarino, Marta Pou, Marjon Ruijter, Beatriz Salvador Mancho, Luis Souto, Anton van der Stoep, Shih-Hau Tan, Bowen Zhang, Jing Zhao y Hisham bin Zubair.

Nos gustaría también dar las gracias a Jorge Molinero, de la editorial Aula Magna, por su indispensable ayuda y flexibilidad en el proceso de publicación de este libro.

Finalmente, el agradecimiento a nuestras familias no se puede expresar con palabras.

Prólogo

Este libro aborda la interacción entre el cálculo estocástico (teoría de la probabilidad aplicada) y el análisis numérico en el ámbito de las finanzas cuantitativas. El contenido del mismo será de utilidad para las personas que trabajan en la industria financiera, para aquellos que aspiran a trabajar en ella algún día, o para cualquier persona interesada en las finanzas cuantitativas.

Se estudiarán los procesos estocásticos (y sus ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas) utilizados para modelar las diversas clases de activos financieros existentes, presentados en orden creciente de complejidad, llegando a los modelos que se emplean diariamente en las instituciones financieras.

Los modelos clásicos utilizados en la industria han evolucionado con el tiempo. En general, cada vez que se produce un cambio de paradigma en los mercados financieros, los correspondientes modelos matemáticos estocásticos que describen la evolución de los activos también deben cambiar. La regulación bancaria desempeña un papel muy importante en esos cambios. Por ello, en el libro introducimos una amplia variedad de modelos para precios de activos, tipos de interés y tipos de cambio. Como moraleja, en el contexto de las finanzas cuantitativas, «no te enamores de tu modelo favorito».

Los derivados financieros son productos cuyo valor depende de la evolución de otro activo financiero subyacente, como pueden ser las acciones, los tipos de interés o las divisas. Además de la modelización y la valoración de estos productos, es importante evaluar el riesgo asociado a la venta de los mismos. La valoración de opciones también aparece durante la calibración de los modelos estocásticos (proceso en el que se ajustan los parámetros del modelo para que este reproduzca los precios de opciones de mercado) y en la gestión del riesgo (al incluir el denominado riesgo de contraparte).

Hoy en día, una parte muy destacada en la gestión avanzada del riesgo consiste en cuantificar el riesgo de que una contraparte de un contrato financiero no cumpla sus obligaciones (lo que, en inglés, se conoce como

Counterparty Credit Risk, CCR). Para tener en cuenta este riesgo, los precios de las opciones se deben compensar mediante los denominados «ajustes de valoración». En concreto, estudiaremos el ajuste por riesgo de crédito, o *Credit Value Adjustment* (CVA), dentro del contexto de la gestión del riesgo y obtendremos sus correspondientes ecuaciones.

Los valores de las opciones están gobernados por ecuaciones en derivadas parciales, para las que, solo en casos muy excepcionales, se dispone de soluciones analíticas. Como alternativa, estas se pueden reformular en términos de esperanzas que, además, deben calcularse de manera eficiente, precisa y robusta. Prestaremos especial atención a los modelos con volatilidad estocástica, considerando el reconocido modelo de Heston como punto de partida.

En cuanto a los métodos numéricos para valorar derivados financieros, estudiaremos un método de valoración basado en técnicas de inversión de Fourier, así como el método de valoración de Monte Carlo. Mientras que las técnicas de Fourier son muy útiles para valorar contratos de derivados básicos (como las opciones europeas) en la fase de calibración, los métodos de Monte Carlo se suelen emplear para valorar derivados cuya definición y/o la dinámica de precios del subyacente son más complejas.

Con el aumento gradual de la complejidad de los modelos estocásticos presentados en los diferentes capítulos del libro pretendemos introducir las herramientas matemáticas necesarias para definir modelos apropiados, así como para la valoración eficiente de opciones europeas bajo los mismos. Pasaremos de los modelos para *equity* en los primeros diez capítulos, a los modelos para tipos de interés a corto plazo y de mercado en los últimos capítulos. Contextualizaremos estos modelos de tipo de interés en el marco de Heath-Jarrow-Morton, mostraremos las relaciones entre los diferentes modelos e introduciremos algunos productos de tipos de interés, además de abordar su valoración.

En ocasiones, resulta de utilidad combinar varias clases de activos, como, por ejemplo, acciones y tipos de interés, en un sistema correlado de ecuaciones diferenciales estocásticas. Estudiaremos los modelos híbridos de activos, considerando modelos estocásticos tanto para acciones como para tipos de interés. En resumen, en este libro, el lector puede encontrar una amplia variedad de modelos estocásticos, técnicas de valoración numérica, aspectos computacionales, productos financieros y aplicaciones en gestión de riesgos. El objetivo es ayudar a los lectores a introducirse y avanzar en el desafiante mundo de las finanzas cuantitativas.

Los temas abordados son relevantes para estudiantes de máster y doctorado e investigadores académicos, así como para *quants* en la industria financiera. Se recomienda tener cierta formación previa en teoría de la probabilidad aplicada (movimientos brownianos, proceso de Poisson, martingalas, teorema de Girsanov, etc.) y en ecuaciones en derivadas parciales (ecuación del calor, condiciones de contorno), estar familiarizado con métodos de resolución iterativos, como el método Newton-Raphson, y conocer algunas nociones básicas sobre finanzas, activos, precios y opciones.

Cómo utilizar este libro

Este libro puede emplearse como libro de consulta por estudiantes de máster y doctorado en matemática aplicada, finanzas cuantitativas o estudios similares. En nuestro caso, utilizamos el libro para dos cursos de universidad. Uno de ellos, denominado *Computational Finance*, es un curso de un máster en matemática aplicada, perteneciente a un itinerario denominado *Financial Engineering*, y en el que se imparten la mayoría de los contenidos de los diez primeros capítulos. En otro curso, denominado *Special Topics in Financial Engineering*, se estudian los productos y modelos de tipos de interés, además de conceptos de gestión del riesgo tales como el riesgo de contraparte y el ajuste de valoración por riesgo de crédito. En otras universidades, estos cursos se suelen denominar *Financial Engineering*, *Quantitative Finance* o similar.

Cada capítulo se completa con una serie de ejercicios para trabajar y asentar los contenidos del mismo.

Debajo de la mayoría de las tablas y figuras del libro aparecen los siguientes iconos



indicando que se dispone de los códigos en Python y Matlab, respectivamente, que permiten obtener los valores de las tablas y las curvas de las figuras. En la versión electrónica del libro, haciendo clic en estos iconos se accede a los códigos correspondientes. Los códigos se proporcionan bajo descargo de responsabilidad.

En la página web <https://QuantFinanceBook.com> están disponibles las soluciones a todos los ejercicios con numeración impar. Además, desde la misma, se pueden descargar los códigos fuente en Python y Matlab. En el canal de YouTube *Computations in Finance* (<https://youtube.com/ComputationsInFinance>), se accede a cursos online basados en los contenidos del libro.

Descargo de responsabilidad

Los códigos de este libro fueron creados por los autores con el fin de completar la teoría y los resultados numéricos presentados. Se renuncia a cualquier garantía expresa o implícita sobre los mismos. No se garantiza que los programas estén libres de errores. No están implementados siguiendo ningún estándar ni están destinados a ninguna aplicación específica.

La utilización de los códigos para otro propósito que no sea la comprobación de las soluciones de los problemas concretos del libro queda bajo el propio riesgo y responsabilidad del usuario. Los autores y el editor no se hacen responsables de los posibles daños directos o indirectos ocasionados por uso de los programas.

¡Esperamos que disfrute de la lectura!

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Conceptos básicos sobre procesos estocásticos | 1 |
| 1.1. Variables estocásticas | 2 |
| 1.1.1. Función de densidad, esperanza y varianza | 2 |
| 1.1.2. Función característica | 3 |
| 1.1.3. Cumulantes y momentos | 5 |
| 1.2. Procesos estocásticos y propiedad de martingala | 10 |
| 1.2.1. Proceso de Wiener | 11 |
| 1.2.2. Martingalas | 12 |
| 1.2.3. Esperanzas iteradas: ley de la esperanza total | 13 |
| 1.3. Integración estocástica e integral de Itô | 14 |
| 1.3.1. Procesos elementales | 15 |
| 1.3.2. Isometría de Itô | 17 |
| 1.3.3. Teorema de representación de la martingala | 21 |
| 1.4. Ejercicios | 26 |
| 2. Introducción al modelado de activos financieros | 29 |
| 2.1. Movimiento browniano geométrico | 30 |
| 2.1.1. Proceso de Itô | 32 |
| 2.1.2. Lema de Itô | 32 |
| 2.1.3. Distribuciones de $S(t)$ y $\log S(t)$ | 38 |
| 2.2. Primeras generalizaciones | 41 |
| 2.2.1. Modelo de dividendo proporcional | 41 |
| 2.2.2. Variantes para la volatilidad | 42 |
| 2.2.3. Volatilidad dependiente del tiempo | 42 |
| 2.3. Martingalas y precios de activos | 44 |
| 2.3.1. Precios \mathbb{P} -medibles | 44 |
| 2.3.2. Precios \mathbb{Q} -medibles | 45 |

| | |
|---|------------|
| 2.3.3. Estimación de parámetros bajo la medida del mundo real | 47 |
| 2.4. Ejercicios | 53 |
| 3. La ecuación de Black-Scholes | 55 |
| 3.1. Definición de opción | 56 |
| 3.1.1. Conceptos básicos sobre opciones | 56 |
| 3.1.2. Ecuación en derivadas parciales | 60 |
| 3.1.3. Método de martingala y valoración de opciones | 64 |
| 3.2. El teorema de Feynman-Kac y el modelo de Black-Scholes | 66 |
| 3.2.1. Soluciones analíticas para precios de opciones | 68 |
| 3.2.2. Función de Green y función característica | 71 |
| 3.2.3. Alternativas para la volatilidad | 76 |
| 3.3. Cobertura delta bajo el modelo de Black-Scholes | 78 |
| 3.4. Ejercicios | 83 |
| 4. Modelos de volatilidad local | 87 |
| 4.1. Volatilidad implícita de Black-Scholes | 88 |
| 4.1.1. El concepto de volatilidad implícita | 88 |
| 4.1.2. Implicaciones de la volatilidad implícita | 92 |
| 4.1.3. Modelos alternativos de precios de activos | 94 |
| 4.2. Precios de opciones y densidades | 96 |
| 4.2.1. Sonrisa de volatilidad implícita y payoff | 96 |
| 4.2.2. Swaps de varianza | 103 |
| 4.3. Modelos de volatilidad local no paramétricos | 109 |
| 4.3.1. Representación de la volatilidad local en términos de la volatilidad implícita | 112 |
| 4.3.2. Condiciones para precios de opciones libres de arbitraje | 115 |
| 4.3.3. Interpolación avanzada de la volatilidad implícita | 118 |
| 4.3.4. Simulación del modelo de volatilidad local | 122 |
| 4.4. Ejercicios | 125 |
| 5. Procesos con saltos | 129 |
| 5.1. Procesos de difusión con saltos | 130 |
| 5.1.1. Lema de Itô y saltos | 132 |
| 5.1.2. EID para el proceso de difusión con saltos | 135 |
| 5.1.3. Casos especiales para la distribución de los saltos | 136 |
| 5.2. Teorema de Feynman-Kac para procesos de difusión con saltos | 138 |
| 5.2.1. Fórmulas analíticas para precios de opciones | 139 |
| 5.2.2. Función característica para el modelo de Merton | 141 |
| 5.2.3. Cobertura dinámica para procesos con saltos | 145 |
| 5.3. Procesos de Lévy exponenciales | 147 |
| 5.3.1. Procesos de Lévy exponenciales de actividad finita | 151 |
| 5.3.2. EID y la tripleta de Lévy | 152 |
| 5.3.3. Medida de martingala equivalente | 154 |
| 5.4. Procesos de Lévy exponenciales de actividad infinita | 155 |

| | |
|--|------------|
| 5.4.1. Proceso Variance Gamma | 155 |
| 5.4.2. Proceso CGMY | 160 |
| 5.4.3. Proceso Normal Inverse Gaussian | 165 |
| 5.5. Reflexión sobre los saltos en la dinámica del activo | 166 |
| 5.6. Ejercicios | 168 |
| 6. El método COS para la valoración de opciones europeas | 173 |
| 6.1. Introducción a la valoración numérica de opciones | 174 |
| 6.1.1. Integrales y serie de Fourier de cosenos | 174 |
| 6.1.2. Aproximación de la densidad mediante la expansión de Fourier en cosenos | 175 |
| 6.2. Valoración de opciones europeas con el método COS | 179 |
| 6.2.1. Coeficientes de payoff | 182 |
| 6.2.2. Griegas de la opción | 184 |
| 6.2.3. Análisis del error | 184 |
| 6.2.4. Selección del intervalo de integración | 188 |
| 6.3. Resultados numéricos del método COS | 193 |
| 6.3.1. Movimiento browniano geométrico | 193 |
| 6.3.2. Procesos CGMY y VG | 194 |
| 6.3.3. Reflexión sobre la valoración de opciones | 198 |
| 6.4. Ejercicios | 200 |
| 7. Sistemas multidimensionales, cambio de medida y procesos afines | 205 |
| 7.1. Conceptos básicos para sistemas de EDE multidimensionales | 206 |
| 7.1.1. La factorización de Cholesky | 206 |
| 7.1.2. Proceso de precios multidimensional | 209 |
| 7.1.3. Lema de Itô para procesos vectoriales | 210 |
| 7.1.4. Teorema de Feynman-Kac multidimensional | 211 |
| 7.2. Cambio de medida y teorema de Girsanov | 213 |
| 7.2.1. La derivada de Radon-Nikodym | 213 |
| 7.2.2. Ejemplos de cambio de numerario | 216 |
| 7.2.3. De \mathbb{P} a \mathbb{Q} en el modelo de Black-Scholes | 218 |
| 7.3. Procesos afines | 223 |
| 7.3.1. Procesos de difusión afín | 223 |
| 7.3.2. Proceso de difusión afín con saltos | 228 |
| 7.3.3. Proceso de difusión afín con saltos y EID | 229 |
| 7.4. Ejercicios | 232 |
| 8. Modelos de volatilidad estocástica | 235 |
| 8.1. Introducción a los modelos de volatilidad estocástica | 236 |
| 8.1.1. El modelo de volatilidad estocástica de Schöbel-Zhu | 237 |
| 8.1.2. El proceso CIR para la varianza | 238 |
| 8.2. El modelo de volatilidad estocástica de Heston | 243 |
| 8.2.1. La ecuación de valoración de Heston | 245 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 8.2.2. | Impacto de los parámetros en la volatilidad implícita | 248 |
| 8.2.3. | Calibración del modelo de Heston | 250 |
| 8.3. | La función característica de Heston | 255 |
| 8.3.1. | Volatilidad estocástica como un proceso de difusión afín | 255 |
| 8.3.2. | Función característica descontada de Heston | 257 |
| 8.4. | Solución numérica para la EDP de Heston | 260 |
| 8.4.1. | El método COS para el modelo de Heston | 260 |
| 8.4.2. | Modelo de Heston con parámetros definidos a trozos | 263 |
| 8.4.3. | El modelo de Bates | 264 |
| 8.5. | Ejercicios | 268 |
| 9. | Simulación de Monte Carlo | 271 |
| 9.1. | Fundamentos de Monte Carlo | 272 |
| 9.1.1. | Integración de Monte Carlo | 274 |
| 9.1.2. | Simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas | 279 |
| 9.2. | Esquemas de Euler estocástico y Milstein | 280 |
| 9.2.1. | Esquema de Euler | 280 |
| 9.2.2. | Esquema de Milstein | 283 |
| 9.3. | Simulación del proceso CIR | 289 |
| 9.3.1. | Problemas de los esquemas de discretización estándar | 289 |
| 9.3.2. | Simulación basada en Taylor del proceso CIR | 291 |
| 9.3.3. | Simulación exacta del modelo CIR | 293 |
| 9.3.4. | El esquema exponencial cuadrático (QE) | 294 |
| 9.4. | Esquema Monte Carlo para el modelo de Heston | 298 |
| 9.4.1. | Ejemplo de muestra condicionada y varianza integrada | 298 |
| 9.4.2. | El proceso CIR integrado y la muestra condicionada | 300 |
| 9.4.3. | Simulación quasi-exacta del modelo de Heston | 303 |
| 9.4.4. | Mejoras en la simulación de Monte Carlo | 308 |
| 9.5. | Cálculo de las griegas con Monte Carlo | 309 |
| 9.5.1. | Diferencias finitas | 311 |
| 9.5.2. | Sensibilidades en la trayectoria | 313 |
| 9.5.3. | Método de la razón de verosimilitud | 317 |
| 9.6. | Ejercicios | 322 |
| 10. | Opciones Forward Start y Modelo de volatilidad local estocástica | 327 |
| 10.1. | Opciones forward start | 328 |
| 10.1.1. | Introducción a las opciones forward start | 328 |
| 10.1.2. | Valoración bajo el modelo de Black-Scholes | 330 |
| 10.1.3. | Valoración bajo el modelo de Heston | 332 |
| 10.1.4. | Volatilidad local versus volatilidad estocástica | 335 |
| 10.2. | Modelos de volatilidad local estocástica (SLV) | 337 |
| 10.2.1. | Componente de volatilidad local | 339 |
| 10.2.2. | Simulación Monte Carlo para el modelo SLV | 346 |
| 10.2.3. | Esquema AES de Monte Carlo para el modelo SLV | 348 |

| | |
|--|------------|
| 10.3. Ejercicios | 355 |
| 11. Modelos de tipos de interés | 357 |
| 11.1. Introducción a los tipos de interés | 358 |
| 11.1.1. Bonos | 358 |
| 11.1.2. Bono de tipo fijo | 359 |
| 11.2. Tipos de interés en el marco Heath-Jarrow-Morton | 360 |
| 11.2.1. El marco HJM | 361 |
| 11.2.2. Dinámica del tipo short-rate bajo el marco HJM | 365 |
| 11.2.3. La dinámica de Hull-White en el marco HJM | 368 |
| 11.3. El modelo Hull-White | 370 |
| 11.3.1. Solución de la EDE de Hull-White | 370 |
| 11.3.2. La función característica del modelo HW | 371 |
| 11.3.3. El modelo CIR bajo el marco HJM | 375 |
| 11.4. El modelo HJM bajo la medida T -forward | 377 |
| 11.4.1. La dinámica Hull-White bajo la medida T -forward | 379 |
| 11.4.2. Opciones sobre BCC bajo el modelo Hull-White | 380 |
| 11.5. Ejercicios | 383 |
| 12. Derivados de tipo de interés y ajustes en la valoración | 387 |
| 12.1. Derivados básicos de tipo de interés y el tipo Libor | 388 |
| 12.1.1. Tipo Libor | 388 |
| 12.1.2. Acuerdo de interés futuro | 390 |
| 12.1.3. Floating rate note | 391 |
| 12.1.4. Swaps | 392 |
| 12.1.5. Como construir una curva de rentabilidad | 395 |
| 12.2. Otros derivados de tipos de interés | 399 |
| 12.2.1. Caps y floors | 399 |
| 12.2.2. Swaptions europeos | 403 |
| 12.3. Credit Valuation Adjustment y gestión de riesgo | 407 |
| 12.3.1. Credit Value Adjustment unilateral | 413 |
| 12.3.2. Aproximaciones en el cálculo del CVA | 416 |
| 12.3.3. Credit Value Adjustment Bilateral (BCVA) | 418 |
| 12.3.4. Reducción de la exposición mediante neteo | 419 |
| 12.4. Ejercicios | 421 |
| 13. Modelos híbridos y Credit Valuation Adjustment | 425 |
| 13.1. Introducción a los modelos híbridos afines | 426 |
| 13.1.1. Modelo de Black-Scholes Hull-White (BSHW) | 426 |
| 13.1.2. Modelo BSHW y cambio de medida | 428 |
| 13.1.3. Modelo de Schöbel-Zhu Hull-White (SZH) | 434 |
| 13.1.4. Producto derivado híbrido | 436 |
| 13.2. Modelo de Heston híbrido | 438 |
| 13.2.1. Detalles del modelo híbrido de Heston Hull-White | 438 |
| 13.2.2. Aproximación para modelos híbridos de Heston | 440 |

| | |
|--|------------|
| 13.2.3. Simulación Monte Carlo para el modelo de Heston híbrido | 448 |
| 13.2.4. Modelo HHW vs. modelo SZH W | 452 |
| 13.3. Perfiles de exposición, CVA y modelos híbridos | 453 |
| 13.3.1. CVA y exposición | 455 |
| 13.3.2. Ejemplo para opciones europeas y bermuda | 455 |
| 13.4. Ejercicios | 460 |
| 14. Modelos de tipo de interés avanzados y generalizaciones | 465 |
| 14.1. Modelo de mercado Libor | 466 |
| 14.1.1. Especificaciones del modelo de mercado Libor | 466 |
| 14.1.2. Modelo de mercado Libor en el marco HJM | 469 |
| 14.2. Modelo de mercado Libor lognormal | 471 |
| 14.2.1. Cambio de medida en el LMM | 472 |
| 14.2.2. El LMM bajo la medida terminal | 474 |
| 14.2.3. El LMM bajo la medida spot | 474 |
| 14.2.4. Corrección de convexidad | 477 |
| 14.3. Modelos de volatilidad local paramétricos | 480 |
| 14.3.1. Antecedentes y motivación | 481 |
| 14.3.2. Modelo CEV | 482 |
| 14.3.3. Modelo de difusión desplazada | 488 |
| 14.3.4. LMM con volatilidad estocástica | 491 |
| 14.4. Gestión del riesgo: impacto de la crisis financiera | 496 |
| 14.4.1. Valoración en un entorno de tipos de interés negativos | 496 |
| 14.4.2. Entorno multicurva y tipo Libor | 500 |
| 14.4.3. Valoración en un entorno multicurva | 505 |
| 14.5. Ejercicios | 507 |
| 15. Modelos Cross-Currency | 511 |
| 15.1. Introducción al contexto FX | 512 |
| 15.1.1. Mercados FX | 512 |
| 15.1.2. Contrato FX forward | 513 |
| 15.1.3. Valoración de opciones FX: el caso de Black-Scholes | 515 |
| 15.2. Modelo FX multidivisa con tipos de interés short-rate | 517 |
| 15.2.1. Modelo con tipos de interés gaussianos correlados | 519 |
| 15.2.2. Valoración de opciones FX | 520 |
| 15.2.3. Experimento numérico con el modelo FX-HHW | 527 |
| 15.2.4. CVA para swaps FX | 531 |
| 15.3. Modelo FX multidivisa con sonrisa de tipo de interés | 532 |
| 15.3.1. Linealización y función característica forward | 537 |
| 15.3.2. Experimentos con el modelo FX-HLMM | 541 |
| 15.4. Ejercicios | 545 |
| Bibliografía | 549 |
| Índice alfabético | 564 |

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos sobre procesos estocásticos

En este capítulo:

Introducimos algunos conceptos básicos sobre variables y procesos estocásticos, tales como la función de densidad de probabilidad, la esperanza y la varianza. En el **Apartado 1.1** se presentan algunos conceptos básicos relativos a los procesos estocásticos. En el **Apartado 1.2** se explicarán las martingalas y la propiedad de martingala. La integral estocástica de Itô se trata en detalle en el **Apartado 1.3**.

Estas nociones básicas de la teoría de la probabilidad son fundamentales en la matemática financiera.

Palabras clave de este capítulo: procesos estocásticos, integral estocástica de Itô, martingalas.

1.1. Variables estocásticas

En primer lugar, recordamos algunos resultados importantes de la teoría de la probabilidad y algunas nociones iniciales sobre variables estocásticas y procesos estocásticos.

1.1.1. Función de densidad, esperanza y varianza

Una variable aleatoria que toma valores reales X se puede describir mediante su función de distribución acumulada (FDA)

$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x],$$

y su función de densidad de probabilidad (FDP)

$$f_X(x) := dF_X(x)/dx.$$

Sea X una variable aleatoria que toma valores reales y $f_X(x)$ su FDP. El valor esperado de X , $\mathbb{E}[X]$, se define como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{dF_X(x)}{dx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF_X(x),$$

siempre que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_X(x)dx$ sea finita.

La varianza de X , $\text{Var}[X]$, se define como

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x)dx,$$

siempre que la integral exista.

Para una variable aleatoria continua X y una constante $a \in \mathbb{R}$ la esperanza de una función indicatriz está relacionada con la FDA de X como

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq a}] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x \leq a} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx =: F_X(a),$$

donde $F_X(\cdot)$ es la FDA de X , y donde la notación $\mathbb{1}_{X \in \Omega}$ representa la función indicatriz del conjunto Ω , definida como

$$\mathbb{1}_{X \in \Omega} = \begin{cases} 1 & X \in \Omega, \\ 0 & X \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Definición 1.1.1 (Probabilidad de supervivencia)

La probabilidad de supervivencia está directamente relacionada con la FDA. Si X es una variable aleatoria que denota, por ejemplo, la vida útil de una población, entonces $\mathbb{P}[X \leq x]$ indica la probabilidad de que «no» se alcance la edad x . La probabilidad de supervivencia, definida por

$$\mathbb{P}[X > x] = 1 - \mathbb{P}[X \leq x] = 1 - F_X(x),$$

indica entonces la probabilidad de sobrevivir un periodo de tiempo de duración x .



El ejemplo clásico de variable aleatoria es la variable aleatoria normalmente distribuida, o variable normal. Una variable estocástica normalmente distribuida X , con esperanza μ y varianza σ^2 , se define mediante la función de distribución

$$F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz. \quad (1.2)$$

Entonces, la variable X se dice que sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Su correspondiente función de densidad de la probabilidad es

$$f_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{d}{dx} F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.1.1 (Esperanza de una variable aleatoria normal)

Consideremos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Por definición de la esperanza, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (z + \mu) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $z = x - \mu$. La función en la primera integral es una función impar, i.e., $g(-x) = -g(x)$, de modo que la integral sobre \mathbb{R} es igual a cero. Se observa que la segunda integral es una integral sobre la FDP de $\mathcal{N}(0, 1)$, siendo igual a $\sqrt{2\pi}$. Por tanto, la esperanza de $\mathcal{N}(\mu, 1)$ es igual a μ , esto es $\mathbb{E}[X] = \mu$. \blacklozenge

1.1.2. Función característica

En finanzas computacionales se trabaja habitualmente con la función de densidad de ciertas variables estocásticas, como los precios de acciones o los tipos de interés, ya que constituye la base para el cálculo de la esperanza o la varianza de la variable. Aunque para algunas variables estocásticas básicas la función de densidad es conocida en forma cerrada (lo cual es deseable), para bastantes procesos estocásticos relevantes en finanzas no conocemos su correspondiente densidad. Sin embargo, para algunos de estos procesos se pueden obtener expresiones de otras funciones relevantes que contienen información importante para el cálculo de esperanzas y otras cantidades (veremos ejemplos en los Capítulos 5, 7 y 8 de este libro). Dos de esas funciones son la «función característica» y la «función generadora de momentos» (o «función generatriz de momentos»). A continuación, presentamos la definición de estas funciones.

La función característica (FC), $\phi_X(u)$ para $u \in \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X , es la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de distribución acumulada $F_X(x)$. Por tanto, la FC se define como

$$\boxed{\phi_X(u) := \mathbb{E} [e^{iux}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_X(x) dx,} \quad (1.4)$$

siendo i la unidad imaginaria. $\phi_X(u)$ determina únicamente la función de distribución de X , lo que resulta muy útil. Además, los momentos de la variable aleatoria X también se pueden obtener a partir de $\phi_X(u)$, sabiendo que

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \phi_X(u) \Big|_{u=0},$$

con i siendo de nuevo la unidad imaginaria, para $k \in \{0, 1, \dots\}$, asumiendo que $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$.

Existe una relación directa entre la función característica y la función generadora de momentos, $\mathcal{M}_X(u)$, dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^k] &= \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \phi_X(u) \Big|_{u=0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF_X(x) \Big|_{u=0} \\ &= \frac{d^k}{du^k} \phi_X(-iu) \Big|_{u=0}, \end{aligned}$$

donde la parte derecha de la ecuación representa la función generadora de momentos, definida como

$$\mathcal{M}_X(u) := \phi_X(-iu) = \mathbb{E} [e^{uX}]. \quad (1.5)$$

Existe también una relación entre los momentos de una variable aleatoria positiva Y y la función característica de su transformación logarítmica, $\phi_{\log Y}(u)$. Entonces, para $X = \log Y$, su correspondiente función característica es

$$\begin{aligned} \phi_{\log Y}(u) &= \mathbb{E} [e^{iu \log Y}] = \int_0^\infty e^{iu \log y} f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty y^{iu} f_Y(y) dy. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nótese que utilizamos $\log Y \equiv \log_e Y \equiv \ln Y$. Estableciendo que $u = -ik$, tenemos

$$\phi_{\log Y}(-ik) = \int_0^\infty y^k f_Y(y) dy \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[Y^k]. \quad (1.7)$$

Las expresiones anteriores son válidas para aquellas variables para las que se dispone de la función característica de la variable transformada logarítmicamente.

Ejemplo 1.1.2 (Distribución y FC de la distribución normal)

En la Figura 1.1 se muestran la FDA y la FDP (lado izquierdo), y la función característica (lado derecho) de la distribución normal, $\mathcal{N}(10, 1)$. Las FDP y FDA son funciones muy suaves, mientras que la función característica (la transformada de Fourier de la función de densidad) es una función oscilatoria en el plano complejo.

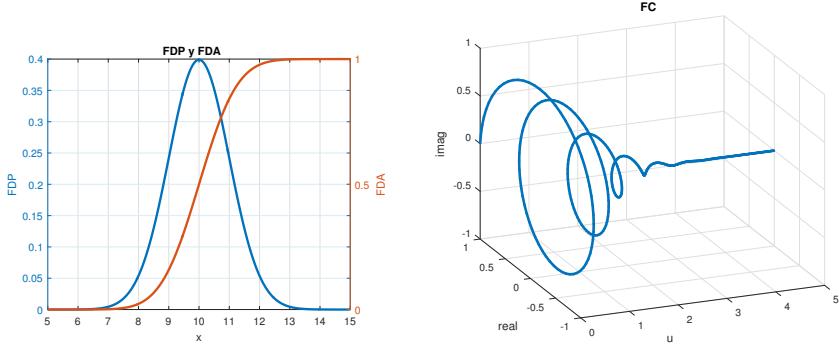


Figura 1.1: Variable aleatoria $\mathcal{N}(10, 1)$. Izquierda: FDP y FDA. Derecha: función característica (FC).



Otra función útil es la «función de generación de cumulantes», $\zeta_X(u)$, definida como el logaritmo de la función característica, $\phi_X(u)$, dada por

$$\zeta_X(u) = \log \mathbb{E} [e^{iuX}] = \log \phi_X(u).$$

El momento k -ésimo, $m_k(\cdot)$, y el cumulante k -ésimo, $\zeta_k(\cdot)$, se pueden determinar como

$$m_k(\cdot) = (-i)^k \frac{d^k}{du^k} \phi_X(u) \Big|_{u=0}, \quad \zeta_k(\cdot) = (-i)^k \frac{d^k}{du^k} \log \phi_X(u) \Big|_{u=0}, \quad (1.8)$$

donde $(-i)^k \equiv i^{-k}$ para $k \in \mathbb{N}$, y con $\phi_X(u)$ definida en (1.4).

1.1.3. Cumulantes y momentos

De la definición de la función característica se deducen algunas propiedades interesantes, como

$$\phi_X(0) = 1, \quad \phi_X(-i) = \mathbb{E} [e^{iX}].$$

Empleando la definición de la función generadora de momentos, tenemos que

$$\mathcal{M}_X(u) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{ux} f_X(x) dx. \quad (1.9)$$

Suponiendo que todos los momentos de X son finitos, la función generadora de momentos (1.9) admite una expansión en series de MacLaurin

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_X(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ux} f_X(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx =: \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{u^k}{k!},\end{aligned}\quad (1.10)$$

con los momentos con respecto al origen, $m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x) dx$, para $k = 0, 1, \dots$. Por otro lado, la función de generación de cumulantes se define como

$$\zeta_X(u) := \log \mathcal{M}_X(u). \quad (1.11)$$

Utilizando otra vez una expansión de MacLaurin resulta que

$$\zeta_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k \zeta_X(u)}{du^k} \Big|_{u=0} \frac{u^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \frac{u^k}{k!}, \quad (1.12)$$

donde $\zeta_k \equiv \frac{d^k \zeta_X(u)}{du^k} \Big|_{u=0}$ es el k -ésimo cumulante. A partir de (1.11) se obtiene una relación recurrente entre los momentos con respecto al origen y los cumulantes

$$\mathcal{M}_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{u^k}{k!} = \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \frac{u^k}{k!} \right).$$

Utilizando los resultados de (1.11), las cuatro primeras derivadas de la función de generación de cumulantes se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta_X(t)}{dt} &= \frac{1}{\phi_X(-it)} \frac{d\phi_X(-it)}{dt}, \\ \frac{d^2\zeta_X(t)}{dt^2} &= \frac{1}{\phi_X(-it)} \frac{d^2\phi_X(-it)}{dt^2} - \frac{1}{(\phi_X(-it))^2} \left(\frac{d\phi_X(-it)}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^3\zeta_X(t)}{dt^3} &= \frac{1}{\phi_X(-it)} \frac{d^3\phi_X(-it)}{dt^3} - \frac{3}{(\phi_X(-it))^2} \frac{d\phi_X(-it)}{dt} \frac{d^2\phi_X(-it)}{dt^2} \\ &\quad + \frac{2}{(\phi_X(-it))^3} \left(\frac{d\phi_X(-it)}{dt} \right)^3, \\ \frac{d^4\zeta_X(t)}{dt^4} &= \frac{1}{\phi_X(-it)} \frac{d^4\phi_X(-it)}{dt^4} + \frac{12}{(\phi_X(-it))^3} \left(\frac{d\phi_X(-it)}{dt} \right)^2 \frac{d^2\phi_X(-it)}{dt^2} \\ &\quad - \frac{4}{(\phi_X(-it))^2} \frac{d\phi_X(-it)}{dt} \frac{d^3\phi_X(-it)}{dt^3} - \frac{3}{(\phi_X(-it))^2} \left(\frac{d^2\phi_X(-it)}{dt^2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{6}{(\phi_X(-it))^4} \left(\frac{d\phi_X(-it)}{dt} \right)^4.\end{aligned}$$

Con las derivadas de la función de generación de cumulantes, y la igualdad $\phi_X(0) = 1$, los primeros cuatro cumulantes se pueden obtener como

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{d\zeta_X(t)}{dt}|_{t=0}, & \zeta_2 &= \frac{d^2\zeta_X(t)}{dt^2}|_{t=0}, \\ \zeta_3 &= \frac{d^3\zeta_X(t)}{dt^3}|_{t=0}, & \zeta_4 &= \frac{d^4\zeta_X(t)}{dt^4}|_{t=0}.\end{aligned}$$

Siendo una variable aleatoria X , con media μ , varianza σ^2 , asimetría γ_3 y curtosis γ_4 , y teniendo en cuenta la relación entre el cumulantes y momentos, se pueden obtener las igualdades

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= m_1 = \mu, \\ \zeta_2 &= m_2 - m_1^2 = \sigma^2, \\ \zeta_3 &= 2m_1^3 - 3m_1m_2 + m_3 = \gamma_3\sigma^3, \\ \zeta_4 &= -6m_1^4 + 12m_1^2m_2 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + m_4 = \gamma_4\sigma^4.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Recordamos que la asimetría estadística de una distribución es un valor que mide el grado de asimetría con respecto a la media, mientras que la curtosis es una medida para evaluar el grado de concentración en las colas de una distribución.

Cuando los momentos o los cumulantes están disponibles, la densidad asociada a ellos se puede recuperar, al menos formalmente. Basándonos en (1.4), la función de densidad de la probabilidad se puede definir como la transformada de Fourier inversa de la función característica

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_X(u) e^{-iux} du. \quad (1.14)$$

A partir de la definición de la función característica y la expansión en series de McLaurin del exponente en torno a cero, tenemos que

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} m_k, \quad (1.15)$$

con m_k como en (1.10). Entonces, la expresión (1.14) es igual a

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \int_{\mathbb{R}} (iu)^k e^{-iux} du. \quad (1.16)$$

Definición 1.1.2 (Delta de Dirac)

La definición de la «función delta de Dirac» y su k -ésima derivada vienen dadas por

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

y

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} du, \quad \delta^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-iu)^k e^{-iux} du.$$

◀

De este modo, (1.16) también se puede escribir como

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{m_k}{k!} \delta^{(k)}(x). \quad (1.18)$$

Densidades bidimensionales

Recordamos la definición de distribuciones conjuntas.

Definición 1.1.3 (FDA y FDP conjuntas)

La FDA conjunta de dos variables aleatorias, X e Y , es la función $F_{X,Y}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y].$$

Si X y Y son variables continuas, entonces la «FDP conjunta» de X y Y es una función $f_{X,Y}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Para cualquier evento A , se tiene que

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

En el libro usaremos también notación vectorial, principalmente a partir del Capítulo 7, donde tendremos $\mathbf{X} = [X, Y]^T$ y $F_{\mathbf{X}}$, $f_{\mathbf{X}}$, respectivamente. ◀

Como la FDP conjunta es en sí misma una función de probabilidad, tenemos que $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1.$$

Dada la distribución conjunta de $\{X, Y\}$, la esperanza de una función $h(X, Y)$ se calcula como

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

La FDP condicionada de Y , dado que $X = x$, se define como

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Además, la esperanza condicionada de X , dado $Y = y$, se define como la media de la FDP condicionada de X , dado $Y = y$, esto es

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dy.$$

También podemos determinar las «densidades marginales» en términos de la FDP conjunta

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}[X \leq x] \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y)dy \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy, \end{aligned}$$

y de manera análoga para $f_Y(y)$.

Ejemplo 1.1.3 (Funciones de densidad de normal bivariante)

En este ejemplo, mostramos tres funciones de densidad y distribución de la normal bivariante, con $\mathbf{X} = [X, Y]^T$, y

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, \rho \\ \rho, 1 \end{bmatrix} \right),$$

◆

variando el coeficiente de correlación. La Figura 1.2 muestra las funciones para $\rho = 0$ (primera), $\rho = 0.8$ (segunda) y $\rho = -0.8$ (tercera). Claramente, el coeficiente de correlación tiene impacto en la «dirección» de estas funciones.

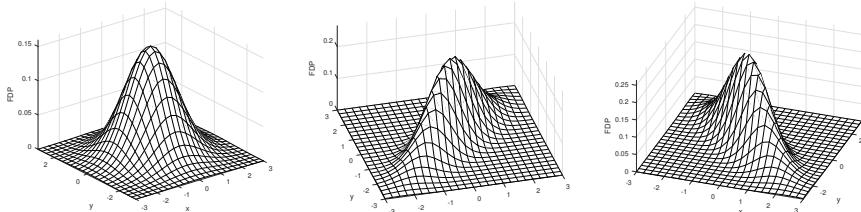


Figura 1.2: Ejemplos de funciones de densidad de probabilidad de una normal bidimensional. Izquierda: $\rho = 0$. Centro: $\rho = 0.8$. Derecha: $\rho = -0.8$.



1.2. Procesos estocásticos y propiedad de martingala

Para modelar los precios de activos financieros trabajaremos a menudo con procesos estocásticos, para los cuales necesitamos introducir algunas definiciones básicas.

Un proceso estocástico, $X(t)$, es una colección de variables aleatorias indexadas por una variable de tiempo, t . Supongamos que tenemos un conjunto de días/fechas del calendario, T_1, T_2, \dots, T_m . Hasta «hoy», hemos observado ciertos valores del proceso estocástico $X(t)$, ver Figura 1.3. El pasado es conocido y, por tanto, «podemos ver» la trayectoria histórica del activo. Aunque no conocemos su trayectoria exacta en el futuro, podemos simularla mediante alguna distribución que modele el precio del activo.

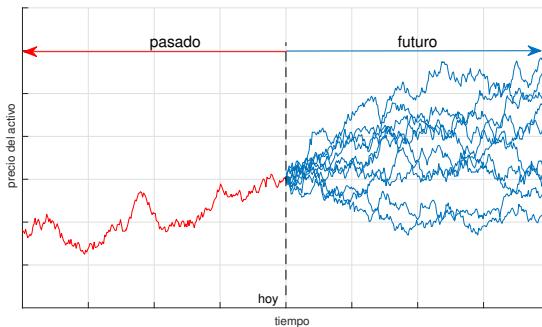


Figura 1.3: Pasado y futuro del precio de un activo. No conocemos la trayectoria futura exacta del activo, pero podemos simularla según alguna distribución de precios.

La herramienta matemática que nos ayuda a describir el comportamiento de un proceso estocástico hasta un cierto tiempo T_i se conoce como la «sigma-álgebra». La secuencia ordenada de sigma-álgebras se denomina «filtración», $\mathcal{F}(T_i) := \sigma(X(T_j) : 1 \leq j \leq i)$, generada por la secuencia $X(T_j)$ para $1 \leq j \leq i$. Entonces, la información disponible en tiempo T_i viene determinada por una filtración, véase Figura 1.4. Como consideramos una secuencia de fechas de monitorización, T_1, \dots, T_i , tenemos una secuencia de filtraciones, $\mathcal{F}(T_1) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}(T_i)$.

Decimos que un proceso es $\mathcal{F}(T)$ -medible si, en cualquier tiempo $t \leq T$, las realizaciones de este proceso son conocidas. Como ejemplo sencillo podemos pensar en el precio de una acción cotizada en mercado y sus valores históricos, con lo que conocemos los valores de la acción hasta hoy de manera exacta, pero no conocemos ningún valor futuro. Entonces decimos que la acción hoy es «medible». Por tanto, cuando modelizamos el precio de un activo, su valor puede ser medible en T , ya que sabemos la distribución para el periodo T de un contrato financiero.

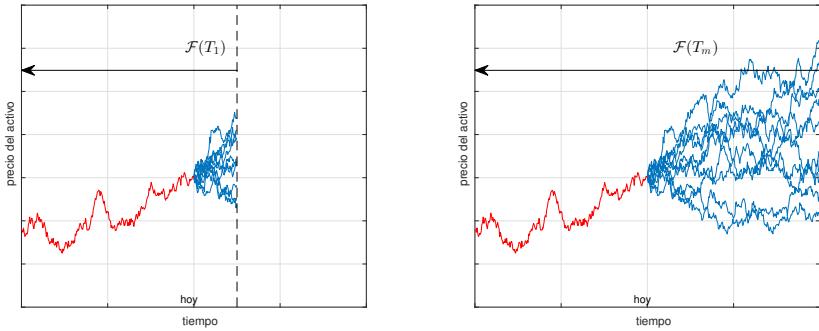


Figura 1.4: Ejemplo de filtración, con $\mathcal{F}(t_0) \subseteq \mathcal{F}(T_1) \subseteq \mathcal{F}(T_2) \dots \subseteq \mathcal{F}(T_m)$. Si $X(t)$ es $\mathcal{F}(t_0)$ -medible implica que, en tiempo t_0 , el valor de $X(t)$ es conocido. $X(T_1)$ es $\mathcal{F}(T_1)$ -medible, pero $X(T_1)$ es una «realización futura» que no se conoce a tiempo t_0 (hoy) y, por lo tanto, no es $\mathcal{F}(t_0)$ -medible.

Un proceso estocástico $X(t)$, $t \geq 0$, se dice adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$, si

$$\sigma(X(t)) \subseteq \mathcal{F}(t).$$

Por «proceso adaptado» entendemos un proceso estocástico que «no puede mirar al futuro». En otras palabras, para un proceso estocástico $X(t)$, sus realizaciones (trayectorias), $X(s)$ para $0 \leq s < t$, son conocidas en tiempo s pero no en tiempo t .

1.2.1. Proceso de Wiener

Introducimos el concepto de proceso de Wiener.

Definición 1.2.1 (Proceso de Wiener)

El proceso Wiener, también denominado «movimiento browniano» es un proceso estocástico fundamental, empleado habitualmente en la definición de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) que describen los movimientos de precios de activos. Matemáticamente, un proceso de Wiener, $W(t)$, verifica las siguientes propiedades:

- a. $W(t_0) = 0$ (técnicamente: $\mathbb{P}[W(t_0) = 0] = 1$).
- b. $W(t)$ es continuo, casi seguro¹.
- c. $W(t)$ tiene incrementos independientes, esto es, $\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, $W(t_2) - W(t_1) \perp\!\!\!\perp W(t_4) - W(t_3)$, cuya distribución es $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ para $0 = t_0 \leq s < t$, es decir, siguen una distribución normal con media cero y varianza $t - s$. ◀

¹Convergencia casi segura significa que, para una secuencia de variables aleatorias X_m , se cumple que $\mathbb{P}[\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X] = 1$.

Ejemplo 1.2.1

Ejemplos de procesos que están adaptados a la filtración $\mathcal{F}(t)$:

- $W(t)$ y $W^2(t) - t$, con $W(t)$ un proceso de Wiener.
- $\max_{0 \leq s \leq t} W(s)$ y $\max_{0 \leq s \leq t} W^2(s)$.

Ejemplos de procesos que no están adaptados a la filtración $\mathcal{F}(t)$:

- $W(t+1)$.
- $W(t) + W(T)$ para algún $T > t$. ◆

1.2.2. Martingalas

Cuando se trabaja con procesos estocásticos, uno de los conceptos más importantes es la propiedad de martingala.

Definición 1.2.2 (Martingala)

Consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, donde Ω es el conjunto de todos los resultados posibles, $\mathcal{F}(t)$ es el sigma-álgebra, y \mathbb{Q} es una medida de probabilidad. Un proceso continuo por la derecha $X(t)$ con límites por la izquierda (denominado proceso cádlág²) para $t \in [0, T]$, se dice que es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}(t)$ bajo la medida \mathbb{Q} , si para todo $t < \infty$, se cumple que

$$\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty,$$

y

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(s)] = X(s), \text{ con } s < t,$$

donde $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}]$ es el operador esperanza condicionada bajo la medida \mathbb{Q} . ◀

La definición implica que la mejor predicción de la esperanza del valor futuro de una martingala es su valor presente, y que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t + \Delta t) - X(t)|\mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}[X(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] - \mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(t)] \\ &= X(t) - X(t) = 0,\end{aligned}\tag{1.19}$$

para algún intervalo de tiempo $\Delta t > 0$.

Proposición 1.2.1

El proceso de Wiener, $W(t)$, para $t \in [0, T]$, es una martingala. ◀

Demostración. Comprobamos las propiedades de martingala. Primero, $\mathbb{E}[|W(t)|] < \infty$, ya que

$$\mathbb{E}[|W(t)|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

²continué à droite, limite à gauche (en francés, continuo por la derecha con límites por la izquierda).

Fijando $z = \frac{x^2}{2t}$, de tal modo que $tdz = xdx$, tenemos que

$$\mathbb{E}[|W(t)|] = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} < \infty \text{ para } t \text{ finito.}$$

Para un proceso de Wiener $W(t), t \in [0, T]$, tenemos también, utilizando (1.19), que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[W(s) + [W(t) - W(s)]|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= W(s) + 0 = W(s), \forall s, t > 0.\end{aligned}\blacksquare$$

1.2.3. Esperanzas iteradas: ley de la esperanza total

Otro concepto importante y útil es el concepto de esperanzas iteradas. La ley de las esperanzas iteradas, también llamada ley de la esperanza total, establece que, para cualquier variable aleatoria dada $X \in L^2$ (donde L^2 indica un espacio de Hilbert para el cual $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$), definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, y para cualquier sigma-álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, se cumple la igualdad

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}], \text{ para } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

Si consideramos otra variable aleatoria Y , definida en la sigma-álgebra \mathcal{G} , tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces la igualdad anterior puede ser escrita como

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]], \text{ para } \sigma(Y) \subseteq \sigma(X).$$

Suponiendo que ambas variables aleatorias, X e Y , son continuas en \mathbb{R} y que están definidas en la mismo sigma-álgebra, podemos probar la igualdad anterior, como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[Y|X=x] f_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy \right) f_X(x) dx.\end{aligned}$$

Empleando la definición de densidad condicionada, i.e. $f_{Y|X}(y|x) = f_{Y,X}(y, x)/f_X(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)} dy \right) f_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} f_{Y,X}(y,x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[Y].\end{aligned}\tag{1.20}$$

La esperanza condicionada resultará muy conveniente cuando tratemos con distribuciones continuas. Consideramos dos variables aleatorias independientes X e Y . Utilizando la esperanza condicionada podemos obtener la igualdad

$$\mathbb{P}[X < Y] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X < y] f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F_X(y) f_Y(y) dy,$$

que se puede demostrar mediante

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X < Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X < Y}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X < Y}|Y = y]] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X < y|Y = y] f_Y(y) dy. \end{aligned}$$

Como X e Y son variables independientes, tenemos que

$$\mathbb{P}[X < Y] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X < y] f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F_X(y) f_Y(y) dy.$$

El resultado anterior se puede utilizar para mostrar un ejemplo de convolución que, para una constante $c \in \mathbb{R}$ y dos variables aleatorias independientes X e Y , se define como

$$\mathbb{P}[X + Y < c] = \int_{\mathbb{R}} F_Y(c - x) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F_X(c - y) f_Y(y) dy.$$

Estas integrales se pueden escribir como dos esperanzas, $\mathbb{E}[F_Y(c - X)]$ y $\mathbb{E}[F_X(c - Y)]$.

1.3. Integración estocástica e integral de Itô

Para cualquier función derivable $\xi(t)$, se verifica la relación

$$\int_0^T g(t) d\xi(t) = \int_0^T g(t) \left(\frac{d\xi(t)}{dt} \right) dt. \quad (1.21)$$

Sin embargo, cuando $\xi(t)$ es un proceso de Wiener, esto es $\xi(t) \equiv W(t)$, la igualdad (1.21) no es válida, ya que el movimiento browniano no es derivable en ningún punto. Por tanto, no se puede utilizar la integración de Riemann-Stieltjes cuando el integrando involucra a un proceso de Wiener. Sin embargo, se puede emplear la denominada «integración estocástica», desarrollada por el matemático japonés Kiyoshi Itô (1915-2008).

Consideramos la ecuación diferencial estocástica

$$dI(t) = g(t) dW(t), \text{ para } t \geq 0, \quad (1.22)$$

que es equivalente a la «integral de Itô» dada por

$$I(T) = \int_0^T g(t) dW(t), \text{ para } T \geq 0. \quad (1.23)$$

La función $g(t)$ puede representar a un proceso estocástico, $g(t) := g(t, \omega)$ en un cierto intervalo $[0, T]$. La variable ω representa la «aleatoriedad», esto es, $\omega \in \Omega$ dada la filtración $\mathcal{F}(t)$. Se necesita que la función $g(t)$ verifique las dos siguientes condiciones:

1. $g(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible para cualquier tiempo t (en otras palabras, el proceso $g(t)$ es un proceso adaptado).
2. $g(t)$ es cuadrado-integrable, esto es: $\mathbb{E} \left[\int_0^T g^2(t) dt \right] < \infty, \forall T \geq 0$.

1.3.1. Procesos elementales

Para una partición dada, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, en un intervalo de tiempo $[0, T]$, tomamos los procesos elementales, $\{g_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, con $g_m(t)$ una función constante a trozos. Con la ayuda de estos procesos elementales, podemos definir formalmente la integral de Itô.

Definición 1.3.1 (Integral de Itô)

Para cualquier proceso cuadrado-integrable adaptado $g(t) = g(t, \omega)$, con trayectorias continuas, la integral de Itô se define

$$I(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T g(t) dW(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_m(T), \quad \text{en } L^2. \quad (1.24)$$

Aquí, $I_m(T) = \int_0^T g_m(t) dW(t)$ para algún proceso elemental $\{g_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, cumpliendo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (g_m(t) - g(t))^2 dt \right] = 0. \quad (1.25)$$

La existencia de una secuencia de procesos elementales se estudia con la ayuda de los siguientes teoremas.

Teorema 1.3.1 (Teorema de convergencia dominada en L^p)

Sea $\{\xi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una secuencia de funciones en L^p , $p > 0$, tal que existe una función real $\bar{\xi} \in L^p$ con $|\xi_m| < \bar{\xi}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Se asume que $\{\xi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \xi$, en cada punto. Entonces

$$\|\xi_m - \xi\|_{L^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[|\xi_m - \xi|^p])^{\frac{1}{p}} = 0.$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en cualquier libro de cálculo estocástico. A continuación, consideraremos $p = 1$ y $p = 2$.

Teorema 1.3.2

Existe una sucesión de procesos elementales $\{g_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |g_m(t) - g(t)|^2 dt \right] = 0. \quad (1.26)$$

Demostración. Para simplificar, asumimos que $T \in \mathbb{N}$. El objetivo de la demostración del Teorema 1.3.2 es encontrar una sucesión de procesos elementales, $g_1(t), g_2(t), \dots$, tal que (1.26) se cumple. Para conseguir esto, definimos los procesos elementales

$$g_m(t) = \begin{cases} m \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g(s) ds & \text{si } t \in [\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}) \text{ para } k = 1, 2, \dots, mT, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.27)$$

Por construcción, $g_m(t)$ es, básicamente, una función escalón, es decir, permanece constante en cada intervalo $t \in [\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m})$. Sin embargo, como $g(t)$ es estocástico, cada trayectoria de $g(t)$ resulta en una realización constante diferente de $g_m(t)$. Por tanto, la función en (1.27) se suele denominar «función escalonada aleatoria». Presentamos un ejemplo en la Figura 1.5.

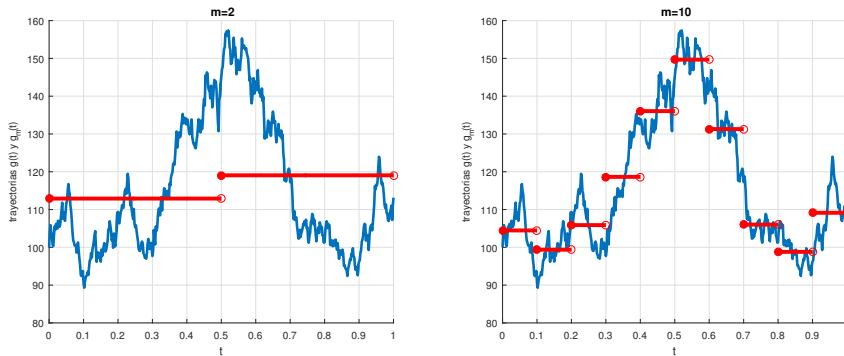


Figura 1.5: Funciones escalonadas aleatorias que aproximan una función estocástica, $g(t)$. Izquierda: $m = 2$. Derecha: $m = 10$.



Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos la relación

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} |g_m(t)|^2 dt &= \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} \left| m \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g(z) dz \right|^2 dt \\ &= \left(\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} \right) \left| m \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g(z) dz \right|^2 \\ &\leq m \left(\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} \right) \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g^2(z) dz \\ &= \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g^2(z) dz \quad c.s., \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde la abreviatura «c.s.» representa «casi seguro», lo que significa que la desigualdad se debe verificar para cualquier realización $g(t)$.

Continuamos ahora con la parte principal de la demostración, es decir, demostrando la igualdad en (1.26). Bajo el supuesto de las trayectorias, c.s. continuas, de $g(t)$, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T |g_m(t) - g(t)|^2 dt = 0 \text{ c.s.} \quad (1.29)$$

Entonces, definiendo $\xi_m := \int_0^T |g_m(t) - g(t)|^2 dt$, tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = 0$. Utilizando la desigualdad $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, se verifica que

$$\xi_m \equiv \int_0^T |g_m(t) - g(t)|^2 dt \leq 2 \int_0^T |g_m(t)|^2 dt + 2 \int_0^T |g(t)|^2 dt.$$

Además, usando la desigualdad de (1.28) tenemos que

$$\xi_m \leq 4 \int_0^T |g(t)|^2 dt =: \bar{\xi}. \quad (1.30)$$

Como $\xi_m \rightarrow 0$ c.s. cuando $m \rightarrow \infty$, véase (1.29), $|\xi_m| < \bar{\xi}$ c.s., véase (1.30), y $\mathbb{E}[\bar{\xi}] < \infty$ por el Teorema 1.3.1, tenemos que

$$\|\xi_m - \xi\|_{L^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\xi_m - 0)^1] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |g_m(t) - g(t)|^2 dt\right] = 0. \quad \blacksquare$$

1.3.2. Isometría de Itô

Ahora, analizamos en detalle la versión discreta de la integral de Itô, es decir

$$I(T) := \int_0^T g(t)dW(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (1.31)$$

con $t_i = i \frac{T}{m}$. Se puede demostrar la existencia del límite de (1.31) mediante el Teorema 1.3.3; véase Shreve (2004), por ejemplo, donde también se pueden encontrar los resultados necesarios para demostrar la unicidad.

El hecho concreto de evaluar $g(t)$ en el punto izquierdo de $[t_i, t_{i+1})$ es específico del cálculo de Itô. Si se evalúa la función en el punto medio, es decir, utilizando $g((t_{i+1} + t_i)/2)$, se tendría la integración de Stratonovich. En finanzas, se prefiere la integración de Itô, ya que el punto temporal izquierdo indica el tiempo presente, mientras que un precio de un activo en el punto medio necesitaría de puntos (tiempos) «en el futuro».

Se puede deducir la propiedad $\mathbb{E}[I(T)] \equiv \mathbb{E}[I(T)|\mathcal{F}(t_0)] = 0$ (propiedad que encontraremos con frecuencia en este capítulo), que resulta de

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(T)] &= \mathbb{E} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}[g(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i))] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}[g(t_i) | \mathcal{F}(t_0)] \mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)].\end{aligned}\quad (1.32)$$

Como los incrementos de un movimiento browniano son independientes con respecto a funciones y variables estocásticas hasta tiempo t_i , y como los incrementos $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ están normalmente distribuidos con media cero, la segunda esperanza en (1.32) es igual a cero, $\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0$, para cualquier índice i y, por tanto, $\mathbb{E}[I(T)] = 0$. Esto sería diferente en el caso del cálculo de Stratonovich, donde el término $\mathbb{E}[g(t_{i+\frac{1}{2}}) (W(t_{i+1}) - W(t_i))]$ no sería igual a 0.

La propiedad de isometría de Itô establece que, para cualquier proceso estocástico $g(t)$ que cumpla las condiciones de regularidad habituales, se cumple la igualdad

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T g(t) dW(t) \right)^2 \right] = \int_0^T \mathbb{E}[g^2(t)] dt. \quad (1.33)$$

Para demostrar esta igualdad hacemos uso, de nuevo, de una partición equiespaciada, $0 = t_0 < t_1 < \dots < T = t_m$, y escribimos

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t) dW(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i) \Delta W_i,\end{aligned}\quad (1.34)$$

con $\Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$. El cuadrado de la integral es

$$\begin{aligned}\left[\int_0^T g(t) dW(t) \right]^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^{m-1} g(t_i) \Delta W_i \right]^2 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^{m-1} g^2(t_i) \Delta W_i^2 \right] \\ &\quad + \lim_{m \rightarrow \infty} \left[2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m-1} g(t_i) g(t_j) \Delta W_i \Delta W_j \right].\end{aligned}$$

Tomando esperanzas en ambos lados de la igualdad anterior y teniendo en cuenta que para $i \neq j$ ΔW_i es independiente de ΔW_j (incrementos independientes), la esperanza de la suma doble es igual a cero, es decir,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T g(t) dW(t) \right]^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [g^2(t_i) \Delta W_i^2].$$

Utilizamos ahora la ley de la esperanza total, esto es

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)], \quad s < t.$$

Estableciendo $s = t_0 \equiv 0$ y $t = t_i$ en la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T g(t) dW(t) \right]^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [\mathbb{E} [g^2(t_i) \Delta W_i^2 | \mathcal{F}(t_i)] | \mathcal{F}(0)] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [g^2(t_i) \mathbb{E} [\Delta W_i^2 | \mathcal{F}(t_i)] | \mathcal{F}(0)]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Como los incrementos del movimiento browniano son independientes y la varianza de $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ es igual a $t_{i+1} - t_i$, se tiene que

$$\mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 | \mathcal{F}(t_i)] = \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] = t_{i+1} - t_i, \quad (1.36)$$

de modo que (1.35) resulta en

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T g(t) dW(t) \right]^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [g^2(t_i) | \mathcal{F}(0)] (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T \mathbb{E}[g^2(t)] dt,$$

lo que define la isometría de Itô.

El siguiente teorema, cuya demostración está basada en la isometría de Itô, confirma la existencia de la integral de Itô³.

Teorema 1.3.3 (Existencia de la integral de Itô)

La integral de Itô, definida como en (1.24), existe.

Demostración. Para probar la existencia de la integral es suficiente con probar que

$$I_m(T) = \int_0^T g_m(t) dW(t),$$

converge a algún elemento en L^2 . Como el proceso elemental $g_m(t)$ es una función escalonada (aleatoria) en cada intervalo de la partición de tiempo, podemos escribir

$$I_m(T) = \sum_{i=0}^{m-1} g_m(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

³Para la unicidad, recomendamos de nuevo la literatura estándar.

Para probar que el límite en (1.24) existe, consideramos el límite

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (I_n(T) - I_m(T)) = 0, \text{ en } L^2. \quad (1.37)$$

Si podemos probar que el límite (1.37) es igual a 0 en L^2 , esto implica la existencia del límite de $I_m(T)$. Para cualquier $n > 0$ y $m > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [I_n(T) - I_m(T)]^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T (g_n(t) - g_m(t)) dW(t) \right]^2 \\ &= \int_0^T \mathbb{E} [g_n(t) - g_m(t)]^2 dt, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde en el segundo paso se aplica la isometría de Itô. La integral en (1.38) se puede reescribir como

$$\int_0^T \mathbb{E} [g_n(t) - g_m(t)]^2 dt = \int_0^T \mathbb{E} [(g_n(t) - g(t)) + (g(t) - g_m(t))]^2 dt. \quad (1.39)$$

Utilizando de nuevo la desigualdad $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{E} [g_n(t) - g_m(t)]^2 dt &\leq 2 \int_0^T \mathbb{E} [g_n(t) - g(t)]^2 dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \mathbb{E} [g_m(t) - g(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Usando los resultados del Teorema 1.3.2 observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [g_n(t) - g(t)]^2 dt = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [g_m(t) - g(t)]^2 dt = 0,$$

y, por tanto,

$$0 \leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [I_n(T) - I_m(T)]^2 \leq 0, \quad (1.40)$$

lo que implica que, por el teorema de las secuencias, el límite de $I_m(T)$ existe. Así se concluye la demostración. ■

Teorema 1.3.4 (La integral de Itô es una martingala)

Para cualquier $g(t) \in L^2$, la integral estocástica $I(T) := \int_0^T g(t) dW(t)$ es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}(T), T \geq 0$.

Demostración. Como se probó en el Teorema 1.3.3, $I(T)$ existe, así que $\mathbb{E}[I(T)] < \infty$. Para cualquier proceso aleatorio $g(t)$ en L^2 , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}[I(t + \Delta t) - I(t) + I(t)|\mathcal{F}(t)] \\ &= \mathbb{E}[I(t + \Delta t) - I(t)|\mathcal{F}(t)] + \mathbb{E}[I(t)|\mathcal{F}(t)] = 0 + I(t), \end{aligned}$$

utilizando la propiedad de incrementos independientes y la propiedad de variable medible. ■

1.3.3. Teorema de representación de la martingala

Teorema 1.3.5 (Teorema de representación de la martingala)

Para $t_0 \leq t \leq T$, sea $W^{\mathbb{P}}(t)$, con $W(t_0) = W_0$, un movimiento browniano en $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$, y $\mathcal{F}(t)$ una filtración generada por el movimiento browniano. Con $X(t)$ una martingala relativa a esta filtración, existe un proceso adaptado $g(t)$, tal que

$$dX(t) = g(t)dW(t), \quad o \quad X(t) = X_0 + \int_0^t g(z)dW(z).$$

Para la demostración, véase Øksendal (2000).

El teorema anterior establece que, si el proceso $X(t)$ es una martingala y está adaptado a la filtración generada por el movimiento browniano $W^{\mathbb{P}}(t)$, entonces el proceso $X(t)$ es necesariamente de la forma

$$dX(t) = g(t)dW^{\mathbb{P}}(t),$$

para algún proceso $g(t)$.

Como la formulación integral, en (1.23), es equivalente a la EDE en (1.22), podemos concluir que una EDE sin término de deriva es una martingala.

Ejemplo 1.3.1 (Solución de la integral de Itô)

En este ejemplo resolvemos la integral estocástica

$$I(T) = \int_0^T W(t)dW(t). \quad (1.41)$$

De acuerdo con la Definición 1.3.1, tenemos que $g(t) := W(t)$. Consideramos una partición equiespacada $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, con $t_i = i\frac{T}{m}$, con un incremento de tiempo equidistante $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$ y definimos una secuencia de algunas funciones elementales verificando (1.25), como

$$g_m(t) = \begin{cases} W(0), & \text{para } 0 \leq t < t_1, \\ W(t_1), & \text{para } t_1 \leq t < t_2, \\ \dots \\ W(t_m), & \text{para } t_{m-1} \leq t < t_m. \end{cases} \quad (1.42)$$

Comprobamos que, para esta sucesión de funciones elementales, la condición en (1.25) se cumple, es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (g_m(t) - g(t))^2 dt \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (g_m(t) - W(t))^2 dt \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} [W(t_i) - W(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Como $t_i < t$, el último término se puede escribir

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[W(t_i) - W(t)]^2 dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (t_{i+1} - t_i)^2.\end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (\Delta t)^2 = 0. \quad (1.43)$$

Esto es así porque

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} (\Delta t)^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} \left[(i+1) \frac{T}{m} - i \frac{T}{m} \right]^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{T^2}{m^2},$$

converge a 0 para $m \rightarrow \infty$.

Entonces, la condición en (1.25) se cumple, y podemos continuar con la versión discreta de la integral en (1.41), dada por

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} W(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (1.44)$$

Recurriendo a álgebra básica⁴, el lado derecho de (1.44) se puede simplificar

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} W(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2.\end{aligned}$$

El primer elemento del lado derecho de la expresión anterior es la denominada «suma telescópica», es decir,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} (W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)) &= \cancel{W^2(t_1)} - W^2(t_0) + \cancel{W^2(t_2)} - \cancel{W^2(t_1)} + \dots \\ &= W^2(t_m) - W^2(t_0),\end{aligned}$$

⁴ $x(y-x) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) - \frac{1}{2}(y-x)^2.$

ya que $t_m = T$, $t_0 = 0$ y $W^2(t_0) \equiv 0$, resultando en la simplificación

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} W(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) &= \frac{1}{2} W^2(T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Para finalizar la resolución de la integral en (1.41) calculamos el sumatorio del lado derecho de (1.45), para lo cual tomamos esperanzas

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) = T. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Necesitamos determinar si T es el límite del sumatorio en L^2 . Esto, por definición, se confirma mediante la siguiente esperanza

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - T \right]^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right]^2 \\ &\quad - 2T \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right] + T^2. \end{aligned}$$

Utilizando los resultados de (1.46), tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - T \right]^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right]^2 \\ &\quad - T^2. \end{aligned}$$

La esperanza en el lado derecho se puede simplificar aún más

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right]^2 &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (\Delta t)^2 Z_i^4 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m-1} (\Delta t)^2 Z_i^2 Z_j^2 \right], \end{aligned}$$

con $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Como el cuarto momento de una variable aleatoria normal estándar es igual a 3, es decir, $\mathbb{E}[Z_i^4] = 3$, y cualquier Z_i es independiente de

Z_j , para $i \neq j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (\Delta t)^2 Z_i^4 + 2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m-1} (\Delta t)^2 Z_i^2 Z_j^2 \right] &= 3 \sum_{i=0}^{m-1} (\Delta t)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m-1} (\Delta t)^2 \\
&= 3(\Delta t)^2 m + (\Delta t)^2(m^2 - m) \\
&= T^2 + 2T \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

En el límite, cuando $m \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - T \right]^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[T^2 + 2T \frac{1}{m} - T^2 \right] = 0,$$

lo que implica que el sumatorio en (1.46) converge a T , en L^2 . Este resultado nos proporciona la solución para el sumatorio de (1.45), dada por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} W(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T. \quad (1.47)$$

y, por tanto, la solución de la integral en (1.41) es

$$\boxed{\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T.} \quad (1.48)$$

Finalizamos esta parte introductoria con el siguiente cuadro resumen.

La integral de Itô definida en (1.23) tiene una serie de propiedades importantes:

- a. Para todo tiempo $t \geq 0$, $I(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.
- b. $\mathbb{E}[I(t)|\mathcal{F}(0)] = 0$.
- c. $\mathbb{E}[I(t)|\mathcal{F}(s)] = I(s)$, para $s < t$. Esta propiedad se conoce como propiedad de martingala e implica que la dinámica $dI(t)$ no tiene término de deriva.
- d. Isometría de Itô, dada por

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T g(t) dW(t) \right]^2 = \int_0^T \mathbb{E}[g^2(t)] dt.$$

- e. Para $0 \leq a < b < c$, se tiene que

$$\int_a^c g(t) dW(t) = \int_a^b g(t) dW(t) + \int_b^c g(t) dW(t).$$

- f. Se verifica la igualdad

$$\int_a^c (\alpha \cdot g(t) + h(t)) dW(t) = \alpha \int_a^c g(t) dW(t) + \int_a^c h(t) dW(t),$$

con $a < c$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $h(t) \in \mathcal{F}(t)$.

Las demostraciones de estas propiedades se pueden encontrar en libros clásicos de cálculo estocástico, como, por ejemplo, en Shreve (2004).

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.1 Siendo

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

probar que

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) + F_{\mathcal{N}(0,1)}(-x) = 1.$$

Ejercicio 1.2 Utilizando las igualdades $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ y $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), probar que

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2,$$

y

$$\text{Var}[\alpha X] = \alpha^2 \text{Var}[X], \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.3 Sean las variables aleatorias $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $Y = a + bX$ ($b \neq 0$). Determinar $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}[Y]$ y la función de distribución de Y . Determinar $\mathbb{E}[e^X]$.

Ejercicio 1.4 Probar que la función de distribución de la normal estándar, $F_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$, se puede calcular con la denominada *función de error*

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds,$$

con la ayuda de la fórmula

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2}.$$

Ejercicio 1.5 Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con la misma distribución, esperanza μ y varianza σ^2 . Se define la variable aleatoria \bar{X} , denominada *media muestral*, como la media aritmética de las variables dadas, es decir,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k,$$

y se define la varianza muestral, \bar{v}_N^2 , como la variable aleatoria

$$\bar{v}_N^2 := \frac{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2}{N-1}.$$

- a. Probar que $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$.
- b. Probar que $\text{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$.
- c. Probar que $\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 = \sum_{k=1}^N X_k^2 - N\bar{X}^2$.
- d. Probar que $\mathbb{E}[\bar{v}_N^2] = \sigma^2$.

Ejercicio 1.6 Dado un movimiento browniano $W(t)$:

a. Resolver analíticamente la esperanza,

$$\mathbb{E} \left[W^4(t) - \frac{1}{2} W^3(t) \right].$$

b. Resolver analíticamente $\text{Var}[Z(t)]$, con,

$$Z(t) = W(t) - \frac{t}{T} W(T-t), \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

Ejercicio 1.7 Probar teóricamente que

$$\int_0^t W(z) dz = \int_0^t (t-z) dW(z).$$

Ejercicio 1.8 Dado un movimiento browniano estándar $W(t)$, $t \geq 0$, calcular la integral,

$$\int_{z=0}^T \int_{s=0}^z dW(s) dW(z).$$

Ejercicio 1.9 Probar que, para una función continuamente derivable $g(t)$, el proceso

$$X(t) = g(t)W(t) - \int_0^t \frac{dg(z)}{dz} W(z) dz,$$

es una martingala y, a continuación, probar que

$$\mathbb{E}[e^{2t} W(t)] = \mathbb{E} \left[\int_0^t 2e^{2z} W(z) dz \right].$$

Ejercicio 1.10 Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X(t); t \in \mathcal{T}\}$ se llama un proceso gaussiano, si para cualquier conjunto de índices de tiempo, t_1, \dots, t_m , todas las combinaciones lineales de $\{X(t_1), \dots, X(t_m)\}$ siguen una distribución normal univariante.

Dado un proceso gaussiano $X(t)$, $t > 0$ con $X(0) = 0$. Determinar la covarianza

$$2\text{Cov}[X(s), X(t)] = \mathbb{E}[X^2(s)] + \mathbb{E}[X^2(t)] - \mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2], \quad 0 < s < t.$$

Ejercicio 1.11 Considerar la EDE

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad X(t_0) = x_0, \tag{1.49}$$

con μ y σ constantes. Probar que, seleccionando $t_0 = 0$, el proceso integrado $X(t)$ sigue la distribución

$$\int_0^T X(t) dt \sim \mathcal{N} \left(x_0 T + \frac{1}{2} \mu T^2, \frac{1}{3} \sigma^2 T^3 \right).$$

CAPÍTULO 2

Introducción al modelado de activos financieros

En este capítulo:

En el **Apartado 2.1**, presentamos la base matemática de algunos modelos estocásticos para precios de activos financieros. En concreto, nos centraremos en el modelo de precios de activos denominado «movimiento browniano geométrico». En este capítulo, también se introducirá el «lema de Itô», ya que tiene un papel importante en muchos de los resultados presentados.

En el **Apartado 2.2** se introducen algunas variaciones del movimiento browniano geométrico básico. La propiedad de martingala sobre los precios de activos financieros se abordará en el **Apartado 2.3**.

Palabras clave de este capítulo: modelo de precios de activos, movimiento browniano geométrico, martingalas.

2.1. Movimiento browniano geométrico

Una acción o participación es un activo financiero que representa la propiedad de una pequeña parte de una compañía que se comercializa en mercados financieros. De acuerdo con la hipótesis del mercado eficiente, el precio de una acción está determinado por el valor presente de la compañía, más las expectativas sobre su rendimiento futuro. Estas expectativas sobre el futuro aumentan la incertidumbre del precio del activo, como se puede ver en los precios de oferta y demanda ofrecidos por los participantes en los mercados financieros. Los precios de activos tienen, por tanto, una parte de aleatoriedad, generalmente modelada por ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). Solo en casos excepcionales, estas EDEs disponen de soluciones en forma cerrada. En ese caso, pueden servir para validar métodos numéricos o como parte de modelos de precios de activos de mayor complejidad.

El proceso de precios de activos más utilizado en finanzas es el modelo movimiento browniano geométrico (MBG), donde el logaritmo del precio del activo sigue un movimiento browniano aritmético, gobernado por un proceso de Wiener $W(t)$. El precio del activo $S(t)$ se dice que sigue un proceso MBG, cuando verifica la EDE

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \text{ con } S(t_0) = S_0, \quad (2.1)$$

donde el movimiento browniano $W^{\mathbb{P}}(t)$ está definido bajo la denominada medida de probabilidad del mundo real \mathbb{P} , $\mu = \mu^{\mathbb{P}}$ denota el «parámetro de deriva», es decir, un indicador determinista del crecimiento constante de la acción, y σ es el parámetro (constante) porcentual de la volatilidad. El Modelo (2.1) también se conoce como modelo de Samuelson. La expresión anterior es la versión corta de la formulación integral

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^t \mu S(z)dz + \int_{t_0}^t \sigma S(z)dW^{\mathbb{P}}(z). \quad (2.2)$$

El parámetro de volatilidad σ determina cuánto difiere el precio del activo con respecto a su valor esperado. Por tanto, la volatilidad es una medida estadística de la tendencia de un activo para aumentar o disminuir su valor bruscamente dentro de un periodo de tiempo. Puede ser calculada, por ejemplo, mediante la varianza de los precios de activos medidos dentro de un cierto periodo de tiempo. Un mercado altamente volátil implica que los precios tienen desviaciones grandes de su valor medio en periodos cortos de tiempo. A pesar de que μ y σ en (2.1) se suponen constantes, también es posible considerarlos como funciones dependientes del tiempo. Se debe tener en cuenta que estos valores son estimaciones para el crecimiento y la volatilidad «en el futuro», es decir, para $t > t_0$.

Definición 2.1.1 (Proceso de Markov)

Un proceso estocástico es un proceso de Markov si la distribución de probabilidad condicionada de sus estados futuros depende solo del estado presente

y no del pasado. En el ámbito financiero, esto implica que suponemos que el precio actual de la acción contiene toda la información de los precios del activo anteriores. El proceso de precios, $S(t)$, adaptado a un espacio de probabilidad filtrado, cumple la propiedad de Markov si, para cada función acotada y medible $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbb{E}[g(S(t))|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[g(S(t))|S(s)], \quad s \leq t. \quad (2.3)$$

◀

Definición 2.1.2 (Cuenta de ahorros)

Antes de profundizar en nuestro primer proceso estocástico para activos financieros, introducimos la cuenta de ahorros (determinista), que denotamos por $M(t)$. El valor temporal del dinero es un concepto muy empleado en finanzas. Una unidad de una divisa hoy vale más que esa misma unidad dentro de un año, siempre y cuando los tipos de interés sean positivos y menos que la unidad en el caso de tipos de interés negativos. En particular, centraremos nuestra atención en el «interés compuesto», que se define como el interés sobre los pagos de interés anteriores (sobre un capital nominal). Este interés se puede capitalizar de forma discreta o continua. Si se reciben m pagos al año a un interés discreto con tipo r/m sobre un capital inicial $M(0) = 1$, resulta que, después de un año $T = 1$, el capital final es

$$M(T) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

Cuando los pagos de interés se producen en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, a un tipo de interés proporcionalmente también más pequeño (esto es, se toma el límite $m \rightarrow \infty$), se obtiene el tipo de interés «continuo». Mediante cálculo básico, se puede demostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{m \log(1 + \frac{r}{m})} = e^r.$$

En tiempo t , tendremos la cantidad e^{rt} en la cuenta del banco. Esta es la denominada «cuenta de ahorros». Teniendo una cantidad $M(t)$ en tiempo t en la cuenta de ahorros, y utilizando la expansión de Taylor, la cantidad en tiempo futuro $M(t + \Delta t)$, habrá aumentado

$$M(t + \Delta t) - M(t) \approx \frac{dM}{dt} \Delta t + \dots$$

La variación de dinero es proporcional al capital inicial, el tipo de interés r y el periodo de tiempo que el dinero está en la cuenta, obteniendo

$$\frac{dM(t)}{dt} = rM(t) . \quad (2.4)$$

Empezando con $M(0) = 1$ en $t_0 = 0$, tendremos $M(t) = e^{rt}$, en tiempo t . Por otro lado, si deseamos recibir $M(T) = 1$ en un tiempo futuro $t = T$,

necesitamos depositar la cantidad $e^{-r(T-t)}$ en nuestra cuenta de ahorros en tiempo $t_0 = 0$. Claramente, el dinero «crece» exponencialmente en tiempo continuo. Sin embargo, con un tipo de interés r muy pequeño (positivo), el crecimiento a largo plazo está bastante limitado.

Si comparamos la dinámica de la cuenta de ahorros con la dinámica estocástica del activo MBG de (2.1), en (2.4) tenemos $\mu = r$ y $\sigma = 0$, es decir, tenemos un tipo de interés determinista en el término de deriva y volatilidad nula. Los tipos de interés estocásticos también serán tratados en detalle en este libro, a partir del de Capítulo 11. Este tipo de modelos estocásticos son importantes para, por ejemplo, opciones sobre tipos de interés. \blacktriangleleft

2.1.1. Proceso de Itô

El lema de Itô es un concepto fundamental en los procesos estocásticos, ya que posibilita el tratamiento del incremento de Wiener $dW(t)$, como el de (2.1), cuando $dt \rightarrow 0$ (de manera similar a como lo hace una expansión de Taylor con funciones y variables deterministas). Mediante el lema de Itô se pueden obtener tanto soluciones a las EDEs, como sus correspondientes ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) para valorar productos derivados financieros, como veremos en el capítulo siguiente. Antes de eso, se introducen algunos resultados relacionados con el denominado «proceso de Itô».

Definición 2.1.3 (Proceso de Itô)

El proceso de Itô, $X(t)$, viene definido por la EDE

$$dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t), \quad \text{con } X(t_0) = X_0, \quad (2.5)$$

con dos funciones genéricas para la deriva $\bar{\mu}(t, x)$ y la volatilidad $\bar{\sigma}(t, x)$. Estas dos funciones no pueden ser unas funciones «cualesquiera», ya que necesitan satisfacer las dos condiciones de Lipschitz, dadas por

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}(t, x) - \bar{\mu}(t, y)|^2 + |\bar{\sigma}(t, x) - \bar{\sigma}(t, y)|^2 &\leq K_1|x - y|^2, \\ |\bar{\mu}(t, x)|^2 + |\bar{\sigma}(t, x)|^2 &\leq K_2(1 + |x|^2), \end{aligned}$$

para ciertas constantes $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ y x e y en \mathbb{R} . Las dos condiciones anteriores establecen que los términos de deriva y volatilidad no deberían aumentar demasiado rápido. Cuando estas condiciones se cumplen, entonces, con probabilidad uno, existe una solución continua, adaptada a (2.5), y la solución verifica que $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$. \blacktriangleleft

2.1.2. Lema de Itô

Considerando un proceso estocástico $X(t)$ gobernado por (2.5), se puede definir otro proceso $Y(t)$ como función de t y $X(t)$, es decir, $Y(t) := g(t, X)$ ¹. $Y(t)$ es también un proceso estocástico y se puede determinar su EDE. El

¹ Aquí $X = X(t)$ se comporta como una variable independiente.

procedimiento para encontrar la EDE del proceso $Y(t)$ viene dada por el lema de Itô, que se introduce a continuación.

Antes de presentar el lema de Itô, proporcionamos algo de heurística. Para obtener la dinámica de $dY(t)$ para $Y(t) = g(t, X)$, podemos echar un vistazo a la expansión en series de Taylor 2D alrededor de un punto (t_0, X_0) , es decir,

$$\begin{aligned} g(t, X) &= g(t_0, X_0) + \frac{\partial g(t, X)}{\partial t}|_{t=t_0} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial t^2}|_{t=t_0} (\Delta t)^2 \\ &+ \frac{\partial g(t, X)}{\partial X}|_{X=X_0} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial X^2}|_{X=X_0} (\Delta X)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial t \partial X}|_{X=X_0, t=t_0} \Delta X \Delta t + \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

con $\Delta t = t - t_0$, y $\Delta X = X - X_0$. Para $t \rightarrow t_0$ y $X \rightarrow X_0$, y $dt = \lim_{t \rightarrow t_0} t - t_0$, $dX = \lim_{X \rightarrow X_0} X - X_0$, podemos escribir (2.6) como

$$\begin{aligned} dg(t, X) &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial g}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} dX^2 \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial X} dX dt + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

En (2.7) tenemos infinitos términos. Sin embargo, muchos de esos términos pueden ser despreciados en el límite $dt \rightarrow 0$. Cuando el incremento de tiempo, dt , tiende a cero, los términos con $(dt)^2$ tienden a 0 mucho más rápido que los términos con dt . Esto es cierto para cualquier término $(dt)^n$, con $n > 1$. Convencionalmente, este comportamiento de convergencia se describe por la notación o pequeña (minúscula), es decir, $(dt)^2 = o(dt)$.

Es habitual escribir que $(dt)^2 = 0$, pero debemos ser conscientes de que esta igualdad realmente significa «orden $dt \rightarrow 0$ ».

Observación 2.1.1 (Notación o pequeña y O grande)

Por definición, tenemos que

$$g(x) = O(h(x)), \text{ si } |g(x)| < c \cdot h(x),$$

para alguna constante c y para x suficientemente grande. La o pequeña se describe mediante el límite asintótico

$$g(x) = o(h(x)), \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

La O grande nos dice que « $g(x)$ no crece más rápido que $h(x)$ », mientras que la o pequeña nos dice que « $g(x)$ crece mucho más lento que $h(x)$ ». ▲

Ejemplo 2.1.1 (o pequeña y O grande)

La función $g(x) = 5x^2 - 1x + 9$ es $O(x^2)$, pero no es $o(x^2)$, porque el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 5$. Las siguientes expresiones son ciertas para la notación o pequeña:

$$x^2 = o(x^3), \quad x^2 = o(x!), \quad \text{y} \quad \log(x^2) = o(x).$$

Las siguientes expresiones son ciertas bajo la notación O grande:

$$x^2 = O(x^2), \quad x^2 = O(x^2 + x), \quad \text{y} \quad x^2 = O(100x^2),$$

que, sin embargo, no son ciertas cuando utilizamos o pequeña. ♦

Tabla de Itô

La igualdad en (2.7) se puede simplificar despreciando los términos dt de mayor orden, de lo que se obtiene

$$dg(t, X) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} (dX)^2. \quad (2.8)$$

Necesitamos hacer alguna suposición sobre el término $dXdX$, que, en el caso de considerar (2.5), sería

$$(dX)^2 = \bar{\mu}^2(t, X)(dt)^2 + \bar{\sigma}^2(t, X)(dW)^2 + 2\bar{\mu}(t, X)\bar{\sigma}(t, X)dWdt. \quad (2.9)$$

Se deben determinar dos términos específicos $dtdW$ y $dWdW$. La esperanza de $dtdW$ es igual a 0 (porque la esperanza de un incremento browniano, escalado por una constante, es igual a cero) y la desviación típica es igual a $dt^{\frac{3}{2}}$ (ya que la desviación típica de dW es igual a \sqrt{dt}). Tenemos $(dt)^{\frac{3}{2}}$, lo que implica que $dtdW$ tiende a 0 rápidamente cuando $dt \rightarrow 0$. Con respecto al otro término, la esperanza de $dWdW$ es igual a dt , lo que implica que $dWdW$ es del orden de dt cuando $dt \rightarrow 0$.

Así, para obtener la dinámica de Itô, podemos hacer uso de la tabla de multiplicación de Itô, donde los términos cruzados que involucran al proceso de Wiener se comportan como se muestra en la Tabla 2.1 (véase también Privault (1998)).

| | dt | $dW(t)$ |
|---------|------|---------|
| dt | 0 | 0 |
| $dW(t)$ | 0 | dt |

Tabla 2.1: Tabla de multiplicación de Itô para procesos de Wiener.

Observación 2.1.2 (La aproximación $(dW)^2 = dt$)

Consideramos la siguiente esperanza, $\mathbb{E}[(dW)^2]$. Siguiendo los mismos pasos que en la obtención de la isometría de Itô, véase (1.36), tenemos que

$$\mathbb{E}[(dW)^2] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[(W(t + \Delta t) - W(t))^2\right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = dt, \quad (2.10)$$

y la varianza es igual a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[(dW)^2] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{V}\text{ar}[(W(t + \Delta t) - W(t))^2] \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}[(W(t + \Delta t) - W(t))^4] \\
&- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbb{E}[(W(t + \Delta t) - W(t))^2] \right)^2 \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 3(\Delta t)^2 - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2(\Delta t)^2 \\
&= 2(dt)^2.
\end{aligned}$$

Concluimos que la varianza de $(dW)^2$ converge a cero mucho más rápido que la esperanza, cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Debido a esto, como regla de cálculo estocástico, tenemos que

$$(dW)^2 = dt,$$

cuando la varianza se aproxima rápidamente a cero en el límite. ▲

Por tanto, podemos escribir (2.9) como

$$(dX)^2 \approx \bar{\sigma}^2(t, X)dt.$$

Juntando los resultados obtenidos, la dinámica de $g(t, X)$ es

$$dg(t, X) = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \left(\bar{\mu}(t, X)\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t, X)\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right)dt + \frac{\partial g}{\partial X}\bar{\sigma}(t, X)dW(t).$$

Introducimos ahora el siguiente lema.

Teorema 2.1.1 (Lema de Itô)

Sea un proceso $X(t)$ que sigue la dinámica de Itô

$$dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t), \text{ con } X(t_0) = X_0,$$

donde la deriva $\bar{\mu}(t, X(t))$ y la difusión $\bar{\sigma}(t, X(t))$ satisfacen las condiciones de Lipschitz estándar sobre el crecimiento de estas funciones (véase Definición 2.1.3).

Sea $g(t, X)$ una función de $X = X(t)$ y del tiempo t , con derivadas parciales continuas, $\partial g / \partial X$, $\partial g^2 / \partial X^2$, $\partial g / \partial t$. Entonces, una variable estocástica $Y(t) := g(t, X)$ también sigue un proceso de Itô, gobernado por el mismo proceso de Wiener $W(t)$, es decir,

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \bar{\mu}(t, X)\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\bar{\sigma}^2(t, X) \right)dt + \frac{\partial g}{\partial X}\bar{\sigma}(t, X)dW(t).$$

La demostración formal de este teorema es relativamente compleja, y se puede encontrar en distintos libros sobre procesos estocásticos como, por ejemplo, Shreve (2004).

De nuevo, el lema de Itô presentado anteriormente es la versión abreviada de la formulación integral

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial g}{\partial z} + \bar{\mu}(z, X) \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \bar{\sigma}^2(z, X) \right) dz \\ &\quad + \int_{t_0}^t \frac{\partial g}{\partial X} \bar{\sigma}(z, X) dW(z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

El lema de Itô se puede utilizar para encontrar las soluciones de numerosas integrales y EDEs interesantes.

Ejemplo 2.1.2 (Solución de la integral de Itô: cálculo de Itô)

Recordamos la integral estocástica en (1.41) del Ejemplo 1.3.1, $\int_0^T W(t) dW(t)$. Esta integral también se puede resolver mediante el cálculo de Itô. Consideramos el proceso estocástico más básico, es decir, $X(t) = W(t)$, el cual no tiene término de derivada y su coeficiente de volatilidad es igual a 1, tal que $dX(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t)$. Si aplicamos el lema de Itô a $g(X(t)) = X^2(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} dg(X) &= \frac{\partial g}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} (dX(t))^2 \\ &= 2X(t)dX(t) + (dX(t))^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo $X(t) = W(t)$ tenemos que la dinámica de $g(X(t)) = W^2(t)$ es

$$dW^2(t) = 2W(t)dW(t) + (dW(t))^2.$$

Sabiendo que $dW(t)dW(t) = dt$ e integrando en ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\int_0^T dW^2(t) = 2 \int_0^T W(t)dW(t) + \int_0^T dt,$$

o, lo que es equivalente,

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2} \int_0^T dW^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^T dt = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T,$$

proporcionando de este modo la solución a la integral planteada.

A pesar de que la técnica presentada anteriormente es más elegante y limpia que la basada en la partición del dominio (como en (1.42)), no siempre es fácil encontrar una función $g(\cdot)$ para la que se pueda aplicar el lema de Itô. ♦

Ejemplo 2.1.3 (Integral estocástica $\int_0^T W(t)dt$)

Probamos que

$$I(T) = \int_0^T W(t)dt = \int_0^T (T-t)dW(t).$$

Utilizando $X(t) = W(t)$ y aplicando el lema de Itô a $g(t, X(t)) = (T - t)X(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} dg(X) &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial X} dX(t) \\ &= -X(t)dt + (T - t)dX(t). \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados, con $X(t) = W(t)$ resulta

$$\int_0^T d((T - t)W(t)) = - \int_0^T W(t)dt + \int_0^T (T - t)dW(t).$$

Claramente, $\int_0^T d((T - t)W(t)) = (T - T)W(T) - W(T - 0)W(0) = 0$, así que

$$\int_0^T W(t)dt = \int_0^T (T - t)dW(t). \quad (2.12)$$



En la Figura 2.1 representamos una trayectoria del movimiento browniano $W(t)$, así como los valores de dos integrales, la del Ejemplo 2.1.2 y la del Ejemplo 2.1.3.

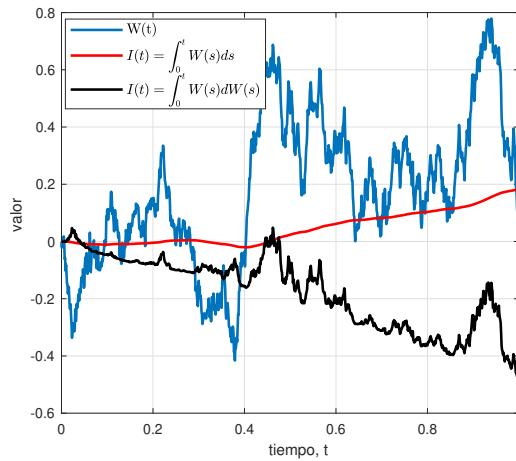


Figura 2.1: Trayectorias estocásticas para $W(t)$, $\int_0^t W(s)ds$ y $\int_0^t W(s)dW(s)$, en función del tiempo t .



2.1.3. Distribuciones de $S(t)$ y $\log S(t)$

Mediante el lema de Itô podemos mostrar que la variable aleatoria $S := S(t)$ en (2.1) sigue una distribución lognormal, es decir, que la variable $\log S$ está normalmente distribuida. Tomando $g(t, S) = X(t) = \log S$ obtenemos $dg/dS = 1/S$ y $d^2g/dS^2 = -1/S^2$, de modo que, aplicando el lema de Itô, resulta que

$$dg(t, S) = dX(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t), \quad g(t_0) = \log S_0. \quad (2.13)$$

Como el incremento de Wiener $dW(t)$ está normalmente distribuido con esperanza 0 y varianza dt , se tiene que $dg(t, S)$ en (2.13) está normalmente distribuido, con esperanza $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$ y varianza $\sigma^2 dt$. La variable estocástica $Y(t) = g(t, S)$ representa una suma de incrementos dg (en el límite una suma infinita puede ser representada por un integral), de modo que $Y(t) = g(t, S)$ está normalmente distribuido, con esperanza $\log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0)$ y varianza $\sigma^2(t - t_0)$.

Ejemplo 2.1.4 (Las distribuciones de MB y MBG en tiempo)

Asumiendo la transformación logarítmica, $X(t) = \log S(t)$, el lado derecho del EDE (2.13) no depende de $X(t)$ y, por lo tanto, podemos integrar ambos lados de la EDE

$$\int_{t_0}^T dX(t) = \int_{t_0}^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \int_{t_0}^T \sigma dW^{\mathbb{P}}(t), \quad (2.14)$$

lo que resulta en la solución

$$X(T) = X(t_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t_0) + \sigma W^{\mathbb{P}}(T - t_0). \quad (2.15)$$

Asumiendo la transformación logarítmica anterior, $X(T)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con los parámetros

$$X(T) \sim \mathcal{N} \left(X(t_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t_0), \sigma^2(T - t_0) \right).$$

Deshaciendo la transformación, $S(T)$ es, en efecto, la variable aleatoria lognormalmente distribuida dada por

$$S(T) \sim \exp(X(T)).$$

Además, para $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, se cumplen las igualdades

$$\mathbb{E}[e^Z] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \text{Var}[e^Z] = \left(e^{\sigma^2} - 1 \right) e^{2\mu + \sigma^2}. \quad (2.16)$$

Entonces, mediante la fórmula de Itô, podemos determinar la solución para $S(t)$ en (2.1), dada por

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W^{\mathbb{P}}(t) - W^{\mathbb{P}}(t_0)) \right). \quad (2.17)$$

Para $X(t) := \log S(t)$, vemos que, basándonos en los resultados del Ejemplo 2.1.4, obtenemos

$$\begin{aligned} F_{X(t)}(x) &= \mathbb{P}[X(t) \leq x] \\ &:= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{(z - \log S_0 - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right) dz, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y su correspondiente función de densidad de probabilidad, $f_X(x) := f_{X(t)}(x)$, cuya expresión es

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left(-\frac{(x - \log S_0 - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right). \quad (2.19)$$

La función de distribución de probabilidad de $S(t)$ se puede obtener mediante la transformación $S(t) = \exp(X(t))$. Para $x > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(x) &= \mathbb{P}[S(t) \leq x] = \mathbb{P}[\exp^{X(t)} \leq x] = \mathbb{P}[X(t) \leq \log x] = F_{X(t)}(\log x) \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\log x} \exp \left(-\frac{(z - \log S_0 - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right) dz, \end{aligned}$$

que es lognormal.

La función de densidad de probabilidad para $S(t)$, $f_S(x) := f_{S(t)}(x)$, es

$$f_S(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left(-\frac{(\log \frac{x}{S_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)} \right), \quad x > 0. \quad (2.20)$$

En la Figura 2.2 se representa la evolución en tiempo de las funciones de densidad de probabilidad de los procesos $X(t)$ y $S(t)$, respectivamente. Los valores de parámetros se especifican en el pie de la ilustración.

Además, en la misma Figura 2.2 se puede observar que, para un periodo de tiempo corto, las densidades de $X(t)$ y $S(t)$ se parecen entre ellas. Esto se explica por la relación existente entre las distribuciones normal y lognormal. Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces $Y = \exp(X)$ es una distribución lognormal y, aplicando una expansión de McLaurin (véase (1.10)) de la variable Y alrededor de 0, obtenemos $Y \approx 1 + X \sim \mathcal{N}(1, 1)$. Esta aproximación es representativa para el caso de $T \rightarrow 0$.

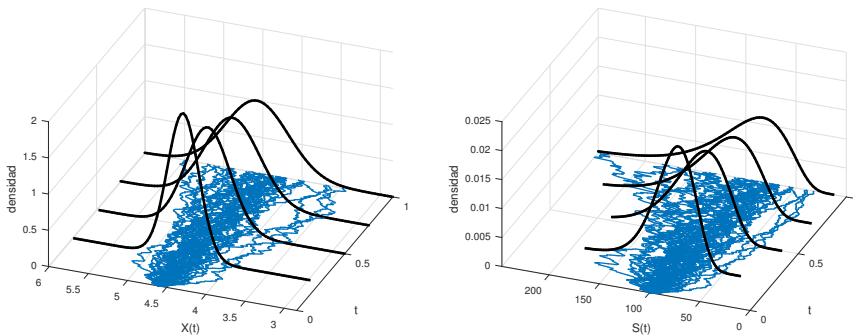


Figura 2.2: Trayectorias (y sus correspondientes densidades) generadas con la siguiente configuración: $S_0 = 100$, $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.4$ y $T = 1$. Izquierda: $X(t) = \log S(t)$. Derecha: $S(t)$.



Ejemplo 2.1.5 (Distribuciones normal y lognormal)

En las Figuras 2.3 y 2.4, se representan, para distintos conjuntos de parámetros, las gráficas de las funciones de densidad de probabilidad de las distribuciones normal y lognormal, respectivamente.

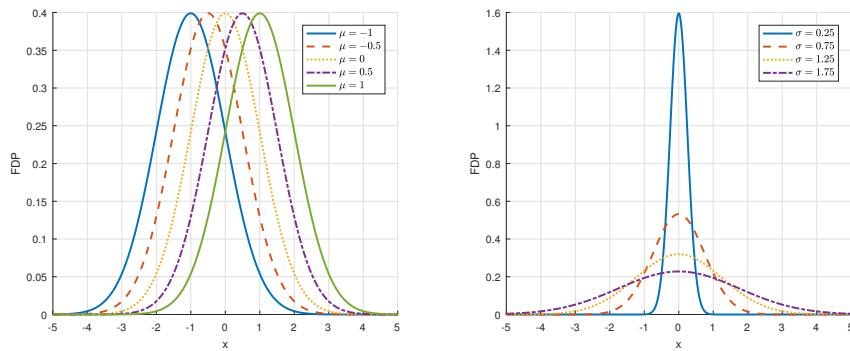


Figura 2.3: Función de densidad de probabilidad de la distribución normal. Izquierda: impacto del parámetro μ , con $\sigma = 1$. Derecha: impacto de σ , con $\mu = 0$.



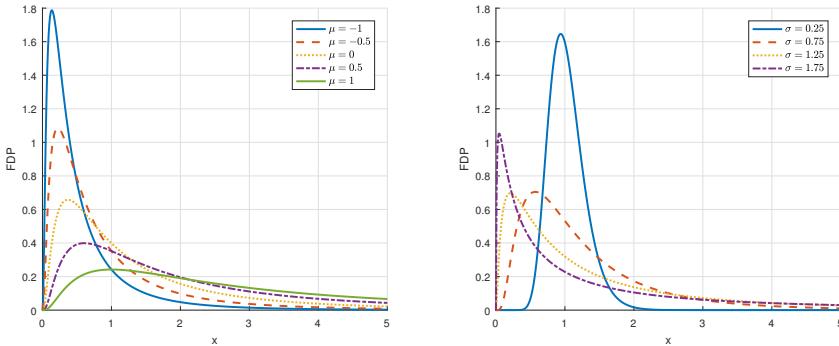


Figura 2.4: Función de densidad de probabilidad de la distribución lognormal. Izquierda: impacto del parámetro μ , con $\sigma = 1$. Derecha: impacto de σ , con $\mu = 0$.



2.2. Primeras generalizaciones

En este apartado introducimos las primeras variantes del proceso MBG básico para precios de activos. Introducimos el concepto de dividendos proporcionales, que se pueden considerar como una primera generalización sobre el término de deriva del MBG, y algunas generalizaciones sobre la volatilidad, incluyendo una función de volatilidad dependiente del tiempo.

2.2.1. Modelo de dividendo proporcional

En el modelo MBG genérico para precios de activos de (2.1), el pago de dividendos no se ha modelado. Sin embargo, las compañías habitualmente pagan dividendos una o dos veces al año. Las cantidades exactas de los dividendos y el momento de pago pueden variar cada año. En el momento de pago del dividendo, el valor del activo sufre una caída.

Existen diferentes modelos matemáticos para los pagos de dividendos, pudiendo ser deterministas o estocásticos, en tiempo continuo o en tiempo discreto.

Es práctica habitual emplear un rendimiento por dividendo continuo y constante de tamaño $q \cdot S(t)$, con un factor constante $q < 1$, representando que, en un tiempo dt , el activo subyacente paga un dividendo proporcional de tamaño $qS(t)dt$. Este modelo se considera particularmente adecuado para índices bursátiles (en los que muchas acciones están representadas). Bajo condiciones de no arbitraje, el valor del activo debe reducirse tanto como la cantidad pagada por el dividendo, es decir,

$$dS(t) = (\mu - q)S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad (2.21)$$

lo que modeliza un activo que paga sus dividendos mediante un flujo continuo de los mismos.

2.2.2. Variantes para la volatilidad

En el modelo MBG, la dinámica del activo incluye el parámetro de volatilidad σ . Uno se puede preguntar por qué la volatilidad se escribe habitualmente como σ , y no de la forma $\sigma S(t)$, ya que el término $\sigma S(t)$ va delante del coeficiente aleatorio $dW(t)$. Cuando utilizamos la palabra volatilidad, realmente queremos decir la volatilidad del retorno del activo. El rendimiento de un activo en un periodo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ se determina mediante el cociente, $\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}$. Para un periodo instantáneamente pequeño $\Delta t \rightarrow 0$ resulta que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + [\sigma] dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.22)$$

Observando el retorno del activo, se ve claramente por qué σ es el parámetro de volatilidad del proceso $S(t)$.

Se pueden definir otros modelos de activos haciendo que la volatilidad de $dS(t)/S(t)$ sea función de $S(t)$, obteniendo los denominados «modelos paramétricos de volatilidad local». Dos de los modelos paramétricos de volatilidad local más conocidos son el «modelo cuadrático», cuya dinámica del activo viene dada por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + [\sigma S(t)] dW^{\mathbb{P}}(t),$$

y el denominado «modelo 3/2», con

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + [\sigma \sqrt{S(t)}] dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Estos modelos son la base para algunos procesos de tipos de interés estocásticos. En los siguientes apartados se abordarán otros modelos paramétricos de volatilidad local.

2.2.3. Volatilidad dependiente del tiempo

Otra generalización del modelo MBG para precios de activos es la utilización de un coeficiente de volatilidad dependiente del tiempo, $\sigma(t)$ (como alternativa a la volatilidad constante), es decir,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad S(t_0) = S_0, \quad (2.23)$$

donde $\sigma(t)$ es una función determinista. En el siguiente ejemplo, hacemos coincidir los momentos de un modelo con volatilidad constante y uno con volatilidad dependiente del tiempo.

Ejemplo 2.2.1 (Volatilidad: igualdad de momentos)

Como ejemplo ilustrativo de la igualdad de momentos, consideramos los dos siguientes procesos estocásticos, $X(t)$ y $Y(t)$, que están gobernados por las EDEs

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \\ dY(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_*^2 \right) dt + \sigma_*dW^{\mathbb{P}}(t), \end{aligned}$$

con la volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$ para el proceso $X(t)$ y un parámetro de volatilidad constante σ_* para el proceso $Y(t)$. Las esperanzas de $X(T)$ e $Y(T)$ se pueden determinar como

$$\mathbb{E}[X(T)] = X_0 + \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt, \quad \mathbb{E}[Y(T)] = Y_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_*^2 \right) T, \quad (2.24)$$

y la varianza del proceso $X(t)$ es

$$\text{Var}[X(T)] = \mathbb{E}[X^2(T)] - (\mathbb{E}[X(T)])^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T \sigma(t)dW^{\mathbb{P}}(t) \right]^2 = \int_0^T \sigma^2(t)dt,$$

donde, en el último paso, se utiliza la isometría de Itô (vista en el Apartado 1.3.2). La varianza del proceso $Y(t)$ es igual a $\text{Var}[Y(T)] = \sigma_*^2 T$. Igualando las varianzas de los procesos X y Y , esto es, $\text{Var}[X(T)] = \text{Var}[Y(T)]$, tenemos que

$$\boxed{\sigma_* = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t)dt}} \quad (2.25)$$

Considerando σ_* de esta forma concreta, las esperanzas de $X(T)$ y $Y(T)$ (con $X_0 = Y_0$) son también iguales, ya que, partiendo de (2.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(T)] &= Y_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}(\sigma_*)^2 \right) T \\ &= X_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t)dt \right) T = \mathbb{E}[X(T)]. \end{aligned}$$

Los procesos X e Y son MBGs logarítmicamente transformados, por lo que están normalmente distribuidos. Por tanto, para garantizar la igualdad en distribución, solo se necesita que los dos primeros momentos sean iguales. ♦

Con la técnica de igualdad de momentos, ambos procesos tendrán las mismas distribuciones marginales, aunque sus distribuciones de transición serán diferentes.

2.3. Martingalas y precios de activos

Los modelos de precios abordados deben verificar la condición $\mathbb{E}[|S(t)|] < \infty$. La valoración de derivados financieros, tales como las opciones financieras, involucra el cálculo de la esperanza de un cierto *payoff* con respecto a un proceso subyacente. Por tanto, la existencia de los momentos es crucial.

La propiedad de martingala implica que el modelado matemático de un producto financiero está libre de arbitraje, es decir, no existe la posibilidad de beneficio sin riesgo dentro del modelo matemático para la cantidad estocástica considerada. La medida de probabilidad bajo la que se verifica la propiedad de martingala se conoce como «medida de riesgo neutro» y se denota por \mathbb{Q} . En concreto, los activos cotizados descontados serán martingalas bajo la medida de riesgo neutro.

2.3.1. Precios \mathbb{P} -mediables

Normalmente, los procesos de precios de activos financieros observados en los mercados bursátiles no son martingalas (es decir, no son completamente imprevisibles).

Ejemplo 2.3.1 (Esperanza de $S(t)$ bajo \mathbb{P} -medida)

De (2.23) (el caso de la volatilidad dependiente del tiempo) obtenemos

$$S(t) = S_0 e^{\int_{t_0}^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(z)) dz + \int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z)},$$

cuya esperanza viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S(t) | \mathcal{F}(t_0)] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_0 e^{\int_{t_0}^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(z)) dz + \int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z)} \middle| \mathcal{F}(t_0)\right] \\ &= S_0 e^{\mu(t-t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z)} \middle| \mathcal{F}(t_0)\right]. \end{aligned}$$

Para una variable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ normalmente distribuida, se puede deducir que $\mathbb{E}[e^{aX}] = e^{\frac{1}{2}a^2}$ y

$$\int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz\right).$$

Por tanto, tenemos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z)} \middle| \mathcal{F}(t_0)\right] = e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S(t) | \mathcal{F}(t_0)] &= S_0 e^{\mu(t-t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\int_{t_0}^t \sigma(z) dW^{\mathbb{P}}(z)} \middle| \mathcal{F}(t_0)\right] \\ &= S_0 e^{\mu(t-t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz} e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2(z) dz} \\ &= S_0 e^{\mu(t-t_0)}. \end{aligned}$$

◆

En un intervalo de tiempo Δt , se espera que $S(t)$, definido en (2.1), crezca según una tasa positiva μ bajo la medida de probabilidad del mundo real \mathbb{P} . Entonces, el precio sigue la distribución lognormal, con esperanza

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S(t)|\mathcal{F}(t_0)] = S_0 e^{\mu(t-t_0)},$$

tal que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] > S(t)$, es decir, $S(t)$ no es una martingala². Más concretamente, podemos asumir que $\mu > r$, donde r es el tipo de interés libre de riesgo (ya que, de otro modo, nadie invertiría en el activo), tal que para el proceso de precios del activo descontado, también tenemos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-r\Delta t} S(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] > S(t).$$

Por tanto, dado el proceso de precios, $S(t)$, bajo una medida diferente, \mathbb{Q} , como

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad S(t_0) = S_0, \quad (2.26)$$

y reemplazando el parámetro de deriva μ por el tipos de interés libre de riesgo r . La solución de (2.26) es

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(t - t_0) + \sigma(W^{\mathbb{Q}}(t) - W^{\mathbb{Q}}(t_0)) \right).$$

El concepto de cambio de medidas es fundamental en finanzas cuantitativas. El Capítulo 7, concretamente, el Apartado 7.2 está dedicado a este concepto, que se empleará en casi todos los demás capítulos del libro.

2.3.2. Precios \mathbb{Q} -mediables

Bajo la medida \mathbb{Q} , los precios $S(t)$ siguen también una distribución lognormal, aunque su esperanza viene dada por

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(t)|\mathcal{F}(t_0)] = S_0 e^{r(t-t_0)}.$$

La esperanza de $S(t)$, condicionada a tiempo s , con $s < t$, es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(t)|\mathcal{F}(s)] = e^{\log S(s) + r(t-s)} = S(s)e^{r(t-s)} \neq S(s),$$

lo que implica que el proceso $S(t)$ para $t \in [t_0, T]$ «no» es una martingala bajo la medida \mathbb{Q} .

Considerando una cuenta de ahorros

$$M(t) = M(s)e^{r(t-s)}, \quad (2.27)$$

²Es denominada submartingala.

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(t)}{M(t)} | \mathcal{F}(s) \right] &= \frac{e^{-r(t-s)}}{M(s)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(t) | \mathcal{F}(s)] \\ &= \frac{e^{-r(t-s)}}{M(s)} S(s) e^{r(t-s)} = \frac{S(s)}{M(s)}.\end{aligned}$$

El término compensatorio en la definición del proceso descontado está relacionado con la cuenta de ahorros, $M(t)$, esto es

$$S(t) e^{-r(t-t_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S(t)}{M(t)},$$

donde $dM(t) = rM(t)dt$, con $M(t_0) = 1$.

En este caso, la cuenta de ahorros, $M(t)$, representa el denominado «numerario», es decir, la unidad de medida en la que todos los otros precios están expresados. El término numerario viene de la palabra francesa *numéraire*, que significa el estándar básico, por el cual los valores están medidos. En la industria financiera internacional es habitual emplear el término en francés, ya que este ha sido el adoptado en el inglés.

Entonces, tenemos una medida de probabilidad \mathbb{Q} (la medida de riesgo neutro) bajo la cual el precio del activo descontado por el tipo de interés libre de riesgo r , es una martingala, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r\Delta t} S(t + \Delta t) | \mathcal{F}(t)] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t + \Delta t)} S(t + \Delta t) | \mathcal{F}(t) \right] \\ &= M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(t + \Delta t)}{M(t + \Delta t)} | \mathcal{F}(t) \right] \\ &= M(t) \frac{S(t)}{M(t)} = S(t).\end{aligned}\tag{2.28}$$

El precio del activo que verifica la relación (2.28) es, de este modo, un proceso MBG de precios de activos, en el que el parámetro de deriva es igual al tipo de interés libre de riesgo $\mu = r$ (compárense (2.1) y (2.26)).

Ejemplo 2.3.2 (Trayectorias del activo)

En la Figura 2.5 presentamos algunas trayectorias discretas que han sido generadas por un proceso MBG con $\mu = 0.15$, $r = 0.05$ y $\sigma = 0.1$. En el gráfico de la izquierda se muestran las trayectorias de un proceso descontado, $S(t)/M(t)$, donde $S(t)$ se define bajo la medida del mundo real \mathbb{P} , con un parámetro de deriva $\mu = 0.15$. El gráfico de la derecha muestra las trayectorias

para $S(t)/M(t)$, donde $S(t)$ tiene como parámetro de deriva $r = 0.05$. Como $\mu > r$, el precio descontado bajo la medida del mundo real aumentará mucho más rápido que el proceso bajo la medida de riesgo neutro. En otras palabras, bajo la medida del mundo real, $S(t)/M(t)$ es una submartingala.

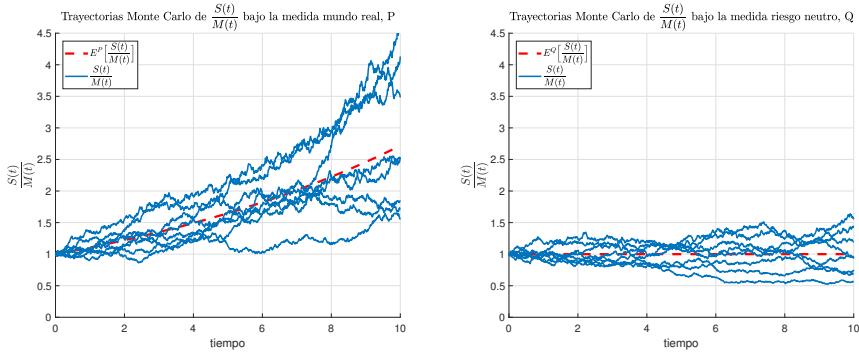


Figura 2.5: *Trayectorias del proceso descontado, $S(t)/M(t)$, generadas con los parámetros $r = 0.05$, $\mu = 0.15$ y $\sigma = 0.1$. Izquierdo: $S(t)$ bajo la medida del mundo real, \mathbb{P} . Derecha: $S(t)$ bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} .*



Como veremos más adelante, la valoración de opciones financieras está relacionada con el cálculo de esperanzas. La notación $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(T, S)]$ y $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(T, S)]$ indica que tomamos la esperanza de una cierta función, $g(T, S)$, que depende del proceso estocástico de precios $S(t)$. El precio del activo $S(t)$ se puede definir bajo una medida específica, tanto bajo \mathbb{P} como bajo \mathbb{Q} , donde $\mathbb{P}[\cdot]$ y $\mathbb{Q}[\cdot]$ indican las correspondientes probabilidades asociadas a las medidas. Si tomamos, por ejemplo, $g(T, S) = \mathbb{1}_{S(T)>0}$, entonces se cumplen las igualdades

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{S(T)>0}] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{S(T)>0} d\mathbb{P} = \mathbb{P}[S(T) > 0], \quad (2.29)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{S(T)>0}] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{S(T)>0} d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[S(T) > 0], \quad (2.30)$$

donde la notación $\mathbb{1}_{X \in \Omega}$ representa función indicatriz del conjunto Ω , como en (1.1). Los superíndices \mathbb{Q} y \mathbb{P} indican qué proceso se utiliza en el operador esperanza para calcular las integrales correspondientes. En otras palabras, indican qué dinámica se ha utilizado para el subyacente.

2.3.3. Estimación de parámetros bajo la medida del mundo real \mathbb{P}

En este apartado introducimos la estimación de parámetros de un proceso estocástico bajo la medida del mundo real \mathbb{P} . La estimación bajo la medida

del mundo real es el procedimiento por el que se obtienen los parámetros del modelo para un proceso estocástico mediante la calibración a valores históricos de precios de activos. Bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , la calibración se realiza de forma completamente diferente, como veremos en el siguiente capítulo.

Así, el valor de los parámetros se obtiene utilizando una técnica estadística de estimación muy extendida, conocida como «estimación por máxima verosimilitud» (EMV), véase Harris y Stocker (1998). La idea detrás del método es la de obtener las estimaciones de los parámetros de la distribución de probabilidad subyacente para un conjunto de datos dado.

Para un primer ejemplo, tomamos el proceso estocástico movimiento browniano aritmético, MBA, que fue introducido por Bachelier (1900), dado por

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t), \quad (2.31)$$

y cuya solución es

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + \mu(t - t_0) + \sigma(W^{\mathbb{P}}(t) - W^{\mathbb{P}}(t_0)), \quad \text{o} \\ X(t) &\sim \mathcal{N}(X(t_0) + \mu(t - t_0), \sigma^2(t - t_0)). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para predecir el valor «mañana» (en tiempo $t + \Delta t$), sabiendo que disponemos de los valores hasta hoy (donde «hoy» es tiempo t), podemos calcular la esperanza condicionada como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] &= \mu\Delta t + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)] \\ &+ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sigma(W^{\mathbb{P}}(t + \Delta t) - W^{\mathbb{P}}(t))|\mathcal{F}(t)]. \end{aligned}$$

Por la teoría de la medida, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)] = X(t)$ y, por la propiedad de incrementos independientes, la segunda esperanza es igual a cero, con lo que obtenemos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] = X(t) + \mu\Delta t.$$

Para la varianza, tenemos que

$$\text{Var}^{\mathbb{P}}[X(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] = \text{Var}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)] + \text{Var}^{\mathbb{P}}\left[\sigma\sqrt{\Delta t}\tilde{Z}|\mathcal{F}(t)\right],$$

con $\tilde{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Empleando (2.32) y el hecho de que³ $\text{Var}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)] = 0$, obtenemos

$$\text{Var}^{\mathbb{P}}[X(t + \Delta t)|\mathcal{F}(t)] = \sigma^2\Delta t.$$

³Nótese que, por la teoría de la medida, tenemos

$$\text{Var}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t)^2|\mathcal{F}(t)] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}(t)]\right)^2 = X^2(t) - X^2(t) = 0.$$

De este modo, tenemos que la predicción del valor en $t + \Delta t$, dada la información⁴ en tiempo t , es decir, a la variable aleatoria condicionada

$$X(t + \Delta t)|X(t) \sim \mathcal{N}(X(t) + \mu\Delta t, \sigma^2\Delta t), \quad (2.33)$$

que es una variable aleatoria normal para la cual se deben estimar los parámetros μ y σ .

Estimación de los parámetros para un movimiento browniano aritmético

Como la distribución condicionada está normalmente distribuida, se conoce el logaritmo de la función de verosimilitud. Suponiendo la independencia de las observaciones y dados sus valores (típicamente los valores históricos de algún retorno o activo transformado logarítmicamente) $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_m)$, la función de verosimilitud $L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2|X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_m))$ viene dada por

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2|X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_m)) = \prod_{k=0}^{m-1} f_{X(t_{k+1})|X(t_k)}(X(t_{k+1})), \quad (2.34)$$

con $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ por determinar. A partir de (2.33) sabemos que

$$f_{X(t_{k+1})|X(t_k)}(x) = f_{\mathcal{N}(X(t_k) + \hat{\mu}\Delta t, \hat{\sigma}^2\Delta t)}(x), \quad (2.35)$$

por lo que (2.34) resulta en

$$\begin{aligned} L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2| \dots) &= \prod_{k=0}^{m-1} f_{\mathcal{N}(X(t_k) + \hat{\mu}\Delta t, \hat{\sigma}^2\Delta t)}(X(t_{k+1})) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t}} \exp\left(-\frac{(X(t_{k+1}) - X(t_k) - \hat{\mu}\Delta t)^2}{2\hat{\sigma}^2\Delta t}\right). \end{aligned}$$

Para simplificar la maximización, utilizamos la transformación logarítmica, esto es

$$\log L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2| \dots) = \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t}} \right)^m - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(X(t_{k+1}) - X(t_k) - \hat{\mu}\Delta t)^2}{2\hat{\sigma}^2\Delta t}.$$

Además

$$\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t}} \right)^m = \log (2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t)^{-0.5m} = -0.5m \log (2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t),$$

por lo que obtenemos

$$\log L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2| \dots) = -0.5m \log (2\pi\hat{\sigma}^2\Delta t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(X(t_{k+1}) - X(t_k) - \hat{\mu}\Delta t)^2}{2\hat{\sigma}^2\Delta t}.$$

⁴ Mediante la notación $|X(t)$, también indicamos «la información hasta tiempo t », como cuando utilizamos $\mathcal{F}(t)$.

Para determinar el máximo de la verosimilitud transformada logarítmicamente, se deben cumplir, para ambos parámetros, las siguientes condiciones de primer orden, dadas por

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} \log L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 | \dots) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\sigma}^2} \log L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 | \dots) = 0.$$

Esto nos proporciona los estimadores

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m\Delta t}(X(t_m) - X(t_0)), \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m\Delta t} \sum_{k=0}^{m-1} (X(t_{k+1}) - X(t_k) - \hat{\mu}\Delta t)^2. \quad (2.36)$$

Con los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$, y dados unos valores históricos $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_m)$, podemos determinar los «parámetros históricos» para el proceso $X(t)$.

Distribución log-normal

Empleando la metodología anterior, en este experimento numérico predecimos el valor de una acción de una compañía de vehículos eléctricos. El proceso MBA que tratamos anteriormente no es el más adecuado para este propósito, ya que puede producir valores negativos para la acción. Como alternativa tenemos el MBG, que está estrechamente relacionado con el MBA. Bajo la medida del mundo real \mathbb{P} , consideramos el proceso para el precio de la acción dado por

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.37)$$

Mediante una transformación logarítmica y empleando el lema de Itô, tenemos que

$$dX(t) := d \log S(t) = \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (2.38)$$

Así, bajo la transformación logarítmica del proceso $S(t)$ de (2.37), obtenemos las estimaciones que habíamos obtenido con el MBA en (2.36).

Dada la evolución de los precios $S(t_i)$ de la acción de la compañía de vehículos eléctricos, representados en Figura 2.6, primero aplicamos la transformación logarítmica para obtener $X(t) := \log S(t)$ y, a continuación, estimamos los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ con (2.36). El conjunto de datos contiene los precios de cierre entre 2010 y 2018, del que resultan los estimadores $\hat{\mu} = 0.0014$ y $\hat{\sigma} = 0.0023$.

Si empleamos los $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ obtenidos como valores para μ, σ en (2.37), podemos simular realizaciones futuras para los precios de la acción. En la Figura 2.6 (izquierda) se representan los precios históricos de la acción, mientras que en la parte derecha se muestran algunas predicciones de sus valores futuros. En este experimento, la predicción de los precios futuros está puramente basada en la evolución histórica de la acción. Esta es la esencia de trabajar bajo medida del mundo real, \mathbb{P} . Nótese que, al considerar un proceso MBG para los precios

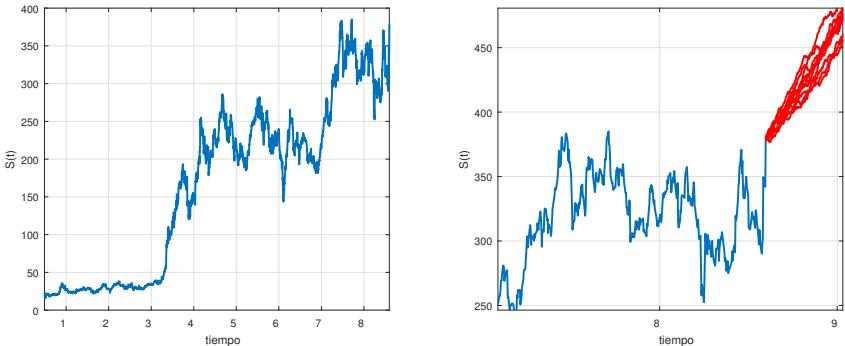


Figura 2.6: Evolución de la acción de una compañía de vehículos eléctricos. Izquierda: valores históricos. Derecha: predicción.



de la acción, se espera que estos crezcan con el tiempo. Cambiando el proceso estocástico, obtendríamos una predicción diferente.

Por tanto, estimar el parámetro μ bajo la medida \mathbb{P} está relacionado con ajustar el proceso de (2.1) a valores históricos de la acción. Nótese que las trayectorias en la Figura 2.5 sugieren que, bajo la medida del mundo real, los retornos esperados sobre el precio descontado son habitualmente más altos de lo que cabría esperar si se utilizase la medida de riesgo neutro. Este es, en parte, el argumento por el que ciertos fondos de inversión trabajan con procesos bajo la medida \mathbb{P} , que permite predecir los precios de acciones mediante técnicas de econometría. Así mismo, la especulación se lleva a cabo bajo esta medida. La gestión de riesgo, que analiza el comportamiento futuro de los activos en el mundo real y que, a menudo, viene impuesta por el regulador de instituciones financieras, también se realiza bajo la medida \mathbb{P} . En este caso, se proporcionan escenarios de activos específicos (*backtesting*) o incluso, cuando se realizan tests de estrés, escenarios de evolución extremos, con el objetivo de evaluar los balances generales de las compañías.

Sin embargo, cuando abordemos la valoración de una opción financiera en los siguientes capítulos, necesitaremos estimar los valores de los parámetros bajo la denominada medida de riesgo neutro, \mathbb{Q} . De este modo, estamos interesados en los parámetros para un periodo de tiempo futuro, que se extraerán de la información relevante de los productos financieros actuales, y proporcionan una intuición sobre las expectativas de los participantes del mercado sobre el comportamiento futuro del activo financiero.

Esto significa que pretendemos extraer la «información implícita» del activo a partir de contratos de opciones libres de arbitraje y otros derivados financieros. Las instituciones financieras trabajan bajo medida \mathbb{Q} cuando valoran productos derivados financieros para sus clientes.

Los fondos de pensiones deberían emplear la valoración bajo la medida \mathbb{P} (evolución del pasivo y la gestión de riesgo en el mundo real) y también bajo la medida \mathbb{Q} cuando los contratos de derivados formen parte de sus carteras de inversión. En resumen, los fondos de inversión pueden «apostar» sobre el futuro, mientras que los bancos y los fondos de pensiones obtienen una prima anticipada y deben cubrir su posición para mantener la prima intacta.

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.1 Aplicar el lema de Itô para obtener:

- a. La dinámica del proceso $g(t) = S^2(t)$, donde $S(t)$ sigue un movimiento browniano lognormal dado por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

con μ, σ constantes y $W(t)$ un proceso de Wiener.

- b. La dinámica para $g(t) = 2^{W(t)}$, donde $W(t)$ es un movimiento browniano estándar. ¿Es martingala?

Ejercicio 2.2 Aplicar el lema de Itô para probar que:

- a. $X(t) = \exp(W(t) - \frac{1}{2}t)$ es solución de $dX(t) = X(t)dW(t)$.
- b. $X(t) = \exp(2W(t) - t)$ es solución de $dX(t) = X(t)dt + 2X(t)dW(t)$.

Ejercicio 2.3 Obtener la regla de integración por partes de Itô, cuya expresión es

$$\int_0^T dX(t)dY(t) = (X(t)Y(t))|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T X(t)dY(t) - \int_0^T Y(t)dX(t). \quad (2.39)$$

Escrito en forma diferencial tenemos que

$$d(X(t) \cdot Y(t)) = Y(t) \cdot dX(t) + X(t) \cdot dY(t) + dX(t) \cdot dY(t), \quad (2.40)$$

donde el término adicional, $dX(t)dY(t)$ no aparece en la integración por partes determinista. Obtener la regla anterior a partir de la siguiente suma discreta,

$$\sum_{k=1}^N (X(t_{k+1}) - X(t_k))(Y(t_{i+k}) - Y(t_k)).$$

Ejercicio 2.4 Para este ejercicio es necesario descargar datos de precios de acciones, disponibles de forma gratuita en varias páginas web. Con ellos, realizar las siguientes tareas:

- a. Seleccionar dos conjuntos de datos de precios diarios de acciones S_1 y S_2 , que sean «lo más independientes posible». Comprobar la independencia mediante un gráfico de dispersión de los retornos diarios.
- b. Seleccionar dos conjuntos de datos de precios diarios de acciones S_3 y S_4 , que sean «lo más dependientes posible». Comprobar la dependencia mediante un gráfico de dispersión de los retornos diarios.

Ejercicio 2.5 El proceso de precios del activo $S(t)$ está gobernado por un movimiento browniano geométrico

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \text{ donde } Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

siendo la función de densidad lognormal

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{-(\log(x/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right), \text{ para } x > 0.$$

Determinar $\mathbb{E}[S(t)]$ y $\text{Var}[S(t)]$.

Ejercicio 2.6 Escoger dos valores para σ y μ , $0.1 \leq \sigma \leq 0.75$ y $0.01 \leq \mu \leq 0.1$, y realizar las siguientes tareas:

- Con $T = 3$, $S_0 = 0.7$, $\Delta t = 10^{-2}$, generar 10 trayectorias de un activo que sigue un movimiento browniano geométrico con los parámetros anteriormente escogidos.
- Para estas trayectorias, representar la suma acumulada del cuadrado de los incrementos, es decir,

$$\sum_{k=1}^m (\Delta S(t_k))^2.$$

- Empleando datos de mercado (como los del Ejercicio 2.4), representar la trayectoria de los retornos del activo y la suma acumulada del cuadrado de los incrementos.

Ejercicio 2.7 Sea un proceso de precios, $S(t) = \exp(X(t))$, determinar la relación entre las densidades de $S(t)$ y $X(t)$. Para ello, probar que

$$f_{S(t)}(x) = \frac{1}{x} f_{X(t)}(\log(x)), \quad x > 0.$$

Ejercicio 2.8 Utilizar el lema de Itô para demostrar que

$$\int_0^T W^2(t) dW(t) = \frac{1}{3} W^3(T) - \int_0^T W(t) dt.$$

Ejercicio 2.9 Suponer que $X(t)$ satisface la EDE

$$dX(t) = 0.04X(t)dt + \sigma X(t)dW^{\mathbb{P}}(t),$$

y que $Y(t)$ satisface

$$dY(t) = \beta Y(t)dt + 0.15Y(t)dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Los parámetros β , σ son constantes positivas y ambos procesos se definen en términos del mismo proceso de Wiener $W^{\mathbb{P}}(t)$.

Dado el proceso,

$$Z(t) = 2 \frac{X(t)}{Y(t)} - \lambda t,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

- Obtener la dinámica de $Z(t)$.
- ¿Para qué valores de β y λ el proceso $Z(t)$ es una martingala?

CAPÍTULO 3

La ecuación de Black-Scholes

En este capítulo:

Los derivados financieros, que serán introducidos en el **Apartado 3.1** de este capítulo, son productos que dependen de la evolución de algún activo subyacente, como una acción, un tipo de interés, un tipo de cambio de divisas o el precio de materias primas. En el mismo apartado se presenta la ecuación en derivadas parciales para la valoración de opciones europeas que, para opciones sobre acciones, es la famosa ecuación de Black-Scholes. En el **Apartado 3.2**, abordaremos la solución de la ecuación en derivadas parciales para la valoración de opciones, que se basa en el teorema de Feynman-Kac. Este teorema conecta la solución de la ecuación de Black-Scholes con el cálculo del valor esperado descontado de la función de *payoff*, bajo la medida de riesgo neutro. Esta formulación del precio de una opción nos proporciona una solución semianalítica para la ecuación de Black-Scholes. A continuación, en el **Apartado 3.3**, presentaremos un experimento de cobertura.

Palabras clave de este capítulo: ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes para valoración de opciones, lema de Itô, teorema de Feynman-Kac, valor esperado descontado del payoff, martingala, cobertura.

3.1. Definición de opción

Una opción es un contrato financiero que proporciona a su poseedor el derecho de comprar o vender un activo subyacente en el futuro a un precio predeterminado. De hecho, el contrato de opción ofrece a su poseedor la «opcionalidad» para comprar o vender el activo; no existe ninguna obligación. Si el activo subyacente no evoluciona de manera favorable, el titular de la opción no tiene por qué ejercer la opción y, de esta forma, no tiene que comprar o vender el activo. Sin embargo, la contraparte del contrato de opción, el vendedor de la opción (también denominado «redactor» de la opción), sí está obligado a comprar o vender el activo cuando el titular hace uso de su derecho de ejercicio. Las opciones también se denominan «derivados financieros», ya que su valor deriva de la evolución de otro activo subyacente. Existen muchos tipos de contratos de opción. Desde 1973, las opciones estandarizadas se comercializan en mercados regulados. Las compañías financieras ofrecen opciones alternativas directamente a sus clientes.

3.1.1. Conceptos básicos sobre opciones

En términos generales, se distingue entre dos tipos de opciones, opciones de compra y opciones de venta. Una opción de compra u opción *call* proporciona a su poseedor el derecho de comprar un activo, mientras que una opción de venta u opción *put* proporciona a su poseedor el derecho a vender un activo, en un momento futuro, por una cantidad preestablecida, el precio de ejercicio o *strike*, habitualmente denotado por K .

En el caso de las denominadas «opciones europeas», se establece un tiempo futuro en el contrato de la opción, que se conoce como «fecha de vencimiento o ejercicio» (denotado por $t = T$), en la cual el titular de la opción puede decidir si comprar o vender el activo por el precio strike.

Ejemplo 3.1.1 (Ejemplo de opción call)

Consideramos un escenario concreto en el que un titular adquirió, en $t = t_0 = 0$, una opción call con fecha de ejercicio $T = 1$ y strike $K = 150$, donde el precio inicial del activo es $S_0 = 100$, véase Figura 3.1 (izquierda). Asumimos que ahora estamos en tiempo $t = t_0$. En el gráfico de la izquierda en la Figura 3.1 se representan dos escenarios futuros posibles para la trayectoria del precio del activo. Si se diese la trayectoria azul, el titular de la opción call ejercería la opción en tiempo $t = T$. En ese tiempo, el titular de opción pagaría K para recibir un activo de valor $S(T) = 250$. Vendiendo el activo inmediatamente en el mercado, el titular ganaría la cantidad positiva $250-150=100$.

Sin embargo, en caso de que se diese la trayectoria roja, la opción call no se ejercería, ya que el activo valdría menos que K en el mercado financiero. Como el contrato de opción proporciona la optionalidad de ejercer, no existe la necesidad de ejercer cuando $S(T) < K$ (¿por qué comprar algo por un precio K cuando es más barato en el mercado?).

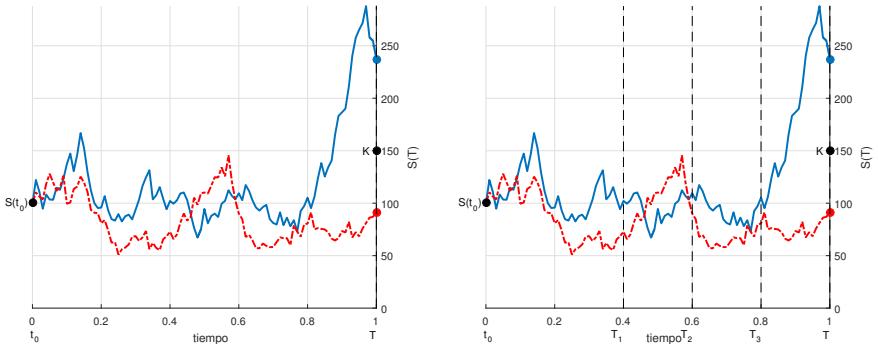


Figura 3.1: Evolución estocástica de un activo. Izquierda: representación de un contrato con un único punto de decisión. Derecha: contrato con más de un punto de decisión, $T_i, i = 1, \dots$



En general, el titular de una opción call europea ejercerá de manera lógica su derecho, siempre que el precio del activo en el vencimiento $t = T$ sea más grande que el precio strike, es decir, cuando $S(T) > K$. En caso de ejercicio, el titular de la opción pagará una cantidad K al vendedor, para obtener un activo valorado en $S(T)$. El beneficio en este caso es $S(T) - K$, ya que el activo puede ser inmediatamente vendido en el mercado financiero.

Si $S(T) < K$, el titular no ejercerá la opción call europea que, en esta situación, no tiene ningún valor. El titular de la opción podría comprar el activo por menos del precio strike K en el mercado financiero, así que no tendría sentido hacer uso del derecho que le proporciona el contrato de la opción.

Sea $H(T, S)$ la función de payoff. Entonces, el valor de la opción call, véase la Figura 3.2 (izquierda), es

$$V_c(T, S) = H(T, S) := \max(S(T) - K, 0), \quad (3.1)$$

donde $V_c(t, S)$ es el valor de la opción call en tiempo t para un cierto valor del activo $S = S(t)$.

La opción put se denotará por $V_p(t, S)$. De modo genérico, el valor de la opción se escribe como $V(t, S)$, sin especificar si se trata de una call o una put. A veces, también utilizaremos la notación $V(t, S; K, T)$, para enfatizar la dependencia del strike K y del vencimiento T , siempre y cuando sea de utilidad. En los capítulos que tratan las opciones sobre tipos de interés emplearemos simplemente la notación $V(t)$, ya que el valor de la opción puede depender de muchos argumentos (demasiados para mantener una notación ágil).

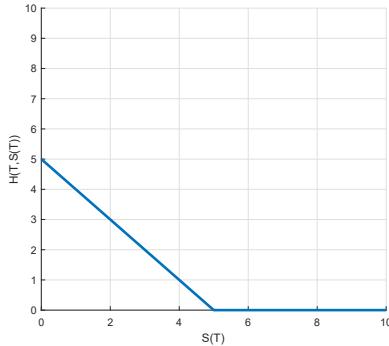
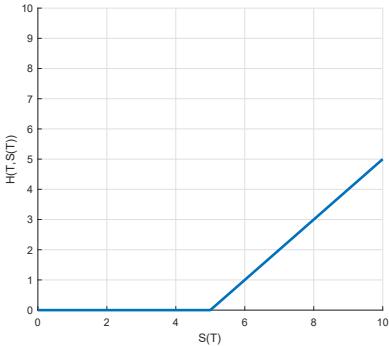


Figura 3.2: El payoff $H(T, S(T))$ de opciones europeas con strike K y vencimiento T . Izquierda: opción call. Derecha: opción put.

Una opción put europea proporciona a su poseedor el derecho de vender un activo en un vencimiento T por un precio strike K . Si el titular de la opción decide vender, el redactor estará entonces obligado a comprar el activo.

En la fecha de ejercicio, $t = T$, una opción put tiene el valor $K - S(T)$, si $S(T) < K$. La opción put expira sin valor si $S(T) > K$, véase Figura 3.2 (derecha), esto es

$$V_p(T, S(T)) = H(T, S(T)) := \max(K - S(T), 0), \quad (3.2)$$

donde $V_p(t, S(t))$ denota el valor de una opción put.

Definición 3.1.1

Las funciones de payoff de call y put son funciones convexas. Recordamos que una función $g(x)$ se dice «convexa» si

$$g(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta \cdot g(x_1) + (1 - \theta) \cdot g(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in [0, 1],$$

con \mathcal{C} un conjunto convexo en \mathbb{R} . Tenemos que

$$\max(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2, 0) \leq \theta \max(x_1, 0) + (1 - \theta) \max(x_2, 0), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in [0, 1].$$

La funciones \max en los payoffs, son operadores convexos, ya que las funciones 0 , $x - K$ y $K - x$ son todas convexas. ◀

Definición 3.1.2 (ITM, OTM, ATM)

Si, para un valor de activo subyacente, $S(t)$, en tiempo $t < T$, su correspondiente payoff es igual a cero ($\max(K - S(t), 0) = 0$, para una put), decimos que la opción está out-of-the-money (OTM). Su valor intrínseco ($K - S(t)$, para una put) es entonces igual a cero. Cuando el valor intrínseco de la opción es positivo, la opción se dice que está in-the-money (ITM). Cuando el valor

intrínseco de la opción está cercano a cero ($K - S(t) \approx 0$, para una put), nos referimos a ella como opción at-the-money (ATM). El razonamiento es similar para puts y calls, empleando las funciones de payoff apropiadas. ◀

Existen otros contratos de derivados financieros que incluyen el denominado «ejercicio anticipado», lo que significa que estas opciones se pueden ejercer en «más instantes» anteriores al vencimiento, $t = T$. Por ejemplo, en el caso de opciones call americanas, el ejercicio de la opción, esto es, pagar K para adquirir un activo de valor $S(t)$, está permitido «en cualquier instante de tiempo» durante la vida de la opción, $t_0 \leq t \leq T$, mientras que las opciones Bermuda pueden ser ejercidas «en ciertos instantes de tiempo», T_i , $i = 1, \dots, m$, hasta el vencimiento $T_m = T$ (véase el gráfico de la derecha en la Figura 3.1). Una opción americana es entonces el equivalente en tiempo continuo de una opción Bermuda, definida en tiempo discreto, suponiendo un número creciente de tiempos de ejercicio, $m \rightarrow \infty$, con intervalos de tiempo cada vez más pequeños, $\Delta t = \frac{T}{m} \rightarrow 0$. Las opciones sobre acciones que se comercializan en los mercados regulados son, generalmente, opciones americanas.

Otra clase de opciones son las denominadas «opciones exóticas», cuyas funciones de payoff suelen incluir alguna característica especial o exótica. Una de estas características puede ser la dependencia de algunos aspectos de la trayectoria de precios, donde el payoff no solo depende del precio de la acción $S(t)$ o $S(T)$, sino que también depende de ciertas funciones del precio en distintos instantes de tiempo. Estas opciones no se comercializan en los mercados regulados si no que se venden *over-the-counter* (OTC), lo que significa que son ofertadas directamente por bancos y otras compañías financieras a sus contrapartidas. Algunos de estos contratos se abordarán en los siguientes capítulos, incluyendo su correspondiente valoración eficiente. En Wilmott (1998); Wilmott *et al.* (1995); Hull (2012), podemos encontrar información para una variedad de opciones empleadas en finanzas, tales como opciones exóticas y opciones americanas.

Paridad put-call

La paridad put-call para opciones europeas representa un resultado fundamental en finanzas cuantitativas. Está basada en el siguiente razonamiento. Supongamos que tenemos dos carteras, una con una opción put europea y una acción, es decir, $\Pi_1(t, S) = V_p(t, S) + S(t)$, y una segunda cartera con una opción call europea comprada y el valor presente de una cantidad de dinero en efectivo K , es decir, $\Pi_2(t, S) = V_c(t, S) + K e^{-r(T-t)}$. El término $e^{-r(T-t)}$ representa el factor de descuento, esto es, el valor de 1€ pagado en tiempo T visto a día de hoy, y descontado, mediante capitalización continua, con un tipo de interés compuesto r . A vencimiento T , tenemos que

$$\Pi_1(T, S) = \max(K - S(T), 0) + S(T),$$

que es igual a K , si $S(T) < K$, y tiene valor $S(T)$, si $S(T) > K$. En otras palabras, $\Pi_1(T, S) = \max(K, S(T))$. La segunda cartera tiene exactamente el mismo valor en $t = T$, es decir, $\Pi_2(T, S) = \max(K, S(T))$.

Si $\Pi_1(T, S) = \Pi_2(T, S)$, entonces esta igualdad debería verificarse también en cualquier instante de tiempo anterior al vencimiento T . Si no fuese así, incurriremos obviamente en arbitraje, que consistiría en comprar la cartera más barata y vender la más cara de modo que, en algún $t < T$, recibiríamos una cantidad positiva de dinero en efectivo positiva de esta estrategia. En $t = T$, ambas carteras tendrán el mismo valor, de modo que comprando una de las carteras y vendiendo la otra en $t = T$, no repercutirá en ningún beneficio ni en ninguna pérdida en $t = T$, y el beneficio conseguido en $t < T$ se mantendría. Esto es un arbitraje, es decir, se obtiene un beneficio libre de riesgo mayor que el obtenido al depositar el dinero en una cuenta bancaria. Esto no se puede permitir. Entonces, para cualquier $t < T$, la paridad put-call, es decir,

$$V_c(t, S) = V_p(t, S) + S(t) - Ke^{-r(T-t)}, \quad (3.3)$$

se debe verificar. El tipo de interés r se supone constante.

Para el caso de una acción que paga dividendos, con un flujo continuo de dividendos, la paridad put-call también es válida, pero tiene que ser actualizada. Dado el precio de una acción, $S(t)$, su flujo de dividendos es $S(t)e^{-q(T-t)}$ que, al ser tenido en cuenta, resulta en una versión adaptada de la paridad put-call, dada por

$$V_c(t, S) = V_p(t, S) + S(t)e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}. \quad (3.4)$$

3.1.2. Ecuación en derivadas parciales

Una cuestión importante en finanzas cuantitativas es determinar cuál es el valor justo para una opción financiera en el momento de comercializarla, es decir, en $t = t_0$. En otras palabras, cómo determinar $V(t_0, S_0)$ o, más genéricamente, $V(t, S)$ para cualquier $t \geq t_0$. Otra cuestión es cómo el vendedor de una opción puede reducir el riesgo de intercambiar el activo $S(T)$ en tiempo $t = T$, para un strike fijo K . En otras palabras, ¿cómo gestionar el riesgo del vendedor de la opción?

Partiendo de la suposición de que el proceso de precios del activo $S(t)$ sigue un movimiento browniano geométrico, Black y Scholes (1973) dedujeron su famosa ecuación en derivadas parciales (EDP) para la valoración de opciones europeas, publicada en 1973 en la revista *Journal of Political Economy*. El modelo de Black-Scholes es uno de los modelos más importantes en la valoración de derivados financieros.

El desarrollo que veremos a continuación está basado en la suposición de que el tipo de interés r y volatilidad σ son constantes o funciones conocidas del tiempo. Además, se asume que el mercado es líquido, lo que significa que los activos se pueden comprar y vender en cualquier momento y en cantidades arbitrarias. La venta al descubierto está permitida, de tal modo que se pueden

considerar cantidades negativas de activo, y los costes de transacción no están incluidos (ni tampoco es un pago de dividendo durante la vida de la opción). En este modelo, no existe diferencia entre la oferta y la demanda ni para los precios de activos ni para los precios de opciones.

En este apartado, presentaremos las ideas principales del desarrollo llevado a cabo por Fisher Black y Myron Scholes. La obtención de la EDP de valoración se basa en el concepto de «cartera replicante», que se actualiza a cada paso de tiempo. El vendedor de la opción construye una cartera que, esencialmente, tiene los mismos flujos de dinero (pagos) que la opción que está vendiendo. Una cartera replicante puede ser una cartera estática o dinámica, dependiendo de si se necesita actualizar (reequilibrar) la posición financiera o no. Una cartera estática se construye después de vender el contrato financiero, y la cartera no cambia durante la vida del mismo. Una cartera dinámica se actualiza periódicamente, a partir de la nueva información disponible en el mercado. Aquí consideramos la denominada estrategia de cobertura delta dinámica con una cartera replicante que cambia (se reequilibra) dinámicamente.

Comenzamos con un proceso de precios, $S \equiv S(t)$, que representa el subyacente para el contrato de derivado financiero, $V \equiv V(t, S)$, el valor de una opción europea (también denominado derecho de contingencia *vanilla*). Se asume que el proceso de precios del subyacente sigue un MBG, con la dinámica bajo la medida del mundo real \mathbb{P} como en (2.1), es decir,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Como el precio de la opción $V(t, S)$ es una función del tiempo t y del proceso estocástico $S(t)$, obtenemos su dinámica con la ayuda del lema de Itô, dada por

$$\begin{aligned} dV(t, S) &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{P}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora, construimos una cartera $\Pi(t, S)$, que consta de una opción de valor $V(t, S)$ y una cantidad, $-\Delta$, de activo con valor $S(t)$, es decir,

$$\boxed{\Pi(t, S) = V(t, S) - \Delta S(t)}. \quad (3.6)$$

Así, esta cartera consta de una posición larga en la opción $V(t, S)$, y una posición corta de tamaño Δ en el subyacente $S(t)$.

Observación 3.1.1 (Venta al descubierto de acciones)

Cuando un trader mantiene un «número negativo» de acciones, implica que ha estado vendiendo acciones al descubierto. Intuitivamente, poseer una cantidad negativa de algo puede resultar bastante confuso. Si pides dinero prestado, entonces, en principio, posees una cantidad negativa de dinero, ya que el dinero tiene que ser devuelto en algún momento del futuro.

De manera similar, en la práctica financiera, la venta al descubierto significa que el trader pide prestadas las acciones a un corredor de bolsa, en un tiempo t , por una prima. Las acciones son inmediatamente vendidas, pero el trader tiene que devolver las acciones al corredor en algún tiempo futuro. \blacktriangle

Mediante el lema de Itô podemos obtener la dinámica para un cambio infinitesimal en el valor de la cartera $\Pi(t, S)$, basándonos en la dinámica del activo de (2.1), y que viene dada por

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ &\quad + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{P}} - \Delta [\mu S dt + \sigma S dW^{\mathbb{P}}] \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW^{\mathbb{P}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La cartera, a pesar de que está plenamente definida en función del activo y de la opción, puede tener fluctuaciones aleatorias, gobernadas por el movimiento browniano $W^{\mathbb{P}}$. Tomando

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}}, \tag{3.8}$$

el cambio infinitesimal de la cartera $\Pi(t, S)$, en tiempo dt , es

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt, \tag{3.9}$$

que es determinista¹, ya que los términos $dW^{\mathbb{P}}$ «se cancelan». Además, con Δ definido como en (3.8), la dinámica resultante de la cartera no contiene parámetro de deriva μ , que sí aparece en la dinámica de $S(t)$, bajo la medida del mundo real \mathbb{P} , en (2.1). El valor de la cartera aún depende de parámetro de volatilidad σ , que representa la incertidumbre sobre el comportamiento futuro de los precios. El valor de esta cartera tiene que, en media, crecer a la misma «velocidad» (es decir, producir el mismo retorno) que el dinero depositado en una cuenta de ahorros libre de riesgo. La cuenta bancaria $M(t) = M(t_0)e^{r(t-t_0)}$, se modela mediante $dM = rMdt$, que, para una cantidad $\Pi \equiv \Pi(t, S)$, se puede expresar como

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Aquí, r se corresponde con el tipo de interés constante sobre la cuenta de ahorros. Empleando las definición en (3.6) y la definición de Δ en (3.8), el

¹Por «determinista» queremos decir que el valor se define a partir de otras variables, que nota bene, son estocásticas, pero sin fuentes adicionales de aleatoriedad.

cambio de valor de la cartera es

$$d\Pi = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt. \quad (3.10)$$

Igualando las Ecuaciones (3.10) y (3.9), y dividiendo ambos lados por dt , se obtiene la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes para el valor de la opción $V(t, S)$, dada por

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0.} \quad (3.11)$$

La ecuación de Black-Scholes de (3.11) es una EDP parabólica. Con el signo «+» delante del término de difusión, $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, el problema formulado mediante esta EDP está bien definido siempre que se acompañe de una condición final. La condición natural para la EDP de Black-Scholes es, en efecto, una condición final, ya que sabemos que

$$V(T, S) = H(T, S),$$

donde $H(T, S)$ es la función de payoff, como en (3.1) para una opción call, o como en (3.2) para una opción put. Nótese que, salvo en la condición final, en la deducción de la ecuación de Black-Scholes no hemos especificado el tipo de opción. La ecuación se verifica para calls y puts, e incluso también para algún otro tipo de opciones.

La EDP en (3.11) se define en un semiespacio semiinfinito $(t, S) = [t_0 = 0, \dots, T] \cup [0, S \rightarrow \infty)$, y no cuenta con condiciones naturales en las fronteras exteriores. Al solucionar la EDP mediante un método numérico, el problema se debe restringir a un dominio computacional finito y, por lo tanto, necesitamos definir un dominio finito $(t, S) = [t_0 = 0, \dots, T] \cup [0, S_{max}]$. A continuación, se establecen unas condiciones de frontera apropiadas en $S = S_{max}$, así como en $S = 0$, lo que es fácilmente interpretable desde un punto de vista económico (ya que contamos con información sobre el valor de una call o una put cuando $S(t) = 0$ o cuando $S(t)$ es grande).

Resolviendo la ecuación de Black-Scholes, determinaremos el valor justo del precio de la opción para cualquier tiempo $t \in [0, T]$, y para cualquier precio de acción futuro $S(t) \in [0, S_{max}]$. La solución de la EDP de Black-Scholes se abordará en detalle cuando introduzcamos el teorema de Feynman-Kac.

Parámetros de cobertura

Además del valor de la opción, otra información importante para su vendedor son los denominados «parámetros de cobertura», conocidos como las griegas de la opción. Estas cantidades determinan la «sensibilidad» del valor de opción con respecto a pequeños cambios en los parámetros del problema o en las variables independientes, como el activo S , o la volatilidad σ .

De hecho, ya nos hemos encontrado con la «delta» de una opción, $\Delta = \partial V / \partial S$, en (3.8), donde representaba la tasa de cambio en el valor de la opción con respecto a cambios en S . En una cartera replicante, en la que se usan acciones para cubrir la opción, Δ es la cantidad de acciones que se tendrían que conservar por parte del vendedor por cada opción emitida para afrontar el posible ejercicio del contrato por parte del titular en tiempo $t = T$. Un valor negativo implica que se debería llevar a cabo una venta al descubierto de acciones. La sensibilidad de la delta de una opción se conoce como la «gamma» de la opción, cuya definición es

$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}.$$

Un cambio en la delta representa un indicio sobre la estabilidad de una cartera de cobertura. Para valores pequeños de gamma, puede que el redactor no necesite actualizar la cartera frecuentemente, ya que el impacto de cambiar el número de acciones (Δ) parece pequeño. Sin embargo, cuando la gamma de una opción es grande indica que la cartera de cobertura está libre de riesgo solo a corto plazo. Existen muchos otros parámetros de cobertura importantes, que encontraremos más adelante en el libro.

Dividendos

La suposición de que no se realizan pagos de dividendos sobre los activos en el desarrollo de la ecuación de Black-Scholes se puede relajar. Como ya hemos dicho, en el momento en el que se paga un dividendo, se produce una caída en el valor del activo, véase (2.21). El valor de una opción sobre un activo que paga dividendos también se ve afectado por los mismos, de modo que el análisis de Black-Scholes debe ser modificado para tener en cuenta estos pagos por dividendo. Una rentabilidad por dividendo proporcional y constante de tamaño $qS(t)$ con $q < 1$, como en (2.21), se considera un modelo satisfactorio para opciones sobre índices bursátiles de tipo europeo. El pago de dividendos también tiene impacto en la cartera de cobertura. Como recibimos $qS(t)dt$ para cada activo en cartera y poseemos $-\Delta$ del subyacente, la cartera cambia a razón de $-qS(t)\Delta dt$, por lo que tenemos que reemplazar (3.7) por

$$d\Pi = dV - \Delta dS - qS \Delta dt.$$

Entonces, basándonos en los mismos argumentos, podemos deducir la EDP de Black-Scholes incluyendo un flujo continuo de pagos de dividendos, dada por

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.} \quad (3.12)$$

3.1.3. Método de martingala y valoración de opciones

Presentamos un procedimiento alternativo para deducir la EDP de Black-Scholes basada en las propiedades de las martingalas.

Asumiendo que el activo evoluciona de acuerdo con el modelo MBG en riesgo neutro definido en (2.1), relacionamos el problema de valoración con el hecho de satisfacer la propiedad de martingala para el precio descontado de la opción, esto es

$$\frac{V(t_0, S)}{M(t_0)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(T, S)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (3.13)$$

donde $M(t_0)$ es la cuenta de ahorros en tiempo t_0 , $M(t_0) = 1$ y $\mathcal{F}(t_0) = \sigma(S(s); s \leq t_0)$.

Como las opciones financieras son productos negociables, en (3.13) se define un contrato de opción descontado como una martingala, donde se deberían satisfacer las propiedades de martingala habituales. Propiedades como que el valor esperado de una martingala tiene que ser igual al valor actual, lo que implica ausencia de arbitraje al valorar estos contratos financieros.

Asumimos que existe una función derivable, $\frac{V(t, S)}{M(t)}$, tal que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(T, S)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{V(t, S)}{M(t)}. \quad (3.14)$$

Denotando $M \equiv M(t)$ y $V \equiv V(t, S)$, el valor descontado de la opción, V/M , debe ser una martingala y su dinámica puede obtenerse como

$$d \left(\frac{V}{M} \right) = \frac{1}{M} dV - \frac{V}{M^2} dM = \frac{1}{M} dV - r \frac{V}{M} dt. \quad (3.15)$$

Los términos de orden alto, como $(dM)^2 = O(dt^2)$, se han omitido en (3.15), ya que convergen a cero rápidamente con pasos de tiempo infinitesimalmente pequeños.

Para el cambio infinitesimal dV de $V(t, S)$, tenemos que, bajo la medida \mathbb{Q} y empleando el lema de Itô (3.5),

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{Q}}. \quad (3.16)$$

Como $\frac{V(t, S)}{M(t)}$ tiene que ser una martingala, el Teorema 1.3.5 establece que la dinámica de $\frac{V(t, S)}{M(t)}$ «no debería» tener términos en dt . Sustituyendo (3.16) en (3.15), y haciendo que el término que multiplica a dt sea igual a cero, obtenemos

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) - r \frac{V}{M} = 0, \quad (3.17)$$

asegurando que los términos en dt son cero. Multiplicando ambos lados de (3.17) por M resulta la EDP de Black-Scholes (3.11). Se puede encontrar más información sobre métodos basados en martingalas en Pascucci (2011).

3.2. El teorema de Feynman-Kac y el modelo de Black-Scholes

Existen varios métodos para resolver la EDP de Black-Scholes en (3.11). Aquí estamos particularmente interesados en la solución mediante la fórmula de Feynman-Kac, dada por el siguiente teorema, ya que constituye la base para la obtención de una expresión en forma cerrada para el valor de la opción. Se puede generalizar para valorar derivados bajo otras dinámicas de precios del activo, y es el punto de partida para la valoración de opciones mediante técnicas de Fourier (Capítulo 6) así como para la valoración mediante métodos de Monte Carlo (Capítulo 9).

Existen diferentes versiones del teorema de Feynman-Kac, ya que el teorema se desarrolló originalmente en el contexto de aplicaciones físicas. Empezamos con la versión del teorema relacionada con la valoración de opciones vista hasta ahora, en la que consideraremos un tipo de interés determinista r .

Teorema 3.2.1 (Teorema de Feynman-Kac)

Dada la cuenta de ahorros, modelada por $dM(t) = rM(t)dt$, con un tipo de interés constante r , sea $V(t, S)$ una función suficientemente derivable del tiempo t y del precio $S = S(t)$. Suponemos que $V(t, S)$ satisface la ecuación en derivadas parciales, con un término de deriva genérico, $\bar{\mu}(t, S)$, y un término de volatilidad, $\bar{\sigma}(t, S)$, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}(t, S) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (3.18)$$

y con una condición final dada por $V(T, S) = H(T, S)$. La solución $V(t, S)$ para cualquier tiempo $t < T$ es

$$V(t, S) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, S) | \mathcal{F}(t)] =: M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{H(T, S)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]$$

donde la esperanza se toma bajo la medida \mathbb{Q} con respecto a un proceso, S , que está definido por

$$dS(t) = \bar{\mu}(t, S)dt + \bar{\sigma}(t, S)dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad t > t_0. \quad (3.19)$$

Demostración. Presentamos un esbozo de la demostración. Consideraremos el término

$$\frac{V(t, S)}{M(t)} = e^{-r(t-t_0)} V(t, S),$$

para el que obtenemos la dinámica

$$d(e^{-r(t-t_0)} V(t, S)) = V(t, S) d(e^{-r(t-t_0)}) + e^{-r(t-t_0)} dV(t, S). \quad (3.20)$$

Denotando $V := V(t, S)$, $S := S(t)$, $\bar{\mu} := \bar{\mu}(t, S)$, $\bar{\sigma} := \bar{\sigma}(t, S)$ y $W^{\mathbb{Q}} := W^{\mathbb{Q}}(t)$, y aplicando el lema de Itô a $V := V(t, S)$, obtenemos

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu} \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \bar{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{Q}}.$$

Multiplicando (3.20) por $e^{r(t-t_0)}$ y sustituyendo la expresión anterior en ella, tenemos que

$$e^{r(t-t_0)} d(e^{-r(t-t_0)} V) = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu} \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right)}_{=0} dt + \bar{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} dW^Q,$$

donde el término que acompaña a dt es igual a cero, ya que este aparece igualado a cero en el teorema, véase la EDP de partida en (3.18). Integrando a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d(e^{-r(t-t_0)} V(t, S)) &= \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} dW^Q(t) \Leftrightarrow \\ e^{-r(T-t_0)} V(T, S) - V(t_0, S) &= \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} dW^Q(t). \end{aligned}$$

A continuación, tomamos esperanzas con respecto a la medida \mathbb{Q} en ambos lados de esta ecuación, y reescribimos la expresión como

$$\begin{aligned} V(t_0, S) &= \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t_0)} V(T, S) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E}^Q \left[\int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma} \frac{\partial V}{\partial S} dW^Q(t) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Según las propiedades de la integral de Itô, definida como en (1.23), $I(t_0) = 0$ e $I(t) = \int_0^t g(s) dW^Q(s)$ son una martingala, lo que resulta en que $\mathbb{E}^Q[I(t)|\mathcal{F}(t_0)] = 0$ para todo $t \geq t_0$. Por tanto, la esperanza de la integral de Itô, para el proceso de Wiener $W^Q(t)$, es igual a cero, obteniendo

$$V(t_0, S) = \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t_0)} V(T, S) | \mathcal{F}(t_0)] = \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t_0)} H(T, S) | \mathcal{F}(t_0)].$$

Así, concluye el esbozo de la demostración. ■

Mediante el teorema de Feynman-Kac podemos transformar el problema de «resolver» la EDP de Black-Scholes, que se conoce para ciertas elecciones específicas de los términos de deriva $\bar{\mu}(t, S) = rS$ y difusión $\bar{\sigma}(t, S) = \sigma S$, en el cálculo de una esperanza sobre una función de payoff descontado bajo la medida \mathbb{Q} . En Pelsser (2000), por ejemplo, se puede encontrar una descripción completa del teorema de Feynman-Kac y sus diferentes propiedades.

Observación 3.2.1 (Modelo MBG: coordenadas logarítmicas)

El teorema de Feynman-Kac, como se ha presentado en el Teorema 3.2.1, también se verifica con coordenadas logarítmicas, es decir, cuando $X(t) = \log S(t)$. Con este cambio de variable, la EDP de Black-Scholes resultante (transformada logarímicamente) es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) - rV = 0, \quad (3.21)$$

que viene acoplada con una función de payoff transformada, $V(T, X) = H(T, X)$. El teorema de Feynman-Kac nos proporciona, para $\bar{\mu} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)$ y $\bar{\sigma} = \sigma$, la representación del valor de la opción dada por

$$V(t, X) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, X) | \mathcal{F}(t)],$$

donde $H(T, X)$ especifica la condición terminal en coordenadas logarítmicas, $X(t) = \log S(t)$, y

$$X(t) = d \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (3.22)$$

▲

Nótese que hemos utilizado la misma notación, $V(\cdot, \cdot)$, para el valor de una opción cuando el precio del activo es la variable independiente, es decir, $V(t, S)$, que cuando utilizamos precio transformado como variable independiente, esto es $V(t, X)$. Por el contexto, quedará claro cómo está definida la opción. En cuanto a la condición terminal, también utilizamos $H(\cdot, \cdot)$ para las funciones de payoff de call y put en coordenadas logarítmicas, esto es $H(T, X) = H_c(T, X) = \max(e^X - K, 0)$ y $H(T, X) = H_p(T, X) = \max(K - e^X, 0)$, respectivamente. A lo largo del libro, utilizaremos a menudo $\tau = T - t$, lo que es práctica habitual y está relacionado con el hecho de que las personas estamos acostumbradas a que el tiempo «pase hacia adelante». De este modo, conocemos la función de payoff en $\tau = 0$ pero no conocemos su valor en $\tau = T - t_0$. Por supuesto, como $d\tau = -dt$, se debe añadir un signo menos cuando aparezcan derivadas con respecto a τ .

3.2.1. Soluciones analíticas para precios de opciones

A continuación, se muestran algunos resultados, obtenidos vía el teorema de Feynman-Kac, que proporcionan una solución analítica para opciones europeas con distintas funciones de payoff y bajo la dinámica de Black-Scholes.

Teorema 3.2.2 (Opciones call y put europeas)

Se puede obtener una solución en forma cerrada de la EDP de Black-Scholes (3.11) para una opción call europea con un strike K constante y $H_c(T, S) = \max(S(T) - K, 0)$. El valor de la opción para cualquier tiempo t (en particular, también para «hoy», es decir, $t = t_0$), bajo el modelo de Black-Scholes, de una opción call se puede escribir como

$$\begin{aligned} V_c(t, S) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}(t)] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T) \mathbf{1}_{S(T)>K} | \mathcal{F}(t)] - e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [K \mathbf{1}_{S(T)>K} | \mathcal{F}(t)]. \end{aligned}$$

La solución viene dada por

$$V_c(t, S) = S(t) F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K e^{-r(T-t)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2), \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \end{aligned}$$

donde $F_{\mathcal{N}(0,1)}(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Es sencillo comprobar que, en efecto, esta es la solución buscada, mediante sustitución en la EDP de Black-Scholes.

De modo similar, para una opción put europea, tenemos que

$$V_p(t, S) = K e^{-r(T-t)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_2) - S(t) F_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1),$$

con d_1 y d_2 definidos anteriormente. Esta solución también se puede obtener a partir del proceso transformado logarítmicamente, escribiendo (3.22) en forma integral.

Definición 3.2.1 (Expresión en forma cerrada para Δ)

La griega delta viene dada por $\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$. Derivando el precio de la opción obtenido en el Teorema 3.2.2, tenemos:

- Para opciones call

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial S} V_c(t, S) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1). \quad (3.24)$$

- Para opciones put

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S} V_p(t, S) \\ &= -F_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La expresión de d_1 viene dada en el Teorema 3.2.2.

En concreto, estamos interesados en los valores de las griegas, en $t = t_0$, es decir, para $S = S_0$. ◀

Ejemplo 3.2.1 (Solución de Black-Scholes)

En este ejemplo presentamos una superficie de valores de opción. Para este propósito, consideraremos una opción call con la siguiente configuración:

$$S_0 = 10, r = 0.05, \sigma = 0.4, T = 1, K = 10.$$

Una vez que los parámetros de problema han sido fijados, se pueden calcular los valores de la opción para cualquier tiempo t y precio de acción $S(t)$, mediante la solución en (3.23). Representando los valores de la opción call $V_c(t, S)$ en un plano (t, S) , obtenemos la superficie de la Figura 3.3. Partiendo de la solución

en forma cerrada, calculada mediante la fórmula de Black-Scholes, se pueden determinar fácilmente la primera y segunda derivadas con respecto al valor de la opción, es decir, la delta y la gamma de la opción. Se incluyen en la misma figura. Cuando el precio de la acción cambia en algún instante, $t > t_0$, podemos «leer» los valores de la correspondiente opción, así como sus griegas, véase la Figura 3.3. Primero, se obtiene la superficie de valores de la opción y, luego, los precios observados del subyacente se proyectan sobre la superficie.

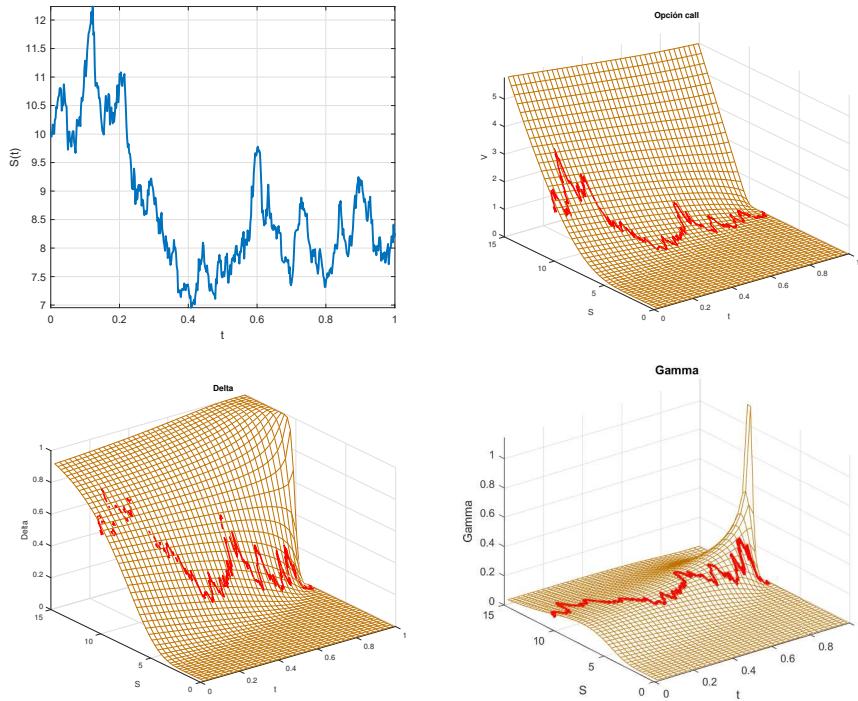


Figura 3.3: Ejemplo de una opción call con fecha de ejercicio $T = 1$. Superficie de la opción $V_c(t, S)$ en el dominio (t, S) . Una trayectoria del activo interseca la superficie de modo que, en cada punto (t, S) , se puede extraer el correspondiente valor de la opción $V_c(t, S)$. También se representan las superficies para los parámetros de cobertura delta y gamma, con el precio del activo proyectado.



Representamos también la superficie correspondiente a una opción put $V_p(t, S)$ en el plano (t, S) , en la Figura 3.4.

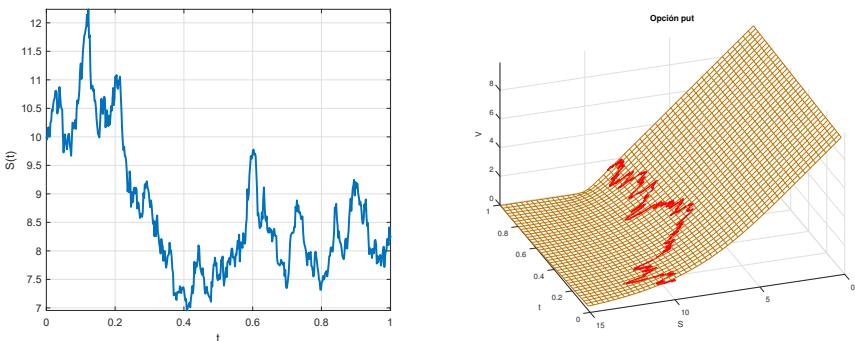


Figura 3.4: Ejemplo de una opción put. Superficie de la opción $V_p(t, S)$ en el dominio (t, S) , donde se incluye la trayectoria de un activo proyectado sobre la misma.



Opción digital

Como primer contrato de opción distinto de las opciones europeas estándar put y call, introducimos las opciones digitales, también llamadas opciones binarias o de todo o nada (del inglés cash-or-nothing). Las opciones digitales son populares para cobertura y especulación. También son útiles para definir contratos de opciones más complejos. Consideramos el payoff de una opción call digital todo o nada, cuyo valor es igual a 0 para $S(T) \leq K$ e igual a K si $S(T) > K$, véase la Figura 3.5 (izquierda). Entonces, el precio en tiempo t viene dado por

$$\begin{aligned} V(t, S) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [K \mathbf{1}_{S(T)>K} | \mathcal{F}(t)] \\ &= e^{-r(T-t)} K \mathbb{Q}[S(T) > K], \end{aligned}$$

ya que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{S(T)>K}] := \mathbb{Q}[S(T) > K]$.

Por tanto, el valor de la call todo o nada bajo la dinámica de Black-Scholes es

$$V(t, S) = K e^{-r(T-t)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2), \quad (3.26)$$

con d_2 definido en el Teorema 3.2.2. De manera similar, podemos deducir una expresión para la solución de una opción «activo o nada», con una función de payoff como en la Figura 3.5 (derecha).

3.2.2. Función de Green y función característica

Partiendo del teorema de Feynman-Kac, se pueden obtener otros resultados y soluciones interesantes, mediante una elección conveniente de la condición final

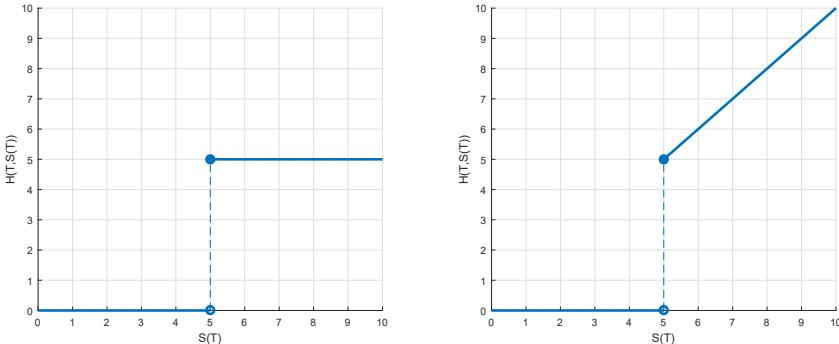


Figura 3.5: Funciones de payoff. Izquierda: opción call todo o nada con $K\mathbb{1}_{S(T)\geq K}$ y $K = 5$. Derecha: opción call activo o nada con $S(T)\mathbb{1}_{S(T)\geq K}$ y $K = 5$.

$H(\cdot, \cdot)$, véase Heston (1993). Eligiendo, por ejemplo²,

$$H(T, X) := \mathbb{1}_{X(T) \geq \log K},$$

la solución de la correspondiente EDP es la probabilidad condicionada de que $X(T)$ sea más grande que $\log K$.

Consideramos ahora la forma para la condición final³ dada por

$$\phi_X(u; T, T) = H(T, X) = e^{iuX(T)}.$$

Por el teorema de Feynman-Kac, la solución para $\phi_X := \phi_X(u; t, T)$ es

$$\phi_X(u; t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuX(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad (3.27)$$

lo que, por definición, es la función característica «descontada» de $X(t)$.

Entonces sabemos que $\phi_X(u; t, T)$ es solución de la EDP

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial \phi_X}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \phi_X}{\partial X^2} - r\phi_X = 0, \quad (3.28)$$

con condición terminal $\phi_X(u; T, T) = e^{iuX(T)}$.

En el Capítulo 6, emplearemos la función característica descontada bajo el el proceso MBG transformado logarítmicamente, dada por

$$\phi_X(u; t, T) = \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) iu\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \tau - r\tau + iuX \right], \quad (3.29)$$

²Naturalmente, se verifica que $\mathbb{1}_{X(T) \geq \log K} = \mathbb{1}_{S(T) \geq K}$.

³Para enfatizar que consideramos una función característica, utilizamos $\phi_X(u; t, T)$ en vez de H .

con $\tau = T - t$. Para un proceso estocástico $X(t)$, $t > 0$, denotamos su función característica por $\phi_X(u; t, T)$ o simplemente $\phi_X(u, \tau)$ con $\tau = T - t$.

Para la mayoría de modelos estocásticos de activos subyacentes, la función densidad es desconocida. Sin embargo, para muchos de ellos se conoce su función característica (véase la definición en (1.4)), o su función característica descontada, con la que se puede recuperar únicamente la función de densidad de transición asociada.

Función de Green

Mediante el teorema de Feynman-Kac, somos capaces de establecer conexiones entre una EDP y la formulación integral de una solución. Análogamente, podemos relacionar otra terminología EDP, por ejemplo la función de Green, con la formulación integral de la solución de la EDP. Veremos que, en efecto, esta está relacionada con la función de densidad del precio del activo. Además, gracias al teorema de Feynman-Kac, podemos obtener la función característica, necesaria para la valoración de opciones mediante técnicas de Fourier, como veremos en próximos capítulos.

Entonces, aplicando el teorema de Feynman-Kac, bajo la suposición de un tipo de interés constante, podemos expresar el valor de una opción europea como

$$V(t_0, x) = e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} H(T, y) f_X(T, y; t_0, x) dy, \quad (3.30)$$

donde $f_X(T, y; t_0, x)$ representa la función de densidad de probabilidad «de transición» (en coordenadas logarítmicas) del estado $\log S(t_0) = X(t_0) = x$ en tiempo t_0 , al estado $\log S(T) = X(T) =: y$ en tiempo T . De hecho, si tomamos $t_0 = 0$ y valor inicial x constante, tenemos la función de densidad de probabilidad marginal.

Estudiando (3.30) más detenidamente, observamos que, su solución fundamental, denotada aquí por $G_X(T, y; t_0, x) := e^{-r(T-t_0)} f_X(T, y; t_0, x)$, multiplicada por la condición final $V(T, y) \equiv H(T, y)$, tiene forma de convolución. La solución a la EDP en (3.21) se puede obtener, a partir de esta solución fundamental, mediante el teorema de Feynman-Kac. La solución fundamental $e^{-r(T-t_0)} f_X(T, y; t_0, x)$ se puede interpretar como la función de Green asociada al problema de valor final parabólico

$$\begin{cases} -\frac{\partial f_X}{\partial \tau} + r \frac{\partial f_X}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{\partial f_X}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_X}{\partial x^2} \right) - rf_X = 0, \\ f_X(T, y; T, y) = \delta(y - \log K), \end{cases} \quad (3.31)$$

con $\delta(y - \log K)$ la función delta de Dirac, que es distinta de cero para $y := X(T) = \log K$ y 0 en otro caso, y su integral es igual a uno, véase (1.17).

La función de Green asociada a la EDP de Black-Scholes (en espacio logarítmico) es igual a una función de densidad de probabilidad normal «descontada» , es decir,

$$G_X(T, X(T); t_0, x) = \frac{e^{-r(T-t_0)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t_0)}} \times \exp\left(-\frac{(X(T) - x - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0))^2}{2\sigma^2(T-t_0)}\right). \quad (3.32)$$

En finanzas, la función de Green para valoración de derivados, esto es, la densidad de probabilidad descontada a riesgo neutro, recibe el nombre de modelo de Arrow-Debreu. Podemos expresar explícitamente la función de Green para el operador de Black-Scholes «en las coordenadas originales», (S, t) , es decir, para $y = S(T)$, $x = S(t_0)$, tenemos que

$$G_S(T, y; t_0, x) = \frac{e^{-r(T-t_0)}}{\sigma y \sqrt{2\pi(T-t_0)}} \exp\left(-\frac{(\log\left(\frac{y}{x}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0))^2}{2\sigma^2(T-t_0)}\right), \quad (3.33)$$

véase también (2.20). Las funciones de densidad y las funciones de Green se conocen en forma cerrada solo para ciertos modelos estocásticos bajo dinámicas de subyacente básicas.

Modelo de Arrow-Debreu y densidad implícita de mercado

Una opción mariposa *spread* es una estrategia de opciones que le puede proporcionar al titular un beneficio predeterminado siempre y cuando el precio del activo se mantenga dentro de un cierto rango. Con $S(t_0) = K$, la opción mariposa spread se define mediante dos opciones call largas, una con strike $K_1 = K - \Delta K$, otra con strike $K_3 = K + \Delta K$, $\Delta K > 0$, y, simultáneamente, dos opciones call cortas con strike $K_2 = K$. Todas las opciones, individualmente, tienen el mismo vencimiento $t = T$, dando lugar al payoff

$$V_B(T, S; K_2, T) = V_c(T, S; K_1, T) + V_c(T, S; K_3, T) - 2V_c(T, S; K_2, T),$$

véase Figura 3.6.

A vencimiento $t = T$, esta construcción dará beneficios si el activo $S(T) \in [K - \Delta K, K + \Delta K]$ (la mariposa spread tiene un valor de cero si $S(T) < K - \Delta K$ o si $S(T) > K + \Delta K$). Como la opción mariposa es una combinación lineal de payoffs de opción individuales, verifica la EDP de Black-Scholes, siempre y cuando el precio $S(t)$ esté modelado por un MBG⁴.

⁴De hecho, este resultado se verifica para cualquier dinámica de S , no es específico para el MBG.

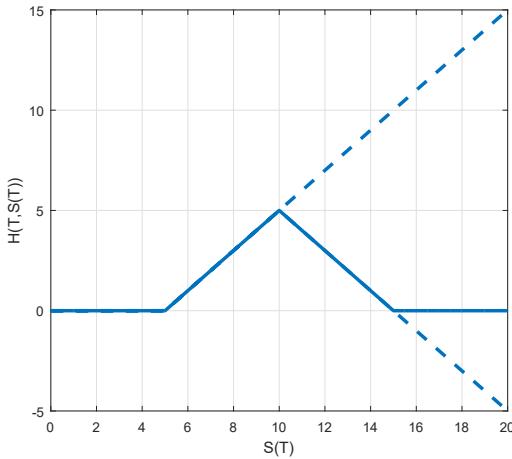


Figura 3.6: Función de payoff de la opción mariposa spread, con $K_1 = 5$, $K_2 = 10$ y $K_3 = 15$.

La opción mariposa spread en tiempo $t = t_0$ se calcula como⁵

$$V_B(t_0, S; K, T) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_B(T, S; K, T) | \mathcal{F}(t_0)], \quad (3.34)$$

empleando el teorema de Feynman-Kac. La opción mariposa está relacionada con el modelo Arrow-Debreu, $V_{AD}(t, S)$, un título imaginario que paga una unidad a vencimiento $t = T$, si $S(T) \equiv K$. En otro caso, el payoff es cero, es decir, $V_{AD}(T, S) = \delta(S(T) - K)$. El modelo de Arrow-Debreu se puede construir mediante tres opciones call europeas (como la opción mariposa spread V_B) de la forma

$$\begin{aligned} V_{AD}(T, S; K, T) := & \frac{1}{\Delta K^2} [V_c(T, S; K - \Delta K, T) + V_c(T, S; K + \Delta K, T) \\ & - 2V_c(T, S; K, T)], \end{aligned}$$

para un $\Delta K > 0$ pequeño, con $V_c(t, S; K, T)$ representando el valor de una call europea en tiempo t , con strike K , y vencimiento T .

Nótese que para $\Delta K \rightarrow 0$, tenemos que

$$V_{AD}(T, S; K, T) = \frac{\partial^2 V_c(T, S; K, T)}{\partial K^2}.$$

⁵ Añadimos explícitamente la dependencia en el valor de la opción del strike K en la lista de argumentos de la opción.

Por otro lado, en el límite $\Delta K \rightarrow 0$, también tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta K \rightarrow 0} V_{AD}(t_0, S; K, T) &= \lim_{\Delta K \rightarrow 0} e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{AD}(T, S; K, T) | \mathcal{F}(t_0)] \\
&= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(S(T) - K) | \mathcal{F}(t_0)] \\
&= e^{-r(T-t_0)} \int_0^{\infty} f_S(T, S(T); t_0, S_0) \delta(S(T) - K) dS(T) \\
&= e^{-r(T-t_0)} f_S(T, K; t_0, S_0),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $\delta(S(T) - K)$ es la función delta de Dirac, que es distinta de cero cuando $S(T) = K$, y $f_S(T, K; t_0, S_0)$ es la densidad de transición en riesgo neutro con $S(T) \equiv K$. Las densidades de transición modelan la evolución de una densidad de probabilidad a través del tiempo, por ejemplo, entre los instantes de tiempo s y t . Aquí hemos utilizado el instante de tiempo $s = t_0$, lo que realmente proporciona una distribución marginal (la densidad de la distribución marginal es una densidad de transición especial, para $s = t_0$).

La expresión anterior muestra una relación directa entre la densidad del activo y la opción mariposa spread. A partir de ella, podemos analizar si se verifican las propiedades conocidas de las funciones de densidad (no negatividad, integración a uno) para, por ejemplo, precios de opción observados en los mercados financieros. Esta relación será estudiada en el Capítulo 4 donde se introducirán los modelos de volatilidad local.

3.2.3. Alternativas para la volatilidad

Una de las posibles generalizaciones del modelo de Black-Scholes, que ya se ha introducido en (2.23), consiste en imponer un coeficiente de volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$, en lugar de una volatilidad constante.

Como los precios MBG transformados logarítmicamente están normalmente distribuidos, simplemente se necesita equiparar los dos primeros momentos para garantizar la igualdad en distribución. En el Ejemplo 2.2.1 se especifican (para procesos MBG) las condiciones necesarias para que un modelo con volatilidad dependiente del tiempo y uno con volatilidad constante tengan los dos primeros momentos idénticos. Esto implica que los valores de la opción europea bajo un modelo de Black-Scholes con volatilidad dependiente del tiempo son idénticos a los valores de la opción obtenidos con un modelo transformado logarítmicamente empleando la función de volatilidad constante «ponderada en tiempo», dada por

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt}.$$

Así, la valoración de opciones europeas bajo el modelo MBG para activos con una volatilidad dependiente del tiempo puede realizarse utilizando el coeficiente de volatilidad constante σ_* obtenido en (2.25), ya que los dos primeros

momentos son idénticos. La diferencia entre los dos modelos es sutil y solo se observa al valorar opciones exóticas (por ejemplo, opciones dependientes de la trayectoria).

Esperanzas iteradas y volatilidad estocástica

Presentamos otra aplicación importante, utilizada habitualmente en finanzas, de la ley de la esperanza total. En este ejemplo, asumimos que el precio del activo evoluciona de acuerdo con la EDE

$$dS(t) = rS(t)dt + Y(t)S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

donde $Y(t)$ representa un cierto proceso de «volatilidad estocástica» que sigue, por ejemplo, una distribución lognormal. Después de unos cálculos básicos, obtenemos la solución

$$S(T) = S_0 \exp \left(\int_{t_0}^T \left(r - \frac{1}{2}Y^2(t) \right) dt + \int_{t_0}^T Y(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) \right). \quad (3.36)$$

Como la Expresión (3.36) contiene integrales sobre el proceso $Y(t)$, determinar una solución en forma cerrada para el valor de una opción europea no es trivial⁶. Una posible solución para el problema de valoración surge de utilizar la ley de la esperanza total para determinar los precios de la opción europea, condicionados a «realizaciones» del proceso de volatilidad $Y(t)$. Así, empleando la ley de la esperanza total, con $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$, el valor de la call europea se puede reformular como una esperanza descontada⁷, dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max(S(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] &= \\ \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\max(S(T) - K, 0) \middle| Y(t), t_0 \leq t \leq T \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Condicionado a las realizaciones del proceso de volatilidad, el cálculo de la esperanza interior es equivalente a la solución de Black-Scholes con una volatilidad dependiente del tiempo, es decir, para unas realizaciones de $Y(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ dadas, el valor del activo $S(T)$ en (3.36) es

$$S(T) = S(t_0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_*^2 \right) (T - t_0) + \sigma_*(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t_0)) \right),$$

con

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T Y^2(t)dt.$$

⁶Si $Y(t)$ está normalmente distribuido, el modelo se denomina modelo de Schöbel-Zhu, y si $Y(t)$ sigue un proceso Cox-Ingersol-Ross (CIR), el sistema se denomina modelo de Heston. Se describirán en el Capítulo 8.

⁷Se omite el término de descuento $M(T)$, se muestra solo la esperanza para ahorrar espacio. Los tipos de interés en este modelo son constantes y no influyen en el resultado final.

Entonces, la solución para la esperanza interior de la expresión (3.37) es

$$\mathbb{E} \left[\max(S(T) - K, 0) \mid \{Y(t)\}_{t_0}^T \right] = S(t_0) e^{r(T-t_0)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{S(t_0)}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma_*^2)(T - t_0)}{\sigma_* \sqrt{T - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_* \sqrt{T - t_0},$$

siendo $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ la función de distribución acumulada de la normal estándar. Ahora, podemos sustituir estos resultados en (3.37), obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\max(S(T) - K, 0)] &= \mathbb{E} \left[S(t_0) e^{r(T-t_0)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \right] \\ &= S(t_0) e^{r(T-t_0)} \mathbb{E} [F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1)] - K \mathbb{E} [F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2)]. \end{aligned}$$

El problema de valoración de opciones bajo esta dinámica no trivial para el activo se ha transformado en el cálculo de la esperanza de la FDA de una normal. La dificultad de esta esperanza radica en que ambos argumentos de la FDA, d_1 y d_2 , son funciones de σ_* , que, a su vez, es una función del proceso $Y(t)$. Una posibilidad para abordar el cálculo de la esperanza es utilizar simulación de Monte Carlo, que se describe en el Capítulo 9. Otra posibilidad sería introducir una aproximación, por ejemplo, $F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \approx g(x)$ (como se ha propuesto en Piterbarg (2005a)), donde $g(x)$ es una función de la forma $g(x) = un + be^{-cx}$.

3.3. Cobertura delta bajo el modelo de Black-Scholes

En este apartado introducimos la estrategia de cobertura delta y el reequilibrio de una cartera financiera. El objetivo principal de la cobertura es eliminar el riesgo o, al menos, mitigarlo cuando su eliminación completa no es posible. La manera más fácil de eliminar el riesgo es compensar la operación. La denominada «transacción *back-to-back*» elimina el riesgo asociado con movimientos del mercado. La idea principal de este tipo de transacción se describe a continuación. Suponemos que una institución financiera vende un derivado financiero a una contrapartida. El valor de este derivado variará según los movimientos del mercado. Una manera de eliminar el impacto de tales movimientos es comprar un derivado «exactamente igual», o muy similar, a otra contrapartida. Uno se puede preguntar sobre el sentido de comprar y vender los mismos derivados al mismo tiempo. Se puede obtener un beneficio al vender el derivado con alguna prima adicional, que se le añade al precio pagado.

En el Apartado 3.1.2 tratamos el concepto de cartera replicante bajo el modelo de Black-Scholes, donde la incertidumbre de una opción europea se eliminaba mediante la cobertura Δ . Siguiendo la misma estrategia, consideraremos la cartera

$$\Pi(t, S) = V(t, S) - \Delta S. \tag{3.38}$$

El objetivo de la cobertura delta es que el valor de la cartera no cambie cuando el activo subyacente cambia, de tal modo que la derivada de la cartera $\Pi(t, S)$ con respecto a S tiene que ser igual a 0, es decir,

$$\frac{\partial \Pi(t, S)}{\partial S} = \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} - \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (3.39)$$

con $V = V(t, S)$, y Δ dados en (3.24). Suponemos que hemos vendido una call $V_c(t_0, S)$ en tiempo t_0 , con vencimiento T y strike K , por la que obtuvimos una cantidad de dinero igual a $V_c(t_0, S)$. A partir del momento de venta, practicamos una estrategia de cobertura «dinámica» hasta tiempo T . Al principio, en tiempo inicial, tenemos que

$$\Pi(t_0, S) := V_c(t_0, S) - \Delta(t_0)S_0.$$

Este valor puede ser negativo cuando $\Delta(t_0)S_0 > V_c(t_0, S)$. Si se necesita financiación para comprar $\Delta(t)$ participaciones, hacemos uso de una «cuenta de resultados», $\text{PnL}(t) \equiv \text{P\&L}(t)$. El $\text{PnL}(t)$ representa el valor total de la opción vendida y su cobertura, y monitoriza los cambios en el valor del activo $S(t)$. Habitualmente, la cantidad $\Delta(t_0)S_0$ se obtiene del departamento de tesorería. Puede que necesitemos reequilibrar nuestra posición y la cobertura de la cartera cada día. En tiempo $t_1 > t_0$, recibimos (o pagamos) un interés sobre el periodo de tiempo $[t_0, t_1]$, que ascenderá a $\text{P\&L}(t_0)e^{r(t_1-t_0)}$. En t_1 tenemos $\Delta(t_0)S(t_1)$ que puede ser vendido, y actualizaremos la cartera de cobertura. En concreto, adquirimos $\Delta(t_1)$ acciones, que cuestan $-\Delta(t_1)S(t_1)$. La cuenta $\text{P\&L}(t_1)$ global sería

$$\text{P\&L}(t_1) = \underbrace{\text{P\&L}(t_0)e^{r(t_1-t_0)}}_{\text{interés}} - \underbrace{(\Delta(t_1) - \Delta(t_0))S(t_1)}_{\text{préstamo}}. \quad (3.40)$$

Suponiendo una malla de tiempo con $t_i = i \frac{T}{m}$, se obtiene una fórmula recursiva para m pasos de tiempo, dada por

$$\begin{aligned} \text{P\&L}(t_0) &= V_c(t_0, S) - \Delta(t_0)S(t_0), \\ \text{P\&L}(t_i) &= \text{P\&L}(t_{i-1})e^{r(t_i-t_{i-1})} - (\Delta(t_i) - \Delta(t_{i-1}))S(t_i), \quad i = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En el vencimiento T , el titular de la opción puede ejercerla, o esta expirará sin valor. Como vendedores de la opción, en $t_m = T$ tendremos un coste igual al payoff de la opción, es decir, $\max(S(T) - K, 0)$. Por otro lado, a vencimiento, poseemos $\Delta(t_m)$ acciones que pueden ser vendidas en el mercado. Entonces, el valor de la cartera en tiempo $t_m = T$ es

$$\begin{aligned} \text{P\&L}(t_m) &= \text{P\&L}(t_{m-1})e^{r(t_m-t_{m-1})} \\ &\quad - \underbrace{\max(S(t_m) - K, 0)}_{\text{payoff opción}} + \underbrace{\Delta(t_{m-1})S(t_m)}_{\text{venta acciones}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En un mundo perfecto, con un reequilibrado continuo, el $\text{P\&L}(T)$ sería, en media, igual a cero, es decir, $\mathbb{E}[\text{P\&L}(T)] = 0$. Si el beneficio para el vendedor

de una opción, en media, es igual a cero, se puede cuestionar el razonamiento aplicado para la cobertura dinámica. El beneficio en la comercialización de opciones, especialmente con las transacciones OTC, se obtiene cobrando un coste adicional (habitualmente llamado *spread*) al inicio del contrato. En tiempo t_0 , el coste para el cliente no es $V_c(t_0, S)$ sino $V_c(t_0, S) + spread$, donde $spread > 0$ sería el beneficio para el vendedor de la opción.

Ejemplo 3.3.1 (P&L(T) esperado)

Proponemos un ejemplo donde $\mathbb{E}[\text{P&L}(T)|\mathcal{F}(t_0)] = 0$. Consideramos un caso con tres periodos, $t_0, t_1, t_2 := T$, y $\Delta(t_i)$ es una función determinista, como en el caso de la cobertura de Black-Scholes. En t_0 se vende una opción, con fecha de ejercicio t_2 y strike K . En una configuración de tres periodos, obtenemos tres ecuaciones para el P&L(t), que se corresponden con la cobertura inicial, el reequilibrado y la cobertura final, es decir,

$$\begin{aligned}\text{P&L}(t_0) &= V_c(t_0, S) - \Delta(t_0)S(t_0), \\ \text{P&L}(t_1) &= \text{P&L}(t_0)e^{r(t_1-t_0)} - (\Delta(t_1) - \Delta(t_0))S(t_1), \\ \text{P&L}(t_2) &= \text{P&L}(t_1)e^{r(t_2-t_1)} - \max(S(t_2) - K, 0) + \Delta(t_1)S(t_2).\end{aligned}$$

Después de juntar todos los términos, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{P&L}(t_2) &= \left[(V_c(t_0, S) - \Delta(t_0)S(t_0)) e^{r(t_2-t_0)} - (\Delta(t_1) - \Delta(t_0)) S(t_1) e^{r(t_2-t_1)} \right] \\ &\quad - \max(S(t_2) - K, 0) + \Delta(t_1)S(t_2).\end{aligned}$$

Por la definición de una opción call, también sabemos

$$\mathbb{E} [\max(S(t_2) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{r(t_2-t_0)} V_c(t_0, S), \quad (3.43)$$

y, como el precio descontado de una acción bajo la medida de riesgo neutro es una martingala, $\mathbb{E}[S(t)|\mathcal{F}(s)] = S(s)e^{r(t-s)}$, la esperanza del P&L viene dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{P&L}(t_2)|\mathcal{F}(t_0)] &= (V_c(t_0, S) - \mathbb{E}[\max(S(t_2) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)]) \\ &\quad + \Delta(t_1)\mathbb{E}[S(t_2) | \mathcal{F}(t_0)] - \Delta(t_0)S(t_0) \cdot e^{r(t_2-t_0)} \\ &\quad - (\Delta(t_1) - \Delta(t_0)) \mathbb{E}[S(t_1) | \mathcal{F}(t_0)] e^{r(t_2-t_1)}.\end{aligned}$$

Empleando (3.43) y la relación

$$\mathbb{E}[S(t_1) | \mathcal{F}(t_0)] e^{r(t_2-t_1)} = \mathbb{E}[S(t_2) | \mathcal{F}(t_0)] = S(t_0) e^{r(t_2-t_0)},$$

la expresión anterior se simplifica a

$$\mathbb{E}[\text{P&L}(t_2)|\mathcal{F}(t_0)] = -\Delta(t_1)S(t_0)e^{r(t_2-t_0)} + \Delta(t_1)\mathbb{E}[S(t_2)|\mathcal{F}(t_0)] = 0. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 3.3.2 (Modelo de Black-Scholes: cobertura dinámica)

En este experimento realizamos una cobertura dinámica para una opción call bajo el modelo de Black-Scholes. Se asumen los siguientes parámetros del

modelo, $S(t_0) = 1$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$. El vencimiento de la opción es $T = 1$ y el strike $K = 0.95$. Se simulan trayectorias del activo $S(t_i)$ sobre una malla de tiempos. Empleando estas trayectorias, llevamos a cabo la estrategia de cobertura, de acuerdo con las Ecuaciones (3.41) y (3.42). En la Figura 3.7 se presentan tres trayectorias de $S(t)$ que, en tiempo T , para las que la opción estaría in-the-money (arriba izquierda), out-of-money (arriba derecha) o at-the-money (abajo), respectivamente. En los tres gráficos, $\Delta(t_i)$ (línea verde) se comporta como el proceso $S(t)$, sin embargo, cuando la evolución de $S(t)$ resulta en un precio de call (línea rosa) extremadamente in-the-money o out-of-money, $\Delta(t_i)$ es 0 o 1, respectivamente. En la Tabla 3.1 se resumen los resultados para estas tres trayectorias. En los tres casos, las cantidades de cobertura iniciales son iguales, pero cambian con el tiempo en función de las trayectorias del activo. En los tres casos, el P&L(t_m) final se encuentra próximo a cero.

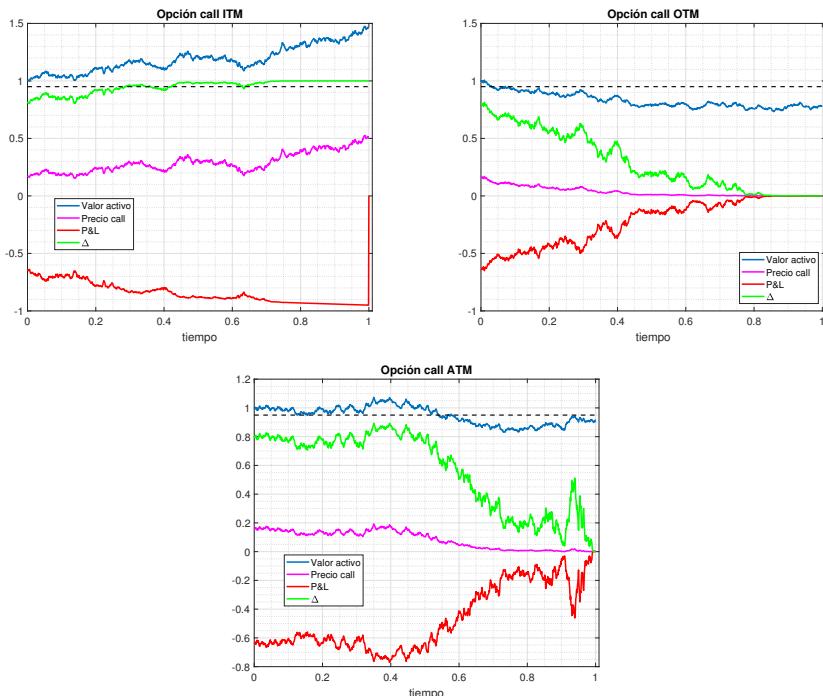


Figura 3.7: Cobertura delta de una opción call. Arriba a la izquierda: in-the-money. Arriba a la derecha: out-of-the-money. Abajo: at-the-money. Azul: trayectoria del activo. Rosa: valor de la opción call. Rojo: P&L(t) de la cartera. Verde: Δ .



Tabla 3.1: Resultados de cobertura para tres trayectorias.

| Trayec. | $S(t_0)$ | $P\&L(t_0)$ | $P\&L(t_{m-1})$ | $S(t_m)$ | $(S(t_m) - K)^+$ | $P\&L(t_m)$ |
|---------|----------|-------------|-----------------|----------|------------------|----------------------|
| ITM | 1 | -0.64 | -0.95 | 1.40 | 0.45 | $2.4 \cdot 10^{-4}$ |
| OTM | 1 | -0.64 | 0.002 | -0.08 | 0 | $2.0 \cdot 10^{-4}$ |
| ATM | 1 | -0.64 | -0.010 | 0.96 | 0.01 | $-2.0 \cdot 10^{-3}$ |



Ejemplo 3.3.3 (Frecuencia del reequilibrado)

En el modelo de Black-Scholes, una de las premisas principales es la omisión de los costes de transacción. Esto básicamente implica que el reequilibrado se puede realizar en cualquier momento, sin costes adicionales. Sin embargo, en la práctica esto resulta poco realista. Dependiendo de la definición del derivado, el reequilibrado puede tener lugar diariamente, semanalmente o, incluso, mensualmente. Cuando se realiza el reequilibrado, este puede implicar costes de transacción. Así, para cada derivado, la frecuencia de cobertura buscará un equilibrio entre los costes y el riesgo asumido.

En la Figura 3.8 se presenta el impacto que tiene la frecuencia de actualización de la cartera de cobertura en la distribución del $P\&L(T)$. Se han realizado dos simulaciones, una con 10 operaciones de reequilibrado durante la vida de la opción y otra con 2000 operaciones. Se ve claramente que un reequilibrado frecuente reduce la varianza de la cartera $P\&L(T)$ hasta casi 0.

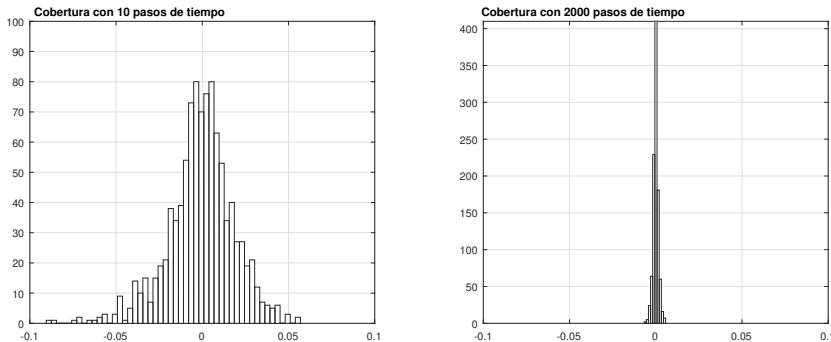


Figura 3.8: Impacto de la frecuencia de reequilibrado en la varianza de la cartera $P\&L(T)$. Izquierda: 10 operaciones de reequilibrado. Derecha: 2000 operaciones de reequilibrado.



3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.1 El precio de un activo hoy es $S_0 = 10 \text{ €}$. Una call sobre él con vencimiento en 60 días, y un strike de $K = 10 \text{ €}$ cuesta $V_c(t_0, S_0) = 1 \text{ €}$. Suponer que, o bien compramos el activo o bien compramos la call. A partir de esta información, llenar la siguiente tabla. La primera fila consta de posibles precios del activo $S(T)$, variando desde 8.5 € hasta 11.5 €. En la segunda fila, anotar el beneficio obtenido (en porcentaje) si se ha comprado el activo; y en la tercera fila, anotar el beneficio si se ha comprado la opción. Comparar los beneficios y pérdidas de adquirir solo el activo o solo la opción.

| | Precio de la acción en $t = T$ | | | | | | |
|-----------------------|--------------------------------|-----|-------|------|--------|------|--------|
| | 8.5 € | 9 € | 9.5 € | 10 € | 10.5 € | 11 € | 11.5 € |
| Benef. $S(T)$ | | | | | | | |
| Benef. $V_c(T, S(T))$ | | | | | | | |

Ejercicio 3.2 Enumerar al menos seis argumentos en los que se basa la deducción de la ecuación de Black-Scholes.

Ejercicio 3.3 Representar, en función del strike K , el payoff de una opción call y el valor de la misma call en un cierto tiempo $t < T$.

Ejercicio 3.4 Suponer que tenemos opciones call y put europeas (con la misma fecha de ejercicio $T = 1/4$, es decir, ejercicio en tres meses, y strike $K = 10 \text{ €}$). El precio actual del activo es 11 €, y asumimos un tipo de interés de capitalización continua, $r = 6\%$. Determinar una oportunidad de arbitraje cuando ambas opciones valgan 2.5 €.

Ejercicio 3.5 Considerar una cartera Π que consta de una opción europea de valor $V(S, t)$ y una cantidad negativa, $-\Delta$, de subyacente, esto es

$$\Pi(t) = V(S, t) - \Delta \cdot S(t).$$

Con la elección $\Delta = \partial V / \partial S$, el cambio en esta cartera, en exceso sobre el tipo libre de riesgo r , viene dado por

$$d\Pi(t) - r\Pi(t)dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) dt.$$

Con el argumento de Black-Scholes para opciones europeas, esta expresión tendría que ser igual a cero, ya que este impide el arbitraje.

Proporcionar un ejemplo de una operación con arbitraje para opciones europeas, donde la igualdad $d\Pi(t) = r\Pi(t)dt$ no se verifica, mediante la compra y la venta de la cartera $\Pi(t)$ en instantes de tiempo t y $t + \Delta t$, respectivamente.

Ejercicio 3.6 Deducir la ecuación de valoración de una opción europea suponiendo que el subyacente está gobernado por un movimiento browniano aritmético

$$dS(t) = \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Ejercicio 3.7 Utilizar el teorema de Feynman-Kac para resolver el problema de valor límite en el dominio $[0, T] \times \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + \mu X \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} &= 0, \\ V(T, X) &= \log(X^2),\end{aligned}$$

donde μ y σ son constantes conocidas.

Ejercicio 3.8 Considerar la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0.$$

- a. Proporcionar las condiciones de frontera (es decir, establecer los valores de la opción en $S = 0$ y S «grande») y la condición final (es decir, valores en $t = T$) para una opción put europea.
- b. Confirmar que la expresión

$$V_p(t, S) = -SF_{N(0,1)}(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}F_{N(0,1)}(-d_2),$$

con

$$d_{1,2} = \frac{\log(S/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

siendo $F_{N(0,1)}(\cdot)$ la FDA de la normal estándar, verifica la ecuación de Black-Scholes y es la solución para una opción put. Se pueden utilizar las identidades $F_{N(0,1)}(x) + F_{N(0,1)}(-x) = 1$ y

$$SF'_{N(0,1)}(d_1) - e^{-r(T-t)}KF'_{N(0,1)}(d_2) = 0,$$

con $F'_{N(0,1)}(\cdot)$ la derivada de $F_{N(0,1)}(\cdot)$.

- c. Encontrar la solución de la opción call europea con la ayuda de la paridad put-call.

Ejercicio 3.9 Comprobar la solución analítica de:

- a. La opción call vanilla dada en el Teorema 3.2.2.
- b. La opción call digital vanilla en la Ecuación (3.26).

Ejercicio 3.10 Considerar dos carteras: π_A , que consta de una opción call y Ke^{-rT} en efectivo y π_B , que consta de un activo S_0 . A partir de estas dos carteras, determinar:

- a. Los límites para el valor de una opción call europea, en tiempo $t = 0$, es decir,
- $$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq V_c(0, S_0) \leq S_0.$$
- b. Los límites para el valor la opción put $V_p(0, S_0)$ en tiempo cero, mediante la paridad put-call.
 - c. La delta de la opción, dada por

$$\Delta = \frac{\partial V_c(t, S)}{\partial S},$$

y también el comportamiento de Δ en el límite, para $t \rightarrow T^-$.

- d. La delta de una opción put utilizando otra vez la paridad put-call.
- e. Un argumento financiero que explique el valor de $\partial V_p(t, S)/\partial S$ a vencimiento $t = T$, tanto para una opción in-the-money como para una opción out-of-the-money.

Ejercicio 3.11 Una *strangle* es una estrategia donde un inversor toma una posición larga en una call y en una put sobre el mismo activo S con el mismo vencimiento T , pero con strikes distintos (K_1 para la call, y K_2 para la put, con $K_1 > K_2$).

- a. Representar el payoff de la strangle. Determinar los posibles pagos a vencimiento. Distinguir entre tres posibilidades diferentes para precio de la acción $S(T)$.
- b. ¿Se puede valorar la strangle con la ecuación de Black-Scholes? Determinar las condiciones de frontera adecuadas, es decir, los valores de la strangle para $S = 0$ y para S «grande», y su condición final (valor en $t = T$).
- c. ¿Cuándo debería un inversor comprar una strangle con $K_2 \ll K_1$ y $K_2 < S_0 < K_1$?

Ejercicio 3.12 Considerar la ecuación de Black-Scholes para una opción call todo o nada, con el valor in-the-money, $V^{\text{cash}}(T, S(T)) = A$, para $t = T$.

- a. ¿Cúales son la condiciones de frontera adecuadas, en $S(t) = 0$ y con $S(t)$ «grande», para esta opción, donde $0 \leq t \leq T$?
- b. La solución analítica viene dada por $V_c^{\text{cash}}(t, S) = Ae^{-r(T-t)}F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2)$. Deducir una fórmula de paridad put-call para la opción todo o nada, para todo $t \leq T$, y determinar el valor de una opción put todo o nada (con la misma configuración de parámetros).
- c. Proporcionar el valor de la delta para una call todo o nada, y dibujar en un gráfico el valor de delta justo antes del vencimiento, en $t = T^-$.

CAPÍTULO 4

Modelos de volatilidad local

En este capítulo:

El principal problema del modelo de Black-Scholes es que este no es capaz de reproducir la «sonrisa» de volatilidad implícita observada en muchos mercados financieros (véase **Apartado 4.1**). Este hecho motiva el estudio y la utilización de otros modelos para el subyacente. En el Apartado 4.1.3 describiremos brevemente algunos de estos modelos alternativos. En este capítulo, introducimos los modelos de volatilidad local no paramétricos para precios de activos. El fundamento de estos modelos radica en la relación entre los precios (de mercado) de una opción y la función de densidad de probabilidad implícita, que se describe en el **Apartado 4.2**. La obtención de los modelos de volatilidad local no paramétricos se presenta en el **Apartado 4.3**.

La ecuación de valoración de opciones bajo estos procesos de precios de activos resulta en una EDP con parámetros dependientes del tiempo.

Palabras clave de este capítulo: volatilidad implícita, sonrisa y mueca, modelos alternativos para precios de activos, función de densidad implícita del activo, volatilidad local, condiciones de arbitraje, interpolación libre de arbitraje

4.1. Volatilidad implícita de Black-Scholes

Cuando el precio de activo se modela mediante el movimiento browniano geométrico (MBG) con volatilidad constante σ , el modelo Black-Scholes proporciona un valor justo único para un contrato de opción sobre el activo subyacente. Este precio es una función monótona creciente de la volatilidad del activo. Una volatilidad alta implica una probabilidad más alta de que una opción esté in-the-money (ITM) en la fecha de vencimiento, véase Definición 3.1.2, de modo que la opción es relativamente más cara.

4.1.1. El concepto de volatilidad implícita

En ocasiones, las opciones europeas cotizan en los mercados financieros en términos de las denominadas «volatilidades implícitas», como alternativa a los precios de oferta y demanda. En otras palabras, la volatilidad implícita de Black-Scholes se considera como un «idioma» en el que se pueden expresar los precios de opciones. Existen distintas formas de calcular la volatilidad implícita. Aquí presentaremos la técnica numérica más habitual. Dados un tipo de interés r , un vencimiento T y un strike K , observamos los precios de mercado de las opciones put y call sobre una acción S , denotados por $V_p^{mkt}(K, T)$, $V_c^{mkt}(K, T)$, respectivamente.

Centrándonos en las opciones call, la volatilidad implícita de Black-Scholes σ_{imp} es el valor de σ , tal que

$$V_c(t_0, S; K, T, \sigma_{imp}, r) = V_c^{mkt}(K, T), \quad (4.1)$$

donde $t_0 = 0$.

La volatilidad implícita σ_{imp} se define como la volatilidad que se toma como parámetro en la fórmula de Black-Scholes para reproducir el precio de mercado de la opción $V_c^{mkt}(K, T)$ en tiempo $t_0 = 0$. En el libro, siempre que hablemos de volatilidad implícita, nos referiremos a la volatilidad implícita de Black-Scholes.

Método de Newton-Raphson

No existe una expresión general en forma cerrada para la volatilidad implícita en función del precio de la opción, por lo que se requiere del uso de métodos numéricos para determinar su valor. Uno de los métodos más utilizados es el método de Newton-Raphson para búsqueda de raíces. El problema presentado en (4.1) se puede reformular como la búsqueda de la raíz del problema

$$g(\sigma_{imp}) := V_c^{mkt}(K, T) - V_c(t_0 = 0, S_0; K, T, \sigma_{imp}, r) = 0. \quad (4.2)$$

Dada una aproximación inicial¹ para la volatilidad implícita, es decir, $\sigma_{imp}^{(0)}$, y la derivada de $g(\sigma_{imp})$ con respecto a σ_{imp} , podemos obtener las aproximaciones

¹ Las iteraciones de un proceso iterativo se denotan mediante un superíndice en paréntesis.

sucesivas, $\sigma_{\text{imp}}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, mediante el proceso iterativo de Newton-Raphson, que viene dado por

$$\boxed{\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)} = \sigma_{\text{imp}}^{(k)} - \frac{g(\sigma_{\text{imp}}^{(k)})}{g'(\sigma_{\text{imp}}^{(k)})}, \quad \text{para } k \geq 0.} \quad (4.3)$$

En el contexto del modelo de Black-Scholes, los precios de calls y puts europeas, así como sus derivadas, se conocen en forma cerrada, ya que la derivada de la expresión (4.3) también se puede calcular analíticamente, siendo

$$g'(\sigma) = -\frac{\partial V(t_0, S_0; K, T, \sigma, r)}{\partial \sigma} = -K e^{-r(T-t_0)} f_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \sqrt{T-t_0},$$

con $f_{\mathcal{N}(0,1)}(\cdot)$ la función de densidad de la normal estándar, $t_0 = 0$ y

$$d_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_0)}{\sigma \sqrt{T - t_0}}.$$

La derivada $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ en $g'(\sigma)$ es otra de las sensibilidades de una opción, la denominada «vega», la sensibilidad con respecto a cambios en la volatilidad. Este es otro parámetro de cobertura importante. En el caso de que no existiese una expresión analítica para la derivada, se requerirían aproximaciones adicionales.

Ejemplo 4.1.1 (Sensibilidad vega)

Retomamos el Ejemplo 3.2.1 del Capítulo 3, donde se mostraban los valores de una opción call y de dos sus parámetros de cobertura, delta y gamma, en función del tiempo y de los posibles valores del activo. Ahora, en la Figura 4.1, presentamos los valores de vega sobre la superficie (t, S) , de tal modo que observamos los valores vega correspondientes a cada punto de la trayectoria del activo. Se utiliza el siguiente conjunto de parámetros:

$$S_0 = 10, r = 0.05, \sigma = 0.4, T = 1, K = 10.$$



Ejemplo 4.1.2 (Volatilidad implícita de Black-Scholes)

Consideramos una opción call sobre una acción que no paga dividendos $S(t)$. El precio actual es $S_0 = 100$, el tipo de interés $r = 5\%$, la opción tiene fecha de vencimiento a un año, con strike $K = 120$, y se cotiza en mercado a $V_c^{mkt}(K, T) = 2$. El objetivo es encontrar la volatilidad implícita de la opción, σ_{imp} , esto es

$$g(\sigma_{\text{imp}}) = 2 - V_c(0, 100; 120, 1, \sigma_{\text{imp}}, 5\%) = 0.$$

El resultado es $\sigma_{\text{imp}} = 0.161482728841394\dots$. Insertando este valor en la ecuación de Black-Scholes, obtenemos un valor para opción call de 1.9999999999999996.



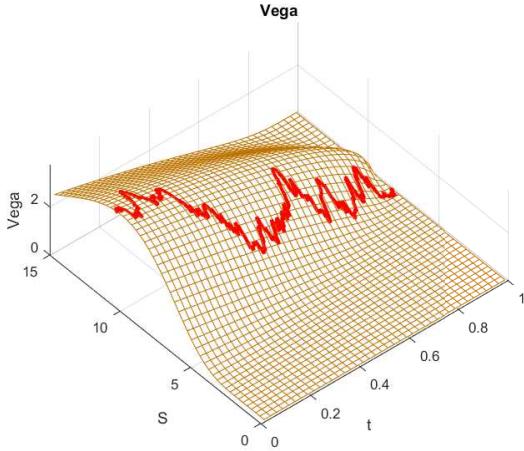


Figura 4.1: Superficie de valores de vega para una call con $T = 1$ en el dominio (t, S) . Una posible trayectoria del activo cruza la superficie de modo que en cada $(t, S(t))$ tenemos un valor para vega.



Método combinado de búsqueda de raíces

El algoritmo de Newton-Raphson converge cuadráticamente cuando la aproximación inicial está «en el entorno» de la raíz. Por tanto, es importante que la aproximación inicial, $\sigma_{\text{imp}}^{(0)}$, se tome lo «suficientemente cerca» de la misma. Además, si el denominador en la Expresión (4.3) es muy pequeño (cercano a cero), dicho de otro modo, si la vega de la opción es casi nula, pueden aparecer problemas de convergencia. Las opciones situadas en posiciones ITM o OTM extremas dan lugar a vegas muy pequeñas, que pueden producir inestabilidades en el proceso iterativo de Newton-Raphson.

Un algoritmo de búsqueda de raíces más sencillo, como el método de bisección, puede ayudar a obtener el valor de arranque de la iteración de Newton-Raphson en los casos con problemas de convergencia importantes. Así, estas dos técnicas forman un algoritmo de búsqueda de raíces combinado.

El método combina la eficacia de Newton-Raphson con la robustez del método de bisección. De manera similar a este último, el método de búsqueda de raíces combinado se basa en el hecho de que la raíz está en un intervalo conocido, en nuestro caso $[\sigma_l, \sigma_r]$. El método intenta encontrar la raíz mediante la iteración de Newton-Raphson. Si la aproximación cae fuera de $[\sigma_l, \sigma_r]$, se utilizaría el método de bisección para reducir el tamaño del intervalo. Después de pocos pasos, el método de bisección habrá reducido el intervalo lo suficientemente

para que el algoritmo de Newton-Raphson converja. En el siguiente Algoritmo se describe el procedimiento.

Algoritmo de búsqueda de raíces combinado: Dada una función $g(\sigma) = 0$, encontrar la raíz $\sigma = \sigma_{\text{imp}}$, con $g(\sigma_{\text{imp}}) = 0$.

Determinar el intervalo inicial $[\sigma_{\text{imp}}^l, \sigma_{\text{imp}}^r]$

Si $g(\sigma_{\text{imp}}^l) \cdot g(\sigma_{\text{imp}}^r) > 0$ parar (no hay ningún cero en el intervalo)

Si $g(\sigma_{\text{imp}}^l) \cdot g(\sigma_{\text{imp}}^r) < 0$ entonces

$k = 1$

$\sigma_{\text{imp}}^{(k)} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{imp}}^l + \sigma_{\text{imp}}^r)$

$\delta = -g(\sigma_{\text{imp}}^{(k)})/g'(\sigma_{\text{imp}}^{(k)})$

mientras $\delta/\sigma_{\text{imp}}^{(k)} > \text{tol}$

$\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)} = \sigma_{\text{imp}}^{(k)} + \delta$

si $\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)} \notin [\sigma_{\text{imp}}^l, \sigma_{\text{imp}}^r]$, entonces

si $g(\sigma_{\text{imp}}^l) \cdot g(\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)}) > 0$, entonces $\sigma_{\text{imp}}^l = \sigma_{\text{imp}}^{(k)}$

si $g(\sigma_{\text{imp}}^l) \cdot g(\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)}) < 0$, entonces $\sigma_{\text{imp}}^r = \sigma_{\text{imp}}^{(k)}$

$\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)} = (\sigma_{\text{imp}}^l + \sigma_{\text{imp}}^r)/2$

$\delta = -g(\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)})/g'(\sigma_{\text{imp}}^{(k+1)})$

$k = k + 1$

continuar

Con opciones extremadamente ITM o OTM, para las que el método Newton-Raphson no converge, el método combinado consigue converger, aunque con una velocidad de convergencia un poco más lenta. En el método de búsqueda de raíces combinado descrito anteriormente se incluye la información de la derivada, en forma de la vega de la opción, en cada iteración de Newton-Raphson.

Observación 4.1.1 (El método de Brent)

En los años 60, se desarrolló un algoritmo robusto y eficiente de búsqueda de raíces combinado «libre de derivadas» y tipo «caja negra» propuesto por Dekker (1969); Brent (1971), posteriormente mejorado por Brent (2013). Esta técnica, conocida como el método de Brent, garantiza la convergencia siempre y cuando la función pueda ser evaluada dentro del intervalo inicial que contiene a la raíz.

El método de Brent combina el método de bisección con una interpolación cuadrática inversa. La interpolación cuadrática inversa utiliza las tres iteraciones anteriores, $\sigma^{(k)}, \sigma^{(k-1)}, \sigma^{(k-2)}$, para ajustar una función cuadrática inversa. La iteración $\sigma^{(k+1)}$ es una función cuadrática de y , siendo el valor de $\sigma^{(k+1)}$ en $y = 0$ la siguiente aproximación de la raíz σ_{imp} . Si los tres pares de puntos son $[\sigma^{(k)}, g(\sigma^{(k)})], [\sigma^{(k-1)}, g(\sigma^{(k-1)})], [\sigma^{(k-2)}, g(\sigma^{(k-2)})]$, entonces la fórmula de

interpolación viene dada por

$$\begin{aligned}\sigma^{(k+1)} &= \frac{g(\sigma^{(k-1)})g(\sigma^{(k-2)})\sigma^{(k)}}{(g(\sigma^{(k)}) - g(\sigma^{(k-1)}))(g(\sigma^{(k)}) - g(\sigma^{(k-2)}))} \\ &+ \frac{g(\sigma^{(k-2)})g(\sigma^{(k)})\sigma^{(k-1)}}{(g(\sigma^{(k-1)}) - g(\sigma^{(k-2)}))(g(\sigma^{(k-1)}) - g(\sigma^{(k)}))} \\ &+ \frac{g(\sigma^{(k-1)})g(\sigma^{(k)})\sigma^{(k-2)}}{(g(\sigma^{(k-2)}) - g(\sigma^{(k-1)}))(g(\sigma^{(k-2)}) - g(\sigma^{(k)}))}. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Sin embargo, cuando la estimación cae fuera del intervalo bisecado, entonces esta es rechazada y, en su lugar, se lleva a cabo una iteración de bisección. Si dos aproximaciones consecutivas son idénticas, por ejemplo, $g(\sigma^{(k)}) = g(\sigma^{(k-1)})$, la interpolación cuadrática se reemplaza por el método de la secante, obteniendo

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k-1)} - g(\sigma^{(k-1)}) \frac{\sigma^{(k-1)} - \sigma^{(k-2)}}{g(\sigma^{(k-1)}) - g(\sigma^{(k-2)})}. \quad (4.5)$$

▲

4.1.2. Implicaciones de la volatilidad implícita

En la solución de Black-Scholes se asume que la volatilidad es una constante o una función determinista conocida del tiempo. Esta es una de las hipótesis básicas de la teoría de Black-Scholes, que conduce a la ecuación de Black-Scholes. Sin embargo, esto no es consistente con lo que se observa en el mercado financiero. La inversión numérica de la ecuación de Black-Scholes a partir de los precios de mercado de la opción, para diferentes strikes y vencimiento fijo, exhibe las denominadas «muestra» o «sonrisa» de volatilidad implícita. La Figura 4.2 presenta algunos patrones de volatilidad implícita que se observan a menudo en los datos de cotización de los mercados financieros. Se representa la volatilidad implícita en función del strike K .

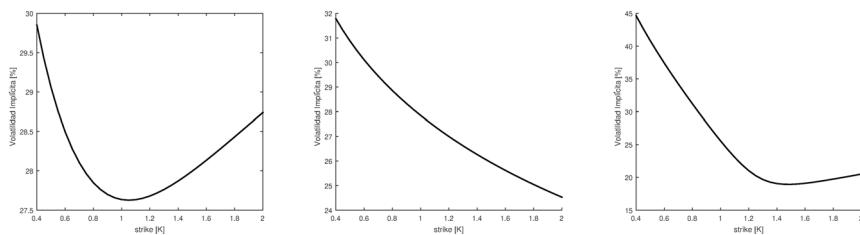


Figura 4.2: Formas típicas de la volatilidad implícita. Izquierda: sonrisa. Centro: muestra. Derecha: palo de hockey. La forma palo de hockey se puede ver como la combinación de volatilidades implícitas de sonrisa y muestra.

La figura 4.3 muestra dos superficies de volatilidades implícitas en función del strike y del vencimiento, donde se pone de manifiesto que la superficie también

depende del tiempo. Esto se denomina «estructura temporal» de la superficie de volatilidad implícita.

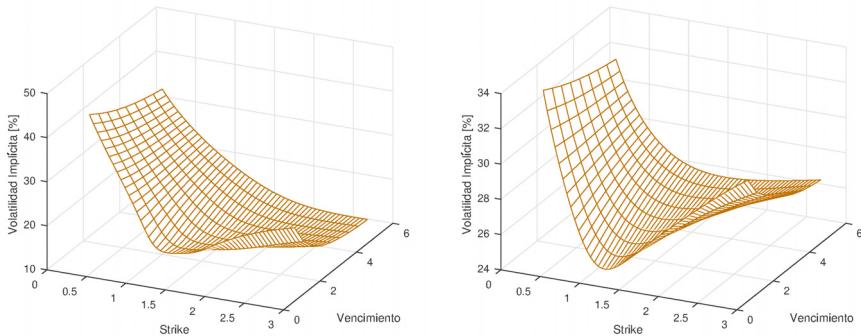


Figura 4.3: Superficies de volatilidad implícita. Izquierda: sonrisa pronunciada para vencimientos cortos y mueca pronunciada para vencimientos más largos. Derecha: sonrisa pronunciada para todos los vencimientos.



Sin lugar a dudas, el modelo de Black-Scholes y su idea de replicar los contratos de opción mediante acciones y dinero efectivo, forman la base de las finanzas modernas. Sin embargo, algunas de las simplificaciones adoptadas son cuestionables para su aplicación práctica en mercado. Por ejemplo, en el marco de Black-Scholes, la cobertura delta se asume como un proceso continuo pero, en la práctica, es un proceso discreto (una cartera con cobertura típicamente se actualiza una vez a la semana, más o menos, según el tipo de derivado financiero), y los costes de transacción para el reequilibrado de la cartera no se tienen en cuenta. Además, estudios empíricos con series de tiempo financieras han revelado que la asunción de normalidad para los retornos, $dS(t)/S(t)$, en la teoría de Black-Scholes no es capaz de capturar las «colas pesadas» y las «asimetrías» presentes en los retornos logarítmicos de los activos cotizados en los mercados financieros (véase Rubinstein (1994)). Las densidades empíricas son habitualmente más puntiagudas comparadas con la densidad normal; un fenómeno que se conoce como «exceso de curtosis».

Sin embargo, el principal problema del modelo de Black-Scholes es que «no es capaz» de reproducir la volatilidad implícita, sea mueca o sonrisa, mencionada anteriormente, y observada habitualmente en muchos mercados financieros. Este hecho motiva el estudio y la utilización de modelos matemáticos alternativos para los activos.

En este capítulo se abordará en detalle el proceso de volatilidad local, como primer modelo alternativo para la dinámica de precios de acciones.

4.1.3. Modelos alternativos de precios de activos

Para contrarrestar los problemas de la dinámica de Black-Scholes, en la literatura financiera reciente han surgido algunos modelos alternativos. Estos incluyen los modelos de volatilidad local como los propuestos por Dupire (1994); Derman y Kani (1998); Coleman *et al.* (1999), los modelos de volatilidad estocástica como Hull y White (1987); Heston (1993), los modelos de difusión con saltos de Kou (2002); Kou y Wang (2004); Merton (1976) y los modelos de Lévy de actividad finita e infinita, véase Barndorff (1998); Carr *et al.* (2002); Eberlein (2001); Matache *et al.* (2004); Raible (2000). Muchos de estos modelos de activos avanzados se han mostrado, al menos hasta cierto punto, capaces de generar la volatilidad de mercado observada, sea mueca o sonrisa.

A pesar de que muchos de los modelos mencionados anteriormente se pueden ajustar a los datos de mercado, suelen tener el inconveniente de requerir calibración para determinar los parámetros del proceso subyacente, tal que los precios de modelo y mercado se igualen. Los modelos de volatilidad local, conocidos también como modelos LV por sus siglas en inglés², son la excepción. Los modelos LV utilizan los valores de volatilidad observados en mercado para ajustarse *exactamente* a cualquier conjunto de precios de opciones europeas vanilla libres de arbitraje. Por lo tanto, los modelos de volatilidad local no requieren de calibración, en el sentido de encontrar los parámetros óptimos del modelo, ya que la función de volatilidad se puede expresar en términos de las cotizaciones de opciones call y/o put de mercado. Así, mediante el marco de volatilidad local, podemos reproducir exactamente las sonrisas y muecas de volatilidad.

Desde hace ya varios años, el modelo LV introducido por Dupire (1994) y Derman y Kani (1998), se considera como un modelo estándar para valoración y gestión del riesgo de productos derivados financieros.

Aunque el modelo LV está ampliamente adoptado en el mercado para la valoración precisa de varios productos, este también tiene sus limitaciones. Por ejemplo, se requiere de una «matriz completa» de precios de opciones (con muchos strikes y vencimientos) para determinar las volatilidades implícitas. Si no se dispone de un conjunto completo de datos, como ocurre a menudo en la práctica, se tienen que aplicar métodos de interpolación y extrapolación, que pueden dar lugar a imprecisiones en los precios de la opción. También, en el marco del modelo LV, se pueden producir errores importantes en la valoración de opciones exóticas.

Además, se puede argumentar que un modelo LV «no refleja» la dinámica de los factores de mercado, ya que simplemente se ajusta a las cotizaciones. El uso de este modelo fuera del rango de valores utilizados en su calibración, para productos de opción diferentes o períodos de contrato diferentes y, por tanto, volatilidades diferentes, debe ser tratado «con cuidado». Por ejemplo, la valoración de las denominadas opciones *forward starting* con vencimientos más

²Local Volatility.

largos (abordadas en el Capítulo 10, véase también Rebonato (1999)) bajo el modelo LV no es sencilla.

Ejemplo 4.1.3 (Estructura temporal de la volatilidad)

Recuperamos los dos modelos de activos del Ejemplo 2.2.1, uno con volatilidad dependiente del tiempo y otro con una volatilidad constante promediada en tiempo. Habíamos mostrado que se pueden obtener los mismos precios de opción europea mediante estos dos modelos con diferente dinámica.

En la Figura 4.4, consideramos ahora la estructura de vencimientos de la volatilidad implícita para estos dos modelos, uno con una volatilidad constante (promediada en tiempo) σ_* y el otro con una volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$.

Mediante el modelo de volatilidad dependiente del tiempo, se puede describir la denominada estructura temporal de la volatilidad ATM (una estructura de volatilidad dependiente del tiempo basada opciones at-the-money), mientras que para el modelo con volatilidad constante la estructura de vencimientos de la volatilidad es básicamente una constante. Por tanto, resulta conveniente modelizar la volatilidad como una función dependiente del tiempo, especialmente en el contexto de cobertura. Los costes de cobertura típicamente se reducen mediante cualquier modelo que explique con precisión la realidad de la valoración de la opción. Sin embargo, habitualmente no conocemos de antemano la forma específica de la función de volatilidad dependiente del tiempo.

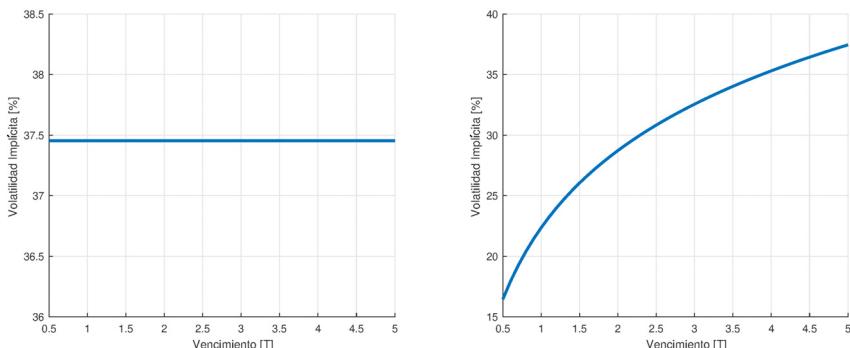


Figura 4.4: Comparación de la estructura temporal de la volatilidad (para volatilidades ATM). Izquierda: modelo de Black-Scholes con volatilidad constante σ_* . Derecha: modelo con volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$.

La volatilidad implícita, $\sigma_{\text{imp}}(T)$, se puede obtener directamente de la función de volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$, es decir,

$$\sigma_{\text{imp}}(T) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt},$$

debido a la propiedad de aditividad de la varianza. ♦

4.2. Precios de opciones y densidades

Los modelos de volatilidad local se basan en la conexión directa entre los precios de las opciones, las funciones de densidad implícitas y el modelo Arrow-Debreu, presentado en el Apartado 3.2.2. Esta relación se hará evidente en este apartado.

4.2.1. Sonrisa de volatilidad implícita y payoff

En este apartado presentamos una técnica simple, pero muy útil, introducida por Breeden y Litzenberger (1978) para la valoración de opciones de estilo europeo con patrones de sonrisa o mueca de volatilidad implícita de mercado. La técnica se desarrolló 20 años antes del modelo de volatilidad local y se basa en la observación de que la densidad riesgo neutro para el activo subyacente puede recuperarse directamente a partir de las cotizaciones de mercado de las opciones europeas de compra y venta. Como ya se ha señalado (véase (3.35)), el cálculo de la densidad riesgo neutro a partir de los precios de las opciones requiere de la derivada de segundo orden de estos con respecto a los strikes. Para evitarlo, se proponía derivar la función de payoff en lugar de los precios de la opción. Normalmente, la derivada del payoff es más estable, ya que no requiere de interpolación entre los precios de mercado de las opciones.

Debido a que el marco de Breeden-Litzenberger está relacionado con la densidad marginal del activo, $S(T)$, en el momento de vencimiento T , no podemos evaluar ninguna función de payoff que dependa de múltiples tiempos de vencimiento. Por consiguiente, las funciones de payoff de opciones dependientes de la trayectoria no se pueden valorar en este marco.

En este apartado, incorporamos explícitamente la dependencia del precio de ejercicio K y el tiempo de vencimiento T en la lista de argumentos del valor de la opción. Así, empleamos la notación $V(t_0, S_0; K, T)$.

Supongamos que queremos valorar una opción europea básica con un payoff call o put, también denominado payoff *vanilla*, $H(T, S)$. Como la función de payoff depende solo de $S(T)$, el valor de la opción hoy, en t_0 , viene dado por

$$V(t_0, S_0; K, T) = e^{-r(T-t_0)} \int_0^\infty H(T, y) f_{S(T)}(y) dy, \quad (4.6)$$

con $f_{S(T)}(y) \equiv f_S(T, y; t_0, S_0)$ la densidad riesgo neutro del proceso de precios en tiempo T ; $H(T, y)$ es la función de payoff en tiempo T .

Comenzamos derivando el valor de la call $V_c(t_0, S_0; K, T)$, con payoff máx($S - K, 0$), con respecto al strike K , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K} &= e^{-r(T-t_0)} \frac{\partial}{\partial K} \int_K^{+\infty} (y - K) f_{S(T)}(y) dy \\ &= -e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} f_{S(T)}(y) dy, \end{aligned} \quad (4.7)$$

de modo que, para la segunda derivada con respecto a K , tenemos

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K^2} = e^{-r(T-t_0)} f_{S(T)}(K)}. \quad (4.8)$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, la densidad implícita del activo se puede obtener mediante la derivación de los precios (de mercado) de las opciones call (véase (3.35)), es decir,

$$f_{S(T)}(y) = e^{r(T-t_0)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_c(t_0, S_0; y, T). \quad (4.9)$$

Con la ayuda de la paridad put-call (3.3), la densidad se puede obtener también a partir de los precios de mercado de opciones put, esto es

$$\begin{aligned} f_{S(T)}(y) &= e^{r(T-t_0)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(V_p(t_0, S_0; y, T) + S_0 - e^{-r(T-t_0)} y \right) \\ &= e^{r(T-t_0)} \frac{\partial^2 V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Estas expresiones para $f_{S(T)}(y)$ se pueden insertar en (4.6).

Teniendo dos posibilidades de obtener la densidad implícita para la acción, vía calls o puts, uno puede preguntarse qué opciones son las más apropiadas. Esta pregunta está relacionada con la cuestión de qué opciones están disponibles en el mercado «de manera líquida». Mucha liquidez implica muchas transacciones y, por tanto, un pequeño margen entre oferta y demanda, que permite una mejor estimación de la densidad de la acción. En la práctica, no podemos afirmar si son más líquidas las opciones call o las opciones put, pero se sabe que las opciones out-of-the-money (OTM), véase su definición en Definición 3.1.2, suelen ser más líquidas que las opciones in-the-money (ITM). Para determinar la densidad implícita de mercado para el precio del activo, se deben elegir preferentemente las calls y puts OTM.

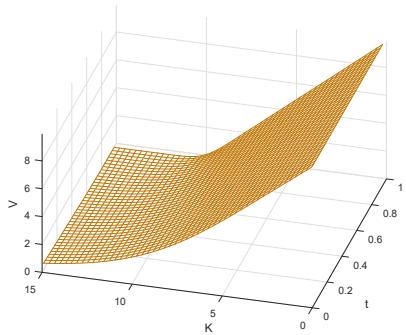
Ejemplo 4.2.1 (Precios y derivadas de Black-Scholes)

Se considera la solución de Black-Scholes que hemos utilizado en varios ejemplos anteriores, con valores de parámetros siguientes:

$$S_0 = 10, r = 0.05, \sigma = 0.4, T = 1, K = 10.$$

En este ejemplo presentamos los valores de las opciones call como función de t y K , por lo que mostramos la función V_c en el plano (t, K) , véase Figura 4.5. Nótese que la superficie de la opción call cambia mucho cuando la dibujamos en función de los strikes K .

En este apartado sobre el modelo de volatilidad local, también encontramos a menudo las derivadas de los valores de las opciones con respecto al precio de ejercicio K . En la Figura 4.5, presentamos también estas derivadas en el plano (t, K) . Obsérvese que, de hecho, la segunda derivada de la opción con respecto al strike proporciona la evolución en tiempo de una función de densidad. ♦



(a) Opción call.

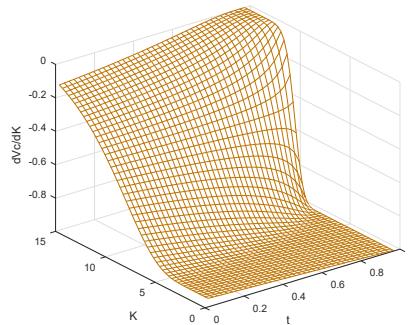
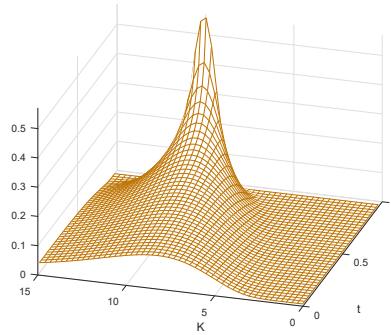
(b) $\partial V_c / \partial K$.(c) $\partial^2 V_c / \partial K^2$.

Figura 4.5: Valores de opción call en función del tiempo t y el strike K , con su primera y segunda derivadas con respecto al strike K , es decir, $\partial V_c / \partial K$ y $\partial^2 V_c / \partial K^2$.



Dividimos la integral de (4.6) en dos partes, esto es

$$\begin{aligned}
 V(t_0, S_0; K, T) &= e^{-r(T-t_0)} \left(\int_0^{S_F} H(T, y) f_{S(T)}(y) dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{S_F}^{\infty} H(T, y) f_{S(T)}(y) dy \right), \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

con

$$S_F \equiv S_F(t_0, T) := e^{r(T-t_0)} S(t_0),$$

representando el valor *forward* del activo.

Como, para $S > K$, tenemos puts OTM y, para $S < K$, tenemos calls OTM, calculamos la primera integral empleando precios put y la segunda empleando precios call, es decir,

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0; K, T) &= \underbrace{\int_0^{S_F} H(T, y) \frac{\partial^2 V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y^2} dy}_{I_1(y)} \\ &+ \underbrace{\int_{S_F}^{\infty} H(T, y) \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y^2} dy}_{I_2(y)}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $e^{r(T-t_0)}$ se anula.

Para obtener una estimación precisa de $V(t_0, S_0; K, T)$, necesitamos calcular las segundas derivadas de puts y calls en tiempo t_0 . Sin embargo, en la práctica solo se dispone de unas pocas cotizaciones de mercado para estas opciones, y los resultados obtenidos pueden ser sensibles al método utilizado para calcular las derivadas. Con la ayuda de la técnica de integración por partes, podemos «intercambiar» la diferenciación de las opciones por la diferenciación de la función de payoff. Supongamos que el payoff $H(T, y)$ es dos veces derivable con respecto a y . Integrando por partes $I_1(y)$ en (4.11), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{S_F} I_1(y) dy &= \left[H(T, y) \frac{\partial V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=S_F} \\ &- \int_0^{S_F} \frac{\partial H(T, y)}{\partial y} \frac{\partial V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando de nuevo integración por partes a la última integral en (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{S_F} I_1(y) dy &= \underbrace{\left[H(T, y) \frac{\partial V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=S_F}}_{I_{1,1}(S_F)} \\ &- \underbrace{\left. \frac{\partial H(T, y)}{\partial y} V_p(t_0, S_0; y, T) \right|_{y=0}^{y=S_F}}_{I_{1,2}(S_F)} \\ &+ \int_0^{S_F} \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De manera similar, para la integral $I_2(y)$ en (4.11), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_F}^{\infty} I_2(y) dy &= \underbrace{\left[H(T, y) \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=S_F}^{y=\infty}}_{I_{2,1}(S_F)} \\ &\quad - \underbrace{\left. \frac{\partial H(T, y)}{\partial y} V_c(t_0, S_0; y, T) \right|_{y=S_F}^{y=\infty}}_{I_{2,2}(S_F)} \\ &\quad + \int_{S_F}^{\infty} \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Así, el valor de la opción $V(t_0, S_0; K, T)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0; K, T) &= I_{1,1}(S_F) - I_{1,2}(S_F) + I_{2,1}(S_F) - I_{2,2}(S_F) \\ &\quad + \int_0^{S_F} \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad + \int_{S_F}^{\infty} \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy. \end{aligned}$$

Además, derivando la paridad put-call con respecto al strike $y = K$, tenemos que

$$\boxed{\frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} + e^{-r(T-t_0)} = \frac{\partial V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y}.} \quad (4.15)$$

Por otro lado, evaluando la paridad put-call original (3.3) en $K = S_F \equiv S_F(t_0, T)$, obtenemos que $V_c(t_0, S_0; K, T) + e^{-r(T-t_0)} S_F = V_p(t_0, S_0; K, T) + S_0$, y, por lo tanto, las opciones call y put ATM deben satisfacer la relación

$$V_c(t_0, S_0; S_F, T) = V_p(t_0, S_0; S_F, T). \quad (4.16)$$

Como una opción put tiene valor cero con strike $K = 0$, y la opción call tiene valor cero para $K \rightarrow \infty$, empleando (4.16) tenemos que

$$\begin{aligned} I_{1,2} + I_{2,2} &= \left. \frac{\partial H(T, y)}{\partial y} \right|_{y=S_F} V_p(t_0, S_0; y, T) \\ &\quad - \left. \frac{\partial H(T, y)}{\partial y} \right|_{y=S_F} V_c(t_0, S_0; y, T) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Asimismo, a partir de (4.15), obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} + I_{2,1} &= \left[H(T, y) \frac{\partial V_p(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=S_F} \\
 &\quad + \left[H(T, y) \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=S_F}^{y=\infty} \\
 &= \left[H(T, y) \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=\infty} \\
 &\quad + e^{-r(T-t_0)} (H(T, S_F) - H(T, 0)).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

La derivada parcial de una opción call con respecto al strike viene dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K} &= -e^{-r(T-t_0)} \int_K^\infty f_{S(T)}(y) dy, \\
 &= -e^{-r(T-t_0)} (1 - F_{S(T)}(K)),
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $F_{S(T)}(\cdot)$ es la FDA del activo $S(T)$ en tiempo T .

Empleando la expresión en (4.19), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left[H(T, y) \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=\infty} &= -e^{-r(T-t_0)} [H(T, \infty) (1 - F_{S(T)}(\infty)) \\
 &\quad - H(T, 0) (1 - F_{S(T)}(0))].
 \end{aligned}$$

Como el precio de la acción no puede ser negativo, $F_{S(T)}(0) = 0$. Asumiendo que para $y \rightarrow \infty$, la FDA $F_{S(T)}(y)$ converge a 1 más rápidamente de lo que $H(T, y)$ converge a infinito, deducimos que

$$\begin{aligned}
 \left[H(T, y) \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K} \right]_{y=0}^{y=\infty} &= -e^{-r(T-t_0)} [0 - H(T, 0) (1 - 0)] \\
 &= e^{-r(T-t_0)} H(T, 0).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Por tanto, las expresiones para los términos $I_{1,1} + I_{2,1}$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} + I_{2,1} &= e^{-r(T-t_0)} H(T, 0) + e^{-r(T-t_0)} (H(T, S_F) - H(T, 0)) \\
 &= e^{-r(T-t_0)} H(T, S_F).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

La ecuación de valoración se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 V(t_0, S_0; K, T) &= e^{-r(T-t_0)} H(T, S_F) + \int_0^{S_F} V_p(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} dy \\
 &\quad + \int_{S_F}^\infty V_c(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} dy.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Esta ecuación se compone de dos partes y permite una interpretación intuitiva (véase Carr y Madan (1998)). Tenemos el valor «a plazo» del contrato, conocido hoy, al que se le aplica una «corrección» de sonrisa de volatilidad, dada en términos de dos integrales. Como la expresión final no requiere de la derivada de los precios call con respecto al strike, esta representación es más estable que la versión presentada en (4.11).

Ejemplo 4.2.2 (Opción europea)

Aplicamos ahora la técnica de Breeden-Litzenberger para valorar calls y puts europeas, donde esperamos que (4.22) replique el resultado estándar de valoración de opciones. Para $H(T, y) = \max(y - K, 0)$, (4.22) es

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0; K, T) &= e^{-r(T-t_0)} \max(S_F - K, 0) \\ &+ \int_0^{S_F} V_p(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 \max(y - K, 0)}{\partial y^2} dy \\ &+ \int_{S_F}^{\infty} V_c(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 \max(y - K, 0)}{\partial y^2} dy, \end{aligned} \quad (4.23)$$

con $S_F \equiv S_F(t_0, T) = e^{r(T-t_0)} S(t_0)$. El operador máximo no es derivable en todos los puntos. Usando la función indicatriz

$$\max(y - K, 0) = (y - K) \mathbb{1}_{y-K>0}(y),$$

tenemos que

$$\frac{\partial ((y - K) \mathbb{1}_{y-K>0}(y))}{\partial y} = \mathbb{1}_{y-K>0}(y) + (y - K) \delta(y - K),$$

con $\delta(y)$ la función delta de Dirac, véase (1.17). Derivando dos veces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ((y - K) \mathbb{1}_{y-K>0}(y))}{\partial y^2} &= \delta(y - K) + \delta(y - K) + (y - K) \delta'(y - K) \\ &= \delta(y - K), \end{aligned}$$

sabiendo que $y\delta'(y) = -\delta(y)$. Empleando estos resultados y la paridad put-call de (3.3), la ecuación de (4.23) se convierte en

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0; K, T) &= e^{-r(T-t_0)} \max(S_F - K, 0) \\ &+ \int_0^{\infty} V_c(t_0, S_0; y, T) \delta(y - K) dy \\ &+ \int_0^{S_F} \left(e^{-r(T-t_0)} y - S_0 \right) \delta(y - K) dy. \end{aligned}$$

La última integral de la expresión puede simplificarse aún más, esto es

$$\int_0^{S_F} \left(e^{-r(T-t_0)} y - S_0 \right) \delta(y - K) dy = e^{-r(T-t_0)} \int_0^{S_F} (y - S_F) \delta(y - K) dy,$$

donde la integral del lado derecho es distinta de cero solo para $K < S_F(t_0, T)$ y, debido a que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\delta(y - a)dy = g(a)$ para cualquier función continua $g(y)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{S_F} \left(e^{-r(T-t_0)}y - S_0 \right) \delta(y - K) dy &= -e^{-r(T-t_0)} (S_F - K) \mathbb{1}_{K < S_F} \\ &= -e^{-r(T-t_0)} \max(S_F - K, 0).\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de precios es

$$V(t_0, S_0; K, T) = \int_0^{\infty} V_c(t_0, S_0; y, T) \delta(y - K) dy \equiv V_c(t_0, S_0; K, T). \quad \blacklozenge$$

4.2.2. Swaps de varianza

Hasta ahora hemos tratado modelos en los que se especificaba el activo subyacente, es decir, el precio de la acción. La volatilidad se utiliza principalmente para mejorar el ajuste a mercado de la sonrisa o la mueca de la volatilidad implícita. En este apartado avanzamos hacia el modelado de la volatilidad y nos concentraremos en la volatilidad en sí misma. A través de productos financieros llamados «swaps de varianza», podemos operar con la volatilidad como con cualquier otra acción o materia prima.

Un swap de varianza es un contrato forward que, a vencimiento T , paga la diferencia entre la varianza realizada y un strike predefinido (multiplicado por un determinado valor nominal). Por lo general, un contrato forward es un contrato que no se negocia en un mercado regulado, sino que se negocia directamente entre dos partes, *over-the-counter*.

Las dos partes acuerdan comprar o vender un activo en un momento predefinido en el futuro a un precio acordado. La varianza realizada, que es *swapped* (intercambiada) con una cantidad K , se puede medir de diferentes maneras, ya que no hay una convención de mercado formalmente definida.

Por ejemplo, la volatilidad puede medirse indirectamente, mediante la observación continua de la evolución de las acciones. Entonces, el payoff del swap de varianza se define como

$$\begin{aligned}H(T, S) &= \frac{252}{m} \sum_{i=1}^m \left(\log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} \right)^2 - K \\ &=: \sigma_v^2(T) - K,\end{aligned}\tag{4.24}$$

para el activo $S(t)$, dada una malla de tiempos de tamaño $m + 1$, $t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, un strike K , y siendo σ_v^2 la varianza realizada de la acción durante la vida del swap; la cantidad 252 representa el número de días hábiles

en un año determinado. Típicamente, el strike K se selecciona de tal manera que el valor del contrato al inicio es igual a 0.

Con un tipo de interés determinista r , el valor del contrato en tiempo t_0 es

$$V(t_0, S_0; K, T) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\sigma_v^2(T) - K | \mathcal{F}(t_0)], \quad (4.25)$$

y el valor del strike K con el cual el valor del contrato al inicio es igual a cero viene dado por

$$e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\sigma_v^2(T) - K | \mathcal{F}(t_0)] = 0, \quad (4.26)$$

tal que $K = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\sigma_v^2(T) | \mathcal{F}(t_0)]$.

El límite del término logarítmico en (4.24), a medida que la malla de tiempos se hace más fina, es decir, $\Delta t = t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$, se puede escribir como

$$\log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} = \log S(t_i) - \log S(t_{i-1}) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} d \log S(t).$$

Si el activo $S(t)$ está gobernado por el proceso estocástico

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), \quad (4.27)$$

con r constante y un proceso estocástico $\sigma(t)$ para la volatilidad, su dinámica bajo la transformación logarítmica es

$$d \log S(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t)dW(t). \quad (4.28)$$

La tabla de Itô nos proporciona que $(d \log S(t))^2 = \sigma^2(t)dt$, resultando que

$$\int_{t_0}^T (d \log S(t))^2 = \int_{t_0}^T \sigma^2(t)dt. \quad (4.29)$$

Se puede encontrar una demostración rigurosa de lo anterior en Barndorff-Nielsen *et al.* (2006). Empleando (4.27) y (4.28), tenemos que

$$\frac{dS(t)}{S(t)} - d \log S(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt. \quad (4.30)$$

El término $252/m$ en (4.24) anualiza la varianza realizada (devuelve un porcentaje anual), siendo modelado en el caso continuo por $1/(T - t_0)$. Así, en el caso continuo, el contrato de swap de varianza se puede definir como

$$H(T, S) = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma^2(t)dt - K =: \sigma_v^2(T) - K. \quad (4.31)$$

Entonces, el strike K al cual el swap debería ser ofertado viene dado por

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \sigma^2(t) dt \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_{t_0}^T \frac{dS(t)}{S(t)} - d\log S(t) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_{t_0}^T \frac{dS(t)}{S(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] - \frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

usando (4.30). Después de simplificar e intercambiar integración y esperanza, obtenemos el siguiente resultado.

El precio de ejercicio, K , para el cual el valor de un swap de varianza es igual a cero en tiempo inicial t_0 , viene dado por

$$K = \frac{2}{T-t_0} \left(r(T-t_0) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \right), \quad (4.33)$$

donde $S(T)/S(t_0)$ representa el retorno del activo subyacente.

Ecuaciones de valoración para swaps de varianza

El índice VIX es un conocido índice que proporciona una medida de la volatilidad implícita del índice S&P 500. Su valor se obtiene a partir de opciones sobre el índice S&P 500, cuyo plazo de vencimiento oscila entre 23 y 37 días. Se calcula un promedio de la volatilidad implícita para las opciones a 30 días. El índice VIX también se conoce como el «índice del miedo», ya que representa la expectativa del mercado sobre la volatilidad del propio mercado bursátil. El equivalente europeo del índice VIX es el índice de volatilidad VSTOXX, donde el índice subyacente es el índice Euro Stoxx 50.

Empleando los resultados del Apartado 4.2.1, podemos obtener ecuaciones de valoración para los swaps de varianza. Para determinar el strike K , calculamos la esperanza en (4.33), con la ayuda de las cotizaciones de opciones extraídas de mercado. El valor del contrato

$$V(t_0, S_0; K, T) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[H(T, S) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (4.34)$$

para alguna función de payoff $H(T, S)$ y teniendo en cuenta la sonrisa de volatilidad, se puede determinar a partir de (4.22), es decir,

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0; K, T) &= e^{-r(T-t_0)} H(T, S_F) \\ &+ \int_0^{S_F} V_p(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} dy \\ &+ \int_{S_F}^{\infty} V_c(t_0, S_0; y, T) \frac{\partial^2 H(T, y)}{\partial y^2} dy, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde $S_F \equiv S_F(t_0, T) := S(t_0)e^{r(T-t_0)}$ es el activo forward y $V_c(t_0, S_0; y, T)$ y $V_p(t_0, S_0; y, T)$ son los precios de las opciones call y put, respectivamente. La expresión para el strike K de (4.33) se puede reescribir empleando el activo forward, esto es

$$\begin{aligned} K &= -\frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S(t_0)} - \log e^{r(T-t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= -\frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S_F} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Con $H(T, y) = \log \frac{y}{S_F}$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} H(T, y) = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(T, y) = -\frac{1}{y^2},$$

y la esperanza en (4.33) se puede calcular, a partir de (4.34) y (4.35), como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S_F} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] &= e^{r(T-t_0)} V(t_0, S_0; K, T) \\ &= \log \frac{S_F}{S_F} - e^{r(T-t_0)} \int_0^{S_F} \frac{1}{y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad - e^{r(T-t_0)} \int_{S_F}^{\infty} \frac{1}{y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy \\ &= -e^{r(T-t_0)} \int_0^{S_F} \frac{1}{y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad - e^{r(T-t_0)} \int_{S_F}^{\infty} \frac{1}{y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{2}{T-t_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \frac{S(T)}{S_F} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_0^{S_F} \frac{1}{y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad + \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{S_F}^{\infty} \frac{1}{y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Esta expresión se puede evaluar de manera eficiente mediante, por ejemplo, una técnica de cuadratura de Gauss. Los resultados obtenidos nos permiten calcular el valor de un swap de varianza para determinadas cotizaciones de mercado de opciones europeas call y put. Si la cotización de mercado de un swap de varianza difiere significativamente del valor implícito calculado con las opciones call y put de mercado, dado en (4.36), nos encontramos con una posibilidad de arbitraje por volatilidad.

Observación 4.2.1 (Modelo de Black-Scholes: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\log S(T)|\mathcal{F}(t_0)]$)

Se puede argumentar que, bajo el modelo de Black-Scholes, la esperanza $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\log S(T)|\mathcal{F}(t_0)]$ se puede determinar fácilmente. Con $\log S(T)$ dado por

$$\log S(T) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t_0) + \sigma (W(T) - W(t_0)),$$

la esperanza es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\log S(T)|\mathcal{F}(t_0)] = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t_0),$$

expresada simplemente en términos del tipo de interés r y de la volatilidad σ . Sin embargo, no está claro que volatilidad, σ , se pueda emplear en la valoración. Una diferencia crucial con la valoración de opciones europeas es que estos productos (opciones europeas) se cotizan en el mercado financiero, de modo que se puede determinar la volatilidad implícita. Para $\mathbb{E}[\log S(T)]$, la situación es más complicada, ya que no hay productos líquidos que puedan utilizarse para determinar la volatilidad σ .

Una solución a este problema es utilizar todas las cotizaciones disponibles en mercado para calcular la esperanza, que es la idea detrás del método Breeden-Litzenberger.



Relación de los Swaps de varianza con el índice VIX

Con la ayuda de la metodología de Breeden-Litzenberger, la ecuación en (4.36) proporciona un vínculo directo entre los swaps de varianza y las distribuciones implícitas. Un aspecto clave de la ecuación es que la metodología es esencialmente independiente del modelo. Las integrales solo se basan en las cotizaciones del mercado para opciones call y put.

Ahora, relacionamos (4.36) con el índice de volatilidad VIX, comenzando con un strike ³, $K_f < S_F(t_0, T)$, para el que descomponemos las integrales de (4.36) de la forma

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{T - t_0} e^{r(T-t_0)} \int_0^{K_f} \frac{1}{y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad + \frac{2}{T - t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{K_f}^{\infty} \frac{1}{y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy \\ &\quad + \frac{2}{T - t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{K_f}^{S_F} \frac{1}{y^2} (V_p(t_0, S_0; y, T) - V_c(t_0, S_0; y, T)) dy. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Mediante la paridad put-call, para $y = K$, tenemos que

$$V_p(t_0, S_0; y, T) - V_c(t_0, S_0; y, T) = e^{-r(T-t_0)} y - S_0,$$

³El strike K_f debería ser el strike más alto que está por debajo del precio forward S_F .

tal que la última expresión en (4.37) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{K_f}^{S_F} \frac{1}{y^2} (e^{-r(T-t_0)} y - S_0) dy = \\
& = \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \left(e^{-r(T-t_0)} (\log S_F - \log K_f) + S(t_0) \left(\frac{1}{S_F} - \frac{1}{K_f} \right) \right) \\
& = \frac{2}{T-t_0} \left(\log \frac{S_F}{K_f} + \left(1 - \frac{S_F}{K_f} \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Aplicando una expansión de Taylor al logaritmo, ignorando los términos de orden mayor a dos, resulta en

$$\log \frac{S_F}{K_f} \approx \left(\frac{S_F}{K_f} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{S_F}{K_f} - 1 \right)^2. \tag{4.39}$$

Así, la expresión en (4.38) se puede aproximar como

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{K_f}^{S_F} \frac{1}{y^2} (V_p(t_0, S_0; y, T) - V_c(t_0, S_0; y, T)) dy \approx \\
& \approx -\frac{1}{T-t_0} \left(\frac{S_F}{K_f} - 1 \right)^2,
\end{aligned}$$

y (4.37) como

$$\begin{aligned}
K & \approx \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_0^{K_f} \frac{1}{y^2} V_p(t_0, S_0; y, T) dy \\
& + \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \int_{K_f}^{\infty} \frac{1}{y^2} V_c(t_0, S_0; y, T) dy \\
& - \frac{1}{T-t_0} \left(\frac{S_F}{K_f} - 1 \right)^2.
\end{aligned}$$

Discretizando las integrales anteriores de la manera habitual, discretizando la dimensión K con N_K intervalos de tamaño ΔK , tenemos que

$$\begin{aligned}
K & \approx \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \sum_{i=1}^{f-1} \frac{1}{K_i^2} V_p(t_0, S_0; K_i, T) \Delta K \\
& + \frac{2}{T-t_0} e^{r(T-t_0)} \sum_{i=f}^{N_K} \frac{1}{K_i^2} V_c(t_0, S_0; K_i, T) \Delta K \\
& - \frac{1}{T-t_0} \left(\frac{S_F}{K_f} - 1 \right)^2.
\end{aligned}$$

Esta expresión puede verse como el cuadrado del índice VIX (denotado por VIX^2), definido por el Chicago Board Options Exchange (CBOE) en su libro blanco (véase CBOE White Paper (2014)) como

$$\text{VIX}^2 = \frac{2}{T-t_0} \sum_{i=1}^{N_K} \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{r(T-t_0)} Q(K_i) - \frac{1}{T-t_0} \left[\frac{S_F}{K_f} - 1 \right]^2 \quad (4.40)$$

Aquí, $Q(K_i)$ representa el precio de las opciones call y put out-of-the money con strikes K_i , y siendo K_f el strike más alto por debajo del precio forward $S_F = S_F(t_0, T) := S_0 e^{r(T-t_0)}$.

4.3. Modelos de volatilidad local no paramétricos

Aunque la técnica de Breeden-Litzenberger es útil, su aplicación está básicamente restringida a opciones put y call europeas *vanilla*. A continuación se examinan los modelos de volatilidad local, que tienen un rango de aplicación más amplio. Consideramos el precio de una opción call bajo el modelo de volatilidad local, basado en un proceso subyacente estocástico unidimensional. El término «volatilidad local» se utiliza para indicar que la volatilidad del proceso es una función del activo $S(t)$. El comportamiento del activo puede no estar gobernado por un único proceso estocástico, como en el caso de los modelos de volatilidad estocástica, donde la volatilidad se describe mediante un proceso estocástico adicional, que serán tratados en el Capítulo 8.

El modelo clásico de volatilidad local viene dado por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_{LV}(t, S)S(t)dW(t), \quad S(t_0) = S_0, \quad (4.41)$$

con un tipo de interés constante (o determinista) r . Utilizando el lema de Itô (véase Capítulo 2) y suponiendo ausencia de arbitraje, el valor de la opción, $V(t, S)$, verifica la EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{LV}^2(t, S)S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(T, S) = \max(S(T) - K, 0). \end{cases} \quad (4.42)$$

La EDP (4.42) es una ecuación en derivadas parciales de Kolmogorov «hacia atrás».

Podemos describir la evolución de una función de densidad de probabilidad (FDP) mediante una EDP de Fokker-Planck, que describe la evolución «hacia adelante» de una FDP en tiempo. En ese caso, con una condición inicial en t_0 , la FDP viene dada por una función delta de Dirac en tiempo t_0 .

Teorema 4.3.1 (EDP y EDEs de Fokker-Planck)

La densidad de transición $f_{S(t)}(y) \equiv f_S(t, y; t_0, S_0)$ asociada a una EDE genérica para $S(t)$ y $t_0 \leq t \leq T$, dada por

$$dS(t) = \bar{\mu}(t, S)dt + \bar{\sigma}(t, S)dW(t), \quad S(t_0) = S_0,$$

verifica la EDP de Fokker-Planck (también conocida como Kolmogorov «hacia adelante»), es decir,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}f_{S(t)}(y) + \frac{\partial}{\partial y}[\bar{\mu}(t, y)f_{S(t)}(y)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\bar{\sigma}^2(t, y)f_{S(t)}(y)] = 0, \\ f_{S(t_0)}(y) = \delta(y = S_0). \end{cases} \quad (4.43)$$

El modelo de volatilidad local se basa en la ecuación de Fokker-Planck hacia adelante. De nuevo, en el contexto de volatilidad local, la densidad del activo está directamente relacionada con las cotizaciones de mercado de las opciones call y put. Después de algunos cálculos, la función de volatilidad dependiente del activo, $\bar{\sigma}(t, S) = S \cdot \sigma_{LV}(t, S)$, puede obtenerse a partir de las cotizaciones del mercado financiero.

Lamentablemente, como en mercado solo se cotizan un número limitado de opciones para una acción particular, es difícil extraer la densidad con precisión a partir de esas pocas cotizaciones de mercado (se necesitaría un número infinito de opciones en la «dimensión» del strike, $K \in [0, \infty)$). En el Apartado 4.3.1, trataremos algunas condiciones importantes relacionadas con los valores de las opciones sin arbitraje y las correspondientes densidades, para mejorar la precisión de la aproximación.

La derivada del valor de la opción con respecto al vencimiento T es

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} (y - K) f_{S(T)}(y) dy \right) \\ &= -rV_c(t_0, S_0; K, T) + e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial f_{S(T)}(y)}{\partial T} dy. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para la derivada parcial en la última integral de (4.44), empleamos la ecuación de Fokker-Planck (4.43), con $\bar{\mu}(t, S(t)) = rS$ y $\bar{\sigma}(t, S) = \sigma_{LV}(t, S)S$, con lo que la integral se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial f_{S(T)}(y)}{\partial T} dy &= -r \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial (y f_{S(T)}(y))}{\partial y} dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial^2 (\sigma_{LV}^2(T, y) y^2 f_{S(T)}(y))}{\partial y^2} dy. \end{aligned} \quad (4.45)$$

La primera integral de la parte derecha es igual a⁴

$$\int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial (y f_{S(T)}(y))}{\partial y} dy = \\ (y - K) y f_{S(T)}(y) \Big|_{y=K}^{+\infty} - \int_K^{+\infty} y f_{S(T)}(y) dy = - \int_K^{+\infty} y f_{S(T)}(y) dy.$$

Empleando las Ecuaciones (4.8) y (4.19), esta integral se puede expresar en términos del valor de una opción call, esto es

$$- \int_K^{+\infty} y f_{S(T)}(y) dy = -e^{r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} y \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y^2} dy \\ = -e^{r(T-t_0)} \left[y \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} \right]_K^{+\infty} \\ - \int_K^{+\infty} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} dy \\ = -e^{r(T-t_0)} \left[-ye^{-r(T-t_0)} (1 - F_{S(T)}(y)) \right]_K^{+\infty} \\ - \int_K^{+\infty} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} dy,$$

donde, como $F_{S(T)}(+\infty) = 1$, y asumiendo que $F_{S(T)}(y)$ converge a 1 más rápido que y a $+\infty$, tenemos que

$$ye^{-r(T-t_0)} (1 - F_{S(T)}(y)) \Big|_K^{+\infty} = -Ke^{-r(T-t_0)} (1 - F_{S(T)}(K)). \quad (4.46)$$

Los precios de la opción call convergen a 0 para $K \rightarrow \infty$, de modo que

$$\int_K^{+\infty} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; y, T)}{\partial y} dy = -V_c(t_0, S_0; K, T). \quad (4.47)$$

Empleando (4.19), tenemos que

$$- \int_K^{+\infty} y f_{S(T)}(y) dy = -e^{r(T-t_0)} Ke^{-r(T-t_0)} \left(-e^{r(T-t_0)} \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K} \right) \\ + e^{r(T-t_0)} V_c(t_0, S_0; K, T) \\ = e^{r(T-t_0)} \left[K \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K} - V_c(t_0, S_0; K, T) \right].$$

De manera similar, la segunda integral en (4.45) se puede expresar como

$$\int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial^2 (\sigma_{LV}^2(T, y) y^2 f_{S(T)}(y))}{\partial y^2} dy = \\ = \sigma_{LV}^2(T, K) K^2 f_{S(T)}(K) = e^{r(T-t_0)} \sigma_{LV}^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K^2}.$$

⁴ Asumiendo que para $y \rightarrow +\infty$, la densidad $f_{S(T)}(y)$ se va a cero «más rápido» que y^2 a infinito.

Agrupando todos los términos obtenidos para (4.44), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial T} V_c = -rV_c - rK \frac{\partial V_c}{\partial K} + rV_c + \frac{1}{2} \sigma_{LV}^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 V_c}{\partial K^2}. \quad (4.48)$$

Finalmente, la expresión para la función de volatilidad local, $\sigma_{LV}(T, K)$, es

$$\sigma_{LV}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial T} + rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K^2}}. \quad (4.49)$$

$V_c(t_0, S_0; K, T)$ representa los precios de mercado de la opción call en tiempo t_0 , con S_0 el valor inicial del activo, K el strike y T el vencimiento.

Por tanto, en el modelo de volatilidad local, la volatilidad $\sigma_{LV}(T, K)$ puede describirse mediante las cotizaciones de mercado de los valores de las opciones, por lo que el modelo de volatilidad local puede «ajustarse» perfectamente a estas cotizaciones aún siendo un modelo sin parámetros. En otras palabras, no requiere de un procedimiento de calibración.

4.3.1. Representación de la volatilidad local en términos de la volatilidad implícita

De (4.49) se desprende claramente que la volatilidad local $\sigma_{LV}(T, K)$ puede expresarse en términos de los precios de opciones europeas. Por lo tanto, se necesita una superficie de precios de opciones para calcular el denominado «término de volatilidad local de Dupire». Basándonos en el modelo de volatilidad local, podemos valorar las opciones, por ejemplo, aplicando el método de diferencias finitas sobre la EDP de valoración resultante.

Sin embargo, en la práctica no todas las derivadas en (4.49) se pueden obtener directamente de las cotizaciones de las opciones de mercado, y es posible que las derivadas deban calcularse a partir de los datos de mercado mediante aproximaciones de diferencias finitas. Para cada término de volatilidad local, necesitamos cuatro valores de opción para aplicar diferencias finitas sobre las derivadas parciales.

En el denominador de (4.49) tenemos una aproximación de la densidad del precio del activo (véase (4.9)) para la cual las aproximaciones por diferencias finitas pueden acarrear importantes errores de aproximación para strikes grandes. Los errores pueden ser particularmente grandes cuando la densidad se acerca a 0. Como consecuencia, la función de volatilidad local $\sigma_{LV}(T, K)$ será absurdamente grande.

Observación 4.3.1

En la literatura se han propuesto varias mejoras para incrementar la precisión de la volatilidad local. Uno de los enfoques consiste en parametrizar la superficie de la opción mediante una determinada función bidimensional (polinómica),

$h(T, K)$, y ajustarla a los datos de mercado $V_c^{mkt}(K, T)$. En este caso, las derivadas parciales con respecto al tiempo y al precio de ejercicio de $h(T, K)$ se pueden obtener analíticamente. El principal problema de este enfoque es que es difícil determinar una función paramétrica $h(T, K)$ que se adapte bien a todas las cotizaciones del mercado, preservando al mismo tiempo la suposición de ausencia de arbitraje.

Una cuestión que se plantea al ajustar un polinomio a los precios de las opciones es que, en el caso de las opciones OTM, pequeñas diferencias en los precios pueden causar diferencias significativas en las volatilidades implícitas, causadas por el procedimiento de inversión de Black-Scholes. \blacktriangle

Es útil reformular el modelo LV en términos de las correspondientes volatilidades implícitas. Sin embargo, las derivadas parciales de los precios de una call con respecto a los strikes no son iguales a las derivadas parciales de las volatilidades implícitas. Por lo tanto, deducimos la volatilidad local $\sigma_{LV}(T, K)$ en términos de las volatilidades implícitas (Black-Scholes), $\sigma_{\text{imp}}(T, K)$, que denota⁵ la volatilidad implícita en tiempo T y strike K . Por (3.23), sabemos que el precio de opciones call europeas libre de arbitraje viene dado por

$$V_c(t_0, S_0; K, T) = S_0 F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K e^{-r(T-t_0)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),$$

con

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_{\text{imp}}^2(T, K))(T - t_0)}{\sigma_{\text{imp}}(T, K)\sqrt{T - t_0}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma_{\text{imp}}(T, K)\sqrt{T - t_0}. \end{aligned}$$

Empleamos

$$y := \log\left(\frac{K}{S_F}\right) = \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - r(T - t_0), \quad w := \sigma_{\text{imp}}^2(T, K)(T - t_0), \quad (4.50)$$

donde S_F es, de nuevo, el precio forward, definido como $S_F = S_F(t_0, T) := S_0 e^{r(T-t_0)}$. Para las variables y y w , definimos el precio de la call, $c(y, w)$, mediante

$$V_c(t_0, S_0; K, T) = S_0 \left[F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - e^y F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \right] =: c(y, w), \quad (4.51)$$

donde $d_1 = \frac{1}{2}\sqrt{w} - \frac{y}{\sqrt{w}}$, y $d_2 = d_1 - \sqrt{w}$. Usando la notación abreviada $V_c := V_c(t_0, S_0; K, T)$ y $c := c(y, w)$, siendo $\tau := T - t_0$, obtenemos que

$$\frac{\partial V_c}{\partial K} = \frac{\partial c}{\partial y} \frac{1}{K} + \frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial K}, \quad (4.52)$$

⁵Incluimos los argumentos adicionales T y K para indicar la dependencia de la volatilidad implícita del vencimiento y del strike.

así como

$$\frac{\partial^2 V_c}{\partial K^2} = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{2}{K} \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 c}{\partial w \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \frac{\partial c}{\partial w} + \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \frac{\partial^2 c}{\partial w^2}, \quad (4.53)$$

y

$$\frac{\partial V_c}{\partial T} = -r \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T}. \quad (4.54)$$

Después de sustituir estas derivadas en la volatilidad local, la expresión en (4.49) viene dada por

$$\begin{aligned} & \sigma_{LV}^2(T, K) \\ &= \frac{\frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} + rK \frac{\partial c}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial K}}{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) + K \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 c}{\partial w \partial y} + \frac{1}{2} K^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \frac{\partial c}{\partial w} + \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \frac{\partial^2 c}{\partial w^2} \right]}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

La formulación anterior puede simplificarse empleando las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial w^2} &= \frac{\partial c}{\partial w} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2} \right), \\ \frac{\partial^2 c}{\partial w \partial y} &= \frac{\partial c}{\partial w} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w} \right), \\ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} &= \frac{\partial c}{\partial y} + 2 \frac{\partial c}{\partial w}. \end{aligned}$$

Las demostraciones de estas igualdades se deducen fácilmente.

La expresión de la volatilidad local en (4.55) se convierte en

$$\begin{aligned} & \sigma_{LV}^2(T, K) \\ &= \frac{\frac{\partial w}{\partial T} + rK \frac{\partial w}{\partial K}}{1 + K \frac{\partial w}{\partial K} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w} \right) + \frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} + \frac{1}{2} K^2 \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Podemos usar (4.50) para determinar las demás derivadas, lo que resulta en una relación entre la función w y la volatilidad implícita, $\sigma_{\text{imp}} := \sigma_{\text{imp}}(T, k)$, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial T} &= \sigma_{\text{imp}}^2 + 2(T - t_0) \sigma_{\text{imp}} \frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial T}, \\ \frac{\partial w}{\partial K} &= 2(T - t_0) \sigma_{\text{imp}} \frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial K}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} &= 2(T - t_0) \left(\frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial K} \right)^2 + 2(T - t_0) \sigma_{\text{imp}} \frac{\partial^2 \sigma_{\text{imp}}}{\partial K^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la función de volatilidad local $\sigma_{LV}(T, K)$ puede expresarse en términos de las volatilidades implícitas σ_{imp} . En esencia, el término dominante en el denominador de (4.56) es una primera derivada, mientras que en (4.49) es una segunda derivada. Generalmente, las primeras derivadas se pueden calcular numéricamente de una manera más estable que las segundas derivadas. En el Apartado 4.3.4 se mostrará un ejemplo.

4.3.2. Condiciones para precios de opciones libres de arbitraje

Como ya se ha mencionado, en los mercados financieros no suele haber suficientes cotizaciones de opciones en mercado para aproximar de manera precisa todos los tipos de derivados financieros, con diferentes precios de ejercicio y plazos de vencimiento y, a menudo, se deben interpolar y extrapolar las cotizaciones observadas en mercado. En concreto, entre los datos de mercado disponibles, se debe llevar a cabo una interpolación libre de arbitraje. El arbitraje puede ocurrir tanto en la dimensión del tiempo como del strike, véase la superficie (t, S_t) de valores de opción en la Figura 4.6.

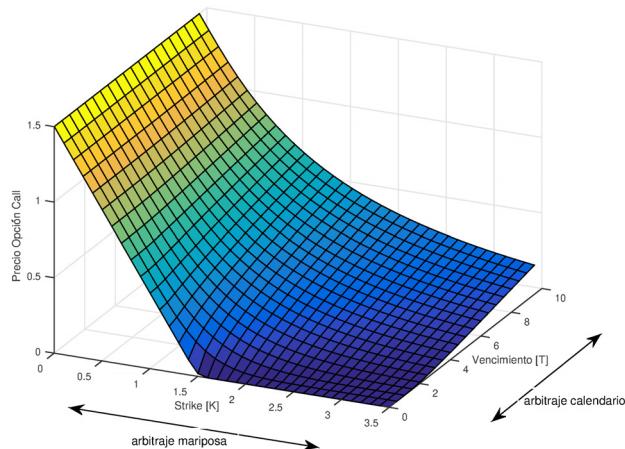


Figura 4.6: Precios de una call y las dos dimensiones en las que puede aparecer arbitraje.

Por tanto, la interpolación entre los distintos vencimientos y strikes debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. La condición denominada «spread de calendario»⁶, definida como

$$V_c(t_0, S_0; K, T + \Delta T) - V_c(t_0, S_0; K, T) > 0.$$

⁶Se asume que no se pagan dividendos.

Si dividimos el lado izquierdo de la desigualdad por ΔT y hacemos que $\Delta T \rightarrow 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} & \frac{1}{\Delta T} [V_c(t_0, S_0; K, T + \Delta T) - V_c(t_0, S_0; K, T)] \\ &= \frac{\partial}{\partial T} V_c(t_0, S_0; K, T). \end{aligned}$$

Esta condición puede interpretarse de la siguiente manera: para dos opciones de estilo europeo que tengan los mismos parámetros de contrato, excepto la fecha de vencimiento T , el contrato que expira en primer lugar tiene que ser más barato. Esta propiedad está relacionada con el hecho de que una opción con un mayor vencimiento, $T - t_0$, tiene una mayor probabilidad de finalizar in-the-money.

2. «Monotonicidad» en la dimensión del strike, formulada como

$$\begin{aligned} V_c(t_0, S_0; K + \Delta K, T) - V_c(t_0, S_0; K, T) &< 0, \text{ para calls,} \\ V_p(t_0, S_0; K + \Delta K, T) - V_p(t_0, S_0; K, T) &> 0, \text{ para puts.} \end{aligned}$$

De nuevo, en el límite tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta K \rightarrow 0} & \frac{1}{\Delta K} (V_c(t_0, S_0; K + \Delta K, T) - V_c(t_0, S_0; K, T)) \\ &= \frac{\partial}{\partial K} V_c(t_0, S_0; K, T). \end{aligned}$$

En otras palabras, la opción call «más cara» es la que tiene un precio de ejercicio de $K = 0$. Dado que el payoff de una call, $\max(S(T) - K, 0)$, es una función monótona decreciente en el strike K , el precio de cualquier opción call europea con $K \neq 0$ tiene que decrecer para valores crecientes de K . Para las opciones put se puede concluir lo contrario, utilizando la relación de paridad put-call.

3. La denominada «condición mariposa», dada por

$$V_c(t_0, S_0; K + \Delta K, T) - 2V_c(t_0, S_0; K, T) + V_c(t_0, S_0; K - \Delta K, T) \geq 0. \quad (4.57)$$

La necesidad de positividad de la expresión anterior se entiende a partir del siguiente argumento. Si compramos una opción call con strike $K + \Delta K$, vendemos dos opciones con strike K y compramos una opción call con strike $K - \Delta K$, el resultado no puede ser negativo (excluyendo los costes de transacción). Como cualquier valor no negativo descontado sigue siendo no negativo, (4.57) debe verificarse. Como se observa en (3.35), la segunda derivada del precio de la opción call puede relacionarse con la densidad del activo que, obviamente, tiene que ser no negativa para cualquier strike K .

Ejemplo 4.3.1 (Arbitraje por spread de calendario)

Consideramos las siguientes opciones call europeas, $V_c(t_0, S_0; K, T_1)$ y $V_c(t_0, S_0; K, T_2)$, con $t_0 < T_1 < T_2$, tipo de interés cero y que no pagan dividendos, y mostraremos que $V_c(t_0, S_0; K, T_1) < V_c(t_0, S_0; K, T_2)$. Emplearemos la desigualdad de Jensen, que establece que, para cualquier función convexa $g(\cdot)$, se verifica la desigualdad

$$g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)],$$

dada cualquier variable aleatoria X (véase también la Definición 3.1.1).

El valor de una call visto desde tiempo $t = T_1$, con vencimiento T_2 , viene dado por

$$\begin{aligned} V_c(T_1, S(T_1); K, T_2) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T_2) - K, 0) | \mathcal{F}(T_1)] \\ &\geq \max(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T_2) | \mathcal{F}(T_1)] - K, 0). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Con un tipo de interés cero, $S(t)$ es una martingala y, por tanto, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T_2) | \mathcal{F}(T_1)] = S(T_1)$. Así, (4.58) resulta en

$$V_c(T_1, S(T_1); K, T_2) \geq \max(S(T_1) - K, 0) = V_c(T_1, S(T_1); K, T_1). \quad \blacklozenge$$

Una opción call que vence «más tarde» debería ser más cara que otra que vence «más temprano», lo que puede ser generalizado a cualquier tiempo de vencimiento T .

Ejemplo 4.3.2

En la Figura 4.7, se muestran ejemplos para cada uno de los tres tipos de arbitraje. La figura superior izquierda ilustra el arbitraje por spread de calendario. Para algunos strikes, la opción call correspondiente a un vencimiento más largo es más barata que la opción con un vencimiento más corto. La figura superior derecha muestra un caso en el que se observa arbitraje por spread, y la figura inferior muestra un caso con arbitraje por spread mariposa.

Los arbitrajes por spread y mariposa pueden relacionarse, respectivamente, con la FDP y FDA del activo $S(T)$, mediante las expresiones

$$\frac{\partial}{\partial K} V_c(t_0, S_0; K, T) = e^{-r(T-t_0)} (F_{S(T)}(K) - 1), \quad (4.59)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} V_c(t_0, S_0; K, T) = e^{-r(T-t_0)} f_{S(T)}(K). \quad (4.60)$$

Como consecuencia, al dibujar la primera y segunda derivadas de los precios de opciones call, se observan inmediatamente las oportunidades de arbitraje. La FDA del precio del activo, $F_{S(T)}(K)$, debe ser monótona y la FDP, $f_{S(T)}(K)$, debe ser no negativa e integrar a uno.

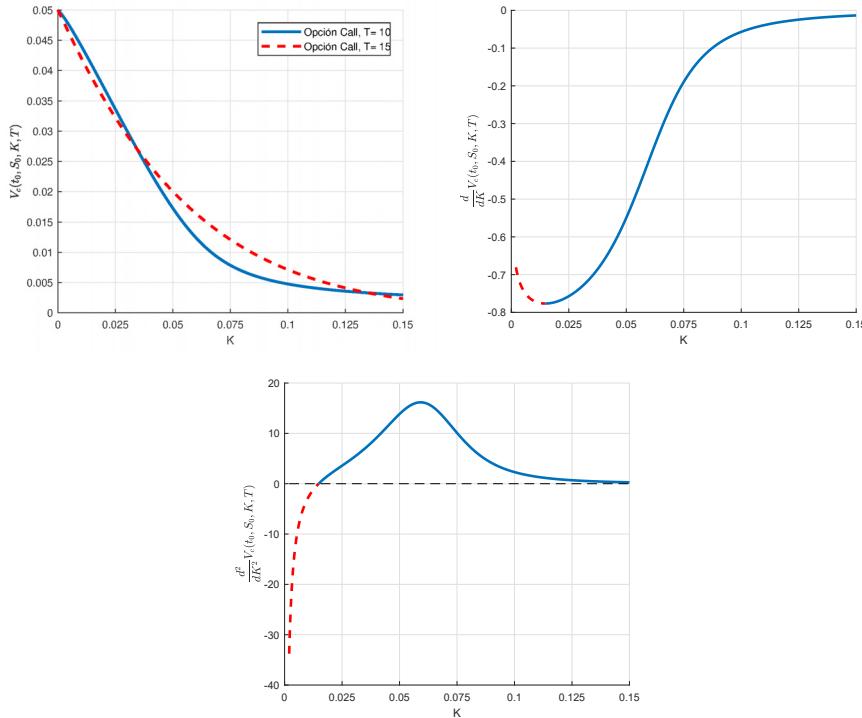


Figura 4.7: Tres tipos de arbitraje. Arriba a la izquierda: arbitraje por spread de calendario. Arriba a la derecha: arbitraje por spread. Abajo: arbitraje por spread mariposa.



4.3.3. Interpolación avanzada de la volatilidad implícita

El número de cotizaciones disponibles de la volatilidad implícita para cada vencimiento T_i variará para cada mercado y para cada clase de activo. Para algunas acciones no hay apenas cotizaciones de mercado de la volatilidad implícita y para otras acciones hay solo unas pocas. El número de cotizaciones de mercado depende de la liquidez del mercado y de las convenciones particulares del mismo. Por ejemplo, en los mercados de divisas (que se tratarán en el Capítulo 15), se pueden observar de 3 a 7 cotizaciones de la volatilidad implícita para cada fecha de vencimiento. El número de cotizaciones del mercado dependerá del par de divisas en particular. En la Tabla 4.1, se presenta un ejemplo de las volatilidades implícitas del mercado de divisas. Se dispone del valor ATM (en negrita) y cuatro cotizaciones para opciones ITM y OTM.

Imaginamos ahora que una institución financiera debe valorar una opción a un precio de ejercicio que no se cotiza en el mercado de divisas, por ejemplo, para $K = 145$, no presente en la Tabla 4.1. Entonces, se necesitará realizar una interpolación empleando las volatilidades disponibles. Lo mismo ocurre cuando valoramos un derivado no estándar de estilo europeo, para el que se emplea el modelo LV o el método Breeden-Litzenberger. Estos dos modelos se basan en un «continuo» de strikes cotizados, y sus volatilidades implícitas.

Tabla 4.1: Volatilidades implícitas (%) de un mercado de divisas (USD/JPY) para $T = 1$ y precio forward $S_F(t_0, T) = 131.5$. En negrita, el valor ATM.

| $T = 1$ | $K_1 = 110.0$ | $K_2 = 121.3$ | $K_3 = 131.5$ | $K_4 = 140.9$ | $K_5 = 151.4$ |
|----------------------|---------------|---------------|---------------------------------|---------------|---------------|
| $\sigma_{imp}(T, K)$ | 14.2 | 11.8 | 10.3 | 10.0 | 10.7 |

Existen diferentes técnicas para interpolar entre las cotizaciones disponibles en el mercado, como la interpolación lineal o splines. Uno de los métodos más populares para la interpolación de las volatilidades implícitas fue propuesto por Hagan *et al.* (2002), basado en una parametrización específica de la volatilidad implícita. Este método es popular debido a la relación directa entre la interpolación y un modelo de EDEs libre de arbitraje, el modelo Stochastic Alpha Beta Rho (SABR). El modelo SABR está definido por el sistema de EDEs

$$\begin{aligned} dS_F(t, T) &= \sigma(t)(S_F(t, T))^\beta dW_F(t), & S_F(t_0, T) &= S_{F,0}, \\ d\sigma(t) &= \gamma\sigma(t)dW_\sigma(t), & \sigma(t_0) &= \alpha. \end{aligned}$$

donde $dW_F(t)dW_\sigma(t) = \rho dt$ y los procesos se definen bajo la medida \mathbb{Q}^T (T-forward). El proceso varianza $\sigma(t)$ sigue una distribución lognormal. Además, dado que para una constante $\sigma := \sigma(t)$ el proceso $S_F(t, T)$ sigue un proceso CEV, se puede esperar que el proceso SABR condicionado, $S(T)$ dadas trayectorias de $\sigma(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$, es también un proceso CEV. Los sistemas de EDEs se tratarán en el Capítulo 7, y el proceso CEV en el Capítulo 14.

La parametrización SABR ha ganado mucha popularidad gracias a que las volatilidades implícitas se pueden calcular analíticamente, ya que se dispone de una fórmula en forma de expansión asintótica para las mismas. La expresión para la aproximación de la volatilidad implícita de Black-Scholes bajo el modelo SABR⁷ es

$$\hat{\sigma}(T, K) = \frac{\hat{a}(K)\hat{c}(K)}{g(\hat{c}(K))} \times \left[1 + \left(\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(S_F(t_0)K)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\gamma\alpha}{(S_F(t_0)K)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \gamma^2 \right) T \right], \quad (4.61)$$

⁷ Nótese que esta es la volatilidad implícita de Black-Scholes, «no» la volatilidad implícita de SABR.

donde

$$\hat{a}(K) = \frac{\alpha}{(S_F(t_0) \cdot K)^{\frac{1-\beta}{2}}} \times \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 \left(\frac{S_F(t_0)}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 \left(\frac{S_F(t_0)}{K}\right)\right)},$$

y

$$\hat{c}(K) = \frac{\gamma}{\alpha} (S_F(t_0) K)^{\frac{1-\beta}{2}} \log \frac{S_F(t_0)}{K}, \quad g(x) = \log \left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho x + x^2} + x - \rho}{1 - \rho} \right).$$

En el caso de opciones at-the-money, es decir, para $S_F(t_0) = K$, la fórmula se reduce a

$$\hat{\sigma}(T, K) \approx \frac{\alpha}{(S_F(t_0))^{1-\beta}} \times \left(1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(S_F(t_0))^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\alpha\gamma}{(S_F(t_0))^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \gamma^2 \right] T \right).$$

Debido a que la fórmula de Hagan se deduce a partir de un modelo con una estructura 2D avanzada (el modelo se clasifica dentro de los modelos de volatilidad local estocástica que se tratarán en el Capítulo 10), puede modelar un amplio rango de patrones diferentes para la volatilidad implícita. En la Figura 4.8 se muestra el efecto de los diferentes parámetros del modelo sobre las curvas de volatilidad implícita. Nótese que los parámetros β y ρ tienen un efecto en la mueca de volatilidad implícita. En la práctica, β se suele fijar de antemano, mientras que ρ se calibra. El parámetro α controla la magnitud de la sonrisa de volatilidad implícita y γ la curvatura de la sonrisa.

Ejemplo 4.3.3 (Interpolación de volatilidades implícitas)

En este ejemplo, utilizaremos las cotizaciones de mercado de la volatilidad implícita de la Tabla 4.1. Para el conjunto de cotizaciones dadas, comparamos dos técnicas de interpolación para las volatilidades implícitas, la interpolación lineal y la interpolación de Hagan. La interpolación lineal es sencilla, ya que interpola directamente entre dos volatilidades implícitas de mercado. Para la interpolación de Hagan el procedimiento es más complicado. Primero, tenemos que determinar los parámetros del modelo $\alpha, \beta, \rho, \gamma$ para los cuales la parametrización se ajusta mejor a las cotizaciones del mercado, es decir, minimizar la diferencia $|\hat{\sigma}(T, K_i) - \sigma_{imp}(T, K_i)|$, para todo $K_i, i = 1, \dots, 5$.

En la Figura 4.9 se presentan los resultados de los dos métodos de interpolación. La figura de la izquierda muestra las volatilidades implícitas de mercado, con la interpolación lineal y la interpolación de Hagan. Ambas curvas de interpolación parecen ajustarse bien a las cotizaciones del mercado. También hemos mencionado que cuando los precios de mercado de las opciones call y put están disponibles, es fácil aproximar la función de densidad del subyacente,

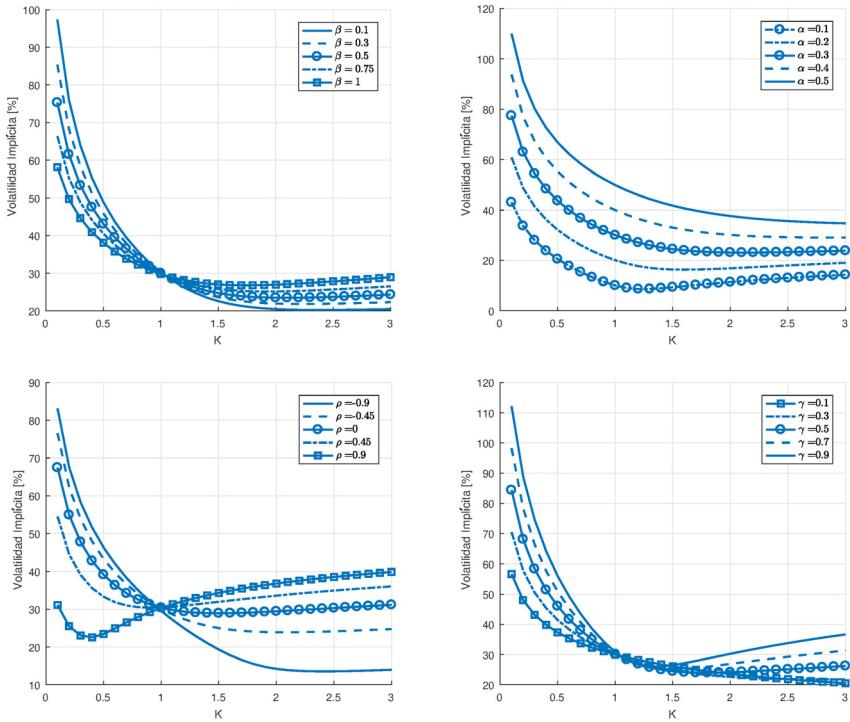


Figura 4.8: Diferentes patrones de volatilidad implícita generadas mediante la parametrización de Hagan. Arriba a la izquierda: impacto de β . Arriba a la derecha: impacto de α . Abajo a la izquierda: impacto de ρ . Abajo a la derecha: impacto de γ .



basándonos en estas cotizaciones, como

$$f_{S(T)}(K) = e^{r(T-t_0)} \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, T)}{\partial K^2}.$$

La figura de la derecha muestra las correspondientes densidades implícitas para las dos técnicas de interpolación. Nótese la naturaleza no suavizada de la densidad basada en la interpolación lineal. La integración de estas funciones de densidad produce

$$\text{Lineal : } \int_{\mathbb{R}} f_{S(T)}(z) dz = 0.8701, \quad \text{Hagan : } \int_{\mathbb{R}} f_{S(T)}(z) dz = 0.9969.$$

La interpolación lineal da lugar a arbitraje por *spread mariposa*, y por lo tanto no es recomendable. La técnica de interpolación de Hagan, por el contrario, da

resultados mucho mejores. Sin embargo, esta interpolación tampoco es perfecta y puede dar resultados no satisfactorios en escenarios de mercado extremos (para los cuales, debido a la configuración de parámetros resultante, la fórmula de la volatilidad asintótica no es precisa), como por ejemplo en el caso de los tipos de interés negativos. La rutina de interpolación puede ser mejorada, como se muestra en Grzelak y Oosterlee (2016).

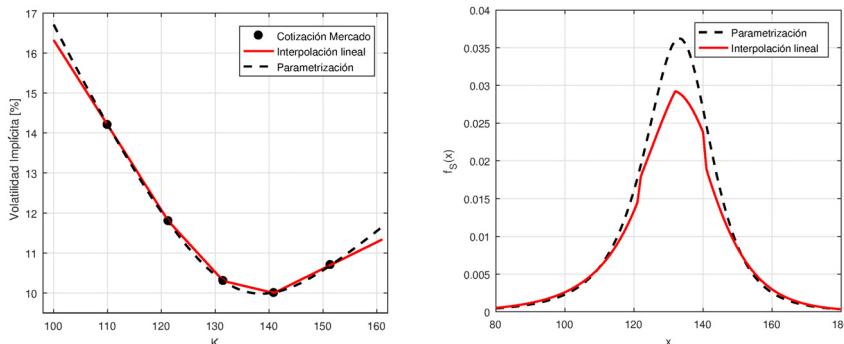


Figura 4.9: Diferentes técnicas de interpolación aplicadas a las cotizaciones del mercado de divisas. Izquierda: volatilidades implícitas interpoladas. Derecha: densidades implícitas.



La parametrización SABR es preferible a la interpolación lineal estándar o por splines. Dado que la parametrización se deduce de un modelo libre de arbitraje, se adapta al propósito de interpolar las volatilidades implícitas del mercado.

Al interpolar las volatilidades implícitas es importante que se evite el arbitraje por interpolación. Comúnmente, se prefiere una parametrización de la volatilidad implícita que se deduce de un modelo de precios libre de arbitraje a una técnica de interpolación estándar, de las disponibles en los paquetes informáticos de métodos numéricos.

4.3.4. Simulación del modelo de volatilidad local

La expresión para la volatilidad local se emplea dentro de la EDE

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_{LV}(t, S(t))S(t)dW(t).$$

Por lo tanto, se debe determinar el término de volatilidad local (4.49) en cada paso de tiempo $T = t$ y para cada $K = S(t)$.

El modelo de volatilidad local se basa en la superficie de volatilidad implícita disponible, $\sigma_{\text{imp}}(T, K)$, para cada fecha de vencimiento T y strike K . Para cada subyacente solo se dispone de unas pocas cotizaciones de mercado de opciones, por lo que el estándar en la industria es parametrizar la superficie de volatilidad implícita mediante una función 2D continua $\hat{\sigma}(T, K)$, que se calibra con las cotizaciones de mercado, $\sigma_{\text{imp}}(T_i, K_j)$, al conjunto de fechas de vencimiento y precios de ejercicio disponibles. La parametrización de la volatilidad $\hat{\sigma}(T, K)$ tiene que satisfacer las condiciones de ausencia de arbitraje.

Consideremos la interpolación de Hagan (4.61), empleando $\rho = 0, \beta = 1$, que resulta en una expresión para la volatilidad implícita de la forma

$$\hat{\sigma}(T, K) = \frac{\gamma \log(S_F(t_0)/K) \left(1 + \frac{\gamma^2}{12} T\right)}{\log\left(\sqrt{1 + (\frac{\gamma}{\alpha} \log(S_F(t_0)/K))^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \log(S_F(t_0)/K)\right)}, \quad (4.62)$$

y

$$\hat{\sigma}(T, S_F(t_0)) = \alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{12} T\right),$$

La forma funcional de (4.62) se usa habitualmente en la industria, véase Grzelak y Oosterlee (2016).

Comenzamos con la simulación del modelo de volatilidad local a partir de (4.41), con $\sigma_{LV}(t, S)$ definida en (4.56), y donde $\sigma_{\text{imp}}(t, S(t)) = \hat{\sigma}(t, S(t))$ en (4.62). La simulación de (4.41) puede realizarse mediante una discretización de Euler, estudiada en detalle en el Capítulo 9, esto es

$$s_{i+1} = s_i + rs_i \Delta t + \sigma_{LV}(t_i, s_i) s_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (4.63)$$

con $\sigma_{LV}(t_i, s_i)$ dado por (4.56), es decir,

$$\begin{aligned} & \sigma_{LV}^2(t_i, s_i) \\ &= \frac{\frac{\partial w}{\partial t_i} + rs_i \frac{\partial w}{\partial s_i}}{1 + s_i \frac{\partial w}{\partial s_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) + \frac{1}{2} s_i^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2} + \frac{1}{2} s_i^2 \left(\frac{\partial w}{\partial s_i}\right)^2 \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

para $t_0 = 0$, $w := t_i \hat{\sigma}^2(t_i, s_i)$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t_i} &= \hat{\sigma}(t_i, s_i)^2 + 2t_i \hat{\sigma}(t_i, s_i) \frac{\partial \hat{\sigma}(t_i, s_i)}{\partial t_i}, \\ \frac{\partial w}{\partial s_i} &= 2t_i \hat{\sigma}(t_i, s_i) \frac{\partial \hat{\sigma}(t_i, s_i)}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2} &= 2t_i \left(\frac{\partial \hat{\sigma}(t_i, s_i)}{\partial s_i}\right)^2 + 2t_i \hat{\sigma}(t_i, s_i) \frac{\partial^2 \hat{\sigma}(t_i, s_i)}{\partial s_i^2}. \end{aligned}$$

El componente de volatilidad local $\sigma_{LV}(t_i, s_i)$ en (4.64) debe ser evaluado para cada realización s_i . En el caso de una simulación de Monte Carlo, donde se

generan muchos miles de trayectorias del activo, la evaluación de (4.64) puede llegar a ser muy costosa en términos computacionales.

Como comprobación, cuando el modelo se ha implementado correctamente, las volatilidades del modelo $\hat{\sigma}(T, K)$ deberían parecerse a $\sigma_{\text{imp}}(T, K)$.

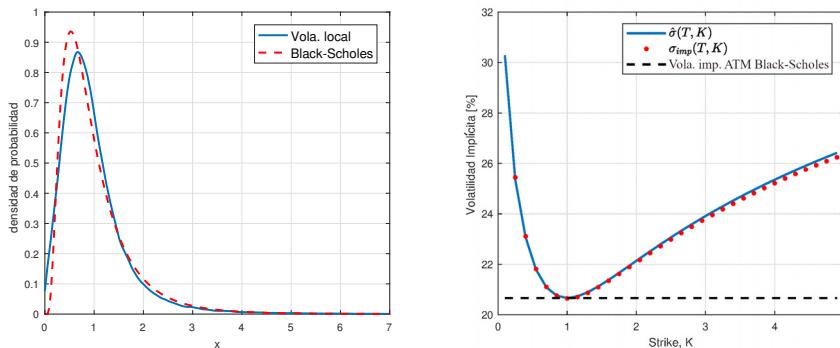


Figura 4.10: Volatilidad local versus modelo de Black-Scholes. Izquierda: densidades. Derecha: volatilidades $\hat{\sigma}(T, K)$ y $\sigma_{\text{imp}}(T, K)$ obtenidas mediante el modelo de volatilidad local con $T = 10$, $\gamma = 0.2$, $S_0 = 1$ y $\alpha = 0.2$.



En la imagen de la izquierda de la Figura 4.10, comparamos la densidad de volatilidad local con la función de densidad lognormal de Black-Scholes, en la que se utiliza la volatilidad ATM. En la parte derecha se muestran las volatilidades del modelo $\hat{\sigma}(T, K)$ y las volatilidades implícitas resultantes $\sigma_{\text{imp}}(T, K)$, obtenidas por simulación de Monte Carlo. El modelo de volatilidad local genera volatilidades implícitas que se ajustan a los valores de entrada usados en la parametrización de $\sigma_{LV}(T, K)$.

Concluimos con las siguientes afirmaciones generales sobre el modelo LV. Los modelos de volatilidad local reproducen de manera satisfactoria las volatilidades implícitas que observamos en las cotizaciones de mercado de las opciones, utilizadas como argumento del modelo LV. Por lo tanto, la calibración a estas opciones europeas es muy precisa, y el modelo está «adaptado» a las cotizaciones de las opciones disponibles. Sin embargo, en los modelos LV pueden aparecer imprecisiones importantes al valorar productos derivados financieros que dependen de las trayectorias de la volatilidad o, en general, de las funciones de densidad de transición. Esta información simplemente no está «codificada» en el marco del modelo LV. En el Capítulo 10 se estudiará en detalle este problema.

4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.1 Emplear la iteración Newton-Raphson, el método de búsqueda de raíces combinado, así como el método de Brent para encontrar las raíces de los siguientes problemas:

- Calcular las dos soluciones de la ecuación no lineal

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2x = 0.$$

Obtener las respectivas aproximaciones para cada iteración (por lo tanto, la convergencia) de las dos soluciones.

- Descargar algunos datos de mercado de opciones sobre un activo cuyo nombre comience con tu inicial o la primera letra de tu apellido. Confirmar que los datos de la opción contienen un sonrisa o mueca de volatilidad implícita. Representar y estudiar la volatilidad implícita en función del precio de ejercicio.

Ejercicio 4.2 Elegir un conjunto de parámetros para los que una opción se encuentre muy in-the-money. Confirmar que la iteración Newton-Raphson tiene problemas de convergencia, mientras que el método combinado de búsqueda de raíces converge de manera más robusta.

Ejercicio 4.3 Empleando dos nuevas variables independientes

$$X_F := \log\left(\frac{Se^{r(T-t)}}{K}\right) \text{ y } t_* := \sigma\sqrt{T-t},$$

realizar las siguientes tareas:

- Reescribir los argumentos $d_{1,2}$ en la solución Black-Scholes, como dos variables que solo dependan de X_F y t_* .
- Proporcionar una interpretación de la desigualdad $X_F \leq 0$.
- Mostrar que el valor de la opción put ponderado, $p = V_p(t, S(t))/S(t)$, viene dado por

$$p(X_F, t_*) = e^{-X_F} F_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_2) - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1).$$

- Determinar

$$\frac{\partial p(X_F, t_*)}{\partial t_*}$$

y proporcionar una interpretación de este derivada.

Ejercicio 4.4 Para $c(y, \omega) := S_0 [F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - e^y F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2)]$, con

$$d_1 = -\frac{y}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega},$$

y $d_2 = d_1 - \sqrt{\omega}$, e y y ω definidas en (4.50), probar la igualdad

$$\frac{\partial^2 c}{\partial w^2} = \frac{\partial c}{\partial w} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2} \right).$$

Ejercicio 4.5 Usar los resultados del Ejercicio 4.4 para probar que

$$\frac{\partial^2 c}{\partial w \partial y} = \frac{\partial c}{\partial w} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial y} + 2 \frac{\partial c}{\partial w}.$$

Ejercicio 4.6 ¿Para cuál de las siguientes funciones de payoff puede hacerse la valoración de opciones en el marco de Breeden-Litzenberger?

- a. Una opción digital, donde la función de payoff depende de $\mathbb{1}_{S(T) > K}$.
- b. Una opción spread basada en la evolución de dos acciones, con payoff $\max(S_1(T) - S_2(T), K)$.
- c. Una opción *rendimiento*, cuyo payoff es $\max(S(T_2)/S(T_1) - K, 0)$.
- d. Una opción de tipo cliquet, con función de payoff, $\min(\max(\frac{S(T)}{S(t_0)} - K_1, 0), K_2)$.

Ejercicio 4.7 Supongamos un mercado en el que $r = 0$, $S(t_0) = 1$ y las volatilidades implícitas para $T = 4$ vienen dadas por la fórmula

$$\hat{\sigma}(K) = 0.510 - 0.591K + 0.376K^2 - 0.105K^3 + 0.011K^4, \quad (4.65)$$

con un límite superior dado por $\hat{\sigma}(K) = \hat{\sigma}(3)$ para $K > 3$. En el marco de Breeden-Litzenberger cualquier función de payoff de tipo europeo puede valorarse, en caso de $r = 0$, mediante la fórmula

$$V(t_0, S_0) = V(T, S_0) + \int_0^{S_0} V_p(t_0, x) \frac{\partial^2 V(T, x)}{\partial x^2} dx + \int_{S_0}^{\infty} V_c(t_0, x) \frac{\partial^2 V(T, x)}{\partial x^2} dx, \quad (4.66)$$

donde $V(T, x)$ es una de las funciones de payoff en tiempo T dadas a continuación. $V_p(t_0, x)$ y $V_c(t_0, x)$ son los precios de call y put con strike x . Estos precios pueden obtenerse evaluando la fórmula de Black-Scholes para las volatilidades de (4.65). Usando (4.66), calcula numéricamente los precios de las opciones en $t = 0$, para las siguientes funciones de payoff:

- a. $V(T, S(T)) = \max(S^2(T) - 1.2S(T), 0)$.
- b. $V(T, S(T)) = \max(S(T) - 1.5, 0)$.
- c. $V(T, S(T)) = \max(1.7 - S(T), 0) + \max(S(T) - 1.4, 0)$.
- d. $V(T, S(T)) = \max(4 - S^3(T), 0) + \max(S(T) - 2, 0)$

Pista: Aproximar las derivadas del payoff $V(T, x)$ mediante diferencias finitas. Nótese que el incremento δ , en $V(T, x + \delta)$, no puede ser demasiado pequeño por razones de precisión numérica.

¿Para cuál de las funciones de payoff anteriores se puede determinar el precio de la opción en $t = 0$ sin usar el modelo de Breeden-Litzenberger?

Ejercicio 4.8 Considerar la fórmula SABR para la volatilidad implícita de Black-Scholes de (4.61), empleando el siguiente conjunto de parámetros: $S_F(t_0) = S(t_0)e^{r(T-t_0)}$, $T = 2.5$, $\beta = 0.5$, $S(t_0) = 5.6$, $r = 0.015$, $\alpha = 0.2$, $\rho = -0.7$, $\gamma = 0.35$. Basándose en la relación entre los precios de las opciones y la función de densidad de probabilidad de la acción, es decir,

$$\begin{aligned} f_{S(T)}(x) &= e^{r(T-t_0)} \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; x, T)}{\partial x^2} \\ &\approx e^{r(T-t_0)} \frac{V_c(t_0, S_0; x + \Delta x, T) - 2V_c(t_0, S_0; x, T) + V_c(t_0, S_0; x - \Delta x, T)}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

calcular la función de densidad de probabilidad $f_{S(T)}(x)$. ¿Está dicha función de densidad de probabilidad libre de arbitraje? Explicar el impacto de Δx en la calidad de la FDP.

Ejercicio 4.9 Para los parámetros $T = 1$, $S_0 = 10.5$ y $r = 0.04$, se observa en el mercado el conjunto de volatilidades implícitas dadas en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Volatilidades implícitas (%) y los correspondientes strikes

| K | 3.28 | 5.46 | 8.2 | 10.93 | 13.66 | 16.39 | 19.12 | 21.86 |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_{imp}(T, K)$ | 31.37 | 22.49 | 14.91 | 9.09 | 6.85 | 8.09 | 9.45 | 10.63 |

Considerar las siguientes rutinas de interpolación:

- a. Lineal.
- b. *Spline* cúbico.
- c. Vecino más cercano.

¿Cuál de estas interpolaciones dará lugar a unos valores más pequeños para el arbitraje mariposa? Explica cómo reducir los valores de arbitraje. *Pista:* Suponer una extrapolación plana fuera del rango de precios de mercado.

Ejercicio 4.10 Considerar dos vencimientos $T_1 = 1$ y $T_2 = 2$, los parámetros $r = 0.1$ y $S_0 = 10.93$, y las volatilidades implícitas dadas en la Tabla 4.3. Comprobar si existe arbitraje por calendario con estos valores.

Tabla 4.3: Volatilidades implícitas (%) y los correspondientes strikes

| K | 3.28 | 5.46 | 8.2 | 10.93 | 13.66 | 16.39 | 19.12 | 21.86 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_{imp}(T_1, K)$ | 31.37 | 22.49 | 14.91 | 9.09 | 6.85 | 8.09 | 9.45 | 10.63 |
| $\sigma_{imp}(T_2, K)$ | 15.68 | 11.25 | 7.45 | 4.54 | 3.42 | 4.04 | 4.72 | 5.31 |

Ejercicio 4.11 Dados dos activos independientes, $S_1(t)$ y $S_2(t)$, determinar, empleando el modelo Breeden-Litzenberger, las esperanzas

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \left(S_1(T)^{S_2(T)} \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\log \prod_{i=1}^N \frac{S_1(t_{i+1})}{S_1(t_i)} \frac{S_2(t_{i+1})}{S_2(t_i)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Ejercicio 4.12 Para valorar opciones financieras en función de la función de densidad de probabilidad de mercado, se puede utilizar (4.11) o (4.22). Considerando el payoff $V(T, S) = \max(S^2 - K, 0)$ y la configuración del Ejercicio 4.9, argumentar cuál de las dos representaciones es más estable numéricamente, y mostrar los correspondientes resultados numéricos.

CAPÍTULO 5

Procesos con saltos

En este capítulo:

Una de las maneras de reproducir la sonrisa de volatilidad implícita observada en el mercado es considerar precios de activos modelados mediante procesos con saltos. Por ello, en el **Apartado 5.1**, introduciremos los procesos de difusión «con saltos» y detallaremos la generalización del lema de Itô para los mismos. Las ecuaciones de valoración de opciones bajo los procesos de precios con saltos resultan ser ecuaciones integro-diferenciales. Se puede obtener una solución analítica con la ayuda del Teorema de Feynman-Kac, véase **Apartado 5.2**. Los modelos de difusión con saltos para precios de activos se pueden clasificar dentro de los procesos de Lévy exponenciales, que se tratarán en el **Apartado 5.3**. Abordaremos los modelos de Lévy con saltos considerando un número «finito» (**Apartado 5.3.1**) o «infinito» (**Apartado 5.4**) de estos. Para ciertos modelos de Lévy específicos, los ejemplos numéricos darán una idea del impacto de los diferentes parámetros del modelo en la densidad del activo y en la volatilidad implícita. Terminaremos el capítulo con una reflexión general sobre el uso de saltos para el modelado de precios de activos en el **Apartado 5.5**.

Es importante destacar que, para los modelos de activos que se presentan en este capítulo, se puede obtener la función característica. La función característica constituye la base para el uso de técnicas de Fourier en la valoración de opciones, como se verá en el Capítulo 6.

Palabras clave de este capítulo: modelos alternativos para precios de activos, proceso de difusión con saltos, proceso de Poisson, modelos de Lévy con saltos, impacto sobre la EDP de valoración, función característica, lema de Itô

5.1. Procesos de difusión con saltos

Analizamos el modelo de Black-Scholes extendido, que incluye saltos independientes modelados por un proceso de Poisson, denominado proceso de difusión con saltos, para el que consideraremos la dinámica del proceso transformado logarítmicamente, $X(t) = \log S(t)$ bajo la medida del mundo real \mathbb{P} , es decir

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t) + J dX_{\mathcal{P}}(t), \quad (5.1)$$

donde μ es la deriva, σ es la volatilidad, $X_{\mathcal{P}}(t)$ es un proceso de Poisson y la variable J representa la magnitud del salto; J sigue una distribución, F_J , de magnitudes. Se supone que los procesos $W^{\mathbb{P}}(t)$ y $X_{\mathcal{P}}(t)$ son independientes. Antes de empezar a trabajar con estas dinámicas necesitamos introducir algunos conceptos de los procesos con saltos, en particular del proceso de Poisson, y también una versión adaptada del lema de Itô.

Definición 5.1.1 (Variable aleatoria de Poisson)

Una variable aleatoria de Poisson, denotada por $X_{\mathcal{P}}$, cuenta el número de ocurrencias de un evento durante un periodo de tiempo determinado. La probabilidad de observar $k \geq 0$ ocurrencias en un periodo de tiempo viene dada por

$$\mathbb{P}[X_{\mathcal{P}} = k] = \frac{\xi_p^k e^{-\xi_p}}{k!}.$$

La media de $X_{\mathcal{P}}$, $\mathbb{E}[X_{\mathcal{P}}] = \xi_p$, proporciona el promedio de ocurrencias del evento, mientras que la varianza es $\text{Var}[X_{\mathcal{P}}] = \xi_p$. ◀

Definición 5.1.2 (Proceso de Poisson)

Un proceso de Poisson, $\{X_{\mathcal{P}}(t), t \geq t_0 = 0\}$, con parámetro $\xi_p > 0$, es un proceso estocástico que toma valores enteros, con las siguientes propiedades:

- $X_{\mathcal{P}}(0) = 0$.
- $\forall t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$, los incrementos $X_{\mathcal{P}}(t_1) - X_{\mathcal{P}}(t_0), X_{\mathcal{P}}(t_2) - X_{\mathcal{P}}(t_1), \dots, X_{\mathcal{P}}(t_n) - X_{\mathcal{P}}(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.
- Para $s \geq 0, t > 0$ y enteros $k \geq 0$, los incrementos siguen una distribución de Poisson

$$\mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(s+t) - X_{\mathcal{P}}(s) = k] = \frac{(\xi_p t)^k e^{-\xi_p t}}{k!}. \quad (5.2)$$

El proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$ es un proceso de conteo, especificando el número de saltos en un período de tiempo de duración t a través de (5.2). Además, mediante (5.2) se confirma que los incrementos son estacionarios, ya que los incrementos solo dependen de la longitud del intervalo y no del tiempo inicial s .

El parámetro ξ_p es la «tasa o intensidad» del proceso de Poisson, es decir, indica el número de saltos en un período de tiempo. La probabilidad de que ocurra exactamente un solo evento en un intervalo pequeño de tiempo, dt , se obtiene de (5.2) como

$$\mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(s + dt) - X_{\mathcal{P}}(s) = 1] = \frac{(\xi_p dt)e^{-\xi_p dt}}{1!} = \xi_p dt + o(dt),$$

y la probabilidad de que no ocurra ningún evento en dt es

$$\mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(s + dt) - X_{\mathcal{P}}(s) = 0] = e^{-\xi_p dt} = 1 - \xi_p dt + o(dt).$$

En un intervalo de tiempo dt , se producirá un salto con probabilidad $\xi_p dt$, resultando en

$$\mathbb{E}[dX_{\mathcal{P}}(t)] = 1 \cdot \xi_p dt + 0 \cdot (1 - \xi_p dt) = \xi_p dt,$$

donde $dX_{\mathcal{P}}(t) = X_{\mathcal{P}}(s + dt) - X_{\mathcal{P}}(s)$. Entonces, la esperanza viene dada por

$$\mathbb{E}[X_{\mathcal{P}}(s + t) - X_{\mathcal{P}}(s)] = \xi_p t.$$

Con $X_{\mathcal{P}}(0) = 0$, el número esperado de eventos en un intervalo de tiempo de duración t , fijando $s = 0$, es igual a

$$\mathbb{E}[X_{\mathcal{P}}(t)] = \xi_p t. \quad (5.3)$$

Si definimos otro proceso, $\bar{X}_{\mathcal{P}}(t) := X_{\mathcal{P}}(t) - \xi_p t$, entonces $\mathbb{E}[d\bar{X}_{\mathcal{P}}(t)] = 0$, de modo que el proceso $\bar{X}_{\mathcal{P}}(t)$, que se denomina el proceso de Poisson «compensado», es una martingala.

Ejemplo 5.1.1 (Trayectorias del proceso de Poisson)

Generamos algunas trayectorias discretas asociadas a un proceso de Poisson, con $\xi_p = 1$. El gráfico de la izquierda en la Figura 5.1 muestra las trayectorias de $dX_{\mathcal{P}}(t)$, mientras que el gráfico de la derecha muestra las mismas trayectorias para el proceso de Poisson compensado, $-\xi_p dt + dX_{\mathcal{P}}(t)$.

Dada la EDE

$$dX(t) = J(t)dX_{\mathcal{P}}(t), \quad (5.4)$$

podemos definir la integral estocástica con respecto al proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$, como

$$X(T) - X(t_0) = \int_{t_0}^T J(t)dX_{\mathcal{P}}(t) := \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(T)} J_k. \quad (5.5)$$

La variable J_k para $k \geq 1$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con una distribución de probabilidad del tamaño del salto F_J , tal que $\mathbb{E}[J_k] = \mu_J < \infty$.

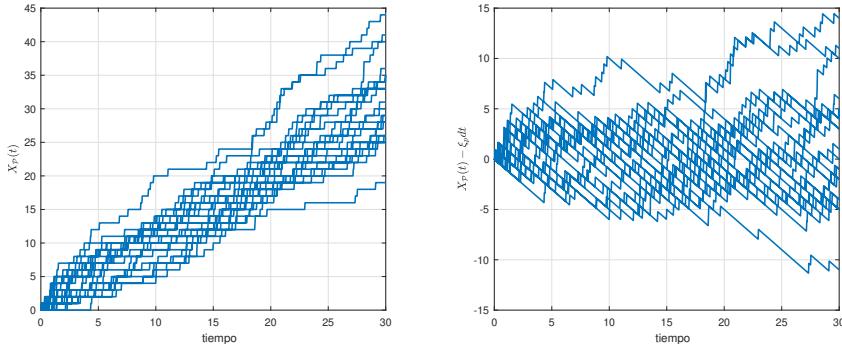


Figura 5.1: Trayectorias de Monte Carlo con $\xi_p = 1$. Izquierda: proceso de Poisson. Derecha: proceso de Poisson compensado.



5.1.1. Lema de Itô y saltos

En el Capítulo 2 hemos dicho que, para los activos negociados, se debe satisfacer la propiedad de martingala para el precio descontado del activo, $S(t)/M(t)$, bajo la medida de riesgo neutro (véase Apartado 2.3). Sin embargo, en un contexto con saltos, la simple sustitución $\mu = r$ en (5.1) no es suficiente para lograrlo, ya que los saltos tienen impacto sobre el término de deriva. Se necesita un «ajuste de la deriva» para compensar la magnitud media de los saltos. Para obtener la dinámica para $S(t) = \exp(X(t))$, con $X(t)$ como en (5.1), es necesario emplear una variante del lema de Itô que está relacionada con el proceso de Poisson. A continuación presentamos un resultado general para modelos con saltos de Poisson independientes.

Resultado 5.1.1 (Lema de Itô para el proceso de Poisson)

Consideramos un proceso cádlág, $X(t)$, definido como

$$dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{J}(t, X(t_-))dX_{\mathcal{P}}(t), \quad \text{con } X(t_0) \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

donde $\bar{\mu}, \bar{J} : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones deterministas y continuas, y $X_{\mathcal{P}}(t)$ es un proceso de Poisson, comenzando en $t_0 = 0$.

Para una función derivable, $g : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada de Itô viene dada por

$$\begin{aligned} dg(t, X(t)) &= \left[\frac{\partial g(t, X(t))}{\partial t} + \bar{\mu}(t, X(t)) \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial X} \right] dt \\ &+ \left[g(t, X(t_-) + \bar{J}(t, X(t_-))) - g(t, X(t_-)) \right] dX_{\mathcal{P}}(t), \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde el límite por la izquierda se denota por $X(t_-) := \lim_{s \rightarrow t} X(s), s < t$, tal que, por la continuidad de $\bar{J}(\cdot)$, su límite por la izquierda es igual a $\bar{J}(t, X(t_-))$.

Intuitivamente, la fórmula de Itô para el caso con saltos expresa que, cuando se produce un salto, es decir, $dX_{\mathcal{P}}(t) = 1$, el proceso «salta» de $X(t_-)$ a $X(t)$, con la magnitud del salto determinada por la función $\bar{J}(t, X(t))$ (véase Sennewald y Wälde (2006)), resultando en

$$g(t, X(t)) = g(t, X(t_-) + \bar{J}(t, X(t_-))).$$

Después del salto, en tiempo t , la función $g(\cdot)$ se ajusta con la magnitud del salto que se determinó en tiempo t_- .

En aplicaciones prácticas se emplean procesos estocásticos que incluyen un movimiento browniano y un proceso de Poisson, como en (5.1). La dinámica general de este proceso combinado viene dada por

$$dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{J}(t, X(t_-))dX_{\mathcal{P}}(t) + \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t), \text{ con } X(t_0) \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

siendo $\bar{\mu}(\cdot, \cdot)$ la deriva, $\bar{\sigma}(\cdot, \cdot)$ el término de difusión y $\bar{J}(\cdot, \cdot)$ la función de magnitud del salto. Entonces, para una función $g(t, X(t))$ como en (5.7), se requiere de una extensión del Resultado 5.1.1. Asumiendo que el proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$ es independiente de movimiento browniano $W(t)$, la dinámica de $g(t, X(t))$ viene dada por

$$\boxed{dg(t, X(t)) = \left[\frac{\partial g(t, X(t))}{\partial t} + \bar{\mu}(t, X(t)) \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial X} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 g(t, X(t))}{\partial X^2} \right] dt + \left[g(t, X(t_-) + \bar{J}(t, X(t_-))) - g(t, X(t_-)) \right] dX_{\mathcal{P}}(t) + \bar{\sigma}(t, X(t)) \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial X} dW(t).} \quad (5.9)$$

Hemos actualizado la tabla de multiplicación de Itô, véase Tabla 5.1, donde también se incluyen los términos cruzados que involucran al proceso de Poisson. Para entender de manera intuitiva la regla para el proceso de Poisson en la Tabla 5.1 se parte de que el término $dX_{\mathcal{P}} = 1$ con probabilidad $\xi_p dt$, y que $dX_{\mathcal{P}} = 0$ con probabilidad $(1 - \xi_p dt)$, lo que implica que

$$(dX_{\mathcal{P}})^2 = \begin{cases} 1^2 & \text{con probabilidad } \xi_p dt, \\ 0^2 & \text{con probabilidad } (1 - \xi_p dt) \end{cases} = dX_{\mathcal{P}}.$$

Para aplicar el lema de Itô a la función $S(t) = e^{X(t)}$, con $X(t)$ como en (5.1), sustituimos $\bar{\mu}(t, X(t)) = \mu$, $\bar{\sigma}(t, X(t)) = \sigma$ y $\bar{J}(t, X(t_-)) = J$ en (5.9), resultando

$$de^{X(t)} = \left(\mu e^{X(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{X(t)} \right) dt + \sigma e^{X(t)} dW(t) + \left(e^{X(t)+J} - e^{X(t)} \right) dX_{\mathcal{P}}(t),$$

| | dt | $dW(t)$ | $dX_{\mathcal{P}}(t)$ |
|-----------------------|------|---------|-----------------------|
| dt | 0 | 0 | 0 |
| $dW(t)$ | 0 | dt | 0 |
| $dX_{\mathcal{P}}(t)$ | 0 | 0 | $dX_{\mathcal{P}}(t)$ |

Tabla 5.1: Tabla de multiplicación de Itô para el proceso de Poisson.

tal que obtenemos

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) + (e^J - 1) dX_{\mathcal{P}}(t).$$

Hemos obtenido la dinámica de la acción $S(t)$ bajo la medida del mundo real \mathbb{P} . El siguiente paso es obtener la dinámica de la acción bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} . Para ello, comprobamos bajo qué condiciones el proceso $Y(t) := S(t)/M(t)$ es una martingala, en otras palabras, la dinámica $dY(t) = \frac{dS(t)}{M(t)} - \frac{rS(t)dt}{M(t)}$, con $dY(t) = Y(t + dt) - Y(t)$, debería tener un valor esperado igual a cero, siendo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dY(t)] &= \mathbb{E} \left[\mu S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t) - rS(t) \right] dt + \mathbb{E}[\sigma S(t)dW(t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[(e^J - 1) S(t)dX_{\mathcal{P}}(t)]. \end{aligned}$$

Por las propiedades del movimiento browniano y del proceso de Poisson, y el hecho de que todos los componentes aleatorios en la expresión anterior son mutuamente independientes¹, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dY(t)] &= \mathbb{E} \left[\mu S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t) - rS(t) \right] dt + \mathbb{E}[(e^J - 1) S(t)] \xi_p dt \\ &= \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathbb{E}[\xi_p(e^J - 1)] \right) \mathbb{E}[S(t)] dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]$, tenemos que $\mathbb{E}[dY(t)] = 0$. El término $\bar{\omega} := \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]$ es el denominado término de «corrección de la deriva», que hace que el proceso sea una martingala. Por tanto, la dinámica del activo $S(t)$ bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} viene dada por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) + (e^J - 1) dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (5.10)$$

En la literatura, el proceso en (5.10) se conoce como el «modelo estándar de difusión con saltos», que está directamente conectado con la dinámica

$$dX(t) = \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) + J dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (5.11)$$

¹Se puede demostrar que si $W(t)$ es un movimiento browniano y $X_{\mathcal{P}}(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad ξ_p , y ambos procesos se definen en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}(t), \mathbb{P})$, entonces los procesos $W(t)$ y $X_{\mathcal{P}}(t)$ son independientes.

5.1.2. EID para el proceso de difusión con saltos

Determinaremos la EDP de valoración para el caso en el que la dinámica del subyacente está gobernada por el proceso de difusión con saltos. Partimos de la EDE

$$dS(t) = \bar{\mu}(t, S(t))dt + \bar{\sigma}(t, S(t))dW^{\mathbb{Q}}(t) + \bar{J}(t, S(t))dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.12)$$

donde, en el contexto de (5.10), las funciones $\bar{\mu}(t, S(t))$, $\bar{J}(t, S(t))$ y $\bar{\sigma}(t, S(t))$ son

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(t, S(t)) &:= (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) S(t), & \bar{\sigma}(t, S(t)) &:= \sigma S(t), \\ \bar{J}(t, S(t)) &:= (e^J - 1)S(t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

La dinámica del proceso (5.12) se expresa bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , de tal modo que podemos utilizar el enfoque de martingala para obtener la ecuación de valoración de opciones bajo la dinámica de difusión con saltos. Esto significa que, para un cierto payoff, $V(T, S)$, se tiene que verificar la igualdad

$$\frac{V(t, S)}{M(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(T, S)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (5.14)$$

Se puede expresar $V(t, S)/M(t)$ en (5.14) como una martingala bajo la medida \mathbb{Q} , de modo que la dinámica no debería contener ningún término de derivada. Con el lema de Itô, la dinámica de V/M , usando $M \equiv M(t)$, $V \equiv V(t, S)$, viene dada por

$$d\frac{V}{M} = \frac{1}{M}dV - r\frac{V}{M}dt.$$

La dinámica de V se obtiene mediante el lema de Itô para el proceso de Poisson, véase (5.9). Si fijamos $g(t, S(t)) := V(t, S)$ y $\bar{J}(t, S(t)) := (e^J - 1)S$, se obtiene la dinámica

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}(t, S) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \bar{\sigma}(t, S) \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + (V(t, Se^J) - V(t, S)) dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

Después de la sustitución, la dinámica de V/M es

$$\begin{aligned} d\frac{V}{M} &= \frac{1}{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}(t, S) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\bar{\sigma}(t, S)}{M} \frac{\partial V}{\partial S} dW^{\mathbb{Q}} \\ &\quad + \frac{1}{M} (V(t, Se^J) - V(t, S)) dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}} - r \frac{V(t, S)}{M} dt. \end{aligned}$$

Los saltos son independientes del proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}$ y del movimiento browniano $W^{\mathbb{Q}}$. Como V/M es una martingala, se deduce que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}(t, S) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \right) dt \\ &\quad + \mathbb{E}[(V(t, Se^J) - V(t, S))] \mathbb{E}[dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}] = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Basándonos en (5.3) y sustituyendo las expresiones de (5.13) en (5.15), obtenemos la ecuación de valoración, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r + \xi_p)V + \xi_p \mathbb{E}[V(t, Se^J)] = 0, \quad (5.16)$$

que es una ecuación integro-diferencial (EID), ya que, aunque involucra derivadas parciales, la esperanza da lugar un término integral.

En general, las EIDs son más difíciles de resolver que las EDPs, debido a la presencia del término integral adicional. Solo para unos pocos modelos existen soluciones analíticas. Se tienen expresiones analíticas para la solución de (5.16) con los modelos de Merton y Kou, donde la solución viene dada en forma de una serie infinita, véase Kou (2002); Merton (1976) y el Apartado 5.2.1 a continuación. Sin embargo, en la literatura se pueden encontrar numerosos métodos numéricos para resolver EIDs (véase He *et al.* (2006); Kennedy *et al.* (2009), por ejemplo).

Ejemplo 5.1.2

Para el proceso de difusión con saltos bajo la medida \mathbb{Q} , obtenemos la siguiente EID de valoración de opciones, en función del precio S , dada por

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) S \frac{\partial V}{\partial S} - (r + \xi_p)V \\ \quad + \xi_p \int_0^\infty V(t, Se^y) dF_J(y), \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+, \\ V(T, S) = \max(\bar{\alpha}(S(T) - K), 0), \quad \forall S \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

con $\bar{\alpha} = \pm 1$ (para call o put, respectivamente), y donde $dF_J(y) = f_J(y)dy$. En coordenadas logarítmicas $X(t) = \log(S(t))$, la correspondiente EID para $V(t, X)$ viene dada por

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) \frac{\partial V}{\partial X} - (r + \xi_p)V \\ \quad + \xi_p \int_{\mathbb{R}} V(t, X + y) dF_J(y), \quad \forall (t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ V(T, X) = \max(\bar{\alpha}(\exp(X(T)) - K), 0), \quad \forall X \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Obsérvense las diferencias en los términos integrales de las dos EIDs anteriores. ♦

5.1.3. Casos especiales para la distribución de los saltos

Dependiendo de la función de distribución acumulada escogida para la magnitud del salto $F_J(x)$, se pueden definir varios modelos con saltos. Dos de las opciones más habituales son:

- Modelo de Merton clásico, Merton (1976). Para este modelo, la magnitud del salto J sigue una distribución normal, con media μ_J y desviación típica σ_J . Así, $dF_J(x) = f_J(x)dx$, donde

$$f_J(x) = \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_J)^2}{2\sigma_J^2}\right). \quad (5.17)$$

- Modelo de Kou, Kou (2002); Kou y Wang (2004), donde la magnitud de salto se distribuye como una doble exponencial no simétrica, es decir,

$$f_J(x) = p_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} + p_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \mathbb{1}_{\{x < 0\}}, \quad (5.18)$$

donde p_1, p_2 son números reales positivos de modo que $p_1 + p_2 = 1$. Para poder integrar e^x en el plano real se necesita que $\alpha_1 > 1$ y $\alpha_2 > 0$, con lo que se obtiene la expresión

$$\mathbb{E}[e^{J_k}] = p_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} + p_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 1}. \quad (5.19)$$

Ejemplo 5.1.3 (Trayectorias del proceso de difusión con saltos)

En la Figura 5.2 se muestran ejemplos de trayectorias para $X(t)$ como en (5.11) y para $S(t) = e^{X(t)}$, como en (5.10). Se ha empleado el modelo de Merton clásico, $J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$, donde los saltos son simétricos, como se describe en (5.17).

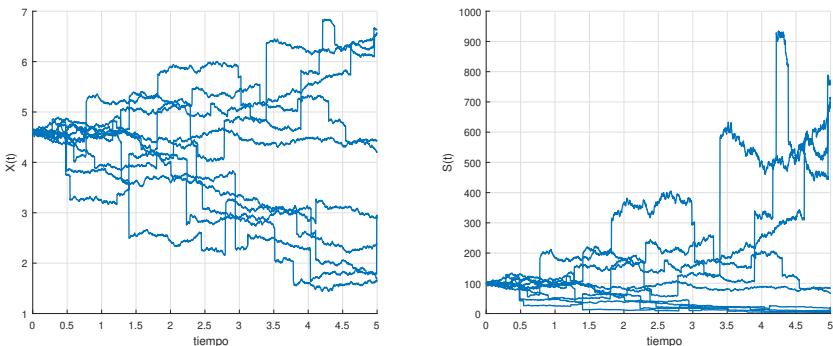


Figura 5.2: Trayectorias de Monte Carlo con $S(t_0) = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\sigma_J = 0.5$, $\mu_J = 0$, $\xi_p = 1$ y $T = 5$. Izquierda: proceso $X(t)$ de (5.11). Derecha: proceso $S(t)$ de (5.10).



5.2. Teorema de Feynman-Kac para procesos de difusión con saltos

La relación entre la solución de una EDP y el cálculo del valor esperado descontado de la función de payoff mediante el teorema de Feynman-Kac (Apartado 3.2), puede generalizarse para resolver EIDs como las que se originan con los procesos de precios de activos $S(t)$ con saltos. Como ejemplo, detallamos esta generalización para el modelo de difusión con saltos de Merton.

Con r constante, $S(t)$ evoluciona de acuerdo con la EDE

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1]) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) + (e^J - 1) dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t),$$

y el valor de la opción $V(t, S)$ verifica la EID

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1]) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - & (r + \xi_p)V \\ & + \xi_p \mathbb{E} [V(t, Se^J)] = 0, \end{aligned}$$

donde $V(T, S) = H(T, S)$ y el término $(e^J - 1)$ representa el tamaño de un salto proporcional. Entonces, la fórmula de valoración riesgo neutro determina el valor de la opción, es decir,

$$V(t, S) = M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} H(T, S) | \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H(T, S) | \mathcal{F}(t) \right].$$

La fórmula del payoff esperado descontado verifica la propiedad de martingala, siempre que la cantidad $\frac{V(t, S)}{M(t)}$ no contenga término de deriva, es decir, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [d(V(t, S)/M(t)) | \mathcal{F}(t)] = 0$. En (5.15) se detalla esta condición para el caso de una difusión con saltos, confirmando así que la EID (5.16) se debe verificar. De este modo, para el caso de este tipo de procesos con saltos, también se puede resolver la EID de valoración como el cálculo de un payoff esperado descontado, vía el teorema de Feynman-Kac.

Introducimos una aplicación de la ley de la esperanza total para variables aleatorias discretas, que será necesaria para los siguientes resultados.

Ejemplo 5.2.1 (Ley de la esperanza total: variables discretas)

Como ejemplo de lo conveniente que la esperanza condicionada puede llegar a ser, consideramos el siguiente problema. Suponemos que X_1, X_2, \dots son variables aleatorias independientes con la misma media μ y que N_J es una variable aleatoria no negativa, que toma valores enteros y es independiente de

todos las variables X_i . Entonces, se verifica la igualdad

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_J} X_i \right] = \mu \mathbb{E}[N_J]. \quad (5.20)$$

Esta igualdad también se conoce como la ecuación de Wald.

Utilizando la ley de la esperanza total de (1.20) para unas variables aleatorias discretas z_1 y z_2 , tenemos que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[z_1|z_2]] = \sum_z \mathbb{E}[z_1|z_2=z] \mathbb{P}[z_2=z],$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_J} X_k \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_J} X_k \middle| N_J \right] \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n X_k \middle| N_J = n \right] \mathbb{P}[N_J = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[N_J = n] \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como la esperanza de cada X_k es igual a μ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_J} X_k \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[N_J = n] \sum_{k=1}^n \mu \\ &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}[N_J = n] \stackrel{\text{def}}{=} \mu \mathbb{E}[N_J], \end{aligned} \quad (5.22)$$

lo que confirma (5.20). ♦

5.2.1. Fórmulas analíticas para precios de opciones

En este apartado obtenemos la solución del precio de una opción call para un activo bajo el modelo estándar de difusión con saltos en riesgo neutro, definido en (5.10). Integrando el proceso transformado logarítmicamente del precio del

activo en (5.11), obtenemos

$$\begin{aligned}
X(T) &= X(t_0) + \int_{t_0}^T \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt \\
&\quad + \int_{t_0}^T \sigma dW(t) + \int_{t_0}^T J(t) dX_{\mathcal{P}}(t) \\
&= X(t_0) + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t_0) \\
&\quad + \sigma (W(T) - W(t_0)) + \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(T)} J_k,
\end{aligned}$$

donde $S(t) = e^{X(t)}$. El precio de una opción call europea bajo el proceso de difusión con saltos viene dado por

$$V(t_0, S_0) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)], \quad (5.23)$$

donde

$$S(T) = \exp \left(\mu_X + \sigma (W(T) - W(t_0)) + \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(T)} J_k \right), \quad (5.24)$$

con $\mu_X := X(t_0) + (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2) (T - t_0)$.

Al condicionar la esperanza en (5.23) con respecto al número de saltos en tiempo t , esto es, $X_{\mathcal{P}}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
V(t_0, S_0) &= e^{-r(T-t_0)} \\
&\times \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(e^{\mu_X + \sigma (W(T) - W(t_0)) + \sum_{k=1}^n J_k} - K, 0 \right) | \mathcal{F}(t_0) \right] \\
&\times \mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t) = n].
\end{aligned}$$

Como las magnitudes del salto J_k se asumen i.i.d. con distribución normal, $J_k \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\mu_X + \sigma (W(T) - W(t_0)) + \sum_{k=1}^n J_k \stackrel{d}{=} \\
&\stackrel{d}{=} \mu_X + n\mu_J + \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{T-t_0}} (W(T) - W(t_0)),
\end{aligned}$$

de modo que la fórmula de valoración viene dada por

$$\begin{aligned}
V(t_0, S_0) &= e^{-r(T-t_0)} \\
&\times \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(e^{\hat{\mu}_X(n) + \hat{\sigma}_X(n)(W(T) - W(t_0))} - K, 0 \right) | \mathcal{F}(t_0) \right] \\
&\times \mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t) = n],
\end{aligned} \quad (5.25)$$

con

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_X(n) &:= X(t_0) + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[\mathrm{e}^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t_0) + n \mu_J, \\ \hat{\sigma}_X(n) &:= \sqrt{\sigma^2 + \frac{n \sigma_J^2}{T - t_0}}.\end{aligned}$$

Obsérvese que la esperanza en (5.25) se asemeja al precio de una opción call bajo un proceso con distribución lognormal. Sin embargo, los términos de deriva y volatilidad dependen del número de saltos n , el cual, bajo el condicionamiento, es determinista. Después de simplificar, obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{V}(n) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(\exp(\hat{\mu}_X(n) + \hat{\sigma}_X(n)(W(T) - W(t_0))) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)] \\ &= \exp\left(\hat{\mu}_X(n) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_X^2(n)(T - t_0)\right) \cdot F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K \cdot F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),\end{aligned}\tag{5.26}$$

con

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log \frac{S(t_0)}{K} + [r - \xi_p \mathbb{E}[\mathrm{e}^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 + \hat{\sigma}_X^2(n)] (T - t_0) + n \mu_J}{\hat{\sigma}_X(n) \sqrt{T - t_0}}, \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S(t_0)}{K} + [r - \xi_p \mathbb{E}[\mathrm{e}^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2] (T - t_0) + n \mu_J}{\hat{\sigma}_X(n) \sqrt{T - t_0}} \\ &= d_1 - \hat{\sigma}_X(n) \sqrt{T - t_0},\end{aligned}$$

y $\mathbb{E}[\mathrm{e}^J - 1] = \mathrm{e}^{\mu_J + \frac{1}{2} \sigma_J^2} - 1$, cuando $J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$.

Entonces, usando la Definición 5.1.2 de la distribución de Poisson, el precio de una opción call viene dado por

$$V(t_0, S_0) = \mathrm{e}^{-r(T-t_0)} \sum_{k \geq 0} \frac{(\xi_p(T-t_0))^k \mathrm{e}^{-\xi_p(T-t_0)}}{k!} \bar{V}(k), \tag{5.27}$$

con $\bar{V}(k)$ en (5.26).

En (5.27) se indica que, añadiendo saltos de Merton a la dinámica del proceso $S(t)$, el valor de la opción call viene dado por una «suma infinita» de precios de Black-Scholes para opciones call con parámetros ajustados.

Emplearemos de nuevo la ley de la esperanza total en el próximo apartado.

5.2.2. Función característica para el modelo de Merton

El modelo de difusión con saltos de Merton bajo la medida \mathbb{Q} consiste en un movimiento browniano y un proceso de Poisson compuesto que, con $t_0 = 0$, se

define como

$$X(t) = X(t_0) + \bar{\mu}t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(t)} J_k. \quad (5.28)$$

Tenemos, $\bar{\mu} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]$, $\sigma > 0$, un movimiento browniano $W(t)$ y un proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$, $t \geq 0$ con parámetro ξ_p y $\mathbb{E}[X_{\mathcal{P}}(t)|\mathcal{F}(0)] = \xi_p t$. La ecuación anterior también se puede expresar en forma diferencial como

$$dX(t) = \bar{\mu}dt + \sigma dW(t) + J(t)dX_{\mathcal{P}}(t), \text{ con } X(t_0) \in \mathbb{R}. \quad (5.29)$$

En el marco del proceso de Poisson, la ocurrencia de un salto es independiente de la ocurrencia de los saltos anteriores, y la probabilidad de dos saltos simultáneos es igual a cero. Como ya se ha dicho, la variable J_k , $k \geq 1$, es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con una distribución de probabilidad del tamaño del salto F_J , tal que $\mathbb{E}[J_k] = \mu_J < \infty$.

Siendo todas las fuentes de aleatoriedad «independientes entre sí», podemos determinar la función característica de $X(t)$, esto es

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &:= \mathbb{E}[e^{iuX(t)}] \\ &= e^{iuX(0)} e^{iu\bar{\mu}t} \mathbb{E}[e^{iu\sigma W(t)}] \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(t)} J_k\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Las dos esperanzas en (5.30) se pueden determinar fácilmente. Como $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$, se tiene que $\mathbb{E}[e^{iu\sigma W(t)}] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t}$. Para la segunda esperanza en (5.30), primero introducimos el sumatorio

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(t)} J_k\right)\right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(t)} J_k\right) \middle| X_{\mathcal{P}}(t) = n\right] \mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t) = n],$$

que resulta de aplicar la ley de la esperanza total, esto es $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$. Como $X_{\mathcal{P}}(t)$ es un proceso de Poisson y utilizando (5.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}(t)} J_k\right)\right] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \sum_{k=1}^n J_k\right)\right] \frac{e^{-\xi_p t} (\xi_p t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\xi_p t} (\xi_p t)^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_J(x) dx\right)^n. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Las dos potencias n -ésimas en la parte derecha de (5.31) pueden verse como una expansión de Taylor de una función exponencial, dando como resultado

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\exp \left(iu \sum_{k=1}^{X_P(t)} J_k \right) \right] &= e^{-\xi_p t} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\xi_p t \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_J(x) dx \right)^n \\ &= \exp \left(\xi_p t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} f_J(x) dx - 1) \right) \\ &= \exp \left(\xi_p t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_J(x) dx \right) \\ &= \exp (\xi_p t \mathbb{E}[e^{iuJ} - 1]),\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\int_{\mathbb{R}} f_J(x) dx = 1$, y $J = J_k$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con FDA $F_J(x)$ y FDP $f_J(x)$.

Entonces, (5.30) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= \mathbb{E} [e^{iuX(t)}] \\ &= \exp \left(iu(X(0) + \bar{\mu}t) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 t \right) \exp (\xi_p t (\mathbb{E}[e^{iuJ} - 1])) \\ &= \exp \left(iu(X(0) + \bar{\mu}t) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 t + \xi_p t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_J(x) dx \right),\end{aligned}\tag{5.32}$$

con $\bar{\mu} = r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]$. Para el modelo de Merton, tenemos que

$$\mathbb{E}[e^{iuJ} - 1] = e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}u^2\sigma_J^2} - 1, \quad \mathbb{E}[e^J - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1.$$

Observación 5.2.1 (Función característica para el modelo de Kou)

En (5.32) se presenta la función característica genérica para el modelo de difusión con saltos. Para el modelo de difusión con saltos de Kou, obtenemos

$$\mathbb{E}[e^J] = p_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} + p_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 1},$$

y

$$\mathbb{E}[e^{iuJ}] = \frac{p_1 \alpha_1}{\alpha_1 - iu} + \frac{p_2 \alpha_2}{iu + \alpha_2}.$$

Por lo tanto, la función característica para el modelo de Kou viene dada por

$$\phi_{X_P}(u) = \exp \left(iu\bar{\mu}t - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 t + \xi_p t \left[\frac{p_1 \alpha_1}{\alpha_1 - iu} + \frac{p_2 \alpha_2}{iu + \alpha_2} - 1 \right] \right), \tag{5.33}$$

con

$$\bar{\mu} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \xi_p \left[p_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} + p_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 1} - 1 \right].$$

▲

Ejemplo 5.2.2 (Densidades del proceso de difusión con saltos)

En la Figura 5.3 se muestran algunas trayectorias del proceso de difusión con saltos $X(t)$ como en (5.11) y de $S(t) = e^{X(t)}$ como en (5.10), además de sus correspondientes densidades. Se ha considerado el modelo de difusión con saltos de Merton. Las densidades se han calculado utilizando la función característica de difusión con saltos y el método COS, que se introducirá en el Capítulo 6.

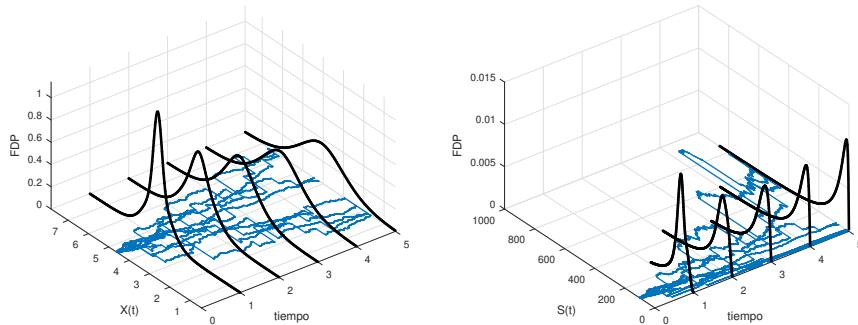


Figura 5.3: Trayectorias de Monte Carlo de la difusión con saltos con $S(t_0) = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\sigma_J = 0.5$, $\mu_J = 0$, $\xi_p = 1$ y $T = 5$. Izquierda: $X(t)$. Derecha: $S(t)$.



En la Figura 5.4 se analiza, para la dinámica de difusión con saltos de (5.10), el impacto del parámetro σ_J sobre las correspondientes funciones de densidad y distribución. Se observa que, a medida que σ_J aumenta, la distribución del proceso de precios $S(t)$ tiene colas más pesadas. La magnitud del salto J es una variable aleatoria simétrica (difusión con saltos de Merton), lo que implica que el precio de la acción podría disminuir o aumentar drásticamente en un corto período de tiempo. Nótese que, para $\sigma_J = 0$, el modelo es un MBG estándar.

Ejemplo 5.2.3 (Modelos de Merton: volatilidades implícitas)

Ilustramos el impacto de los parámetros de salto en el modelo de difusión con saltos de Merton sobre las volatilidades implícitas. Los saltos J siguen una distribución normal, $J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$. Analizamos la influencia de los parámetros, ξ_p , σ_J y μ_J . En el experimento, cada parámetro se varía individualmente, mientras que los otros parámetros se mantienen fijos. La Figura 5.5 muestra el impacto de los parámetros de salto en el proceso de difusión con saltos sobre la forma de la volatilidad implícita.

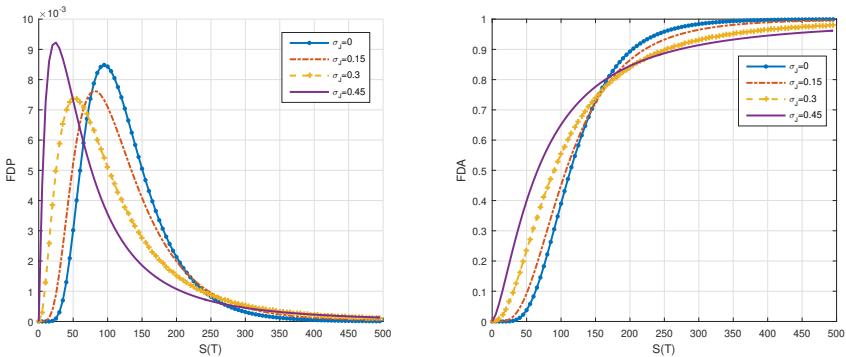


Figura 5.4: Proceso $S(t)$ de (5.10) con $S(t_0) = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\mu_J = 0$, $\xi_p = 1$, $T = 5$ y varios valores de σ_J . Izquierda: FDP. Derecha: FDA.



Cada uno de los parámetros de salto tiene un efecto diferente sobre la forma de la curva de volatilidad implícita, de modo que σ_J tiene un impacto significativo en la curvatura, ξ_p controla el nivel base de la volatilidad implícita, mientras que μ_J influye en la pendiente de la volatilidad implícita (la mueca).

5.2.3. Cobertura dinámica para procesos con saltos

Nos centramos ahora en la cobertura delta cuando se incluyen saltos en la dinámica del activo, siguiendo con el experimento de cobertura delta para la dinámica de Black-Scholes del Apartado 3.3. Suponemos ahora que el proceso del activo sigue un movimiento browniano geométrico que incluye saltos, es decir, un proceso de difusión con saltos como el definido en (5.10). Sabemos que los saltos son simétricos, por lo que la probabilidad de tener saltos ascendentes o descendentes es la misma. Con la dinámica del proceso establecida, debemos determinar los precios de las opciones. La valoración de una opción call se puede llevar a cabo mediante (5.27) o, como alternativa, se puede utilizar el método COS (que se introducirá en el Capítulo 6), que se basa en la función característica del proceso de difusión con saltos, véase (5.32). Teniendo los precios de opciones, se puede calcular también la griega $\Delta(t)$ empleando, por ejemplo, la ecuación en (6.36) del próximo capítulo.

En la Figura 5.6 se ilustra la cobertura de una opción call cuando el proceso de precios contiene saltos. De la figura se desprende claramente que la ocurrencia de un salto en el proceso de precios tiene un efecto inmediato sobre el valor de la delta de la opción, Δ , y sobre el correspondiente P&L(t) de la cartera. En la Figura 5.7 se muestra el impacto de distintas frecuencias de cobertura sobre la varianza del P&L. La gráfica de la izquierda muestra la distribución del P&L

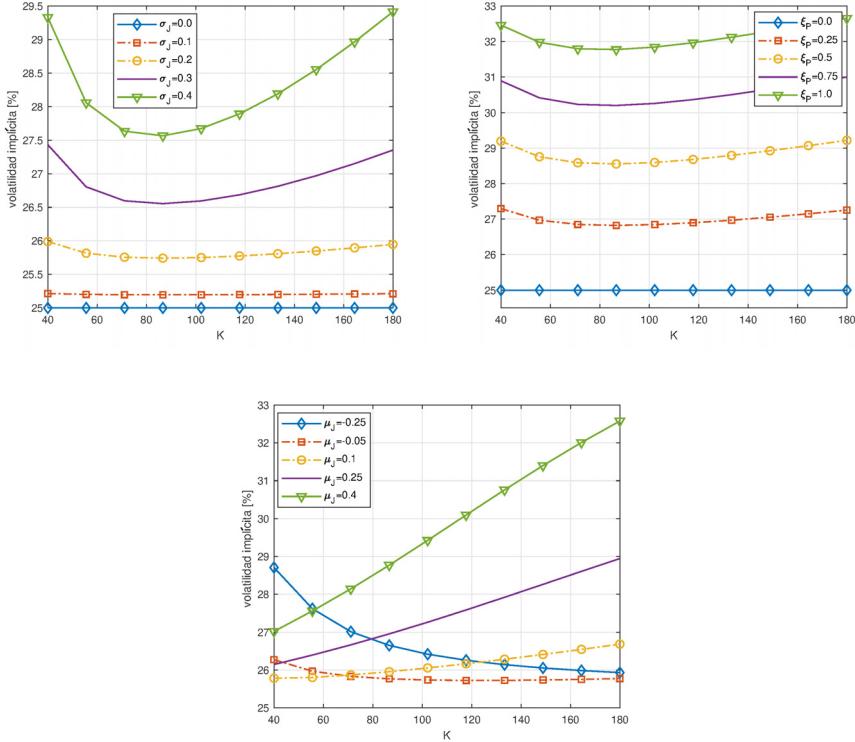


Figura 5.5: Influencia de los diferentes parámetros de salto sobre la forma de la volatilidad implícita en el modelo de difusión con saltos de Merton. Arriba a la izquierda: impacto de σ . Arriba a la derecha: impacto de ξ_p . Abajo: impacto de μ_j .



después de 10 etapas de cobertura, mientras que en la gráfica de la derecha podemos ver el efecto de 2000 etapas de cobertura. Claramente, el aumento de la frecuencia de cobertura no afecta a la distribución del P&L. En ambos casos, se pueden producir grandes pérdidas debido a la ocurrencia de un salto en el proceso de precios. En otras palabras, se demuestra que la cobertura delta por sí sola no es suficiente para reducir las pérdidas (potencialmente grandes) producidas por los saltos.

En la literatura, el problema de cobertura para el caso con saltos se suele reformular como el problema de encontrar una estrategia que minimice la «varianza esperada» de la cartera de cobertura menos el payoff de la opción. En la práctica, la cobertura bajo la difusión con saltos se lleva a cabo utilizando

«otras» opciones en la cartera de cobertura, para reducir el riesgo asociado a una posición en opciones.

Nótese que la minimización de la varianza se realiza bajo la medida \mathbb{Q} , mientras que, en la práctica, el objetivo es minimizar la varianza bajo la medida del mundo real. Sin embargo, mientras las dos medidas tengan los mismos conjuntos de medida cero (lo que debería ser cierto), la variación de la medida del mundo real también debería tender a cero, siempre que haya un número suficiente de otras opciones en la cartera de cobertura.

Sin embargo, en He *et al.* (2006); Kennedy *et al.* (2009), se ha demostrado que una cartera de cobertura con «unas pocas» opciones (junto a $-\Delta$ acciones), reduce significativamente la varianza de la cartera bajo procesos con saltos.

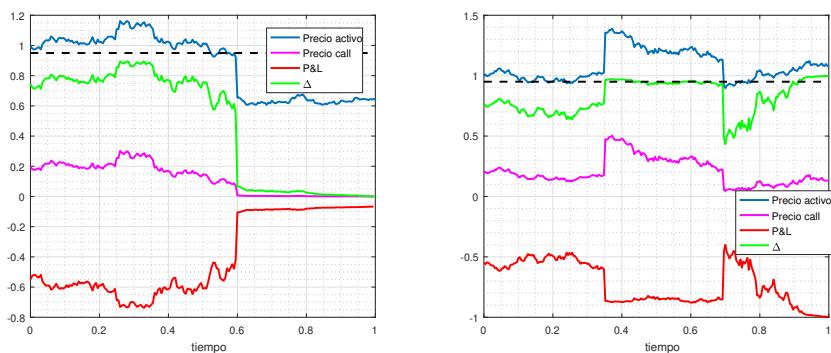


Figura 5.6: Cobertura delta de Black-Scholes para una opción call sobre un activo con saltos. Izquierda: trayectoria con un salto. Derecha: trayectoria con dos saltos. Azul: trayectoria del activo. Rosa: valor de la opción call. Rojo: $P\&L(t)$ de la cartera. Verde: Δ .



5.3. Procesos de Lévy exponenciales

Los procesos vistos en los apartados anteriores se pueden clasificar dentro de una categoría genérica denominada procesos de Lévy exponenciales. Aunque en los procesos de difusión con saltos necesitamos indicar el número esperado de saltos en un intervalo de tiempo, mediante el parámetro ξ_p , esto no es necesario para otros procesos de Lévy.

Consideraremos de nuevo un activo, $S(t)$, y una cuenta bancaria, $M(t)$, con un tipo de interés determinista r . Dado un proceso de Lévy, $X_{\mathcal{L}}(t)$, el proceso del activo se modelará de forma genérica mediante un proceso de Lévy exponencial, esto es

$$S(t) = S_0 e^{X_{\mathcal{L}}(t)}. \quad (5.34)$$

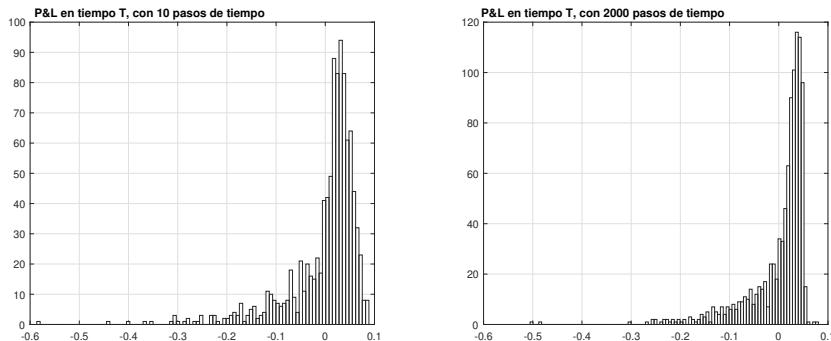


Figura 5.7: Impacto de la frecuencia de cobertura sobre la varianza del $P\delta L(T)$ de la cartera, asumiendo que los activos siguen un proceso de difusión con saltos. Izquierda: 10 etapas de cobertura durante la vida de la opción. Derecha: 2000 etapas de cobertura.



Definición 5.3.1 (Proceso de Lévy)

Un proceso de Lévy $X_{\mathcal{L}}(t)$ para $t \geq t_0 = 0$, se define como cualquier proceso que comience en el origen, $X_{\mathcal{L}}(0) = 0$, tal que, para $(\Omega, \mathcal{F}(t), \mathbb{P})$, siendo $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por el proceso de Lévy, se verifican las siguientes condiciones:

- **Incrementos independientes:** Para cualquier $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$, las variables aleatorias $X_{\mathcal{L}}(t_1) - X_{\mathcal{L}}(s_1)$ y $X_{\mathcal{L}}(t_2) - X_{\mathcal{L}}(s_2)$ son independientes.
- **Incrementos estacionarios:** Para cualquier $0 \leq s < t < \infty$, la distribución de $X_{\mathcal{L}}(t) - X_{\mathcal{L}}(s)$ solo depende de los incrementos $t - s$.
- **Continuidad estocástica:** Para cualquier $\epsilon > 0$ y $s, t > 0$ tenemos que,

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}[|X_{\mathcal{L}}(t) - X_{\mathcal{L}}(s)| > \epsilon] = 0. \quad (5.35)$$

- Las trayectorias son continuas por la derecha con límites por la izquierda, casi seguro. ◀

Un proceso de Lévy se puede determinar mediante una tripleta $(\sigma_{\mathcal{L}}^2, F_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{L}})$. Este conjunto de tres parámetros se conoce como la «tripleta generadora» de Lévy. El primer parámetro, $\sigma_{\mathcal{L}}^2$, es la «varianza gaussiana», ya que se asocia con la parte browniana de un proceso de Lévy; el segundo parámetro, $F_{\mathcal{L}}$, es la «medida de Lévy» y el tercer parámetro, $\mu_{\mathcal{L}}$, se corresponde con el parámetro de deriva. Si $F_{\mathcal{L}} \equiv 0$, $X_{\mathcal{L}}(t)$ representa un movimiento browniano con deriva.

Cuando $\sigma_{\mathcal{L}}^2 = 0$, $X_{\mathcal{L}}(t)$ es un proceso con saltos puramente no gaussiano. La medida de Lévy está relacionada con el número esperado de saltos de una cierta magnitud en un intervalo de tiempo de longitud uno, Papapantoleon (2005). La medida de Lévy satisface que

$$F_{\mathcal{L}}(0) = 0, \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) F_{\mathcal{L}}(\mathrm{d}x) < \infty, \quad (5.36)$$

lo que significa que la medida $F_{\mathcal{L}}(\mathrm{d}x)$ no tiene «masa» en el origen, aunque se pueden producir infinitos saltos (pequeños) alrededor de cero.

Definición 5.3.2

Sea $X_{\mathcal{L}}$ un proceso de Lévy con la tripleta $(\sigma_{\mathcal{L}}^2, F_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{L}})$. Entonces:

- $X_{\mathcal{L}}$ es un proceso de actividad finita, si $F_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}) < \infty$, ya que, en ese caso, todas las trayectorias constan de un número finito de saltos.
- $X_{\mathcal{L}}$ es un proceso de actividad infinita, si $F_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}) = \infty$, ya que, entonces, casi todas las trayectorias constan de un número infinito de saltos (véase Sato (2001)).

◀

Observación 5.3.1 (Notación $F(\mathrm{d}x)$)

Básicamente, una medida es una cantidad para indicar el tamaño de un determinado conjunto. Estamos familiarizados con la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d , que es una conocida representación del tamaño. Para $d = 1$ es la longitud, para $d = 2$ el área, el volumen para $d = 3$, etc.

La notación $F_{\mathcal{L}}(\mathrm{d}x)$ para una medida requiere de alguna aclaración. Aquí, $\mathrm{d}x$ representa un intervalo infinitésimo $\mathrm{d}x := [x, x + \mathrm{d}x]$. Para el caso de una medida de Lebesgue, se puede simplemente escribir

$$F(\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{o} \quad \int g(x)F(\mathrm{d}x) = \int g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Sin embargo, cuando tratamos con un «conjunto numerable», N , la medida será una «medida numerable» y en este caso, escribiremos

$$g(x)F_{\mathcal{L}}(\mathrm{d}x) := g(x)\delta_N(\mathrm{d}x).$$

Como $\delta(x = p) = 1$ para $p \in [x, x + \mathrm{d}x]$, y $\delta(x = p) = 0$ en otro caso, tenemos

$$\int g(x)\delta_p(\mathrm{d}x) = g(p).$$

Para un conjunto numerable N , definimos la medida de conteo sobre N , para cualquier función $g(x)$, como

$$\int g(x)\delta_N(\mathrm{d}x) = \sum_{k=1}^N g(k).$$

Así, en este caso, la notación de la medida representa un simple sumatorio. Nótese que ya hemos visto este caso en (5.5).

Por tanto, la notación $F_{\mathcal{L}}(dx)$ pretende unificar la notación tanto para Lebesgue como para medidas numerables. ▲

El movimiento browniano, el proceso de Poisson (compuesto) y el proceso de difusión con saltos pertenecen a los procesos de actividad finita de Lévy, donde las trayectorias habitualmente contienen una componente de movimiento browniano continuo y, a veces, una componente de saltos. Los saltos se producen un número finito de veces en cada intervalo finito.

Los procesos de Lévy con trayectorias que presentan infinitos saltos en un intervalo finito se denominan procesos de Lévy con saltos de actividad infinita, tales como el modelo Variance Gamma (VG), Madan *et al.* (1998), el modelo CGMY, Carr *et al.* (2002), y el modelo Normal Inverse Gaussian, Barndorff-Nielsen (1997).

Además, la familia de los procesos de Lévy queda totalmente determinada por el siguiente resultado fundamental, véase Sato (2001).

Teorema 5.3.1 (Representación Lévy-Khintchine)

Para todo $u \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, se tiene que

$$\phi_{X_{\mathcal{L}}}(u) = \mathbb{E} \left[e^{iuX_{\mathcal{L}}(t)} \middle| \mathcal{F}(0) \right] = e^{t\Psi(u)}, \quad (5.37)$$

con $t_0 = 0$ y

$$\Psi(u) = -\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2}u^2 + i\mu_{\mathcal{L}}u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{|x| \leq 1}(x))F_{\mathcal{L}}(dx),$$

donde $\sigma_{\mathcal{L}}$ es un número real no negativo, $\mu_{\mathcal{L}}$ es real y $F_{\mathcal{L}}$ es la medida en \mathbb{R} verificando que $F_{\mathcal{L}}(0) = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2)dF_{\mathcal{L}}(x) < \infty$.

En otras palabras, para los procesos de Lévy se puede obtener la función característica.

Además, cuando la medida de Lévy satisface la condición adicional dada por

$$\int_{|x| \geq 1} |x|F_{\mathcal{L}}(dx) < \infty,$$

no se requiere truncar los saltos grandes, como en la afirmación anterior, y tenemos que

$$\Psi(u) = -\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2}u^2 + i\mu_{\mathcal{L}}u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)F_{\mathcal{L}}(dx).$$

Otra distinción que se suele hacer para los procesos de Lévy tiene que ver con la noción de variación finita o infinita.

Definición 5.3.3 (Procesos de variación finita e infinita)

Un proceso, $X_{\mathcal{L}}$, con tripleta $(\sigma_{\mathcal{L}}^2, F_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{L}})$ es un proceso de variación finita (véase Sato (2001)), si $\sigma_{\mathcal{L}}^2 = 0$ «y» $\int_{|x|<1} |x|F_{\mathcal{L}}(dx) < \infty$. Se denomina un proceso de variación infinita, si $\sigma_{\mathcal{L}}^2 \neq 0$ «o» $\int_{|x|\leq 1} |x|F_{\mathcal{L}}(dx) = \infty$. \blacktriangleleft

Los procesos de Lévy están relacionados con las distribuciones infinitamente divisibles. Si consideramos una variable estocástica, $X_{\mathcal{L}}$, con función de distribución acumulada, $F_{\mathcal{L}}$, decimos que $X_{\mathcal{L}}$ es infinitamente divisible si y solo si, para $i = 1, 2, \dots$, $X_{\mathcal{L}}$ se puede descomponer como

$$X_{\mathcal{L}} = X_1 + X_2 + \dots,$$

para variables aleatorias X_i independientes e idénticamente distribuidas. Los incrementos de un proceso de Lévy son también infinitamente divisibles, ya que un incremento sobre un intervalo de tiempo puede volver a descomponerse en una suma de incrementos más pequeños. A partir de las propiedades de independencia y estacionariedad de los procesos de Lévy, se tiene que esos incrementos de tamaño más pequeño son también independientes e idénticamente distribuidos, y así sucesivamente, véase Sato (2001).

En Bertoin (1996) se puede encontrar más información básica sobre los procesos de Lévy. Además, para información adicional sobre procesos de Lévy en el contexto de las finanzas, se remite al lector a Cont y Tankov (2004); Schoutens (2003).

5.3.1. Procesos de Lévy exponenciales de actividad finita

Si $F_{\mathcal{L}}$ es una «medida finita», es decir, si

$$\int_{\mathbb{R}} F_{\mathcal{L}}(dx) < \infty, \quad (5.38)$$

se puede escribir

$$F_{\mathcal{L}}(dx) =: \xi_p f_{X_{\mathcal{L}}}(x) dx,$$

donde $f_{X_{\mathcal{L}}}(x)$ es la función de densidad de probabilidad y ξ_p el número esperado de saltos (véase Observación 5.3.1). Los procesos que verifican lo anterior se denominan procesos de actividad finita. El movimiento browniano visto anteriormente, el proceso de Poisson y también su extensión, el proceso de Poisson compuesto, son ejemplos de procesos de Lévy de actividad finita.

Ejemplo 5.3.1 (Movimiento browniano con deriva)

El movimiento browniano con deriva (el modelo clásico de Samuelson (1965)) también se basa en un proceso de Lévy

$$X(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t).$$

En este caso, se sabe (véase Karatzas y Shreve (1998)) que existe solo una medida de martingala, y el proceso $\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W^Q(t))$, para $t \geq 0$, es una martingala. Entonces, el exponente Lévy-Khintchine de (5.37) viene dado por

$$\psi(u) = -\frac{\sigma^2}{2}u^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)iu,$$

de modo que la tripleta de Lévy es $(\sigma^2, 0, r - \frac{\sigma^2}{2})$. Nótese que, para el caso de los procesos de difusión con saltos, la tripleta de Lévy viene dada por $(\sigma^2, \xi_p f_J, \mu)$. \blacklozenge

5.3.2. EID y la tripleta de Lévy

Los procesos estocásticos del subyacente, cuando se utilizan para la valoración de opciones, se definen bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} . En el caso de los procesos de actividad finita con saltos, para los cuales $F_{\mathcal{L}}$ satisface que $\int_{\mathbb{R}} |x|dF_{\mathcal{L}}(x) < \infty$, la expresión en (5.37) se puede escribir como

$$\mathbb{E} \left[e^{iuX_{\mathcal{L}}(t)} \right] = \exp \left[t \left(-\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2}u^2 + i\mu_{\mathcal{L}}u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)F_{\mathcal{L}}(dx) \right) \right], \quad (5.39)$$

donde $(\sigma_{\mathcal{L}}^2, F_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{L}})$ es la tripleta de Lévy «reducida», y

$$\psi_{X_{\mathcal{L}}}(u) := -\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2}u^2 + i\mu_{\mathcal{L}}u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)F_{\mathcal{L}}(dx), \quad (5.40)$$

es el exponente de Lévy-Khintchine «reducido». Esta reformulación resulta muy conveniente ya que proporciona una relación directa entre los coeficientes de la EID de valoración de opciones y la tripleta reducida.

Sea $V(t, S)$ el valor de una opción vanilla sobre el activo $S(t)$. Si asumimos que el proceso descontado, $e^{-rT}V(T, S)$, es una martingala, entonces tendríamos que $e^{-rt}V(t, S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V(T, S)|\mathcal{F}(t)]$, lo que resulta en la expresión conocida del valor de la opción, dada por

$$V(t, S) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(T, S(T))|\mathcal{F}(t)]. \quad (5.41)$$

Para encontrar una definición completa de la ecuación de valoración, aplicamos un cambio de variable, esto es, $X_{\mathcal{L}}(t) := \log S(t)$, y consideramos el valor de la opción $V(t, X)$, tal que

$$V(t, X) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(T, X_{\mathcal{L}}(T))]. \quad (5.42)$$

Tenemos el siguiente teorema (véase, por ejemplo, Raible (2000)).

Teorema 5.3.2

Sea $V(t, X) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R})$ y asumimos (5.38). Entonces $V(t, X)$ verifica la EID

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial V}{\partial X} - rV \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(V(t, X+y) - V(t, X) - (e^y - 1) \frac{\partial V(t, X)}{\partial X}\right) F_{\mathcal{L}}(dy) = 0,\end{aligned}$$

$\forall (t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ y condición final $V(T, X)$. La tripleta de Lévy reducida viene dada por $(\sigma^2, F_{\mathcal{L}}, r - \frac{1}{2}\sigma^2)$, bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} .

Mercados incompletos y medida de martingala equivalente

En el marco de Black-Scholes, tenemos una única medida de martingala, que transforma un movimiento browniano geométrico bajo la medida \mathbb{P} en otro bajo la medida \mathbb{Q} , con un parámetro de derivación diferente (r en lugar de μ). La unicidad de la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} garantiza una única regla de valoración libre de arbitraje y, por tanto, precios de opción únicos. Este mercado se denomina mercado «completo». El riesgo en el modelo Black-Scholes está en el movimiento browniano que gobierna la dinámica lognormal del activo. Como vimos en el Ejemplo 3.3, una estrategia continua de cobertura dinámica basada en la cobertura delta con acciones y dinero efectivo con pasos de tiempo infinitésimos puede eliminar el riesgo completamente y, utilizando pasos de tiempo más grandes, la cobertura funciona aceptablemente bien.

En general, los mercados de Lévy son «incompletos», lo que significa que no todos los contratos financieros de opción se pueden replicar mediante acciones y dinero efectivo, en otras palabras, no existe una estrategia de cobertura perfecta. Hemos visto un ejemplo de esto en el Apartado 5.2.3. A diferencia del modelo clásico de Black-Scholes, los precios de las opciones bajo procesos de Lévy exponenciales no se pueden obtener utilizando argumentos de replicación, basados en la cobertura delta. Sin embargo, se puede determinar el precio de la opción a partir de la suposición de ausencia de arbitraje.

En los mercados incompletos, como un mercado que consiste en activos modelados mediante procesos de Lévy exponenciales con saltos, la estrategia de cobertura debe ser, por tanto, diferente a la utilizada para Black-Scholes. El hecho de que se produzcan saltos repentinos en los precios de los activos impide replicar perfectamente el valor de la opción con acciones y dinero efectivo. Si se produce un salto, teniendo en cuenta la convexidad de la opción, el vendedor de la cobertura delta «perderá dinero» casi seguro, independientemente de la dirección del movimiento (Merton, 1976). Aun así, el riesgo generado por el movimiento browniano se puede mitigar mediante una cobertura delta dinámica.

En (5.27) se confirma que el precio de una opción cuando se producen saltos viene dado por una suma infinita de opciones europeas. El proceso con saltos está gobernado por un número, posiblemente infinito, de magnitudes diferentes

de salto, por lo que el denominado «riesgo por saltos» solo puede ser mitigado completamente mediante un número infinito de instrumentos de cobertura, véase, por ejemplo Naik y Lee (1990). Sin embargo, se puede mitigar este riesgo de manera aceptablemente buena mediante un número finito de magnitudes de salto, He *et al.* (2006); Kennedy *et al.* (2009).

En el caso de que los saltos se produzcan con magnitudes muy diferentes, no existe una cobertura perfecta, ni siquiera con un reequilibrado continuo, véase el ejemplo en el Apartado 5.2.3.

5.3.3. Medida de martingala equivalente

En el marco de Lévy, la medida de riesgo neutro «no» es única, es decir, existen infinitas medidas. La razón es la posible aparición de saltos en el proceso de Lévy. Debido a esto, no se puede replicar perfectamente el precio de la opción, ya que nos enfrentamos al riesgo de que se produzca un salto en el precio del activo, lo que implicaría que existen múltiples maneras de valorar opciones libres de arbitraje.

Un enfoque habitual para asignar valores a opciones bajo procesos de Lévy se basa en cambiar a una medida de probabilidad conveniente y tomar esperanzas de los precios descontados. Esto está relacionado con el cambio de medidas, de la medida del mundo real \mathbb{P} , a la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} . En la literatura de procesos de Lévy, la medida de probabilidad \mathbb{Q} se conoce como la «medida de martingala equivalente» (MME). Esta tiene el mismo conjunto nulo que la probabilidad de mercado, y el proceso descontado, $e^{-rt}S(t)$, para $t \geq 0$, debería ser una martingala. De algún modo, la existencia de tal medida es equivalente a la condición de no-arbitraje, véase Delbaen y Schachermayer (1994), y otros trabajos anteriores, Harrison y Kreps (1979); Harrison y Pliska (1981).

Por tanto, una de las tareas principales en el marco de los procesos de precios de Lévy es la de determinar una MME adecuada. En la literatura se han propuesto varios métodos para encontrar dicha MME. Aquí, describimos brevemente un método propuesto en el contexto de la ciencia actuarial, basado en la transformada de Esscher, Gerber y Shiu (1995); Raible (2000).

En este contexto, la condición MME viene dada por

$$e^{-rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(t)|\mathcal{F}(0)] = S_0. \quad (5.43)$$

Partimos de (5.34) y aplicamos la esperanza condicionada, fijando $t_0 = 0$, esto es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(t)|\mathcal{F}(0)] = S_0\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_L(t)}|\mathcal{F}(0)\right]. \quad (5.44)$$

Conectando este resultado con (5.43), obtenemos que la siguiente condición debe satisfacerse

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_L(t)}|\mathcal{F}(0)\right] = e^{rt}. \quad (5.45)$$

Considerando la representación de Lévy-Khintchine y $t_0 = 0$, la función característica de $X_{\mathcal{L}}(t)$ en (5.34) viene dada por (véase Cont y Tankov (2004))

$$\begin{aligned}\phi_{X_{\mathcal{L}}}(u) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuX_{\mathcal{L}}(t)} \middle| \mathcal{F}(0) \right] \\ &= \exp \left[t \left(-\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2} u^2 + i\mu_{\mathcal{L}} u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) F_{\mathcal{L}}(dx) \right) \right].\end{aligned}$$

Subtituyendo $u = -i$, obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_{X_{\mathcal{L}}}(-i) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{X_{\mathcal{L}}(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \exp \left[t \left(\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2} + \mu_{\mathcal{L}} + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) F_{\mathcal{L}}(dx) \right) \right].\end{aligned}$$

Es habitual asumir que (5.34) ya está formulada bajo la medida de riesgo neutro. Por tanto, para garantizar que el precio ponderado, $S(t)/M(t)$, es una martingala bajo la medida de riesgo neutro, basta con comprobar (véase (5.45)) que

$$\phi_{X_{\mathcal{L}}}(-i) = e^{rt}, \quad (5.46)$$

lo que se verifica si elegimos como deriva $\mu_{\mathcal{L}} = r$ y

$$\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) F_{\mathcal{L}}(dx) = 0. \quad (5.47)$$

5.4. Procesos de Lévy exponenciales de actividad infinita

Presentamos ahora algunos procesos de Lévy con saltos de actividad infinita. Por actividad infinita entendemos que las trayectorias del activo podrían tener saltos infinitas veces en cada intervalo. Además, saltos que son más grandes que una magnitud dada ocurren solo un número finito de veces. A diferencia del modelo clásico de Samuelson, o de cualquier otro modelo de difusión con saltos, los modelos de actividad infinita pueden no tener un componente continuo.

Nos aprovecharemos de la relación entre la EID y la tripleta de Lévy vista anteriormente para el caso de procesos de actividad finita. De este modo podemos acortar la descripción.

5.4.1. Proceso Variance Gamma

El proceso Variance Gamma (VG) fue introducido en el modelado financiero por Madan y Seneta (1990) como un modelo alternativo para hacer frente a las deficiencias del modelo de Black-Scholes. El proceso VG, que es un proceso con saltos puro, se desarrolló mediante la evaluación de un movimiento browniano con deriva «en momentos aleatorios», gobernados por un proceso gamma. Antes de detallar el proceso VG, explicamos brevemente el proceso gamma.

Definición 5.4.1 (Proceso gamma)

Un proceso gamma, $\Gamma(t; a, b)$, es un proceso estocástico cuyos incrementos, $\Gamma(t + \Delta t, a, b) - \Gamma(t, a, b)$, son variables aleatorias independientes que siguen una distribución gamma de media $a\Delta t$ y varianza $b\Delta t$, en cada intervalo de duración Δt . Más concretamente

$$\Gamma(t + \Delta t, a, b) - \Gamma(t, a, b) \sim f_{\Gamma(a^2 \Delta t / b, b/a)}(x).$$

La correspondiente función de densidad, $f_{\Gamma(c,d)}(x)$, con parámetro de «escala» c y parámetro de «forma» d , viene dada por

$$f_{\Gamma(c,d)}(x) = \frac{1}{d^c \Gamma(c)} x^{c-1} e^{-x/d}, \quad x > 0; \quad (5.48)$$

con $\Gamma(c)$ la función gamma, definida como

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt. \quad (5.49)$$

Además, su correspondiente función característica viene dada por

$$\phi_{\Gamma(c,d)}(u) = (1 - i u)^{-c},$$

con los parámetros de escala y forma. ◀

Definición 5.4.2

El proceso VG se define mediante la sustitución de la variable de tiempo t en un movimiento browniano con deriva por un proceso gamma $\Gamma(t, 1, \beta)$, siendo $\theta \in \mathbb{R}$ el parámetro de deriva, $\sigma_{VG} > 0$ la volatilidad y $W(t)$, $t \geq 0$ un proceso de Wiener. Esta definición da lugar a un proceso «subordinado»

$\bar{X}_{VG}(t; \sigma_{VG}, \beta, \theta) := \theta \Gamma(t; 1, \beta) + \sigma_{VG} W(\Gamma(t; 1, \beta)),$

(5.50)

donde se asume que los procesos de Wiener y gamma son independientes entre sí. El proceso $\Gamma(t; 1, \beta)$ representa un cambio en tiempo con tasa media unitaria, siendo su función de densidad de probabilidad y su función característica dadas por

$$f_{\Gamma(t/\beta, \beta)}(x) = \frac{1}{\beta^{\frac{t}{\beta}} \Gamma(\frac{t}{\beta})} x^{\frac{t}{\beta}-1} \exp(-\frac{x}{\beta}), \quad \phi_{\Gamma(t/\beta, \beta)}(u) = (1 - i \beta u)^{-\frac{t}{\beta}}. \quad (5.51)$$
◀

Los tres parámetros que definen el proceso \bar{X}_{VG} son la volatilidad σ_{VG} , la varianza β del tiempo con distribución gamma y la deriva θ . El parámetro θ mide el grado de asimetría de la distribución, mientras que β controla el exceso de curtosis con respecto a la distribución normal, Carr *et al.* (1998). Para el caso simétrico, $\theta = 0$, y $t = 1$, el valor de curtosis viene dado por $3(1 + \beta)$, véase Madan y Seneta (1990). Dado que la curtosis de una distribución normal es igual a 3, β mide el grado de «agudeza» con respecto a la distribución normal.

Un valor grande de β da lugar a colas pesadas en la función de densidad de probabilidad, que de hecho se observan en los retornos empíricos transformados logarítmicamente. Heurísticamente, para $\beta \rightarrow 0$, el cambio en tiempo tiende a ser un cambio en tiempo lineal, por lo que el proceso VG se aproxima a un movimiento browniano con deriva.

Proceso VG de precios de activos

Definición 5.4.3 (Dinámica VG exponencial del activo)

En un mercado que dispone de una cuenta bancaria $M(t)$ con tipo de interés libre de riesgo r , se dice que un activo $S(t)$ está gobernado por la dinámica VG exponencial cuando

$$S(t) = S(t_0)e^{X_{VG}(t)}, \quad (5.52)$$

con

$$X_{VG}(t) = \mu_{VG}t + \bar{X}_{VG}(t; \sigma_{VG}, \beta, \theta),$$

donde μ_{VG} es la deriva del precio del activo transformado logarítmicamente. El proceso $X_{VG}, t \geq 0$ es un proceso de Lévy, es decir, un proceso con incrementos independientes y estacionarios. \blacktriangleleft

Función característica del proceso VG

Aplicando la definición de función característica y utilizando (5.52), tenemos que

$$\phi_{\log S(t)}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[e^{iu \log S(t)} | \mathcal{F}(0) \right] = e^{iu \log S(0)} \mathbb{E} \left[e^{iu X_{VG}(t)} | \mathcal{F}(0) \right].$$

Empleamos la notación

$$\varphi_{VG}(u, t) := \mathbb{E} \left[e^{iu X_{VG}(t)} | \mathcal{F}(0) \right], \quad (5.53)$$

y buscamos una expresión para la esperanza. Como $X_{VG}(t)$ depende del proceso $\bar{X}_{VG}(t; \sigma_{VG}, \beta, \theta)$, se cumple la relación

$$\mathbb{E} \left[e^{iu X_{VG}(t)} \right] = e^{iu \mu_{VG} t} \mathbb{E} \left[e^{\bar{X}_{VG}(t; \sigma_{VG}, \beta, \theta)} \right]. \quad (5.54)$$

Mediante la ley de la esperanza total, podemos escribir ²

$$\mathbb{E} \left[e^{iu X_{VG}(t)} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{iu X_{VG}(t)} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] \right]. \quad (5.55)$$

²En aras de la legibilidad, el condicionamiento a la filtración $\mathcal{F}(0)$ no se incluye en la notación.

El movimiento browniano es independiente del proceso gamma $\Gamma(t; 1, \beta)$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{iuX_{VG}(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{iu(\mu_{VG}t + \theta\Gamma(t; 1, \beta) + \sigma_{VG}W(\Gamma(t; 1, \beta)))} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{iu(\mu_{VG}t + \theta\Gamma(t; 1, \beta))} \mathbb{E} \left[e^{iu\sigma_{VG}W(\Gamma(t; 1, \beta))} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] \right].\end{aligned}$$

El condicionamiento con respecto a $\Gamma(t; 1, \beta)$ implica que la esperanza anterior es de la forma, $\mathbb{E}[XY|X] = X\mathbb{E}[Y|X]$. Por tanto, el condicionamiento con respecto a $\Gamma(t; 1, \beta)$ hace que la cantidad dentro del operador esperanza sea «localmente constante», esto es

$$\mathbb{E} \left[e^{iu\sigma_{VG}W(\Gamma(t; 1, \beta))} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] = \mathbb{E} \left[e^{iu\sigma_{VG}W(z)} | \Gamma(t; 1, \beta) = z \right],$$

con z constante. La esperanza condicionada interna es, básicamente, la esperanza de una variable aleatoria de distribución normal, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{iu\sigma_{VG}W(\Gamma(t; 1, \beta))} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] &= \mathbb{E} \left[e^{W((iu)^2\sigma_{VG}^2\Gamma(t; 1, \beta))} | \Gamma(t; 1, \beta) \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma_{VG}^2\Gamma(t; 1, \beta)},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el cálculo de la media y la varianza de una variable aleatoria lognormal, como en (2.16). Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{iuX_{VG}(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{iu(\mu_{VG}t + \theta\Gamma(t; 1, \beta))} e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma_{VG}^2\Gamma(t; 1, \beta)} \right] \\ &= e^{iu\mu_{VG}t} \mathbb{E} \left[e^{i(u\theta + i\frac{1}{2}u^2\sigma_{VG}^2)\Gamma(t; 1, \beta)} \right].\end{aligned}\quad (5.56)$$

Utilizando la función característica del proceso gamma de (5.51), la expresión anterior se simplifica aún más, obteniendo

$$\begin{aligned}\varphi_{VG}(u, t) &= \mathbb{E} \left[e^{iuX_{VG}(t)} \right] \\ &= e^{iu\mu_{VG}t} \phi_{\Gamma(\frac{t}{\beta}, \beta)} \left(u\theta + i\frac{1}{2}u^2\sigma_{VG}^2 \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} e^{iu\mu_{VG}t} \left(1 - i\beta\theta u + \frac{1}{2}\beta\sigma_{VG}^2 u^2 \right)^{-\frac{t}{\beta}}.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Variance Gamma: ajuste de deriva

Como se ha explicado en el Apartado 5.3.3, y al contrario que en el marco clásico de mercados completos, no se puede obtener el precio de la opción mediante argumentos de replicación. Por lo tanto, debemos basarnos en la suposición de ausencia de arbitraje, y asumir la existencia de una medida de probabilidad riesgo neutro, que vuelve a ser la medida de martingala equivalente o MME

\mathbb{Q} , de tal modo que el proceso descontado, $e^{-rt}S(t)$ para $t \geq t_0 = 0$, sea una martingala. Asumimos que los parámetros σ_{VG} , β y θ se eligen de tal modo que siguen una dinámica riesgo neutro, véase, por ejemplo, Cont y Tankov (2004). En un contexto de riesgo neutro, se puede determinar el término de deriva «ajustado», μ_{VG} , sustituyendo $u = -i$ en (5.57), esto es

$$\varphi_{VG}(-i, t) = \mathbb{E} [e^{X_{VG}(t)}] = e^{\mu_{VG}t} \left(1 - \beta\theta - \frac{1}{2}\beta\sigma_{VG}^2\right)^{-\frac{t}{\beta}},$$

y comparando el resultado con la condición de neutralidad del riesgo, como vimos en (5.46), dada por

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(t)|\mathcal{F}(0)] = S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{X_{VG}(t)}|\mathcal{F}(0)] = S_0 e^{rt},$$

con lo que obtenemos

$$\mu_{VG}t - \frac{t}{\beta} \log \left(1 - \beta\theta - \frac{1}{2}\beta\sigma_{VG}^2\right) = rt,$$

que se puede escribir como $\mu_{VG} = r + \bar{\omega}$, donde el término de corrección de la deriva viene dado por

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{1}{\beta} \log \left(1 - \beta\theta - \frac{1}{2}\beta\sigma_{VG}^2\right)}, \quad (5.58)$$

con la condición de que $\theta + \sigma_{VG}^2/2 < 1/\beta$.

Observación 5.4.1

Otra forma de expresar el coeficiente de convexidad $\bar{\omega}$, utilizada a menudo en la literatura, por ejemplo en Carr et al. (2002), resulta de emplear la igualdad

$$\varphi_{VG}(u, t) = e^{iu\mu_{VG}t} \phi_{\bar{X}_{VG}}(u),$$

véase (5.54), con \bar{X}_{VG} como en (5.50), lo que nos proporciona la expresión para $\bar{\omega}$ dada por

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{t} \log (\phi_{\bar{X}_{VG}}(-i)). \quad \blacktriangle$$

Una propiedad importante del proceso VG es que puede ser expresado como la diferencia entre dos procesos gamma, donde el primero representa las ganancias y el segundo las pérdidas. Esta propiedad se puede deducir fácilmente factorizando en u la expresión cuadrática de (5.57). Se puede identificar cada factor como la función característica de un proceso gamma escalado. A partir de esta factorización se obtiene la función de densidad de Lévy, $f_{VG}(y)$, para el proceso VG, dada por

$$f_{VG}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\exp(-M|y|)}{|y|} & \text{si } y > 0, \\ \frac{1}{\beta} \frac{\exp(-G|y|)}{|y|} & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad (5.59)$$

donde los parámetros M y G positivos son

$$M = \left(\sqrt{\frac{\theta^2 \beta^2}{4} + \frac{\beta \sigma_{VG}^2}{2}} + \frac{\theta \beta}{2} \right)^{-1}, \quad G = \left(\sqrt{\frac{\theta^2 \beta^2}{4} + \frac{\beta \sigma_{VG}^2}{2}} - \frac{\theta \beta}{2} \right)^{-1}.$$

El exponente positivo M debe ser mayor que uno para que el término de corrección de la deriva $\bar{\omega}$ esté bien definido.

Usando el lema de Itô se tiene que el precio de una opción put europea bajo el modelo VG, para $X(t) = \log(S(t))$, satisface la EID (véase Cont y Tankov (2004))

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} - (r + \bar{\omega}) \frac{\partial V}{\partial X} + rV &= \int_{\mathbb{R}} (V(t, X + y) - V(t, X)) f_{VG}(y) dy, \\ H(\tau = 0, X) &= \max(K - e^{X(T)}, 0), \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde τ denota el tiempo a vencimiento, y $f_{VG}(y)$ es de nuevo la función de densidad de VG, relacionada con la medida de Lévy asociada al proceso VG.

5.4.2. Proceso CGMY

En este apartado presentamos el modelo CGMY, que es una generalización del modelo VG. En este caso, el proceso de Lévy subyacente se determina mediante la tripleta de Lévy $(0, F_{CGMY}, \mu_{CGMY})$, donde la la densidad de Lévy para CGMY, $f_{CGMY}(y)$ se define como

$$f_{CGMY}(y) = C \left[\frac{e^{-M|y|}}{|y|^{1+Y}} \mathbf{1}_{y>0} + \frac{e^{-G|y|}}{|y|^{1+Y}} \mathbf{1}_{y<0} \right]. \quad (5.61)$$

El conjunto de parámetros (C, G, M, Y) tiene una interpretación directamente relacionada con propiedades específicas de los procesos con saltos. La constante C controla la intensidad de los saltos, G y M modelan la tasa de decaimiento para saltos grandes positivos y negativos, respectivamente, es decir, cuanto mayor sea el valor de C , mayor será la actividad de los saltos. Sabiendo que la densidad de Lévy en (5.61) presenta un decaimiento exponencial, se puede deducir que, para valores altos de G , los saltos positivos grandes son «menos probables», aumentando así la ocurrencia de saltos positivos pequeños.

Los parámetros deben cumplir que $C \geq 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$, e $Y < 2$. La condición $Y < 2$ se deduce de la necesidad de que las densidades de Lévy deben integrar a x^2 en el entorno de 0. Con el parámetro $Y < 0$, estamos en el caso de un proceso de actividad finita; para $Y \in [0, 1]$, tenemos un proceso de actividad infinita de variación finita, ya que $\int_{|x|<1} x f_{CGMY}(x) dx < \infty$, mientras que para $Y \in (1, 2)$, el proceso es de actividad infinita y variación infinita.

En ocasiones, al modelo CGMY anterior se le añade un término de «difusión». De este modo, en la definición del modelo aparece un término estocástico

adicional, esto es, un movimiento browniano independiente. Esta versión extendida del modelo CGMY de saltos puro se conoce como el modelo CGMYB (CGMY-movimiento Browniano). Su correspondiente tripleta de Lévy viene dada por $(\sigma_{\text{CGMYB}}^2, F_{\text{CGMYB}}, \mu_{\text{CGMYB}})$. El modelo CGMYB cuenta con cinco parámetros que necesitan ser calibrados a cotizaciones de mercado, mientras que el modelo CGMY tiene cuatro. A partir del modelo CGMY, se pueden deducir varios modelos ya conocidos:

- Cuando $\sigma_{\text{CGMYB}} = 0$ e $Y = 0$, obtenemos el modelo VG.
- Cuando $C = 0$, el modelo se reduce al modelo MBG.

Función característica del proceso CGMY

Recordamos que, cuando $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathbf{1}_{|x| \leq 1}(x) f_{\mathcal{L}}(x) < \infty$, la representación con variación finita del teorema de Lévy-Khintchine establece que

$$\psi_{X_{\mathcal{L}}}(u) = -\frac{\sigma_{\mathcal{L}}^2}{2} u^2 + iu\mu_{\mathcal{L}} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) f_{\mathcal{L}}(x) dx.$$

Proporcionamos los pasos para la obtención de la función característica del modelo CGMY, dada por

$$\psi_{X_{\text{CGMYB}}}(u) = iu\mu_{\text{CGMYB}} - \frac{\sigma_{\text{CGMYB}}^2}{2} u^2 + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) f_{\text{CGMY}}(x) dx.$$

Primero calculamos el primer término que viene de $f_{\text{CGMY}}(y)$, es decir,

$$\begin{aligned} C \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-Mx}}{x^{Y+1}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) dx &= C \int_0^\infty \mathrm{e}^y y^{-Y-1} (M - iu)^Y dy \\ &\quad - C \int_0^\infty \mathrm{e}^y y^{-Y-1} M^Y dy, \end{aligned}$$

donde, en la primera integral de la derecha se ha usado $y = x(M - iu)$, y en la segunda $y = Mx$. Se puede observar fácilmente que ambas integrales son funciones gamma, ya que

$$C \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-Mx}}{x^{Y+1}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) dx = C\Gamma(-Y)((M - iu)^Y - M^Y).$$

La otra parte que viene de la densidad se calcula como

$$\begin{aligned} C \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-G|x|}}{|x|^{Y+1}} (\mathrm{e}^{iux} - 1) dx &= -C \int_\infty^0 \frac{\mathrm{e}^{-G|x|}}{|x|^{Y+1}} (\mathrm{e}^{-iux} - 1) dx \\ &= C \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-G|x|}}{|x|^{Y+1}} (\mathrm{e}^{-iux} - 1) dx, \end{aligned}$$

que tiene la misma forma que la integral anterior, salvo por $u \rightarrow -u$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\psi_{X_{\text{CGMYB}}}(u) &= iu\mu_{\text{CGMYB}} - \frac{\sigma_{\text{CGMYB}}^2}{2}u^2 \\ &+ C\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y).\end{aligned}$$

Bajo la MME, el proceso es una martingala, es decir,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{X_{\text{CGMYB}}} | \mathcal{F}(0)] = e^{rt},$$

ya que para $u = -i$, se tiene que

$$\begin{aligned}\log(\phi_{X_{\text{CGMYB}}}(-i)) &= \mu_{\text{CGMYB}}t - \frac{\sigma_{\text{CGMYB}}^2}{2}t \\ &+ Ct\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y) \\ &= rt.\end{aligned}$$

Considerando $\mu_{\text{CGMYB}} - \frac{\sigma_{\text{CGMYB}}^2}{2} + \bar{\omega} = r$, se obtiene el *término de corrección de la deriva*.

Además, la función característica del precio del activo transformado logarítmicamente que sigue un proceso CGMYB se puede obtener en forma cerrada como

$$\begin{aligned}\phi_{\log S(t)}(u) &= \mathrm{e}^{iu \log S(0)} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iu X_{\text{CGMY}}(t)} | \mathcal{F}(0)] \\ &= \exp \left[iu \left(\frac{1}{t} \log S(0) + r + \bar{\omega} - \frac{1}{2} \sigma_{\text{CGMYB}}^2 \right) t - \frac{1}{2} \sigma_{\text{CGMYB}}^2 u^2 t \right] \\ &\times \varphi_{\text{CGMY}}(u, t),\end{aligned}\tag{5.62}$$

con

$$\varphi_{\text{CGMY}}(u, t) := \exp(tC\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y)),$$

donde $\Gamma(x)$ es la función gamma (5.49) y, como en el modelo VG,

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{t} \log(\phi_{X_{\text{CGMYB}}}(-i)).$$

Se puede verificar que los parámetros G y M representan el momento finito más pequeño y el más grande en el modelo, respectivamente, ya que

$$\mathbb{E}[S^u(t)] := \phi_{\log S(t)}(-iu)$$

es infinito para $u < -G$ y para $u > M$.

Ejemplo 5.4.1 (Modelo CGMYB: volatilidad implícita)

Considerando el modelo CGMYB, llevamos a cabo un conjunto de experimentos para evaluar el impacto de los diferentes parámetros sobre la superficie de volatilidad implícita. Se eligen los siguientes parámetros base: $C = 1$, $G = 1$, $M = 5$, $Y = 0.5$, $\sigma_{CGMYB} = 0.2$ y $r = 0.1$. En la Figura 5.8 se realiza una variación sistemática de los parámetros C , G , M e Y , mostrando las curvas de volatilidad implícita resultantes.

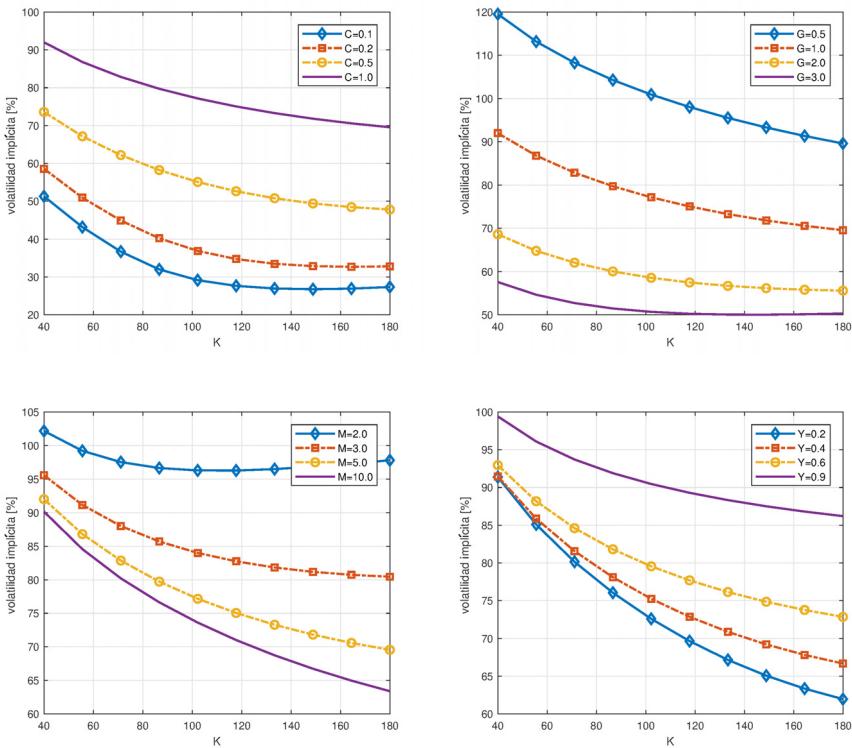


Figura 5.8: Volatilidades implícitas para el modelo CGMYB. Los parámetros base son $C = 1$, $G = 1$, $M = 5$, $Y = 0.5$, $\sigma_{CGMYB} = 0.2$ y $r = 0.1$. Arriba a la izquierda: impacto de C . Arriba a la derecha: impacto de G . Abajo a la izquierda: impacto de M . Abajo a la derecha: impacto de Y .



Sabemos que el parámetro C da una medida del grado general de actividad, G y M miden la asimetría, y Y es una medida de la estructura, aunque esto no se refleja de forma clara en las curvas de volatilidad implícita. ♦

Relación del proceso VG con el proceso CGMY

Retomando el proceso VG, podemos escribir la representación de Lévy-Khintchine de $X_{VG}(t)$ como³

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{iuX_{VG}(t)}] = \exp \left[t \left(i\mu_{VG} u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_{VG}(x) dx \right) \right]. \quad (5.63)$$

Consideramos los casos donde la medida de Lévy tiene una densidad, por lo que $F_{VG}(dx) = f_{VG}(x)dx$.

De manera similar, en el contexto de riesgo neutro, $\mu_{VG} = -r + \bar{\omega}$, donde $\bar{\omega}$ es el término de corrección de la deriva (5.58), véase también Hirsa y Madan (2004), dado por

$$\bar{\omega} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) f_{VG}(y) dy. \quad (5.64)$$

Esta representación requiere especificar la medida de Lévy, $F_{VG}(y)$. En Carr *et al.* (2002), la densidad de Lévy viene dada por

$$f_{VG}(y) = C \left[\frac{e^{-M|y|}}{|y|} \mathbf{1}_{y>0} + \frac{e^{-G|y|}}{|y|} \mathbf{1}_{y<0} \right], \quad (5.65)$$

con C, G y M constantes, definidas como

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\beta}, \\ G &= \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\beta^2 + \frac{1}{2}\sigma_{VG}^2\beta} - \frac{1}{2}\theta\beta \right)^{-1}, \\ M &= \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\beta^2 + \frac{1}{2}\sigma_{VG}^2\beta} + \frac{1}{2}\theta\beta \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Con estas expresiones de C, G y M , se puede demostrar que el proceso VG es un caso particular del modelo CGMY, Carr *et al.* (2002).

Con esta parametrización, el término de corrección de la deriva $\bar{\omega}$ tiene la representación

$$\bar{\omega} := \int_{\mathbb{R}} (1 - e^y) F_{VG}(dy) = C \log \left[\left(1 + \frac{1}{G} \right) \left(1 - \frac{1}{M} \right) \right]. \quad (5.67)$$

Para ver la relación, obsérvese que

$$\int_0^\infty \frac{e^{xy} - 1}{y} e^{-y} dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^\infty y^{k-1} e^{-y} dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x).$$

Para que $\bar{\omega}$ esté bien definido, se debe cumplir que $M > 1$ en (5.67). Después de las sustituciones apropiadas, las expresiones en (5.58) y (5.67) son efectivamente equivalentes.

³En esta expresión no aparece el término $-iux\mathbf{1}_{x \leq 1}$ bajo la integración. Esto se debe a la variación finita del proceso VG. El término que falta se incluye en la deriva μ_{VG} , Poirier y Tankov (2006).

5.4.3. Proceso Normal Inverse Gaussian

En este apartado abordamos otro proceso Lévy importante, el proceso Normal Inverse Gaussian (NIG), que fue introducido por Barndorff-Nielsen (1997) y que se basa en el proceso gaussiano inverso. Este proceso pertenece a la clase de los procesos de Lévy hiperbólicos (véase Barndorff-Nielsen (1978)), y produce distribuciones con colas «más pesadas» que el proceso normal estándar.

El proceso Normal Inverse Gaussian (NIG) es una combinación varianza-media de una distribución gaussiana con una gaussiana inversa. La función de densidad de un proceso NIG viene dada por

$$f_{\text{NIG}}(x) = \frac{K_{3,1}\left(\alpha\delta\sqrt{1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^2}} \frac{\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta) \exp(\beta x), \quad (5.68)$$

con $x \in \mathbb{R}$, y los parámetros $\alpha > 0$, $0 < |\beta| < \alpha$, $\delta > 0$. La función $K_{3,\gamma}$ es la función de Bessel modificada de tercera especie de índice γ , definida como

$$K_{3,\gamma}(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{(\gamma-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}x\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) dz, \quad x > 0. \quad (5.69)$$

El parámetro α controla la «inclinación» de la densidad, en el sentido de que la inclinación de la densidad crece monótonamente al aumentar α . También tiene efecto en el comportamiento de las colas: valores altos de α implican colas ligeras, mientras que valores más pequeños de α implican colas más pesadas. Cuando $\alpha \rightarrow \infty$ se obtiene la distribución gaussiana. El parámetro β es un parámetro de asimetría o simetría, donde $\beta > 0$ da lugar a una densidad inclinada a la derecha, mientras que $\beta < 0$ produce una densidad inclinada a la izquierda. Con $\beta = 0$ obtenemos una densidad simétrica en torno a 0. El parámetro δ es un parámetro de escala, en el sentido de que los parámetros reescalados $\alpha \rightarrow \alpha\delta$ y $\beta \rightarrow \beta\delta$ permanecen invariables a los cambios de escala de x , como se describe en Barndorff-Nielsen (1997). Además, los momentos del proceso NIG se pueden calcular.

La tripleta de Lévy para el proceso NIG, $(\sigma_{\text{NIG}}^2, F_{\text{NIG}}, \mu_{\text{NIG}})$, se define como

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{NIG}}^2 &= 0, \\ F_{\text{NIG}} &= \frac{\alpha\delta}{\pi} \frac{\exp(\beta x) K_{3,1}(\alpha|x|)}{|x|} dx, \\ \mu_{\text{NIG}} &= \frac{2\alpha\delta}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta x) K_{1,3}(\alpha x) dx. \end{aligned}$$

La función característica del modelo NIG es

$$\varphi_{\text{NIG}}(u, t) = \exp\left(t\delta\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}\right)\right),$$

con los parámetros $\alpha, \delta > 0$ y $\beta \in (-\alpha, \alpha - 1)$.

El término de corrección de la deriva $\bar{\omega}$, que satisface $\exp(-\bar{\omega}t) = \varphi_{\text{NIG}}(-i, t)$, haciendo que el proceso sea una martingala, viene dado por

$$\bar{\omega} = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

Al modelo NIG se le puede añadir una componente de difusión, de modo que el proceso dependa de cuatro parámetros, de manera similar al proceso CGMY (sin difusión). Esta versión extendida del modelo NIG se denomina proceso NIGB (proceso NIG con movimiento browniano). Así, la dinámica de modelo NIGB está gobernada por los parámetros $(\sigma_{\text{NIGB}}, \alpha, \beta, \delta)$, donde σ_{NIGB} es la volatilidad de la difusión, y su función característica es

$$\varphi_{\text{NIGB}}(u, t) = \exp\left(t\delta\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}\right) - \frac{\sigma_{\text{NIGB}}^2 u^2}{2}t\right).$$

5.5. Reflexión sobre los saltos en la dinámica del activo

Los modelos de difusión con saltos y los modelos de Lévy son atractivos porque son capaces de, por definición, explicar los patrones de salto exhibidos por algunos activos, Sepp y Skachkov (2003). La Figura 5.9 muestra valores históricos de las acciones de las compañías Unilever y Heineken. Claramente, las acciones exhiben patrones de saltos. Sin embargo, un estudio más minucioso de los precios reales nos dice que la variación en el precio de las acciones de Heineken está, efectivamente, relacionada con un salto de su valor, mientras que los saltos en el precio de las acciones de Unilever se debieron principalmente a los denominados «desdoblamientos» de acciones (cuando una empresa decide aumentar el número de acciones, las acciones individuales pierden su valor de acuerdo con el desdoblamiento aplicado), y están conectados con las caídas previstas en los precios de las acciones.

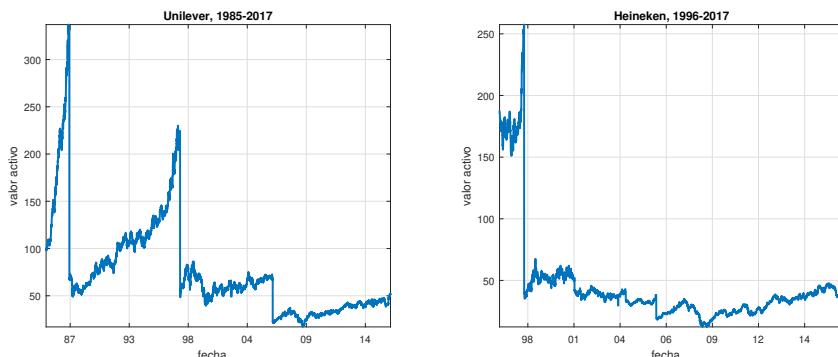


Figura 5.9: Valores cotizados de las acciones de dos compañías. Izquierda: Unilever. Derecha: Heineken.

Se constata la presencia de saltos en el mercado, especialmente en épocas de agitación financiera, como en 1987, 2000 o 2008. Los procesos con saltos funcionan mejor que el modelo de Black-Scholes, en el sentido de que los retornos diarios (transformados logarítmicamente) tienen colas pesadas y, para períodos más largos, los procesos con saltos se acercan a la normalidad, lo que es coherente con los estudios empíricos.

Los modelos con saltos capturan bastante bien el exceso de curtosis. Al introducir parámetros extra, se puede controlar la curtosis y la asimetría de la densidad de los retornos, además de ser capaz de reproducir la sonrisa de la volatilidad implícita. Algunos estudios revelan también que los modelos de Lévy son realistas para valorar opciones que están cerca del vencimiento, véase Das y Foresi (1996).

Sin embargo, los modelos con saltos tienen tendencia a «incrementar» la volatilidad at-the-money. Esto está causado por el impacto unidireccional de los saltos en la volatilidad, es decir, los saltos solo pueden aumentar la volatilidad y no disminuirla. Además, los saltos «no son valores cotizados», por lo que no se puede construir una cartera que replique perfectamente cualquier opción financiera. A diferencia del modelo de Black-Scholes, no existe una estrategia de cobertura para el emisor de la opción que elimine completamente el riesgo de emitir la opción.

En los procesos con saltos debemos emplear la suposición de ausencia de arbitraje, lo que implica la existencia de una medida de martingala equivalente. Asumiendo que tal medida se ha elegido, se puede obtener una ecuación integro-diferencial para la valoración de la opción. Aún así, su tratamiento numérico para determinar los precios de las opciones puede llegar a ser complicado, debido a la aparición del término integral.

Sin embargo, para todos los procesos con saltos tratados en este capítulo, se puede determinar su correspondiente función característica. La función característica resultará muy beneficiosa para una valoración altamente eficiente de opciones europeas, mediante una técnica de inversión de Fourier, que se abordará en el próximo capítulo.

5.6. Ejercicios

Ejercicio 5.1 En un proceso de índice bursátil aparecen saltos producidos por dos activos, que siguen dos procesos de Poisson independientes con intensidades $\xi_{p,1}$ y $\xi_{p,2}$, respectivamente.

- a. Determinar la probabilidad de que el activo S_1 produzca el primer salto.
- b. Determinar la función de densidad de probabilidad del tiempo hasta que se produzca el primer salto en el índice bursátil.
- c. Suponer que $\xi_{p,1} = 0.3$ y $\xi_{p,2} = 0.5$ por año. Determinar la probabilidad de tener al menos 2 saltos en los próximos 4 años.
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya saltos en el índice en los próximos 2 años?

Ejercicio 5.2 Asumir que saltos importantes en el precio del activo que conduzcan a una crisis financiera ocurren con una intensidad de $\xi_p = 0.5$ por década.

- a. Desde hoy, ¿cuál es el número esperado de años y la desviación típica de que el primer salto importante ocurra?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros quince años estén libres de saltos importantes?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer salto en el precio del activo ocurra dentro de 4 años? Y dentro de 6 años?

Ejercicio 5.3 Los incrementos, $X_{\mathcal{P}}(t_j) - X_{\mathcal{P}}(t_i)$, $t_i < t_j$ para diferentes intervalos de tiempo de la misma duración $t_j - t_i$ tienen la misma distribución, sin importar el tiempo t_i , dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t_j) - X_{\mathcal{P}}(t_i) = k] &= \mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t_j - t_i) - X_{\mathcal{P}}(0) = k] \\ &= \mathbb{P}[X_{\mathcal{P}}(t_j - t_i)] = k \\ &= e^{-\xi_p(t_j - t_i)} \frac{(\xi_p(t_j - t_i))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se aplica que $X_{\mathcal{P}}(0) = 0$.

Dado el proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$, $t \in [0, \infty)$ con intensidad ξ_p . Determinar la distribución conjunta 2D en forma de la denominada función de probabilidad de masa de $\{X_{\mathcal{P}}(t), X_{\mathcal{P}}(s)\}$, para cualquier $0 < s < t$.

Ejercicio 5.4 Dos acciones en un índice bursátil exhiben saltos en sus precios, S_1, S_2 . Estos saltos se producen por un proceso de Poisson con medias de 1, y 3, cada 5 años. Los dos procesos de precios de las acciones son independientes. Determinar la probabilidad de que ocurran 2 saltos en S_1 antes de que se observen 2 saltos en S_2 .

Ejercicio 5.5 Considerar el evento en el que se produzca exactamente un salto del activo en el intervalo $[0, T]$. Determinar la probabilidad de que ocurra este evento. Además, este evento es el mismo que uno donde se produce un solo salto en el intervalo $[0, \frac{T}{2}]$ y no hay saltos en el intervalo $[\frac{T}{2}, T]$, o no se producen saltos en $[0, \frac{T}{2}]$ y exactamente uno en $[\frac{T}{2}, T]$. Confirmar que este cálculo da lugar a, exactamente, la misma probabilidad.

Ejercicio 5.6 Asumir que los saltos en un activo siguen un proceso de Poisson con una tasa de 2 saltos cada 5 años. Encontrar la probabilidad de que, en un período de 15 años, se tenga 1 salto durante los primeros 2 años y 1 salto durante los últimos 3 años.

Sea t_k el tiempo aleatorio correspondiente a la ocurrencia del evento k -ésimo, $k = 1, 2, \dots$. Denotamos la variable i.i.d. τ_k como el tiempo entre ocurrencias exponencial, esto es, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ y $t_0 = 0$. El tiempo T_k , en el cual ocurre el salto k -ésimo en un proceso de Poisson que viene dado por $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$. Con $\xi_p = 1$ saltos cada 5 años, determinar la media y la varianza del tiempo hasta la ocurrencia del tercer salto.

Ejercicio 5.7 Bajo el modelo de Kou, la intensidad del salto viene dada por

$$f_J(x) = p_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} 1_{x \geq 0} + p_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 x} 1_{x < 0}.$$

Determinar $\mathbb{E}[e^{iuJ}]$ para $p_1 + p_2 = 1$, y $\alpha_1 > 1$ y $\alpha_2 > 0$.

Ejercicio 5.8 En el Apartado 5.2.1 se obtuvo una expresión en forma cerrada para el precio de la opción call bajo el modelo de Merton. Obtener el precio de la opción put análoga (sin utilizar la paridad put-call).

Ejercicio 5.9 Considerar el problema de valorar la denominada opción asiática, siendo su función de payoff

$$V(T, S) = \max(A(T) - K, 0), \quad (5.70)$$

con la media aritmética dada por

$$A(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(T_i). \quad (5.71)$$

Definir la cantidad

$$R(T_i) = \log \left(\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})} \right) = \log(S(T_i)) - \log(S(T_{i-1})),$$

y mostrar que se verifica la igualdad

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{1}{m} S(T_0) e^{B_m} \\ &= \frac{1}{m} S(T_0) e^{R(T_1) + \log(1 + \exp(B_{m-1}))}, \end{aligned}$$

con

$$B_i = R(T_{m-i+1}) + \log(1 + \exp(B_{i-1})). \quad (5.72)$$

Ejercicio 5.10 Para el proceso de difusión con saltos con magnitud de salto de acuerdo con el modelo de Merton (5.17), analizar qué rango de parámetros del modelo dan lugar a un patrón de «pocos saltos de gran intensidad», y qué rango da lugar a «saltos frecuentes y de tamaño reducido».

Repetir el estudio para el modelo de difusión con saltos de Kou (5.18), donde se puede distinguir entre «saltos positivos pequeños y saltos negativos grandes», o también entre «saltos positivos grandes y saltos negativos pequeños».

Ejercicio 5.11 Determinar el precio de las opciones call y put europeas para el modelo de difusión con saltos de Merton (5.17), como en el Apartado 5.2.1, mediante la ecuación (5.27) y con los parámetros $S_0 = 40, K = 40, r = 0.06, \sigma = 0.2$, y $T = 0.1, T = 1, T = 10$ y:

- Caso I: $\xi_p = 3, \mu_J = -0.2, \sigma_J = 0.2$;
- Caso II: $\xi_p = 8, \mu_J = -0.2, \sigma_J = 0.2$;
- Caso III: $\xi_p = 0.1, \mu_J = -0.9, \sigma_J = 0.45$.

- Determinar el número adecuado de términos en el sumatorio de (5.27) para obtener precios de opciones estables bajo esta configuración.
- Comparar el valor de la opción con el precio de la opción con Black-Scholes, en el cual se utilizan los mismos parámetros pero no existen saltos.
- Seleccionar $K = 50$ (calls OTM), manteniendo el resto de parámetros, y calcular los precios de las opciones.

Ejercicio 5.12 Sabiendo que, para los procesos de Lévy con actividad infinita que representan los modelos VG, CGMY y NIG, las FDPs están disponibles, calcular los valores de las opciones call y put mediante integración numérica, empleando para ello la regla de los trapecios compuesta.

- Considerar $S_0 = 40, K = 40, T = 0.5$ y variar de una manera estructurada los parámetros del modelo para evaluar el impacto de la asimetría, la curtosis y las colas pesadas en el precio de la opción. Anotar los resultados.
- Calcular las volatilidades implícitas correspondientes, y buscar un conjunto de parámetros que genere una sonrisa de volatilidad y otro que genere una mueca de volatilidad.
- Deseamos valorar opciones para diferentes strikes, $K = \{0.25, \dots, 0.75\}$, con paso 0.05. Determinar el precio bajo el modelo de NIG para estos K s mediante integración numérica.
- ¿Dónde radica la complejidad de este cálculo, si tenemos k strikes diferentes y n puntos de integración?

Ejercicio 5.13 Considerar el modelo de volatilidad estocástica con saltos dado por

$$dS(t) = rS(t)dt + JS(t)dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (5.73)$$

con

$$J = \begin{cases} 0.1 & \text{con } \mathbb{Q}[J = 0.1] = \frac{1}{3}, \\ 0.2 & \text{con } \mathbb{Q}[J = 0.2] = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad (5.74)$$

con tipo de interés constante, $r = 0.05$, y valor inicial $S(t_0) = 1$.

- Asumiendo independencia entre el salto J y el movimiento browniano, utilizar el concepto de esperanzas condicionadas para obtener el valor de la opción call, es decir,

$$V(t_0, S_0) = \sum_{i=1}^2 V_c(t_0, S_0; K, T, \sigma_i) \mathbb{Q}[J = \sigma_i],$$

con strike K y vencimiento T , donde la notación $V_c(t_0, S_0; K, T, \sigma_i)$ indica el valor de la opción call de Black-Scholes, y la volatilidad implícita σ_i viene dada por (5.74).

- b. Para un vencimiento $T = 2$ y un rango de strikes $K = 0, 0.1, \dots, 3$ realizar una simulación del modelo de (5.73) y comparar los resultados con la solución obtenida en el ejercicio anterior.

CAPÍTULO 6

El método COS para la valoración de opciones europeas

En este capítulo:

En este capítulo introducimos un método de valoración de opciones europeas altamente eficiente. La técnica se denomina método COS, ya que se basa en aproximar la función de densidad que aparece en la fórmula de valoración en riesgo neutro mediante una expansión en series de Fourier de cosenos. Los coeficientes de la expansión se calculan a partir de la función característica. De este modo, el método COS se puede utilizar con procesos de precios de activos para los que la función característica es conocida como, por ejemplo, los procesos de Lévy exponenciales, los procesos de difusión con saltos afines o algunos modelos de volatilidad estocástica. En el **Apartado 6.1**, describimos la resolución de integrales de Fourier inversas y la «recuperación» de la densidad a partir de la función característica. A continuación, en el **Apartado 6.2**, obtenemos las fórmulas de valoración para opciones europeas y sus parámetros de cobertura. Para funciones de densidad de probabilidad «suaves» la convergencia es exponencial. Dado que la complejidad computacional crece linealmente con el número de términos en la expansión, el método COS para opciones europeas es óptimo en convergencia del error y en complejidad computacional. En el **Apartado 6.3** se presentan algunos resultados numéricos que sustentan estas afirmaciones.

Palabras clave de este capítulo: método COS, expansión de Fourier en cosenos, función característica, recuperación de la densidad, valoración de opciones europeas, convergencia exponencial del error.

6.1. Introducción a la valoración numérica de opciones

En los contextos de valoración y gestión del riesgo de productos financieros o de seguros, la industria demanda cálculos rápidos, precisos y robustos para los precios de opciones y sus sensibilidades (delta, gamma, etc.).

Como hemos visto en los capítulos anteriores, las ecuaciones para la valoración de los productos derivados obtenidas con la ayuda del lema de Itô son ecuaciones en derivadas parciales (o ecuaciones integro-diferenciales), EDPs (o EIDs).

El teorema de Feynman-Kac relaciona la solución de una E(I)DP¹ con la esperanza condicionada del valor de una función de payoff de un contrato «bajo» la medida de riesgo neutro. A partir de estas dos formulaciones, se pueden aplicar varias técnicas numéricas para calcular el precio de la opción. A grandes rasgos, podemos distinguir entre tres tipos de métodos computacionales:

1. Solución numérica de la ecuación en derivadas parciales (o ecuación integro-diferencial).
2. Integración numérica.
3. Simulación de Monte Carlo.

Sin embargo, la distinción entre la E(I)DP y la representación integral es relativamente sutil. Dada la E(I)DP de valoración, se puede escribir formalmente la solución como una función de Green integral.

Esta integral es el punto de partida para los métodos de integración numérica, así como para la simulación de Monte Carlo, que se abordarán en el Capítulo 9. En la práctica, se emplean los tres tipos de técnicas, a veces incluso al mismo tiempo, con el objetivo de validar los precios y las sensibilidades numéricas.

Algunos textos de referencia en la utilización de EDPs para la valoración de opciones son Wilmott (1998); Wilmott *et al.* (1995); Hull (2012); Kwok (2008). De los trabajos que abordan la discretización y solución de E(I)DP destacamos d'Halluin *et al.* (2004); Forsyth y Vetzal (2002); Zvan *et al.* (1998, 2001); In't Hout y Foulon (2010); Haentjens y In't Hout (2012); In 't Hout (2017); Witte y Reisinger (2011). Véase también Reisinger (2012); Reisinger y Wittum (2004, 2007); Suárez-Taboada y Vázquez (2012); Pascucci *et al.* (2013); Bermúdez *et al.* (2006); Vázquez (1998), entre muchos otros.

6.1.1. Integrales y serie de Fourier de cosenos

Como consideramos opciones europeas con fecha inicial t_0 (en la cual el valor del activo $x = X(t_0)$ es conocido) y vencimiento T , con $y = X(T)$, es conveniente utilizar la siguiente notación simplificada para la función de densidad de probabilidad, $f_X(y) \equiv f_{X(T)}(y) := f_X(T, y; t_0, x)$.

¹ Escribimos «E(I)DP» para referirnos tanto a las EDPs como a las EIDs (obtenidas en el caso de procesos con saltos).

La densidad y su función característica, $f_X(y)$ y $\phi_X(u)$, son un ejemplo de transformada de Fourier^a, es decir,

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyu} f_X(y) dy, \quad (6.1)$$

y

$$f_X(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iuy} \phi_X(u) du. \quad (6.2)$$

^aUtilizaremos la convención para la transformada de Fourier que se emplea habitualmente en la literatura financiera. También se pueden utilizar otras convenciones, siendo las modificaciones requeridas en los métodos bastante directas.

6.1.2. Aproximación de la densidad mediante la expansión de Fourier en cosenos

Las expansiones en series de Fourier de cosenos proporcionan una aproximación óptima de funciones con soporte compacto, véase Boyd (1989).

Observación 6.1.1 (Relación con la serie de Fourier)

La definición general de la expansión de Fourier de una función $g(x)$ en un intervalo $[-1, 1]$ es

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}' \bar{A}_k \cos(k\pi\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \sin(k\pi\theta), \quad (6.3)$$

donde el signo prima en el sumatorio, \sum' , indica que el primer término del sumatorio está dividido por dos. Los coeficientes vienen dados por

$$\bar{A}_k = \int_{-1}^1 g(\theta) \cos(k\pi\theta) d\theta, \quad \bar{B}_k = \int_{-1}^1 g(\theta) \sin(k\pi\theta) d\theta. \quad (6.4)$$

Considerando $\bar{B}_k = 0$, se obtiene la expansión de Fourier en cosenos clásica, que permite representar funciones pares en torno a $\theta = 0$ de manera exacta. ▲

Dada cualquier función $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, esta se puede extender de tal modo que se obtenga una función par en $[-\pi, \pi]$, como

$$\bar{g}(\theta) = \begin{cases} g(\theta), & \theta \geq 0 \\ g(-\theta), & \theta < 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Las funciones par se pueden expresar como una serie de Fourier de cosenos. Para una función $\bar{g}(\theta)$ con soporte en $[-\pi, \pi]$, su expansión en cosenos es

$$\bar{g}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}' \bar{A}_k \cdot \cos(k\theta), \quad (6.6)$$

con

$$\bar{A}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\theta) \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta) \cos(k\theta) d\theta. \quad (6.7)$$

Debido a que $g(\theta) = \bar{g}(\theta)$ en $[0, \pi]$, la expansión de Fourier en cosenos de la función (no necesariamente par) $g(\theta)$ en $[0, \pi]$ también viene dada por (6.6) y (6.7).

La expansión en series de Fourier de cosenos utilizada en el método COS se basa en la definición clásica de la serie de cosenos en el intervalo $[-\pi, \pi]$, siendo π un mero factor de escalado, y el máximo de la función se alcanza en el límite del dominio. Para funciones con soporte en cualquier otro intervalo finito, $[a, b] \in \mathbb{R}$, la expansión en series de Fourier de cosenos se puede obtener mediante un cambio de variables

$$\theta := \frac{y-a}{b-a}\pi, \quad y = \frac{b-a}{\pi}\theta + a.$$

De esto modo, tenemos que

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty}' \bar{A}_k \cdot \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad (6.8)$$

con

$$\bar{A}_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy. \quad (6.9)$$

Dado que cualquier función real con soporte compacto tiene una expansión en cosenos, el cálculo de la aproximación de una función de densidad de probabilidad comienza con el truncamiento del intervalo de integración infinito de (6.2). Debido a las condiciones para la existencia de la transformada de Fourier, el integrando en (6.2) debe decaer hacia cero en $\pm\infty$, por lo que podemos truncar el intervalo de integración sin una pérdida de precisión excesiva.

Supongamos que el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ se toma de tal manera que la integral «truncada» aproxima muy bien a su versión impropia, es decir,

$$\hat{\phi}_X(u) := \int_a^b e^{iuy} f_X(y) dy \approx \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} f_X(y) dy = \phi_X(u). \quad (6.10)$$

Podemos relacionar (6.10) con (6.9) empleando la conocida fórmula de Euler dada por

$$e^{iu} = \cos(u) + i \sin(u),$$

que implica que $\operatorname{Re}\{e^{iu}\} = \cos(u)$, donde $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real del argumento. Entonces, para cualquier variable aleatoria, X , y constante, $a \in \mathbb{R}$, se verifica la igualdad

$$\phi_X(u)e^{ia} = \mathbb{E}[e^{iuX+ia}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(uy+a)} f_X(y) dy. \quad (6.11)$$

Tomando parte real en ambos lados de (6.11), tenemos

$$\operatorname{Re}\{\phi_X(u)e^{ia}\} = \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(uy+a)} f_X(y) dy\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uy + a) f_X(y) dy.$$

Sustituimos ahora el argumento de Fourier $u = \frac{k\pi}{b-a}$, y multiplicamos la función característica en (6.10) por $\exp(-i\frac{k\pi}{b-a})$, esto es

$$\hat{\phi}_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{k\pi}{b-a}\right) = \int_a^b \exp\left(iy\frac{k\pi}{b-a} - i\frac{k\pi}{b-a}\right) f_X(y) dy. \quad (6.12)$$

Tomando la parte real en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{k\pi}{b-a}\right)\right\} = \int_a^b \cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f_X(y) dy. \quad (6.13)$$

En el lado derecho de (6.13) podemos ver la definición de \bar{A}_k en (6.9), así que

$$\bar{A}_k \equiv \frac{2}{b-a} \operatorname{Re}\left\{\hat{\phi}_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{k\pi}{b-a}\right)\right\}. \quad (6.14)$$

De (6.10) se deduce que $\bar{A}_k \approx \bar{F}_k$, siendo

$$\bar{F}_k := \frac{2}{b-a} \operatorname{Re}\left\{\phi_X\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \cdot \exp\left(-i\frac{k\pi}{b-a}\right)\right\}. \quad (6.15)$$

Finalmente «reemplazamos» \bar{A}_k por \bar{F}_k en la expansión de $f_X(y)$ en $[a, b]$, es decir,

$$\hat{f}_X(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty}' \bar{F}_k \cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right), \quad (6.16)$$

y «truncamos» el sumatorio de la serie, tal que

$$\hat{f}_X(y) \approx \sum_{k=0}^{N-1}' \bar{F}_k \cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right). \quad (6.17)$$

Recordamos que el primer término del sumatorio debe ser dividido por dos (indicado por el símbolo \sum'). ¡Es muy habitual olvidar la división por dos del primer término a la hora de implementar el método!

El error cometido en la aproximación $\hat{f}_X(y)$ consta de dos partes: un error de truncamiento de la serie, de (6.16) a (6.17), y un error originado por la aproximación de \bar{A}_k mediante \bar{F}_k .

Como las expansiones en series de cosenos de funciones «enteras» (esto es, funciones sin singularidades² en todo el plano complejo, excepto en ∞) exhiben una convergencia exponencial (véase Boyd (1989)), podemos esperar que (6.17) proporcione aproximaciones muy precisas con un valor pequeño de N para funciones de densidad que no tengan singularidades en $[a, b]$.

²Por «singularidad» entendemos, como en Boyd (1989), los polos, las potencias fraccionarias, los logaritmos, otros puntos de ramificación y las discontinuidades en una función o en cualquiera de sus derivadas.

Ejemplo 6.1.1 (Convergencia exponencial)

Para demostrar la convergencia exponencial de la técnica presentada, utilizaremos (6.17) para aproximar la función de densidad de la normal estándar. Sus correspondientes FDP y función característica son conocidas en forma cerrada, siendo

$$f_{\mathcal{N}(0,1)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad \text{y} \quad \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2},$$

respectivamente. Evaluamos la precisión de la aproximación mediante la expansión de Fourier en cosenos de la FDP para distintos valores de N en (6.17). El intervalo de integración es $[a, b] = [-10, 10]$, y se mide el error absoluto máximo en $y = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$.

La Tabla 6.1 muestra como, para un número reducido de términos en la expansión, N , se obtiene un error muy pequeño. A partir de las diferencias en tiempo de CPU presentadas en la tabla, definidas como «tiempo(N)-tiempo($N/2$)», se puede observar una complejidad lineal. Por tanto, la técnica introducida resulta muy eficiente para la recuperación de la función de densidad.

Tabla 6.1: Error máximo al recuperar $f_X(y)$ a partir de $\phi_X(u)$ mediante la expansión de Fourier en cosenos.

| N | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
|------------------|-------|-------|--------|----------|----------|
| Error | 0.25 | 0.11 | 0.0072 | 4.04e-07 | 3.33e-17 |
| Tiempo CPU (ms) | 0.046 | 0.061 | 0.088 | 0.16 | 0.29 |
| Dif. en CPU (ms) | - | 0.015 | 0.027 | 0.072 | 0.13 |



La Figura 6.1 presenta la convergencia de la función de densidad normal con diferentes valores de N . Se ve claramente que, para valores pequeños de N , la aproximación de la densidad normal no es buena (incluso aparecen valores negativos). Sin embargo, la densidad converge exponencialmente al aumentar N . ♦

Ejemplo 6.1.2 (Recuperación de la densidad lognormal)

En este ejemplo, utilizamos el método COS para aproximar la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria lognormal. Nótese que la función característica de las variables aleatorias lognormales no se conoce en forma cerrada, por lo que no podemos aplicar el método COS directamente con la función característica de la lognormal. Para obtener la densidad de una variable aleatoria lognormal, emplearemos la relación que existe entre una variable aleatoria normal y una lognormal. Sea Y una variable aleatoria lognormal de parámetros μ y σ^2 , entonces $Y = e^X$, con $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, véase también (2.19). La FDA de Y en términos de la FDA de X se puede calcular como

$$F_Y(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[e^X \leq y] = \mathbb{P}[X \leq \log(y)] = F_X(\log(y)). \quad (6.18)$$

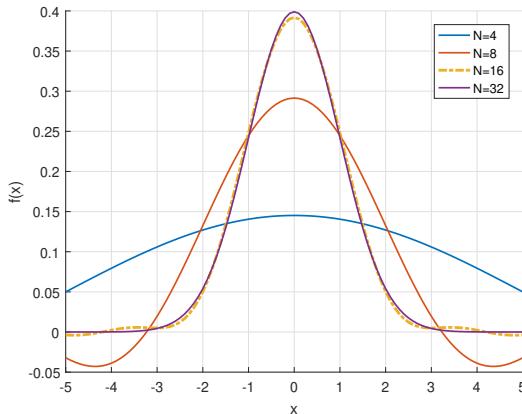


Figura 6.1: Convergencia de la densidad normal para diferentes valores del número de términos en la expansión.



Derivando, obtenemos

$$f_Y(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\log(y))}{d\log y} \frac{d\log(y)}{dy} = \frac{1}{y} f_X(\log(y)). \quad (6.19)$$

Entonces, para recuperar la función de densidad de una variable lognormal Y , trabajaremos con la densidad transformada de X . Dado que X sigue una distribución normal, y $\phi_X(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$, podemos recuperar, mediante el método COS, la FDP de una variable aleatoria lognormal.

Para este experimento numérico, empleamos $\mu = 0.5$ y $\sigma = 0.2$, y analizamos la convergencia del método COS, dependiendo del número de términos en la expansión N .

Comparando la convergencia en las Figuras 6.1 y 6.2, apreciamos que la recuperación de la FDP lognormal es computacionalmente más intensa. Sin embargo, la convergencia sigue siendo exponencial. ♦

6.2. Valoración de opciones europeas con el método COS

La fórmula COS de valoración de opciones europeas se obtiene sustituyendo la función de densidad por su expansión de Fourier en cosenos. Las funciones de densidad de probabilidad tienden a ser suaves y, por lo tanto, una expansión con pocos términos puede ser suficiente para proporcionar una aproximación muy precisa.

El punto de partida para la valoración de opciones europeas con técnicas de integración numérica es la fórmula de valoración en riesgo neutro. Siguiendo

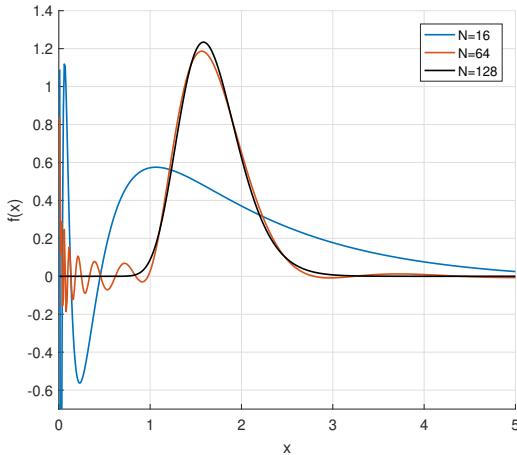


Figura 6.2: Recuperación de la FDP lognormal para diferentes valores del número de términos en la expansión.



con la notación de los capítulos anteriores, tenemos que $X(t) := \log S(t)$, donde el proceso $X(t)$ toma valores $X(t) = x$ y $X(T) = y$. El valor de una opción vanilla viene dado por

$$V(t_0, x) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(T, y) | \mathcal{F}(t_0)] = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}} V(T, y) f_X(T, y; t_0, x) dy, \quad (6.20)$$

donde $\tau = T - t_0$, $f_X(T, y; t_0, x)$ es la densidad de probabilidad de transición de $X(T)$, y r es el tipo de interés. De nuevo, utilizaremos una notación simplificada para la densidad, esto es, $f_X(y) \equiv f_{X(T)}(y) := f_X(T, y; t_0, x)$.

Debido a que $f_X(y)$ decae hacia cero rápidamente cuando $y \rightarrow \pm\infty$, truncamos el intervalo de integración infinito a $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sin una pérdida importante de precisión. Para $S(t) = e^{X(t)}$, con $x := X(t_0)$ y $y := X(T)$, obtenemos la aproximación V_i , dada por

$$V(t_0, x) \approx V_i(t_0, x) = e^{-r\tau} \int_a^b V(T, y) f_X(y) dy, \quad (6.21)$$

con $\tau = T - t_0$. El subíndice en números romanos, como el utilizado en la variable V_i , indicará las sucesivas aproximaciones numéricas llevadas a cabo, lo que será de utilidad para el análisis del error en el Apartado 6.2.3. También daremos unas pautas para la selección del intervalo $[a, b]$ en el Apartado 6.2.4. Como $f_X(y)$ no se suele conocer, pero sí su función característica asociada, la densidad se approxima mediante una expansión de Fourier en cosenos en y , como

en (6.8), es decir,

$$\hat{f}_X(y) = \sum_{k=0}^{+\infty}' \bar{A}_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad (6.22)$$

con

$$\bar{A}_k(x) := \frac{2}{b-a} \int_a^b \hat{f}_X(y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy, \quad (6.23)$$

tal que

$$V_I(t_0, x) = e^{-r\tau} \int_a^b V(T, y) \sum_{k=0}^{+\infty}' \bar{A}_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy. \quad (6.24)$$

Intercambiamos el sumatorio y la integración (en aplicación del Teorema de Fubini), e introducimos la definición

$$H_k := \frac{2}{b-a} \int_a^b V(T, y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy, \quad (6.25)$$

con lo que

$$V_I(t_0, x) = \frac{b-a}{2} e^{-r\tau} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}' \bar{A}_k(x) \cdot H_k. \quad (6.26)$$

Los H_k son los «coeficientes» de la serie de senos de la función de payoff, $V(T, y)$. De este modo, hemos transformado la integral del producto de dos funciones reales, $f_X(y)$ y $V(T, y)$, véase (6.21), en el sumatorio del producto de sus coeficientes de Fourier del seno, véase (6.26).

Debido a que estos coeficientes decaden rápidamente, podemos truncar el sumatorio de la serie, de tal modo que obtenemos la aproximación V_{II} , dada por

$$V_{II}(t_0, x) = \frac{b-a}{2} e^{-r\tau} \cdot \sum_{k=0}^{N-1}' \bar{A}_k(x) H_k. \quad (6.27)$$

Por un procedimiento similar al visto en el Apartado 6.1.1, los coeficientes $\bar{A}_k(x)$, definidos en (6.23), se pueden aproximar mediante los $\bar{F}_k(x)$, definidos en (6.15).

Reemplazando $\bar{A}_k(x)$ en (6.27) por $\bar{F}_k(x)$, obtenemos

$$V(t_0, x) \approx V_{\text{III}}(t_0, x) = e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left(-ik\pi \frac{a}{b-a} \right) \right\} \cdot H_k, \quad (6.28)$$

con $\tau = T - t_0$ y x una función de $S(t_0)$ (como $x = \log(S(t_0))$ o $x = \log(S(t_0)/K)$), y la función característica

$$\boxed{\phi_X(u) = \phi_X(u; t_0, T) \equiv \phi_X(u, x; t_0, T),} \quad (6.29)$$

ya que la función característica también depende de la variable x .

Esta es la fórmula COS para procesos subyacentes genéricos. Para modelos de Lévy, la expresión en (6.28) se puede reformular de tal manera que se pueden valorar opciones para varios strikes simultáneamente.

Explicado heurísticamente, hemos descompuesto la función de densidad de probabilidad en una suma ponderada de muchas funciones de densidad «base», para las que se pueden obtener los valores de la opción analíticamente.

Para completar la fórmula COS de valoración, debemos calcular los coeficientes de payoff, H_k . Estos se pueden obtener de forma analítica para opciones vanilla y digital, entre otras.

6.2.1. Coeficientes de payoff

El payoff de las opciones europeas se puede reescribir, utilizando el precio del activo «ajustado» (transformado logarítmicamente), es decir,

$$y(T) = \log \left(\frac{S(T)}{K} \right),$$

como

$$V(T, y) := [\bar{\alpha} \cdot K(e^y - 1)]^+ \quad \text{con} \quad \bar{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{para una call,} \\ -1 & \text{para una put,} \end{cases}$$

donde la notación $[h(y)]^+$ denota $\max[h(y), 0]$.

Antes de calcular los coeficientes H_k a partir de su definición en (6.25), necesitamos dos resultados previos.

Resultado 6.2.1 Los coeficientes de la serie de cosenos, χ_k , de $g(y) = e^y$ en un intervalo de integración $[c, d] \subset [a, b]$, dados por

$$\chi_k(c, d) := \int_c^d e^y \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy, \quad (6.30)$$

y los coeficientes de la serie de cosenos, ψ_k , de $g(y) = 1$ en un intervalo de integración $[c, d] \subset [a, b]$, dados por

$$\psi_k(c, d) := \int_c^d \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy, \quad (6.31)$$

tienen solución analítica. Empleando cálculo básico, obtenemos

$$\begin{aligned}\chi_k(c, d) := & \frac{1}{1 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} \left[\cos\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \cos\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right. \\ & \left. + \frac{k\pi}{b-a} \sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \frac{k\pi}{b-a} \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right], \quad (6.32)\end{aligned}$$

y

$$\psi_k(c, d) := \begin{cases} \left[\sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right] \frac{b-a}{k\pi}, & k \neq 0, \\ (d-c), & k = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Para una opción call, con $a < 0 < b$, tenemos que

$$\begin{aligned}H_k^{call} &= \frac{2}{b-a} \int_0^b K(e^y - 1) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \frac{2}{b-a} K (\chi_k(0, b) - \psi_k(0, b)), \quad (6.34)\end{aligned}$$

donde χ_k y ψ_k vienen dados por (6.32) y (6.33), respectivamente.
De manera similar, para una opción put, tenemos que

$$H_k^{put} = \frac{2}{b-a} K (-\chi_k(a, 0) + \psi_k(a, 0)). \quad (6.35)$$

Cuando $a < b < 0$, tenemos que

$$H_k^{call} = 0,$$

mientras que para $0 < a < b$, los coeficientes de payoff H_k^{call} se obtienen con $c \equiv a$, $d \equiv b$ en (6.25) y en el Resultado 6.2.1. Para las opciones put, se invierten estas relaciones.

Coeficientes para opciones digital y gap

Los coeficientes de payoff H_k son diferentes para las distintas función de payoff. La valoración de opciones todo o nada es importante, ya que a menudo forman parte de productos más complejos. El payoff de la opción call todo o nada es igual a 0 si $S(T) \leq K$ y a K si $S(T) > K$, véase el Ejemplo 3.2.1. Para este contrato, los coeficientes de la call todo o nada, H_k^{cash} , se pueden obtener analíticamente, dados por

$$H_k^{\text{cash}} = \frac{2}{b-a} K \int_0^b \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \frac{2}{b-a} K \psi_k(0, b).$$

con $\psi(a, b)$ como en (6.33).

En los contratos de opciones para los cuales los coeficientes H_k se tengan que calcular numéricamente, el error de convergencia estará dominado por la regla de cuadratura utilizada.

6.2.2. Griegas de la opción

De manera similar, se pueden obtener expansiones para las griegas Δ y Γ . Con $V \equiv V(t_0, S)$, $S \equiv S(t_0)$, $x := X(t_0)$, tenemos que

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right).$$

Por tanto

$$\Delta \approx \frac{1}{S} e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1}' \operatorname{Re} \left\{ \phi \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left(-ik\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \frac{ik\pi}{b-a} \right\} \cdot H_k, \quad (6.36)$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma &\approx \frac{1}{S^2} e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1}' \operatorname{Re} \left\{ \phi \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \exp \left(-ik\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{ik\pi}{b-a} \right)^2 - \frac{ik\pi}{b-a} \right] \right\} \cdot H_k. \end{aligned} \quad (6.37)$$

6.2.3. Análisis del error

En el desarrollo de la fórmula COS se distinguen tres pasos en los se introducen errores de aproximación: el «truncamiento» del intervalo de integración en la fórmula de valoración en riesgo neutro (6.21), la sustitución de la densidad por su expansión (truncada a N) de cosenos (6.27), y la sustitución de los coeficientes de la expansión por su aproximación basada en la función característica (6.28). Por lo tanto, el error global se divide en tres partes:

1. El error de truncamiento del intervalo de integración

$$\epsilon_I := V(t_0, x) - V_I(t_0, x) = \int_{\mathbb{R} \setminus [a, b]} V(T, y) f_X(y) dy. \quad (6.38)$$

2. El error de truncamiento de la expansión en $[a, b]$

$$\epsilon_{II} := V_I(t_0, x) - V_{II}(t_0, x) = \frac{1}{2} (b - a) e^{-r\tau} \sum_{k=N}^{+\infty} \bar{A}_k(x) \cdot H_k, \quad (6.39)$$

donde $\bar{A}_k(x)$ y H_k se definen en (6.23) y (6.25), respectivamente.

3. El error resultante de aproximar $\bar{A}_k(x)$ por $\bar{F}_k(x)$ en (6.15)

$$\epsilon_{III} := V_{III}(t_0, x) - V_{II}(t_0, x) \quad (6.40)$$

$$= e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R} \setminus [a, b]} \exp \left(ik\pi \frac{y-a}{b-a} \right) f_X(y) dy \right\} \cdot H_k.$$

No consideramos ningún error proveniente de los coeficientes H_k , ya que existen soluciones en forma cerrada, al menos para las opciones vanilla europeas. La clave para acotar los errores radica en la tasa de decaimiento de los coeficientes de la serie de senos. El orden de convergencia de la serie de Fourier de senos depende de las propiedades de las funciones en el intervalo de la expansión. Seleccionando el intervalo de integración $[a, b]$ suficientemente grande, el error global está dominado por ϵ_{II} .

La expresión en (6.39) indica que ϵ_{II} depende de $\bar{A}_k(x)$ y H_k , los coeficientes de las series de la densidad y el payoff, respectivamente. En finanzas, la densidad es habitualmente más suave que la función de payoff y los coeficientes \bar{A}_k decaen a menudo más rápido que los H_k . En consecuencia, el producto de \bar{A}_k por H_k converge más rápido que \bar{A}_k y H_k . Por tanto, el error ϵ_{II} está dominado por el error de truncamiento de la función de densidad, y converge exponencialmente para el caso de funciones de densidad $f_X(x) \in \mathbb{C}^\infty([a, b])$ con derivadas no nulas.

Nótese que, en el caso de una función de densidad de probabilidad discontinua, nos encontraríamos con un orden de convergencia algebraica bajo, relacionado con el conocido fenómeno de Gibbs, y que se suele observar en las expansiones en series de Fourier de funciones discontinuas.

Seleccionando el intervalo de integración de una forma adecuada, el error global converge, bien exponencialmente para funciones de densidad con derivadas no nulas, que pertenecen a $\mathbb{C}^\infty([a, b] \subset \mathbb{R})$, o bien algebraicamente para funciones de densidad con discontinuidades en una de sus derivadas.

En esencia, el método COS reemplaza la densidad en la fórmula de valoración en riesgo neutro por una suma parcial de la serie de Fourier en cosenos de la propia densidad. Por lo tanto, cuando el error de truncamiento del intervalo de integración no es el dominante, el error global depende en gran medida de las propiedades de la densidad. Para más información, véase Fang (2010). Asimismo, la expansión en cosenos de una función $g(y)$ en y es igual a una expansión de Chebyshev de $g(\cos^{-1}(t))$ en t , véase Observación 6.2.2.

Observación 6.2.1 (Serie de cosenos)

Proporcionamos la razón intuitiva de por qué se utiliza la expansión de Fourier en cosenos en el método COS, y no la serie de Fourier completa. Básicamente, una expansión en cosenos requiere menos términos para aproximar una función lineal.

La representación en series de Fourier de una función de variable continua x en un intervalo, define una extensión periódica de la función para todo $x \in \mathbb{R}$. Si los valores de la función cerca de los extremos del intervalo no son iguales, la extensión periódica no es continua, lo que dará lugar a problemas de convergencia cerca de los extremos del intervalo (conocido como el fenómeno de Gibbs).

En esencia, se observa el mismo problema en el caso discreto, cuando se utiliza una Transformada de Fourier Discreta (TFD) en N puntos, que asume implícitamente una periodificación de N puntos del conjunto de datos. Estos problemas de convergencia se manifiestan en todo el conjunto de datos, ralentizando la convergencia general de la TFD.

Una forma de abordar estos problemas es considerar que la función es una función par en un intervalo dos veces mayor. Entonces, la extensión periódica de esta función será continua en los extremos del intervalo. Con una extensión periódica par del conjunto de datos, las funciones seno, que forman parte del exponencial complejo en una TFD, tendrán peso 0, de tal modo que se reduce a una Transformada de Coseno Discreta (TCD).

La convergencia es una de las razones por las que la TCD es importante en el procesado de señales. Una propiedad importante es que la «energía de la señal», calculada como la suma de los cuadrados de sus coeficientes, está principalmente contenida en los coeficientes de baja frecuencia. En otras palabras, los coeficientes de la TCD decaen más rápidamente que los coeficientes de la TFD, por lo que habitualmente una señal se puede aproximar con menos coeficientes en la TCD.

Observación 6.2.2 (Relación con los polinomios de Chebyshev)

La expansión de Fourier en cosenos es equivalente a utilizar los polinomios de Chebyshev para representar una función. Los polinomios de Chebyshev forman un conjunto de funciones base ortogonales que aproximan una función $g(y)$ mediante la suma de $N + 1$ términos, de la forma

$$g(y) \approx g_N(y) = \sum_{k=0}^N \bar{a}_k T_k(y). \quad (6.41)$$

Los coeficientes en (6.41) se calculan de tal forma que se minimiza el resto, $|g(y) - g_N(y)|$. La expansión de Chebyshev minimiza $\|g(y) - g_N(y)\|_{L^\infty}$. La aproximación de Chebyshev de una función real es una aproximación óptima de una función en un intervalo finito, en el sentido mín-máx, es decir, el error de la aproximación de Chebyshev es mínimo en norma infinito (máximo)³. El conjunto de polinomios ortogonales de Chebyshev de primera especie, $T_k(y)$, se definen mediante polinomios de grado k , como

$$T_k(y) = \cos(k\theta), \quad y = \cos(\theta), \quad o \quad T_k(y) = \cos(k \arccos(y)).$$

Los primeros polinomios de Chebyshev son

$$\begin{aligned} T_0(y) &= 1, \quad T_1(y) = y, \quad T_2(y) = 2y^2 - 1, \\ T_3(y) &= 4y^3 - 3y, \quad T_4(y) = 8y^4 - 8y^2 + 1, \dots \end{aligned}$$

que resultan del hecho de que $\cos(k\theta)$ es un polinomio de grado k en $\cos(\theta)$ y

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1, \quad \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1, \\ \cos(3\theta) &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta), \quad \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1. \end{aligned}$$

Así, una aproximación de Chebyshev es una serie de cosenos bajo una transformación de variables tal que

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}' \bar{a}_k T_k(\theta), \quad \text{donde } T_k(\theta) = \cos(k \cos^{-1}(\theta)), \quad \theta \in [-1, 1], \quad (6.42)$$

con los coeficientes

$$\bar{a}_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} g(\theta) T_k(\theta) d\theta. \quad (6.43)$$

La igualdad $T_k(\cos y) = \cos(ky)$ y la transformación, $\theta = \cos y$, resultan en

$$\bar{a}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\cos y) \cos(ky) dy.$$

de modo que los coeficientes de la serie de Chebyshev de $g(\theta)$ son idénticos a los coeficientes de Fourier del coseno de $g(\cos y)$ en el intervalo $[0, \pi]$, y ambas expansiones son equivalentes por transformación. La expansión de funciones con soporte en un intervalo finito $[a, b]$ se puede llevar a cabo mediante el cambio de variables visto en (6.8). ▲

³Cuando una función es periódica, la expansión exponencial en series de Fourier es la aproximación óptima.

6.2.4. Selección del intervalo de integración

La selección del intervalo de integración, $[a, b]$, es muy importante para una valoración de opciones precisa mediante el método COS. Un intervalo demasiado pequeño dará lugar a un error de truncamiento significativo, mientras que un intervalo muy grande requiere de un valor alto para N (es decir, muchos términos en la expansión del coseno (6.28) para lograr un cierto nivel de precisión).

Siguiendo el procedimiento de selección del intervalo de integración introducido en Fang y Oosterlee (2008); Fang (2010); Fang y Oosterle (2009), centrando el dominio en $x + \zeta_1$, empleamos

$$[a, b] := \left[(x + \zeta_1) - L\sqrt{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_4}}, \quad (x + \zeta_1) + L\sqrt{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_4}} \right], \quad (6.44)$$

con $L \in [6, 12]$ dependiente del nivel de tolerancia requerida por el usuario y ζ_1, \dots, ζ_4 siendo los cumulantes específicos del proceso estocástico subyacente. Nótese la siguiente distinción: $x = \log S(t_0)$ cuando la fórmula COS se emplea para recuperar la densidad, mientras que $x = \frac{\log S(t_0)}{K}$ cuando se valoran opciones.

Observación 6.2.3 (Intuición detrás del intervalo de integración)

El intervalo de integración en (6.44) es una regla empírica, basada en los cumulantes de $\log(S(T)/K)$. Observando las igualdades (1.13) del Capítulo 1, sabemos que el cumulante par k -ésimo es proporcional a la potencia k -ésima de la desviación típica. Por tanto, tomando raíces cuadradas, como en (6.44), esos términos se relacionan, precisamente, con la desviación típica. ▲

El parámetro L en (6.44) establece la relación entre el nivel de tolerancia definido por el usuario y el tamaño de $[a, b]$. Esta relación se ha analizado mediante experimentos numéricos, con el objetivo de determinar un único valor de L para diferentes procesos de Lévy exponenciales de precios de activos. Tomando N grande, por ejemplo $N = 2^{14}$, el error de truncamiento de la serie es despreciable y el error del intervalo de integración, que tiene una relación directa con el nivel de tolerancia definida por el usuario, es el dominante. En la Figura 6.3 se presenta el error observado para diferentes valores de L . De nuevo, «BS» denota el modelo de Black-Scholes (movimiento browniano geométrico), «Merton» denota el modelo de difusión con saltos propuesto en Merton (1976), y «Kou» es el modelo de difusión con saltos de Kou (2002). «VG» representa el modelo Variance Gamma, Madan *et al.* (1998), «CGMY» denota el modelo de Carr *et al.* (2002), «NIG» es la abreviatura del proceso de Lévy Normal Inverse Gaussian, Barndorff-Nielsen (1997).

La Figura 6.3 muestra que el error del intervalo de integración decrece exponencialmente con L .

Un valor de $L = 8$ resulta satisfactorio para todos los procesos de Lévy considerados, y se puede emplear como una «regla empírica» fiable.

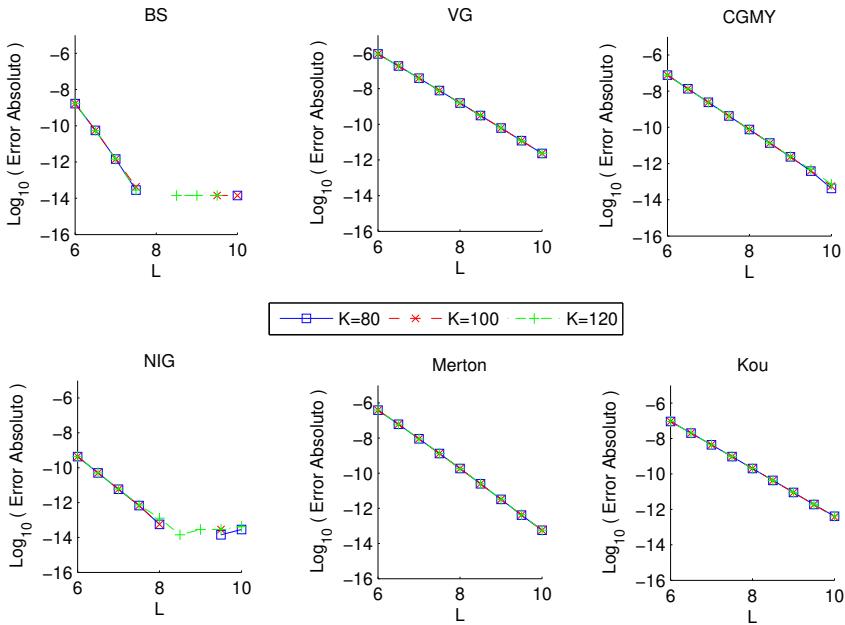


Figura 6.3: Errores absolutos (escala logarítmica) con respecto a L en la valoración de opciones call mediante el método COS con $N = 2^{14}$, $T = 1$ y tres strikes diferentes.

El cumulante ζ_4 se incluye en (6.44) porque las funciones de densidad de muchos procesos de Lévy, para vencimientos T cortos, tendrán picos agudos y colas pesadas (representadas con precisión por ζ_4). La fórmula (6.44) es precisa para un rango desde $T = 0.1$ a $T = 10$. Define, por tanto, un intervalo de integración que proporciona un error de truncamiento en torno a 10^{-12} . Valores más altos del parámetro L implicarán valores más altos de N para alcanzar el mismo nivel de precisión.

Observación 6.2.4 (Intervalo de integración simple)

Como intervalo de integración alternativo, mucho más sencillo de calcular, proponemos

$$[a, b] = [-L\sqrt{T}, L\sqrt{T}]. \quad (6.45)$$

Evidentemente, este intervalo de integración no se adapta a la función de densidad de $\log\left(\frac{S(t)}{K}\right)$ (en valoración de opciones) y, por tanto, debe ser utilizado con cuidado. Sin embargo, tiene la ventaja de que el intervalo de integración no depende ni de los cumulantes ni del strike K .

Esto es particularmente útil cuando consideramos la valoración de opciones para múltiples precios de ejercicio, \mathbf{K} , simultáneamente, y también cuando los cumulantes son difíciles de calcular. Utilizaremos este intervalo simplificado

para el cálculo sobre el vector de múltiples strikes en la Tabla 6.4, así como para la valoración de opciones bajo el modelo de volatilidad estocástica de Heston, en la Tabla 8.2.



Resumen de las funciones características

Resumimos aquí algunas de las funciones características más conocidas para varios procesos de Lévy exponenciales, presentadas en capítulos anteriores. Los parámetros utilizados en la notación de estas funciones características son los mismos que hemos utilizado en los respectivos capítulos. Recordamos que lo que se conoce es la función característica del precio «transformado», por lo que el payoff se debe representar en función del precio transformado, es decir, $x := \log(S_0/K)$ e $y := \log(S(T)/K)$.

La función característica de $X(t) = \log(S(t)/K)$ es

$$\phi_X(u; t_0, t) := e^{iuX(t_0)} \varphi_X(u, t) = e^{iux} \mathbb{E}[e^{iuX(t)}], \quad (6.46)$$

y se denota por $\phi_X(u) := \phi_X(u; t_0, t)$.

En la Tabla 6.2 se presentan las funciones características de varios procesos de Lévy exponenciales (véase también Cont y Tankov (2004); Schoutens (2003)); «MBG» representa el movimiento browniano geométrico; «Merton» y «Kou» denotan los modelos de difusión con saltos del Apartado 5.1, propuestos en Kou y Wang (2004) y Merton (1976), «VG» y «CGMY» son los modelos Variance Gamma y CGMY de los Apartados 5.4.1 y 5.4.2, respectivamente; «NIGB» es el proceso Normal Inverse Gaussian con movimiento browniano, véase Apartado 5.4.3 y Barndorff-Nielsen (1997). En la tabla, el término de corrección de la deriva, $\bar{\omega}$, definido como $\bar{\omega} := -\frac{1}{t} \log(\varphi_X(-i, t))$ (que hace que estos procesos exponenciales sean martingalas), está incluido dentro del parámetro de deriva genérico μ , así como la tasa de pago de dividendos proporcional q , como en (2.21).

Nótese también que, en la tabla, se ha considerado que los procesos CGMY y NIG constan de un componente de movimiento browniano, por lo que, en realidad, se muestran los procesos CGMYB y NIGB. Exceptuando el proceso VG, todos los procesos descritos contienen un término de difusión.

Resumen de cumulantes

Dadas las funciones características de la Tabla 6.2, los cumulantes se pueden calcular mediante la fórmula

$$\zeta_n(X) = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\partial^n(t\Psi(u))}{\partial u^n} \right|_{u=0},$$

donde el argumento $t\Psi(u)$ es el exponente de la función característica $\phi_X(u)$, esto es

$$\phi_X(u) = e^{t\Psi(u)}, \quad t \geq 0.$$

Tabla 6.2: Funciones características para varios modelos.

| | |
|--------|---|
| MBG | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t)$ $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma^2 - q$ |
| Merton | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t) \cdot \varphi_{\text{Merton}}(u, t)$ $\varphi_{\text{Merton}}(u, t) = e^{\xi_p t (\exp(i\mu_J u - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2) - 1)}$ $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma^2 - q - \bar{\omega},$ $\bar{\omega} = \xi_p (\exp(\frac{1}{2}\sigma_J^2 + \mu_J) - 1)$ |
| Kou | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t) \cdot \varphi_{\text{Kou}}(u, t)$ $\varphi_{\text{Kou}}(u, t) = e^{\xi_p t (\frac{p_1\alpha_1}{\alpha_1-iu} + \frac{p_2\alpha_2}{\alpha_2+iu} - 1)}$ $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma^2 - q + \bar{\omega},$ $\bar{\omega} := \xi_p (1 - \frac{p_1\alpha_1}{\alpha_1-1} - \frac{p_2\alpha_2}{\alpha_2+1})$ |
| VG | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t) \cdot \varphi_{\text{VG}}(u, t)$ $\varphi_{\text{VG}}(u, t) = (1 - iu\theta\beta + \frac{1}{2}\sigma_{\text{VG}}^2\beta u^2)^{-t/\beta}$ $\mu := r - q + \bar{\omega},$ $\bar{\omega} := (1/\beta) \cdot \log(1 - \theta\beta - \frac{1}{2}\sigma_{\text{VG}}^2\beta)$ |
| CGMYB | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}\sigma_{\text{CGMYB}}^2 u^2 t) \cdot \varphi_{\text{CGMY}}(u, t)$ $\varphi_{\text{CGMY}}(u, t) = e^{Ct\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y)}$ $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma_{\text{CGMYB}}^2 - q + \bar{\omega},$ $\bar{\omega} := -C \cdot \Gamma(-Y)[(M-1)^Y - M^Y + (G+1)^Y - G^Y]$ |
| NIGB | $\varphi_X(u, t) = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}\sigma_{\text{NIGB}}^2 u^2 t) \cdot \varphi_{\text{NIG}}(u, t)$ $\varphi_{\text{NIG}}(u, t) = e^{\delta t (\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}$ $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma_{\text{NIGB}}^2 - q + \bar{\omega},$ $\bar{\omega} = \delta (\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ |

Las fórmulas específicas para los cumulantes se resumen en la Tabla 6.3. Aquí, la corrección de la deriva $\bar{\omega}$ satisface que $\exp(-\bar{\omega}t) = \varphi_X(-i, t)$.

Cálculo eficiente para modelos de Lévy

La fórmula de valoración (6.28) se puede usar para opciones europeas bajo cualquier proceso subyacente, siempre y cuando se disponga de la función característica. En particular, para los modelos de Lévy exponenciales, y también para la clase de procesos regulares afines definidos en Duffie *et al.* (2003),

Tabla 6.3: Cumulantes de interés para varios modelos.

| | |
|--------|--|
| MBG | $\zeta_1 = (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \quad \zeta_2 = \sigma^2 t, \quad \zeta_4 = 0$ |
| Merton | $\zeta_1 = t(r - q - \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2 + \xi_p \mu_J)$ $\zeta_2 = t(\sigma^2 + \xi_p \mu_J^2 + \sigma_J^2 \xi_p)$ $\zeta_4 = t \xi_p (\mu_J^4 + 6\sigma_J^2 \mu_J^2 + 3\sigma_J^4 \xi_p)$ |
| Kou | $\zeta_1 = t \left(r - q + \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\xi_p p_1}{\alpha_1} - \frac{\xi_p p_2}{\alpha_2} \right)$ $\zeta_2 = t \left(\sigma^2 + 2\frac{\xi_p p_1}{\alpha_1^2} + 2\frac{\xi_p p_2}{\alpha_2^2} \right)$ $\zeta_4 = 24t \xi_p \left(\frac{p_1}{\alpha_1^4} + \frac{p_2}{\alpha_2^4} \right)$ |
| VG | $\zeta_1 = (r - q - \bar{\omega} + \theta)t$ $\zeta_2 = (\sigma_{VG}^2 + \beta \theta^2)t$ $\zeta_4 = 3(\sigma_{VG}^4 \beta + 2\theta^4 \beta^3 + 4\sigma_{VG}^2 \theta^2 \beta^2)t$ |
| CGMYB | $\zeta_1 = (r - q + \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma_{CGMYB}^2)t + Ct\Gamma(1-Y)(M^{Y-1} - G^{Y-1})$ $\zeta_2 = \sigma_{CGMYB}^2 t + Ct\Gamma(2-Y)(M^{Y-2} + G^{Y-2})$ $\zeta_4 = Ct\Gamma(4-Y)t(M^{Y-4} + G^{Y-4})$ |
| NIG | $\zeta_1 = (r - q + \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma_{NIGB}^2 + \delta\beta/\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})t$ $\zeta_2 = \delta\alpha^2 t(\alpha^2 - \beta^2)^{-3/2}$ $\zeta_4 = 3\delta\alpha^2(\alpha^2 + 4\beta^2)t(\alpha^2 - \beta^2)^{-7/2}$ |

incluyendo la clase de difusiones con saltos exponencialmente afines, Duffie *et al.* (2000). Esta última clase se abordará con detalle en el siguiente capítulo. Cabe mencionar que la valoración con COS de (6.28) se puede simplificar significativamente para procesos de Lévy exponenciales, ya que se pueden calcular «simultáneamente» múltiples precios de opciones para diferentes strikes. Dado un vector columna de strikes, \mathbf{K} , consideramos la siguiente transformación $\mathbf{x} = \log\left(\frac{S(t_0)}{\mathbf{K}}\right)$ e $\mathbf{y} = \log\left(\frac{S(T)}{\mathbf{K}}\right)$. Para un proceso de Lévy, la función característica se puede escribir como

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; t_0, T) = \varphi_{X_{\mathcal{L}}}(u, T) \cdot e^{iux}. \quad (6.47)$$

De este modo, la fórmula de valoración se simplifica, ya que tenemos

$$V(t_0, \mathbf{x}) \approx e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ \varphi_{X_{\mathcal{L}}} \left(\frac{k\pi}{b-a}, T \right) \exp \left(ik\pi \frac{\mathbf{x} - a}{b-a} \right) \right\} \mathbf{H}_k. \quad (6.48)$$

con $\tau = T - t_0$. Recordando las fórmulas de H_k para opciones europeas vanilla en (6.34) y (6.35), estas se pueden representar como un vector multiplicado por

un escalar, esto es

$$\mathbf{H}_k = U_k \mathbf{K},$$

donde

$$U_k = \begin{cases} \frac{2}{b-a} (\chi_k(0,b) - \psi_k(0,b)) & \text{para una call,} \\ \frac{2}{b-a} (-\chi_k(a,0) + \psi_k(a,0)) & \text{para una put.} \end{cases} \quad (6.49)$$

La fórmula COS de valoración resultante es⁴

$$V(t_0, \mathbf{x}) \approx \mathbf{K} e^{-r\tau} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_{X_L} \left(\frac{k\pi}{b-a}, T \right) U_k \cdot \exp \left(ik\pi \frac{\mathbf{x} - a}{b-a} \right) \right\},$$

(6.50)

donde el sumatorio se puede escribir como un producto matriz-vector si \mathbf{K} (y por tanto \mathbf{x}) es un vector. La variable independiente de (6.50) es \mathbf{x} . Por tanto, se pueden obtener precios de opciones para diferentes strikes en un único experimento numérico, tomando un vector \mathbf{K} como vector de entrada.

6.3. Resultados numéricos del método COS

En este apartado, se presentan algunos experimentos que confirman la eficiencia y la precisión del método COS. Nos centraremos en la valoración de opciones europeas y consideraremos diferentes procesos para el activo subyacente, como el modelo de Black-Scholes y los dos procesos exponenciales de actividad infinita de Lévy, VG y CGMY. Se mostraran experimentos numéricos con vencimientos largos y cortos.

Además, para cada experimento, se recupera la función de densidad del subyacente, con la ayuda de la inversión de Fourier, como se introdujo en el Apartado 6.1.1. Esto puede ayudar al lector a comprender la relación entre la convergencia del error y las propiedades de las densidades.

Todos los tiempos de CPU presentados están en milisegundos y se determinan después de promediar los tiempos de ejecución obtenidos en 10^4 experimentos, realizados en un sistema convencional.

6.3.1. Movimiento browniano geométrico

El primer conjunto de experimentos se realiza bajo el proceso MBG para una opción call con un tiempo corto de vencimiento. Los parámetros seleccionados para este test son

$$S_0 = 100, \quad r = 0.1, \quad q = 0, \quad T = 0.1, \quad \sigma = 0.25. \quad (6.51)$$

⁴Aunque los valores de U_k son reales, lo mantenemos dentro de los corchetes. Esto nos permite intercambiar $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ y \sum' , lo que simplifica la implementación en algunos paquetes de software científico.

Se obtiene y analiza el comportamiento de la convergencia para tres strikes diferentes, $K = 80, 100$, y 120 . Para este cálculo, hemos empleado la versión vectorial del método COS, con el intervalo de integración simplificado de (6.45). Así pues, los resultados para estos strikes se obtienen en una única operación, como se explica en (6.50).

En la Tabla 6.4, se muestran el tiempo de CPU y la convergencia del error. Se presenta el error máximo en los valores de las opciones para los tres strikes.

Tabla 6.4: *Convergencia del error y tiempo de CPU empleando el método COS para calls europeas bajo MBG, con los parámetros de (6.51); valores de referencia $20.799226309\dots$, $3.659968453\dots$ y $0.044577814\dots$, para $K = 80, 100, 120$, respectivamente.*

| N | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---------------------|------|----------|----------|----------|----------|
| ms | 0.10 | 0.11 | 0.13 | 0.15 | 0.19 |
| err. abs. $K = 80$ | 3.67 | 7.44e-01 | 1.92e-02 | 1.31e-07 | 5.68e-14 |
| err. abs. $K = 100$ | 3.87 | 5.28e-01 | 1.52e-02 | 3.87e-07 | 1.44e-13 |
| err. abs. $K = 120$ | 3.17 | 8.13e-01 | 2.14e-02 | 3.50e-07 | 1.26e-13 |



Observación 6.3.1

En todos los experimentos numéricos con el método COS, se observa una complejidad computacional lineal. Al duplicar N , realizar la operación y observar las «diferencias» entre los sucesivos tiempos, se puede distinguir la complejidad lineal a partir del sobrecoste computacional. ▲

Ejemplo 6.3.1 (Opción todo o nada)

Con este ejemplo, confirmamos que la convergencia del método COS no depende de una discontinuidad en la función de payoff. Para ello valoraremos un opción call todo o nada, cuyos coeficientes H_k^{cash} tienen expresión analítica. El proceso subyacente es el MBG, por lo que existe una solución analítica. Los parámetros para este test son

$$S_0 = 100, \quad K = 120, \quad r = 0.05, \quad q = 0, \quad T = 0.1, \quad \sigma = 0.2. \quad (6.52)$$

La Tabla 6.5 muestra la convergencia exponencial del método COS. ♦

6.3.2. Procesos CGMY y VG

En la valoración de opciones call, la exactitud de la solución puede exhibir alguna «sensibilidad» con respecto al tamaño del intervalo de integración truncado. Esto le ocurre específicamente a las opciones call bajo distribuciones con colas pesadas, como las de los procesos de Lévy con saltos, o para opciones

Tabla 6.5: Error y tiempo de CPU en la valoración de una opción call todo o nada mediante el método COS, con los parámetros de (6.52); valor de referencia = 0.273306496...

| N | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
|-------------|-----------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| Error | -2.26e-01 | 2.60e-03 | 3.59e-05 | -4.85e-07 | 1.29e-09 | -9.82e-13 |
| Tiempo (ms) | 0.330 | 0.334 | 0.38 | 0.43 | 0.49 | 0.50 |



con un vencimiento extremadamente largo⁵. El payoff del precio transformado (logarítmicamente) crece exponencialmente, lo que puede introducir errores de cancelación en dominios de gran tamaño. Las opciones put no se ven afectadas por este efecto, ya que su payoff está acotado por el valor del strike K . En Fang y Oosterlee (2008), las opciones call europeas se valoran a partir de los precios de las opciones put europeas, en combinación con la paridad put-call (3.4).

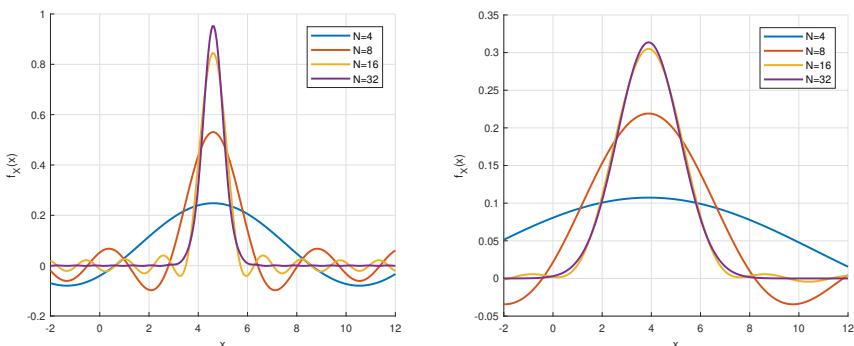


Figura 6.4: Densidad del modelo CGMY obtenida con COS para varios valores del número de términos en la expansión y con los parámetros de (6.53). Izquierda: $Y = 0.5$. Derecha: $Y = 1.5$.



Estudiamos ahora la convergencia del método para opciones call bajo el modelo CGMY en más detalle, empleando la paridad put-call para valorar opciones call. Como se ha documentado en Almendral y Oosterlee (2007); Wang *et al.* (2007), los métodos para EID tienen dificultades para dar la solución correcta cuando el parámetro $Y \in [1, 2]$. Aquí consideramos $Y = 0.5$ e $Y = 1.5$, respectivamente.

⁵Este es el caso de la mayoría de opciones en seguros, con una vida útil de 30 años o más.

Tabla 6.6: Error máximo al recuperar $f_{CGMYB}(y)$ a partir de $\phi_{CGMYB}(u)$ mediante la expansión de Fourier en cosenos, con los parámetros en (6.53). La malla para y se construye desde $y_{\min} = -2$ hasta $y_{\max} = 12$ con 250 puntos.

| $N :$ | $Y = 0.5$ | | | | | |
|-------------|-----------|-----------|----------|----------|----------|---------|
| | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 | 128 |
| Error: | 4.27e-04 | 1.34e-06 | 1.79e-09 | 1.01e-12 | 2.22e-16 | < 1e-16 |
| Tiempo (ms) | 0.12 | 0.15 | 0.20 | 0.21 | 0.22 | 0.29 |
| $N :$ | $Y = 1.5$ | | | | | |
| | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 |
| Error: | 6.14e-02 | 1.81e-032 | 8.25e-06 | 6.10e-09 | 8.13e-13 | < 1e-16 |
| Tiempo (ms) | 0.09 | 0.10 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0.14 |



Los otros parámetros son

$$S_0 = 100, K = 100, r = 0.1, \sigma_{CGMYB} = 0.2, q = 0, C = 1, G = 5, M = 5, T = 1. \quad (6.53)$$

En la Tabla 6.6 se muestra la convergencia del método COS al recuperar la función de densidad CGMYB. En la Figura 6.4 se representan las funciones de densidad recuperadas para los dos valores de Y . Para valores grandes de Y , las colas de la función de densidad son más pesadas y el centro de la distribución se desplaza. Los valores de referencia para los experimentos numéricos se han calculado mediante el método COS con $N = 2^{14}$. Los resultados numéricos para la valoración de opciones se presentan en la Tabla 6.7.

El método COS converge exponencialmente y, con un valor relativamente pequeño de N , esto es, $N \leq 100$, los resultados alcanzan una precisión de hasta siete cifras. El tiempo de ejecución es de menos de 0.1 milisegundos. El orden de convergencia para $Y = 1.5$ en la Tabla 6.7 es más rápido que para $Y = 0.5$, ya que las funciones de densidad con colas pesadas suelen representarse mejor mediante funciones base de cosenos.

Tabla 6.7: Convergencia del método COS (precisión y coste computacional) para CGMY con $Y = 0.5$ e $Y = 1.5$; con los restantes parámetros en (6.53); valores de referencia: $(Y = 0.5) = 21.679593920471817\dots$, $(Y = 1.5) = 50.27953397994453\dots$

| $N :$ | $Y = 0.5$ | | | | | |
|-------------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 | 128 |
| Error: | 3.79e-02 | 1.07e-03 | 2.59e-05 | 5.13e-07 | 8.02e-09 | 8.81e-13 |
| Tiempo (ms) | 0.61 | 0.69 | 0.78 | 0.89 | 0.95 | 1.11 |
| $N :$ | $Y = 1.5$ | | | | | |
| | 4 | 8 | 16 | 24 | 32 | 36 |
| Error: | 2.42e+00 | 6.17e-02 | 3.22e-04 | 1.56e-08 | 2.84e-14 | <1e-16 |
| Tiempo (ms) | 0.53 | 0.56 | 0.58 | 0.63 | 0.68 | 0.72 |



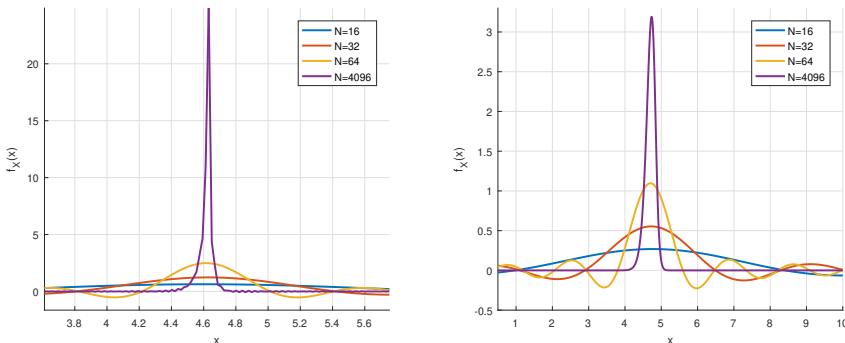


Figura 6.5: Densidad del modelo VG obtenida con COS para varios valores del número de términos en la expansión y con los parámetros de (6.54). Izquierda: $T = 0.1$. Derecha: $T = 1$.



Ejemplo 6.3.2 (Variance Gamma)

En el siguiente ejemplo se realiza la valoración de opciones call bajo el proceso VG, que también pertenece a la clase de procesos de Lévy de actividad infinita, véase Apartado 5.4.1. El proceso VG se suele parametrizar mediante los parámetros σ_{VG}, θ y β . En este experimento numérico se consideran los parámetros

$$S_0 = 100, r = 0.1, q = 0, \sigma_{VG} = 0.12, \theta = -0.14, \beta = 0.2. \quad (6.54)$$

Además, comparamos la convergencia para $T = 1$ y $T = 0.1$.

Tabla 6.8: Convergencia del método COS para una call bajo el modelo VG con $K = 90$ y con los restantes parámetros en (6.54); valores de referencia: ($T = 0.1$) = 10.993703187..., ($T = 1$) = 19.099354724...

| $T = 0.1$ | | | $T = 1$ | | |
|-----------|----------|-------------|---------|----------|-------------|
| N | Error | Tiempo (ms) | N | Error | Tiempo (ms) |
| 64 | 2.05e-02 | 0.04 | 32 | 3.41e-01 | 0.05 |
| 128 | 1.99e-02 | 0.06 | 64 | 2.46e-01 | 0.06 |
| 256 | 8.30e-04 | 0.08 | 128 | 1.02e-02 | 0.09 |
| 512 | 3.06e-04 | 0.10 | 160 | 9.51e-04 | 0.07 |
| 1024 | 3.02e-05 | 0.14 | 512 | 3.40e-08 | 0.11 |



En la Figura 6.5 podemos apreciar las diferencias en la forma de las dos densidades VG recuperadas. Para $T = 0.1$, la densidad es mucho más puntiaguda. En la Tabla 6.8 se presentan los resultados. Nótese que, para

$T = 0.1$, el error de convergencia del método COS es algebraico en vez de exponencial, lo que concuerda con la función de densidad recuperada en la Figura 6.5, que claramente no pertenece a $C^\infty([a, b])$. En el caso extremo en el que $T \rightarrow 0$, se observaría un función similar a una delta. ♦

6.3.3. Reflexión sobre la valoración de opciones

En una institución financiera se pueden distinguir varias tareas que se deben realizar para valorar un producto derivado financiero. En primer lugar, se define el producto financiero porque determinados clientes lo demandan. Existen activos subyacentes clásicos, como los tipos de interés y las acciones, que se modelan por medio de EDEs. Para determinar los valores de los parámetros de las EDEs, se requiere de la calibración del modelo, es decir, ajustar los precios de las opciones europeas vanilla proporcionadas por el modelo a los precios de las opciones observados en el mercado financiero.

Para la calibración, se suelen utilizar opciones europeas vanilla sobre índices. Habitualmente, las opciones europeas presentan una gran liquidez, con márgenes pequeños entre oferta y demanda, y contienen información de mercado valiosa sobre la incertidumbre futura mediante, por ejemplo, las volatilidades implícitas. Las opciones europeas también pueden utilizarse en estrategias de cobertura para reducir el riesgo asociado a la venta de un producto derivado específico. Cualquier sistema de valoración y gestión del riesgo tiene que ser capaz de calibrar a opciones europeas vanilla, por lo que es importante valorar estas opciones de forma rápida y precisa.

El producto financiero derivado de interés, posiblemente con cláusulas contratuales más complejas, se suele valorar mediante simulación de Monte Carlo o utilizando aproximaciones numéricas de las correspondientes E(I)DP.

Por tanto, la elección del método numérico para la valoración de opciones se basa a menudo en si el cálculo está destinado a la calibración del modelo, para lo que es esencial la rapidez del método de valoración de opciones europeas, o a la valoración de un derivado específico más complicado, para lo que la solidez del método numérico es de mucha importancia.

La elección del modelo estocástico para los activos subyacentes tiene también un impacto significativo en las técnicas computacionales. Lo ideal es disponer de precio (semi)analítico para la opciones europeas, pero esto solo es así para las dinámicas de precios de activos más sencillas, como la dinámica de Black-Scholes. Como alternativa, se pueden emplear precios de opción aproximados (o volatilidades implícitas aproximadas) obtenidos mediante una expansión asintótica, véase, por ejemplo, Fouque *et al.* (2004); Hagan *et al.* (2002); Lorig *et al.* (2015), aunque su ámbito de aplicación puede ser limitado. La clase de métodos basados en Fourier incluye técnicas numéricas altamente eficientes para la valoración de opciones europeas bajo dinámicas de precios de activos para los cuales se dispone de la función característica, como el método COS,

presentado en este capítulo. Debido a su rapidez en el cálculo, estos métodos se ajustan bien a la tarea de calibración de parámetros.

Los métodos de Fourier son habitualmente más rápidos que los métodos de E(I)DP y Monte Carlo, para valorar opciones europeas sobre un único activo. En von Sydow *et al.* (2015) se presenta una comparación de distintos métodos de valoración de opciones, en la cual las técnicas de valoración basadas en Fourier muestran un rendimiento superior para la mayoría de opciones básicas. Estos métodos también se denominan métodos de transformación, ya que se basan en la transformada de Fourier, combinada con integración numérica, véase Carr y Madan (1999); O'Sullivan (2005); Lee (2004). Los métodos de Fourier son computacionalmente rápidos, aunque su uso en contratos con payoff exótico supone un desafío.

Observación 6.3.2 (Transformada rápida de Fourier, FFT)

Los métodos de integración numérica suelen calcular las integrales de Fourier aplicando reglas de integración con nodos equiespaciados y el algoritmo FFT mediante la imposición del teorema de Nyquist al tamaño de las mallas, $\Delta y, \Delta u$, en los dominios de y y u , respectivamente, es decir,

$$\Delta y \cdot \Delta u \equiv \frac{2\pi}{N}, \quad (6.55)$$

▲

donde N representa el número de nodos en la malla. De esta forma, los valores de la malla se pueden procesar en $O(N \log_2 N)$ operaciones. Sin embargo, la convergencia del error de las reglas de integración equiespaciadas puede no ser muy alta; el parámetro N tiene que ser una potencia de dos, y la relación impuesta sobre los tamaños de las mallas (6.55) impide que se utilicen mallas gruesas en los dominios computacionales de y y u .

Otras técnicas altamente eficientes para valorar opciones vanilla bajo ciertas dinámicas del activo específicas son el método basado en FFT de Carr y Madan (1999), la transformada rápida de Gauss, Broadie y Yamamoto (2003), y la transformada doble exponencial, Mori y Sugihara (2001); Yamamoto (2005). Así mismo, más recientemente, se han propuesto técnicas numéricas basadas en *wavelets* para la valoración de opciones y la gestión del riesgo, aplicando B-splines en Ortiz-Gracia y Oosterlee (2013); Kirkby (2016), y wavelets de Shannon⁶ en el método Shannon Wavelet Inverse Fourier Transform (SWIFT), Ortiz-Gracia y Oosterlee (2016), que presentan un comportamiento prometedor en cuanto a robustez y eficiencia. Estas técnicas no serán abordadas en el libro, por lo que remitimos al lector interesado en ellas a las publicaciones correspondientes.

⁶Véase Cattani (2008).

6.4. Ejercicios

Ejercicio 6.1 Considerar las siguientes tareas:

- a. Aproximar las funciones de payoff de una call y una put, con $K = 10$, mediante una expansión de Fourier en cosenos en el dominio $[0, 30]$. Representar las respectivas aproximaciones de estas funciones para $N = 2, 5, 10$ y 40 términos en la expansión de cosenos.
- b. Aproximar la función de payoff de una call, con $K = 10$, mediante su expansión de Fourier en cosenos, pero ahora en el dominio $[10, 30]$. Representar las respectivas aproximaciones de estas funciones para $N = 2, 5, 10$ y 40 términos en la expansión de cosenos. Describir las diferencias observadas con respecto al apartado a.
- c. Aproximar la función de payoff de una call y una put, con $K = 10$, mediante su expansión de Fourier en senos en el dominio $[0, 30]$. Representar las respectivas aproximaciones de estas funciones para $N = 2, 5, 10$ y 40 términos en la expansión de senos. Describir las diferencias observadas con respecto al apartado a.

Ejercicio 6.2 Recuperar las FDPs de los modelos VG, CGMY y NIG, eligiendo los parámetros del modelo de tal manera que se pueda observar el impacto de la curtosis, la asimetría y las colas pesadas.

Ejercicio 6.3 Comparar los precios de opciones call obtenidos con la función característica del modelo de difusión con saltos de Merton, definida en (5.32), con los valores analíticos de los precios calculados con la suma infinita dada en el Apartado 5.2.1.



Ejercicio 6.4 A partir de la función característica de una variable aleatoria X , se puede recuperar la densidad mediante el método COS empleando la fórmula

$$\hat{f}_X(y) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_k \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right), \quad (6.56)$$

con

$$\bar{F}_k = \frac{2}{b-a} \operatorname{Re} \left\{ \phi_X \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\}. \quad (6.57)$$

Demostrar que la FDA, $\hat{F}_X(y)$, se puede aproximar mediante la fórmula

$$\hat{F}_X(y) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_k \psi(a, b, y), \quad (6.58)$$

con

$$\psi(a, b, y) = \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi(y-a)}{b-a}\right), & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ (y-a), & \text{para } k = 0. \end{cases} \quad (6.59)$$

Ejercicio 6.5 La distribución de Gumbel se emplea a menudo en la teoría de valores extremos. Esta distribución puede utilizarse para modelar la distribución del valor máximo de un número de muestras. Una variable aleatoria, Y , sigue una distribución de Gumbel con «parámetro de escala» $1/k_1 > 0$ y «parámetro de posición» $k_2 \in \mathbb{R}$, que tiene por densidad

$$f_Y(x) = k_1 \exp\left(k_1(k_2 - y) - e^{k_1(k_2 - y)}\right).$$

Mostrar que su función característica viene dada por

$$\phi_Y(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuY}\right] = \Gamma\left(1 - \frac{iu}{k_1}\right) e^{iuk_2},$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, que se define como $\Gamma(s) = \int_0^\infty z^{s-1} e^{-z} dz$.

Ejercicio 6.6 Calcular, mediante el método COS, los precios de las opciones bajo la difusión con saltos del Ejercicio 5.11. Emplear también el modelo de difusión con saltos de Kou, combinado con el método COS, para los siguientes conjuntos de parámetros

Caso I: $\xi_p = 8, p_1 = 0.4, p_2 = 0.6, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 5$;

Caso II: $\xi_p = 8, p_1 = 0.2, p_2 = 0.8, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 5$;

Caso III: $\xi_p = 0.1, p_1 = 0.2, p_2 = 0.8, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 50$;

Analizar las densidades observadas en los distintos casos.

Ejercicio 6.7 Obtener los cuatro primeros cumulantes para el modelo CGMYB, cuya función característica está definida en (5.62).

Ejercicio 6.8 Repetir el cálculo de los precios de opciones bajo modelos de Lévy infinitos del Ejercicio 5.12 mediante el método COS. ¿Se puede confirmar que los precios de las opciones son idénticos? ¿Cuál es la complejidad computacional del método COS al valorar opciones para un rango de strikes?

Ejercicio 6.9 Cuando se valoran opciones call, la precisión de la solución es sensible al tamaño del dominio de integración $[a, b]$. La función de payoff de una call crece exponencialmente con el precio transformado (logarítmicamente), lo que puede dar lugar a errores de redondeo más grandes, sobre todo para distribuciones con colas pesadas. A menudo, es posible evitar algunos de estos errores empleando la paridad put-call, véase (3.3), que plantea que

$$V_c(t_0, S) = V_p(t_0, S) + S(t_0) - Ke^{-r(T-t_0)}.$$

Considerar dos modelos, el movimiento browniano geométrico y el proceso exponencial Variance Gamma, e investigar la mejora en la convergencia del método COS cuando se utiliza la paridad put-call al valorar una opción call europea con $T = 2, S_0 = 1$ y $K = 0.5, 1, 3$. Probar diferentes conjuntos de parámetros para los modelos.

Ejercicio 6.10 Realizar siguientes tareas para obtener la implementación del algoritmo FFT que recupera la densidad marginal, $f_X(x)$, de un proceso $X(t)$:

- a. Utilizar la definición de función característica y mostrar que, para la densidad $f_X(x)$, se verifica que

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-iux} \phi_X(u) du + \overline{\int_0^\infty e^{-iux} \phi_X(u) du} \right).$$

- b. Utilizar las propiedades de los números complejos para mostrar que

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-iux} \phi_X(u) du \right).$$

- c. Considerar $\bar{\phi}_X(u, x) := e^{-iux} \phi_X(u)$ y aplicar la regla de los trapecios en el dominio $[0, u_{\max}]$, con $u_n = (n-1)\Delta u$. Definir la malla $x: x_j = (j-1)\Delta x + x_{\min}$, for $j = 1, \dots, N$, y mostrar que

$$\bar{\phi}_X(u_n, x_j) = \phi_X(u_n) e^{-i(n-1)\Delta u[(j-1)\Delta x + x_{\min}]},$$

para cualquier $n = 1, \dots, N$ y $j = 1, \dots, N$.

- d. Utilizar la transformada de Fourier discreta para la función f_n dada por

$$\phi_j = \sum_{n=1}^N e^{-\frac{2\pi i}{N}(n-1)(j-1)} f_n. \quad (6.60)$$

Tomar $\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{N}$ y mostrar que

$$\sum_{n=1}^N \bar{\phi}_X(u_n, x_j) = \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(j-1)} [e^{-iu_n x_{\min}} \phi_X(u_n)].$$

- e. Obtener las funciones $\hat{\phi}_X(u_n)$ y $\hat{\phi}_1$, tal que se verifique la igualdad

$$f_X(x_j) \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\Delta u \left(\sum_{n=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(j-1)} \hat{\phi}_X(u_n) - \hat{\phi}_1 \right) \right]. \quad (6.61)$$

- f. Implementar todos los pasos anteriores para recuperar la densidad vía FFT y comparar el resultado con el método COS, en términos de tiempo de ejecución y exactitud, para una función de densidad de probabilidad normal.

Ejercicio 6.11 Las técnicas basadas en Fourier se pueden mejorar mediante el denominado «filtro espectral». Su aplicación resulta particularmente útil cuando existe una discontinuidad en la función característica, ya que esa discontinuidad perjudica la convergencia global del método COS. La idea detrás de este filtrado es la de alterar los coeficientes de la expansión de tal manera que decaigan más rápido. Si el filtro está bien elegido, el orden de convergencia del método COS mejorará, evitando la discontinuidad en la función característica. El método COS extendido con un filtro exponencial se construye como

$$\hat{f}_X(y) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s} \left(\frac{k}{N} \right) \bar{F}_k \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right), \quad (6.62)$$

con \bar{F}_k dado en (6.57) y

$$\hat{s}(x) = \exp(-\alpha x^p),$$

donde p debe ser un número par y $\alpha = -\log \epsilon_m$, con ϵ_m representando el épsilon de la máquina, de modo que $\hat{s}(1) = \epsilon_m \approx 0$ para la precisión de la máquina.

Considerar el modelo VG sin deriva, siendo su función de densidad de probabilidad dada por

$$f_{VG}(y) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}z} \exp\left(-\frac{(y-\theta z)^2}{2\sigma^2 z}\right) \frac{z^{\frac{T}{\beta}-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right)}{\beta^{\frac{T}{\beta}} \Gamma\left(\frac{T}{\beta}\right)} dz \quad (6.63)$$

y su correspondiente función característica viene dada por

$$\phi_{VG}(u, T) = \left(1 - i\beta\theta u + \frac{1}{2}\beta\sigma_{VG}^2 u^2\right)^{-\frac{T}{\beta}}. \quad (6.64)$$

Utilizar el método COS «filtrado» de (6.62) y la función característica de (6.64) para recuperar la función de densidad de probabilidad $\hat{f}_Y(y)$ y comparar los resultados con los obtenidos con la expresión en (6.63). Considerar el siguiente conjunto de parámetros: $\theta = -0.14$, $\beta = 0.2$, $\sigma = 0.12$, $N = 500$, $p = 6$, $\epsilon = 1e-16$ y los vencimientos, $T = 0.1$, $T = 1$. Representar en un gráfico las densidades obtenidas y, en otro gráfico, el error, $\log(|f_Y(y) - \hat{f}_Y(y)|)$. Incluir también en los gráficos la densidad y el error del método COS sin filtros.

CAPÍTULO 7

Sistemas multidimensionales, cambio de medida y procesos afines

En este capítulo:

Para tratar con modelos estocásticos más complejos, como los que veremos en los siguientes capítulos, en el **Apartado 7.1** presentamos algunas herramientas y conceptos matemáticos útiles para el tratamiento de procesos estocásticos multidimensionales. Describiremos la factorización de Cholesky (que permite transformar la formulación de los procesos multidimensionales con movimientos brownianos dependientes a independientes), el teorema de Feynman-Kac multidimensional para valoración de opciones y el lema de Itô multidimensional, en el que se basan los modelos de valoración de opciones. En el **Apartado 7.2**, introduciremos otro formalismo matemático conectado con los cambios de medida, el teorema de Girsanov, y abordaremos el cambio de numerario en un contexto más general, proporcionando ejemplos del mismo. En el **Apartado 7.3** se estudiará una nueva e importante clase de procesos de precios de activos, los denominados «procesos afines». Para estos procesos, la función característica se obtiene fácilmente.

Palabras clave de este capítulo: procesos estocásticos multidimensionales correlados, factorización de Cholesky, lema de Itô multidimensional, teorema de Girsanov para el cambio de medida, EDEs con difusiones afines, función característica.

7.1. Conceptos básicos para sistemas de EDE multidimensionales

Comenzamos con la definición de un sistema de EDEs donde los movimientos brownianos, $\mathbf{W}(t)$, son movimientos brownianos correlados y, a partir del mismo, obtenemos un sistema de EDEs con movimientos brownianos, $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$, no correlados o independientes. Los sistemas de EDEs con movimientos brownianos independientes permiten la utilización de definiciones y resultados útiles, como pueden ser el lema de Itô multidimensional o la clase de difusiones afines. Se busca transformar un sistema de EDEs correlado de tal forma que las volatilidades y las correlaciones estén separadas.

7.1.1. La factorización de Cholesky

La técnica que permite formular un sistema de EDEs basado en movimientos brownianos correlados $\mathbf{W}(t)$ como un sistema con movimientos brownianos independientes $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$, y viceversa, es la conocida factorización de Cholesky, aplicada a una matriz de correlación.

Definición 7.1.1 (Movimientos brownianos independientes)

Para el caso de movimientos brownianos correlados se sabe que $\mathbb{E}[W_i(t) \cdot W_j(t)] = \rho_{i,j}t$, si $i \neq j$, y $\mathbb{E}[W_i(t) \cdot W_j(t)] = t$, si $i = j$, para $i, j = 1, \dots, n$. De manera similar, para los incrementos brownianos correlados, se tiene que $dW_i(t) \cdot dW_j(t) = \rho_{i,j}dt$, si $i \neq j$, y $dW_i(t) \cdot dW_j(t) = dt$, si $i = j$.

Se dice que dos movimientos brownianos son independientes si $\mathbb{E}[\widetilde{W}_i(t) \cdot \widetilde{W}_j(t)] = 0$, si $i \neq j$ y $\mathbb{E}[\widetilde{W}_i(t) \cdot \widetilde{W}_j(t)] = t$, si $i = j$, para $i, j = 1, \dots, n$.

Entonces, para los incrementos brownianos, se cumple que $d\widetilde{W}_i(t) \cdot d\widetilde{W}_j(t) = 0$, si $i \neq j$ y $d\widetilde{W}_i(t) \cdot d\widetilde{W}_j(t) = dt$, si $i = j$. ◀

Ejemplo 7.1.1 (Ejemplos de movimientos brownianos correlados)

En la Figura 7.1 se representan dos trayectorias de movimientos brownianos donde, para cada gráfica, se varía la correlación entre los movimientos brownianos. En la primera gráfica, los dos movimientos brownianos están generados con un parámetro de correlación negativo $\rho_{1,2} < 0$, en la segunda gráfica $\rho_{1,2} = 0$, mientras que en la tercera gráfica se utiliza una correlación positiva, $\rho_{1,2} > 0$. En la figura, se observa claramente el impacto del parámetro de correlación $\rho_{1,2}$ sobre las trayectorias.

Una estructura de correlación se puede definir mediante una matriz de correlaciones, \mathbf{C} .

zbox

Definición 7.1.2 (Factorización de Cholesky)

Una matriz simétrica y definida positiva \mathbf{C} tiene una única factorización, la denominada factorización de Cholesky, de la forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (7.1)$$

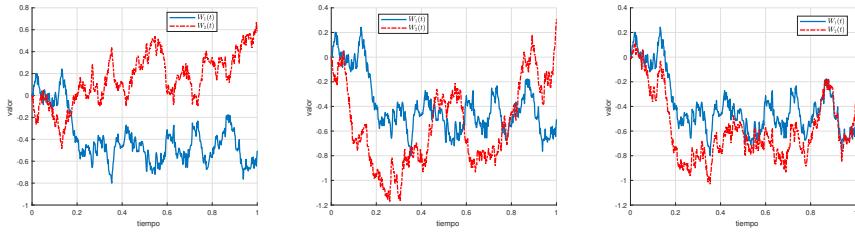


Figura 7.1: Trayectorias de Monte Carlo del movimiento browniano $W_i(t)$ con diferentes correlaciones, $\mathbb{E}[W_1(t)W_2(t)] = \rho_{1,2}t$. Izquierda: correlación negativa ($\rho_{1,2} < 0$). Centro: correlación nula. Derecha: correlación positiva ($\rho_{1,2} > 0$).



donde \mathbf{L} es una matriz triangular inferior con valores positivos en la diagonal. Cuando una matriz es solo simétrica y «semidefinida» positiva, al menos uno de los valores propios de la matriz es cero. En ese caso, existe una dependencia entre las columnas que componen la matriz de correlación, lo que significa que un proceso es una combinación lineal de los otros procesos, con lo que puede ser eliminado. ◀

En el siguiente ejemplo se muestra la utilización de la factorización para una matriz de correlación.

Ejemplo 7.1.2 (Ejemplo de factorización de Cholesky)

Dada una matriz de correlación \mathbf{C} de tamaño (2×2) , su factorización de Cholesky (7.1), es

$$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ \rho_{1,2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{1,2} & \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho_{1,2}}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \\ 0 & \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \end{bmatrix}. \quad (7.2) \blacklozenge$$

Como ejercicio interesante, se puede transformar un sistema de EDEs con dos movimientos brownianos independientes, $\widetilde{\mathbf{W}}(t) = [\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)]^T$, en un sistema de EDEs con movimientos brownianos correlados, siendo el coeficiente de correlación $\rho_{1,2}$. Esta técnica puede generalizarse para dimensiones superiores.

Ejemplo 7.1.3 (Correlar movimientos brownianos.)

Se pueden correlar dos movimientos brownianos independientes mediante la multiplicación matriz-vector, $\mathbf{L} \cdot \widetilde{\mathbf{W}}(t)$, con \mathbf{L} una matriz triangular inferior, como en (7.2), esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{1,2} & \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t) \\ \widetilde{W}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t) \\ \rho_{1,2}\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\widetilde{W}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Definimos ahora $W_1(t) := \widetilde{W}_1(t)$, $W_2(t) := \rho_{1,2}\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\widetilde{W}_2(t)$, y determinamos la covarianza entre los movimientos brownianos correlados $W_1(t)$ y $W_2(t)$ como

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\text{ov}[W_1(t)W_2(t)] &= \mathbb{E}[W_1(t)W_2(t)] - \mathbb{E}[W_1(t)]\mathbb{E}[W_2(t)] \\ &= \mathbb{E}\left[\widetilde{W}_1(t)\left(\rho_{1,2}\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\widetilde{W}_2(t)\right)\right] - 0 \\ &= \rho_{1,2}\mathbb{E}\left[(\widetilde{W}_1(t))^2\right] + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\mathbb{E}[\widetilde{W}_1(t)]\mathbb{E}[\widetilde{W}_2(t)] \\ &= \rho_{1,2}\mathbb{E}[(\widetilde{W}_1(t))^2] = \rho_{1,2}\mathbb{V}\text{ar}[\widetilde{W}_1(t)] = \rho_{1,2}t,\end{aligned}$$

utilizando que $\mathbb{E}[W_i(t)] = \mathbb{E}[\widetilde{W}_i(t)] = 0$. La correlación entre $W_1(t)$ y $W_2(t)$ es, por tanto, igual a $\rho_{1,2}$, como deseábamos.

Del mismo modo, cuando consideramos los incrementos de un movimiento browniano, se puede determinar la siguiente esperanza $\mathbb{E}[\Delta W_1(t)\Delta W_2(t)]$, empleando la misma heurística que para $(dW(t))^2$ en la Observación 2.1.2, como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta W_1(t)\Delta W_2(t)] &= \mathbb{E}\left[\Delta\widetilde{W}_1(t)\left(\rho_{1,2}\Delta\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\Delta\widetilde{W}_2(t)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\rho_{1,2}\Delta\widetilde{W}_1(t)\Delta\widetilde{W}_1(t)\right] + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\mathbb{E}\left[\Delta\widetilde{W}_1(t)\Delta\widetilde{W}_2(t)\right] \\ &= \rho_{1,2}dt,\end{aligned}$$

debido a la independencia de $\widetilde{W}_1(t)$ y $\widetilde{W}_2(t)$. Aplicando la definición de la varianza de la suma de dos variables aleatorias, tenemos que $\mathbb{V}\text{ar}[aX + bY] = a^2\mathbb{V}\text{ar}[X] + b^2\mathbb{V}\text{ar}[Y] + 2ab\mathbb{C}\text{ov}[X, Y]$, lo que resulta en

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[(\Delta W_1(t))(\Delta W_2(t))] &= \mathbb{V}\text{ar}[\sqrt{\Delta t}Z_1\sqrt{\Delta t}Z_2] \\ &= (\Delta t)^2\mathbb{V}\text{ar}\left[\tilde{Z}_1 \cdot \left(\rho_{1,2}\tilde{Z}_1 + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\tilde{Z}_2\right)\right] \\ &= (\Delta t)^2\left(\rho_{1,2}^2\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{Z}_1^2] + (1 - \rho_{1,2}^2)\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{Z}_1\tilde{Z}_2]\right. \\ &\quad \left.+ \rho_{1,2}\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}\mathbb{C}\text{ov}\left[\tilde{Z}_1^2, \tilde{Z}_1\tilde{Z}_2\right]\right),\end{aligned}$$

donde $\tilde{Z}_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Como \tilde{Z}_1 y \tilde{Z}_2 son variables independientes normal estándar, el último término es igual a cero. Por tanto, empleando la definición de varianza, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[(\Delta W_1(t))(\Delta W_2(t))] &= (\Delta t)^2\left(\rho_{1,2}^2\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{Z}_1^2] + (1 - \rho_{1,2}^2)\mathbb{V}\text{ar}[\tilde{Z}_1\tilde{Z}_2]\right) \\ &= (\Delta t)^2\left(\rho_{1,2}^2\left(\mathbb{E}[\tilde{Z}_1^4] - (\mathbb{E}[\tilde{Z}_1^2])^2\right) + (1 - \rho_{1,2}^2)\right).\end{aligned}$$

Sabiendo que el 4º momento de la distribución normal estándar es igual a 3, es decir, $\mathbb{E}[\tilde{Z}_1^4] = 3$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[(\Delta W_1(t))(\Delta W_2(t))] &= (\Delta t)^2 (2\rho_{1,2}^2 + (1 - \rho_{1,2}^2)) \\ &= (\Delta t)^2(\rho_{1,2}^2 + 1),\end{aligned}$$

que converge a cero mucho más rápido que la esperanza. ♦

7.1.2. Proceso de precios multidimensional

Consideremos el siguiente sistema de EDEs correladas genérico, dado por

$$d\mathbf{X}(t) = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\Sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t), \quad 0 \leq t_0 < t, \quad (7.4)$$

donde $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\Sigma}(t, \mathbf{X}(t)) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{W}(t)$ es un vector columna de movimientos brownianos correlados en \mathbb{R}^n .

Este sistema de EDEs se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{1,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Sigma}_{n,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ d\mathbf{X} = \bar{\mu}dt + \bar{\Sigma}d\mathbf{W}. \quad (7.5)$$

En la representación anterior, el número de movimientos brownianos es igual al número de EDEs. Esto puede generalizarse, es decir, el número de movimientos brownianos subyacentes puede ser mayor que el número de procesos subyacentes.

El sistema en (7.5) se escribe de forma genérica, ya que cada proceso $X_i(t)$ puede depender de las volatilidades de los otros procesos $X_j(t)$. Sin embargo, en la práctica, esto casi no ocurre y la matriz $\bar{\Sigma}$ suele ser una matriz diagonal. Ahora relacionamos el sistema de EDEs (7.4) con un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ basado en movimientos brownianos independientes, esto es

$$d\mathbf{X}(t) = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\widetilde{\mathbf{W}}(t), \quad 0 \leq t_0 < t, \quad (7.6)$$

donde $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$ es un vector columna de movimientos brownianos independientes en \mathbb{R}^n .

Denotando $\bar{\mu} = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))$ y $\widetilde{\mathbf{W}} = \widetilde{\mathbf{W}}(t)$, la expresión en (7.6) se puede representar en forma matricial, esto es

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{1,1} & \dots & \bar{\sigma}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\sigma}_{n,1} & \dots & \bar{\sigma}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_1 \\ \vdots \\ d\widetilde{W}_n \end{bmatrix} \\ = \bar{\mu}dt + \bar{\sigma}d\widetilde{\mathbf{W}}. \quad (7.7)$$

Primero reescribimos el sistema (7.5) como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{1,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Sigma}_{n,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{bmatrix} dt \\
&\quad + \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{1,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Sigma}_{n,1} & \dots & \bar{\Sigma}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ \rho_{1,2} & \sqrt{1-\rho_{1,2}^2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,n} & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_1 \\ \vdots \\ d\widetilde{W}_n \end{bmatrix} \\
&= \bar{\mu} dt + \bar{\Sigma} L d\widetilde{\mathbf{W}} =: \bar{\mu} dt + \bar{\sigma} d\widetilde{\mathbf{W}}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Si la matriz $\bar{\Sigma}$ es una matriz diagonal, obtenemos una expresión similar. Por tanto, la matriz $\bar{\sigma} := \bar{\Sigma} L$ proporciona la conexión entre las dos formulaciones de EDEs multidimensionales.

7.1.3. Lema de Itô para procesos vectoriales

Sea el proceso $\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T$ dado por (7.6) y una función real $g \equiv g(t, \mathbf{X}(t))$ suficientemente derivable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. El incremento $dg(t, \mathbf{X}(t))$ verifica la EDE

$$dg(t, \mathbf{X}(t)) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_j} dX_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} dX_i(t) dX_j(t). \tag{7.9}$$

Utilizando la notación matricial de (7.7), podemos separar los términos de deriva y de volatilidad de $dg(t, \mathbf{X}(t))$, como

$$\begin{aligned}
dg(t, \mathbf{X}(t)) &= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \bar{\mu}_i(t, \mathbf{X}(t)) \frac{\partial g}{\partial X_i} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \bar{\sigma}_{i,k}(t, \mathbf{X}(t)) \bar{\sigma}_{j,k}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right) dt \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \bar{\sigma}_{i,j}(t, \mathbf{X}(t)) \frac{\partial g}{\partial X_i} d\widetilde{W}_j(t).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Este es el lema de Itô para procesos vectoriales con incrementos independientes. Se obtiene mediante la aplicación de una expansión de Taylor y la tabla de Itô.

Ejemplo 7.1.4 (Movimiento browniano geométrico 2D correlado)

A partir un movimiento browniano bidimensional $\mathbf{W}(t) = [W_1(t), W_2(t)]^T$, con parámetro de correlación ρ , construimos una cartera que consiste en dos activos correlados, $S_1(t)$ y $S_2(t)$, con la dinámica

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t), \\ dS_2(t) &= \mu_2 S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2(t), \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ son constantes. Mediante la factorización de Cholesky, este sistema se puede expresar, en términos de movimientos brownianos independientes, como

$$\begin{bmatrix} dS_1(t) \\ dS_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 S_1(t) \\ \mu_2 S_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1(t) & 0 \\ \rho \sigma_2 S_2(t) & \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 S_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_1(t) \\ d\widetilde{W}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Aplicando el lema de Itô multidimensional (7.10) a una función suficientemente suave, $g = g(t, S_1, S_2)$, con $S_i = S_i(t)$, $i = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} dg(t, S_1, S_2) &= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu_1 S_1 \frac{\partial g}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial g}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt + \sigma_1 S_1 \frac{\partial g}{\partial S_1} dW_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial g}{\partial S_2} dW_2, \end{aligned}$$

que se ha reescrito en forma de movimientos brownianos correlados con $W_1(t)$ y $W_2(t)$. Este resultado es válido para cualquier función $g(t, S_1, S_2)$, bajo ciertas condiciones de derivabilidad. Si tomamos, por ejemplo, $g(t, S_1, S_2) = \log S_1$, obtenemos la dinámica en una dimensión ya conocida, correspondiente al activo transformado logarítmicamente, dado por

$$d \log S_1(t) = \left(\mu_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) dt + \sigma_1 dW_1(t). \quad \blacklozenge$$

7.1.4. Teorema de Feynman-Kac multidimensional

El teorema de Feynman-Kac también se puede generalizar para el caso multidimensional. Se puede demostrar que, para una EDP bidimensional genérica, con condición final $V(T, \mathbf{S})$, tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}_1(t, \mathbf{S}) \frac{\partial V}{\partial S_1} + \bar{\mu}_2(t, \mathbf{S}) \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(t, \mathbf{S}) \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_2^2(t, \mathbf{S}) \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \\ \quad + \rho \bar{\sigma}_1(t, \mathbf{S}) \bar{\sigma}_2(t, \mathbf{S}) \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} - rV = 0, \\ V(T, \mathbf{S}) = H(\mathbf{S}), \end{cases}$$

cuya solución se puede escribir como

$$V(t, \mathbf{S}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[H(\mathbf{S}(T)) | \mathcal{F}(t)],$$

con la dinámica de $S_1(t)$ y $S_2(t)$, para $t > t_0$, dada por

$$dS_1(t) = \bar{\mu}_1(t, \mathbf{S})dt + \bar{\sigma}_1(t, \mathbf{S})dW_1^{\mathbb{Q}}(t),$$

$$dS_2(t) = \bar{\mu}_2(t, \mathbf{S})dt + \bar{\sigma}_2(t, \mathbf{S})dW_2^{\mathbb{Q}}(t),$$

con procesos de Wiener correlados, $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$.

Para probar el teorema de Feynman-Kac para el caso bidimensional, consideramos

$$\frac{V(t, \mathbf{S})}{M(t)} = e^{-r(t-t_0)}V(t, \mathbf{S}).$$

Su correspondiente dinámica, empleando $\bar{\mu}_i \equiv \bar{\mu}_i(t, \mathbf{S})$, $\bar{\sigma}_i \equiv \bar{\sigma}_i(t, \mathbf{S})$, es

$$d(e^{-r(t-t_0)}V(t, \mathbf{S})) = V(t, \mathbf{S})d(e^{-r(t-t_0)}) + e^{-r(t-t_0)}dV(t, \mathbf{S}). \quad (7.13)$$

Utilizando la versión 2D del lema de Itô, obtenemos

$$\begin{aligned} dV(t, \mathbf{S}) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt \\ &\quad + \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Multiplicando por $e^{r(t-t_0)}$ e insertando (7.14) en (7.13), tenemos

$$\begin{aligned} e^{r(t-t_0)}d(e^{-r(t-t_0)}V(t, \mathbf{S})) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\mu}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \rho \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} - rV \right) dt \\ &\quad + \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned}$$

donde, debido a que V/M es una \mathbb{Q} -martingala, el término de deriva debería ser cero y, como consecuencia, todos los términos con dt se cancelan. Integrando en ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d(e^{-r(t-t_0)}V(t, \mathbf{S})) &= \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned}$$

o,

$$\begin{aligned} e^{-r(t-t_0)}V(t, \mathbf{S}) - V(t_0, \mathbf{S}) &= \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) \\ &\quad + \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

Tomando esperanzas con respecto a la medida \mathbb{Q} , resulta que

$$\begin{aligned} V(t_0, \mathbf{S}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(t-t_0)} V(t, \mathbf{S}) | \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} dW_1^{\mathbb{Q}}(t) | \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \bar{\sigma}_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t) | \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, por las propiedades de la integral de Itô, tenemos que $I(t_0) = 0$ e $I(t) = \int_{t_0}^t g(z) dW^{\mathbb{Q}}(z)$ es una martingala, tal que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [I(t) | \mathcal{F}(t_0)] = 0,$$

para todo $t > t_0$. Entonces, las integrales basadas en los movimientos brownianos de (7.15) son igual a cero y, por tanto,

$$V(t_0, \mathbf{S}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(t-t_0)} V(t, \mathbf{S}) | \mathcal{F}(t_0)].$$

Así concluye la demostración.

De manera análoga, se puede generalizar el teorema de Feynman-Kac para problemas en dimensiones superiores.

7.2. Cambio de medida y teorema de Girsanov

Cuando se estudian sistemas de EDEs complejos, a veces, se puede simplificar el problema de valoración haciendo uso de la técnica de «transformación de la medida». Tomando un numerario apropiado, los procesos se pueden convertir en martingalas. Trabajar con martingalas es muy ventajoso, ya que estos procesos no contienen términos de deriva¹. Aunque un proceso sin términos de deriva puede tener una estructura de volatilidad complicada, se considera más sencillo de manejar.

7.2.1. La derivada de Radon-Nikodym

Antes de nada, recordamos algunos conceptos teóricos. Dadas dos medidas de probabilidad absolutamente continuas, $\mathbb{M} \sim \mathbb{N}$, sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}) y una sigma-álgebra, $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$, el teorema de Bayes (véase Bayes (1763)) para una variable aleatoria \mathcal{F} -medible X establece que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{M}} [X | \mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{N}} X \middle| \mathcal{G} \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{N}} \middle| \mathcal{G} \right]}. \quad (7.15)$$

¹Véase el Teorema 1.3.5, el teorema de representación de la martingala.

Por tanto, una vez que conocemos la transformación de la medida $d\mathbb{M}/d\mathbb{N}$, podemos tomar esperanzas bajo una medida diferente, \mathbb{N} .

Teorema 7.2.1 (Cambio de numerario)

Asumimos que existe un numerario $M(t)$, así como una medida de probabilidad \mathbb{M} , que es equivalente a una medida \mathbb{Q}^0 , donde el precio de cualquier activo cotizado X , relativo a M , es una martingala bajo la medida \mathbb{M} , es decir,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{X(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{X(t)}{M(t)}. \quad (7.16)$$

Sea N un numerario arbitrario. Existe una medida de probabilidad \mathbb{N} , y es equivalente a \mathbb{Q}^0 , tal que el precio de cualquier derivado alcanzable², esto es, $V(t) \equiv V(t, S)$, normalizado por la cantidad N , es una martingala bajo la medida \mathbb{N} , es decir,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{V(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{V(t)}{N(t)}. \quad (7.17)$$

La derivada de Radon-Nikodym, que define la medida \mathbb{N} , viene dada por

$$\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(T) := \frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} \Big|_{\mathcal{F}(T)} = \frac{N(T)M(t)}{N(t)M(T)}. \quad (7.18)$$

Demostración. Para dos numerarios, $M(T)$ y $N(T)$, se verifican las igualdades

$$\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{X(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{X(t)}{M(t)}, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{X(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{X(t)}{N(t)}. \quad (7.19)$$

Escribimos la primera esperanza en forma integral, esto es

$$\frac{X(t)}{M(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{X(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] := \int_A \frac{X(T)}{M(T)} d\mathbb{M}, \quad (7.20)$$

para cualquier A $\mathcal{F}(t)$ -medible. Por (7.18), sabemos que

$$d\mathbb{M} = \frac{N(t)}{N(T)} \frac{M(T)}{M(t)} d\mathbb{N},$$

de modo que la Ecuación (7.20) se convierte en

$$\frac{X(t)}{M(t)} = \int_A \frac{X(T)}{M(T)} d\mathbb{M} = \int_A \frac{X(T)}{M(T)} \left(\frac{N(t)}{N(T)} \frac{M(T)}{M(t)} \right) d\mathbb{N}, \quad (7.21)$$

²Un derivado financiero se dice «alcanzable» cuando existe una estrategia financiera que replica el derivado (se puede pensar en la opción, cuyo valor, en el marco de Black-Scholes, se replica mediante una estrategia de acciones y efectivo).

a partir de la cual, después de simplificar y utilizar el hecho de que los procesos son «conocidos» en tiempo t (principio de mensurabilidad), obtenemos

$$\frac{X(t)}{M(t)} = \frac{N(t)}{M(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{X(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (7.22)$$

Así, para un numerario arbitrario, existe una medida de probabilidad \mathbb{N} , equivalente a la medida inicial \mathbb{Q}^0 , tal que el precio de un derivado alcanzable, $V(t)$, normalizado por N , es una martingala bajo la medida \mathbb{N} , y

$$\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{V(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{V(T)}{N(T)} \frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} \middle| \mathcal{F}(t) \right]} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{V(T)}{N(T)} \frac{N(T)M(t)}{M(T)N(t)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{N(T)M(t)}{M(T)N(t)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}.$$

Después de simplificar, la esperanza anterior es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \left[\frac{V(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{V(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{N(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}.$$

Ahora, empleando las igualdades de (7.19), tenemos que

$$\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{V(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{M}} \left[\frac{N(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]} = \frac{V(t)}{M(t)} \frac{M(t)}{N(t)} = \frac{V(t)}{N(t)}.$$

Las dos últimas igualdades provienen de la suposición de que existe un numerario M tal que el precio de cualquier activo cotizado relativo a ese numerario es una martingala bajo la medida \mathbb{M} . ■

El Teorema 7.2.1 es válido para cualquier $t_0 \leq t \leq T$, dependiendo de la filtración. Como generalización, presentamos el siguiente teorema para los instantes de tiempo t_0 y t .

Teorema 7.2.2 (El Teorema Girsanov)

Sea la EDE para $S(t)$ dada por

$$dS(t) = \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(t, S(t))dt + \bar{\sigma}(t, S(t))dW^{\mathbb{M}}(t), \quad S(t_0) = S_0,$$

donde el movimiento browniano $W^{\mathbb{M}}(t)$ se define bajo la medida \mathbb{M} , y $\bar{\mu}^{\mathbb{M}}(t, S(t))$ y $\bar{\sigma}(t, S(t))$ satisfacen las condiciones de Lipschitz habituales. $W^{\mathbb{N}}(t)$, definido como

$$dW^{\mathbb{N}}(t) = - \left(\frac{\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(t, S(t)) - \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(t, S(t))}{\bar{\sigma}(t, S(t))} \right) dt + dW^{\mathbb{M}}(t),$$

es un movimiento browniano bajo una medida \mathbb{N} , y la EDE para $S(t)$ bajo la medida \mathbb{N} viene dada por

$$dS(t) = \bar{\mu}^{\mathbb{N}}(t, S(t))dt + \bar{\sigma}(t, S(t))dW^{\mathbb{N}}(t), \quad S(t_0) = S_0.$$

Esto es válido para una derivada $\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(t, S(t))$ para la cual el cociente

$$\frac{\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(t, S(t)) - \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(t, S(t))}{\bar{\sigma}(t, S(t))},$$

está acotado.

Podemos definir la medida \mathbb{N} mediante la martingala dada por

$$\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) := \frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(s, S(s)) - \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(s, S(s))}{\bar{\sigma}(s, S(s))} \right)^2 ds \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \frac{\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(s, S(s)) - \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(s, S(s))}{\bar{\sigma}(s, S(s))} dW^{\mathbb{M}}(s) \right],$$

o, de forma equivalente, dada por

$$d\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) = \lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) \bar{\sigma}_{\lambda}(t) dW^{\mathbb{M}}(t), \quad \lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t_0) = 1,$$

donde

$$\bar{\sigma}_{\lambda}(t) = \frac{\bar{\mu}^{\mathbb{N}}(t, S(t)) - \bar{\mu}^{\mathbb{M}}(t, S(t))}{\bar{\sigma}(t, S(t))}. \quad (7.23)$$

Entonces, la medida \mathbb{N} es equivalente a la medida \mathbb{M} . La demostración se puede encontrar en Girsanov (1960).

El numerario tiene que ser un activo negociable. Procesos como la volatilidad o el tipo a corto no son observables y, por tanto, no pueden ser utilizados como numerario.

7.2.2. Ejemplos de cambio de numerario

Sean dos medidas equivalentes, \mathbb{M} y \mathbb{N} , donde la primera medida, \mathbb{M} , está asociada al numerario $M(t)$, dado por

$$dM(t) = \bar{\mu}_M(t, M(t))dt + \bar{\Sigma}_M(t, M(t))dW_M^{\mathbb{M}}(t), \quad M(t_0) = M_0,$$

y la segunda medida, \mathbb{N} , está generada por el numerario $N(t)$, cuya dinámica es

$$dN(t) = \bar{\mu}_N(t, N(t))dt + \bar{\Sigma}_N(t, N(t))dW_N^{\mathbb{M}}(t), \quad N(t_0) = N_0,$$

con correlación entre los movimientos brownianos, $dW_M^{\mathbb{M}}(t)dW_N^{\mathbb{M}}(t) = \rho dt$. El superíndice « \mathbb{M} » en los movimientos brownianos, $dW_M^{\mathbb{M}}(t)$ y $dW_N^{\mathbb{M}}(t)$, indica que ambos procesos están definidos bajo la medida \mathbb{M} . Consideraremos un activo $S(t)$, que evoluciona de acuerdo con la EDE

$$dS(t) = \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}(t, S(t))dt + \bar{\Sigma}_S(t, S(t))dW_S^{\mathbb{M}}(t). \quad (7.24)$$

Procedemos a obtener la dinámica para el proceso $S(t)$ bajo la medida \mathbb{N} . Como $S(t)$ puede estar correlado con ambos numerarios, formulamos todos los procesos subyacentes en notación matricial, como

$$d \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \\ S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_M \\ \bar{\mu}_N \\ \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_M & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}_N & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Sigma}_S \end{bmatrix} \mathbf{L} d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t), \quad (7.25)$$

con \mathbf{L} la matriz triangular inferior de Cholesky calculada a partir de la matriz de correlación (como en el Apartado 7.1.3), $d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t)$ el vector columna de incrementos brownianos independientes, y $\bar{\mu} = [\bar{\mu}_M, \bar{\mu}_N, \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}]^T$ y $\bar{\Sigma} = \text{diag}([\bar{\Sigma}_M, \bar{\Sigma}_N, \bar{\Sigma}_S])$ representando el vector de deriva y la matriz volatilidad, respectivamente. De forma análoga, los procesos $M(t)$, $N(t)$ y $S(t)$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} dM(t) &= \bar{\mu}_M(t, M(t))dt + \bar{\sigma}_M(t, M(t))d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t), \\ dN(t) &= \bar{\mu}_N(t, N(t))dt + \bar{\sigma}_N(t, N(t))d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t), \\ dS(t) &= \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}(t, S(t))dt + \bar{\sigma}_S(t, S(t))d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t), \end{aligned}$$

donde $\bar{\sigma}_N(\cdot)$, $\bar{\sigma}_M(\cdot)$ y $\bar{\sigma}_S(\cdot)$ son los vectores resultantes de multiplicar la matriz de covarianzas con la matriz \mathbf{L} en (7.25), es decir,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M(t, M(t)) &= [\bar{\Sigma}_M(t, M(t))\mathbf{L}_{1,1} \quad 0 \quad 0], \\ \bar{\sigma}_N(t, N(t)) &= [\bar{\Sigma}_N(t, N(t))\mathbf{L}_{2,1} \quad \bar{\Sigma}_N(t, N(t))\mathbf{L}_{2,2} \quad 0], \\ \bar{\sigma}_S(t, S(t)) &= [\bar{\Sigma}_S(t, S(t))\mathbf{L}_{3,1} \quad \bar{\Sigma}_S(t, S(t))\mathbf{L}_{3,2} \quad \bar{\Sigma}_S(t, S(t))\mathbf{L}_{3,3}], \end{aligned}$$

con $\mathbf{L}_{i,j}$ el elemento (i, j) -ésimo de la matriz de Cholesky. El proceso $S(t)$ bajo la medida \mathbb{N} tiene la forma

$$dS(t) = \bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t))dt + \bar{\sigma}_S(t, S(t))d\widetilde{W}^{\mathbb{N}}(t). \quad (7.26)$$

Por el teorema de Girsanov sabemos que una transformación de la medida no afecta a los términos de volatilidad y, por tanto, solo se necesita determinar la deriva transformada $\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(\cdot)$. Para determinar $\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t))$ empleamos, de nuevo, la derivada de Radon-Nikodym, esto es

$$\boxed{\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) = \frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} \Big|_{\mathcal{F}(t)}}. \quad (7.27)$$

Así mismo, por el teorema de Girsanov, Teorema 7.2.2, sabemos que la derivada de Radon-Nikodym $\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t)$ en (7.27) es una martingala bajo la medida \mathbb{M} , generada por el numerario $M(t)$, y su dinámica viene dada por

$$d\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) = \bar{\sigma}_{\lambda}(t)\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t)d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t), \quad (7.28)$$

donde

$$\bar{\sigma}_{\lambda}(t) = \frac{\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t)) - \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}(t, S(t))}{\bar{\sigma}_S(t, S(t))}. \quad (7.29)$$

Además, la derivada de Radon-Nikodym en (7.27) se puede expresar, por el Teorema 7.2.2, en función de los numerarios como

$$\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) = \frac{N(t)}{N(t_0)} \frac{M(t_0)}{M(t)}.$$

Aplicando el lema de Itô y el hecho de que $\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t)$ es una martingala bajo \mathbb{M} (dinámica sin drift), obtenemos la siguiente forma de $d\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t)$ bajo la medida \mathbb{M} , dada por

$$\begin{aligned} d\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) &= \frac{M(t_0)}{N(t_0)} \left(\frac{1}{M(t)} \bar{\sigma}_N(t, N(t)) d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t) - \frac{N(t)}{M^2(t)} \bar{\sigma}_M(t, M(t)) d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t) \right) \\ &= \lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t) \left(\frac{\bar{\sigma}_N(t, N(t))}{N(t)} - \frac{\bar{\sigma}_M(t, M(t))}{M(t)} \right) d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{M}}(t). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Igualando los términos de volatilidad en los procesos para $\lambda_{\mathbb{M}}^{\mathbb{N}}(t)$ de (7.28), (7.29) y (7.30), obtenemos

$$\frac{\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t)) - \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}(t, S(t))}{\bar{\sigma}_S(t, S(t))} = \frac{\bar{\sigma}_N(t, N(t))}{N(t)} - \frac{\bar{\sigma}_M(t, M(t))}{M(t)}. \quad (7.31)$$

Por tanto, el término de deriva $\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t))$ para el proceso $S(t)$ bajo la medida \mathbb{N} debe ser igual a

$$\bar{\mu}_S^{\mathbb{N}}(t, S(t)) = \bar{\mu}_S^{\mathbb{M}}(t, S(t)) + \bar{\sigma}_S(t, S(t)) \left(\frac{\bar{\sigma}_N(t, N(t))}{N(t)} - \frac{\bar{\sigma}_M(t, M(t))}{M(t)} \right). \quad (7.32)$$

Con este resultado podemos determinar la transformación de la deriva para un cambio de numerarios.

7.2.3. De \mathbb{P} a \mathbb{Q} en el modelo de Black-Scholes

Recordamos que, en el modelo de Black-Scholes, el activo evoluciona bajo la medida del mundo real \mathbb{P} de la forma $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$, con μ y σ parámetros constantes. En el Apartado 2.3 mostramos que, bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , la acción dividida por el numerario (que era la cuenta de ahorros, es decir, $dM(t) = rM(t)dt$) es una martingala. Ahora, relacionamos ese resultado con el concepto de transformación de la medida. Aplicando el lema de Itô a $S(t)/M(t)$, con el activo $S(t)$ definido por (2.1), tenemos que

$$d\frac{S(t)}{M(t)} = \frac{1}{M(t)}dS(t) - \frac{S(t)}{M^2(t)}dM(t) + \frac{1}{M^3(t)}(dM(t))^2 - \frac{1}{M^2(t)}dS(t)dM(t).$$

Por la tabla de Itô, véase la Tabla 2.1 del segundo capítulo, los términos tercero y cuarto son nulos, de modo que

$$d\frac{S(t)}{M(t)} = \frac{1}{M(t)}dS(t) - \frac{S(t)}{M^2(t)}dM(t).$$

Sustituyendo las dinámicas de $S(t)$ y $M(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} d\frac{S(t)}{M(t)} &= \frac{1}{M(t)} (\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)) - rM(t)\frac{S(t)}{M^2(t)}dt \\ &= \mu \frac{S(t)}{M(t)}dt + \sigma \frac{S(t)}{M(t)}dW^{\mathbb{P}}(t) - r \frac{S(t)}{M(t)}dt. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Basándonos en los argumentos del Apartado 2.3, sabemos que $S(t)/M(t)$ es una martingala y, por el Teorema 1.3.4, sabemos que las integrales de Itô son martingalas cuando no contienen ningún término de deriva. Además, por el Teorema 7.2.2, también sabemos que la volatilidad no se ve afectada por un cambio de medida. Por tanto, bajo la medida en riesgo neutro, el cociente $S(t)/M(t)$ debe tener la forma

$$d\frac{S(t)}{M(t)} = \sigma \frac{S(t)}{M(t)}dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (7.34)$$

Igualando (7.33) y (7.34), obtenemos

$$\mu \frac{S(t)}{M(t)}dt + \sigma \frac{S(t)}{M(t)}dW^{\mathbb{P}}(t) - r \frac{S(t)}{M(t)}dt = \sigma \frac{S(t)}{M(t)}dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

lo que equivale (ya que $S(t)$ y $M(t)$ son positivos) a

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (7.35)$$

La expresión en (7.35) determina una transformación de la medida, de la medida del mundo real \mathbb{P} a la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , bajo el modelo de Black-Scholes. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t) \\ &= \mu S(t)dt + \sigma S(t) \left(dW^{\mathbb{Q}}(t) - \frac{\mu - r}{\sigma}dt \right) \\ &= rS(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned} \quad (7.36)$$

que está en consonancia con la EDE en (2.26).

Valoración bajo la medida del activo

Cuando se trata con derivados financieros, resulta natural asociar el descuento a la cuenta de ahorros. Sin embargo, un cambio de medida puede ser beneficioso en muchas situaciones. Aquí presentaremos algunos ejemplos en los que el cambio de medida simplifica significativamente el problema de valoración.

Consideramos el modelo de Black-Scholes bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , y dos dinámicas de activos gobernadas por el sistema de EDEs

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1^{\mathbb{Q}}(t), \\ dS_2(t) &= rS_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned} \quad (7.37)$$

con r , σ_1 y σ_2 constantes, y correlación $dW_1^{\mathbb{Q}}(t)dW_2^{\mathbb{Q}}(t) = \rho dt$. La cuenta de ahorros viene dada por $dM(t) = rM(t)dt$.

El producto financiero considerado se define como

$$V(t_0, S_1, S_2) = M(t_0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1(T)}{M(T)}\mathbb{1}_{S_2(T)>K}\middle|\mathcal{F}(t_0)\right]. \quad (7.38)$$

El payoff de este producto se asemeja a la denominada opción digital todo o nada «modificada», dependiente de $S_1(T)$ y $S_2(T)$. Este producto paga una cantidad $S_1(T)$, solo si el activo $S_2(T)$ sobrepasa un cierto límite prefijado, K . El titular del producto está expuesto al riesgo asociado a la correlación entre los activos S_1 y S_2 .

Empleando ahora la técnica de cambio de medida presentada anteriormente donde, en vez de utilizar la cuenta de ahorros $M(t)$ como numerario, consideramos la acción $S_1(t)$ como el nuevo numerario. Nótese que, si $S_1(t) = S_2(t)$, véase el Teorema 3.2.2 y el Ejemplo 3.2.1, podemos emplear $K = 0$ en la solución de Black-Scholes para obtener la solución exacta para el precio de la opción todo o nada.

Haciendo uso de la derivada de Radon-Nikodym, obtenemos la siguiente relación

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^{S_1}(T) = \frac{d\mathbb{Q}^{S_1}}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}(T)} = \frac{S_1(T)M(t_0)}{S_1(t_0)M(T)}, \quad (7.39)$$

donde \mathbb{Q}^{S_1} representa la medida por la cual el activo $S_1(t)$ es el numerario, y \mathbb{Q} representa la medida en riesgo neutro habitual. Bajo el nuevo numerario, el valor del derivado se transforma en

$$\begin{aligned} V(t_0, S_1, S_2) &= M(t_0)\mathbb{E}^{S_1}\left[\frac{S_1(T)}{M(T)}\mathbb{1}_{S_2(T)>K}\frac{S_1(t_0)M(T)}{S_1(T)M(t_0)}\middle|\mathcal{F}(t_0)\right] \\ &= S_1(t_0)\mathbb{E}^{S_1}\left[\mathbb{1}_{S_2(T)>K}\middle|\mathcal{F}(t_0)\right] = S_1(t_0)\mathbb{Q}^{S_1}[S_2(T) > K]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Para determinar la probabilidad de que $S_2(T)$ sea mayor que K , vamos a considerar la dinámica de la acción bajo la medida \mathbb{Q}^{S_1} . Bajo esta medida, debemos asegurarnos de que todos los procesos subyacentes son martingalas. En el modelo tenemos tres variables, esto es, la cuenta de ahorros $M(t)$, el activo $S_1(t)$ y el activo $S_2(t)$. Los términos de deriva de los activos $S_1(t)$ y $S_2(t)$ se tienen que ajustar de forma que las cantidades $M(t)/S_1(t)$ y $S_2(t)/S_1(t)$ sean

martingalas. Aplicando el lema de Itô, tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{M(t)}{S_1(t)}\right) &= \frac{1}{S_1(t)}dM(t) - \frac{M(t)}{S_1^2(t)}dS_1(t) + \frac{M(t)}{S_1^3(t)}(dS_1(t))^2 \\ &= \frac{M(t)}{S_1(t)}\left(\sigma_1^2 dt - \sigma_1 dW_1^{\mathbb{Q}}(t)\right). \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos la transformación de la medida

$$dW_1^{\mathbb{Q}}(t) := dW_1^{S_1}(t) + \sigma_1 dt, \quad (7.41)$$

y, por tanto, la dinámica del activo bajo la medida \mathbb{Q}^{S_1} viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= rdt + \sigma_1\left(dW_1^{S_1}(t) + \sigma_1 dt\right) \\ &= (r + \sigma_1^2)dt + \sigma_1 dW_1^{S_1}(t). \end{aligned}$$

Para el segundo activo tenemos que

$$d\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)}\right) / \left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)}\right) = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_2 dW_2^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_1 dW_1^{\mathbb{Q}}(t).$$

Empleando (7.41), obtenemos

$$d\left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)}\right) / \left(\frac{S_2(t)}{S_1(t)}\right) = -\rho\sigma_1\sigma_2 dt + \sigma_2 dW_2^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma_1 dW_1^{S_1}(t). \quad (7.42)$$

El término $\sigma_1 dW_1^{S_1}(t)$ ya se encuentra bajo la medida requerida, por lo que debemos escribir el otro término bajo la medida \mathbb{Q}^{S_1} . La expresión en (7.42) proporciona el cambio de medida para el movimiento browniano del segundo proceso, $W_2^{\mathbb{Q}}(t)$, esto es

$$dW_2^{S_1}(t) := dW_2^{\mathbb{Q}}(t) - \rho\sigma_1 dt.$$

Finalmente, el modelo bajo la medida del activo viene dado por

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= (r + \sigma_1^2)S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1^{S_1}(t), \\ dS_2(t) &= (r + \rho\sigma_1\sigma_2)S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2^{S_1}(t), \\ dM(t) &= rM(t)dt. \end{aligned} \quad (7.43)$$

La dinámica de $M(t)$ no ha cambiado, ya que no involucra ningún proceso estocástico.

Retomando el cálculo de $\mathbb{Q}^{S_1}[S_2(T) > K]$ en (7.40), ahora podemos emplear el hecho de que el proceso $S_2(T)$ bajo la medida \mathbb{Q}^{S_1} tiene la siguiente expresión, véase (7.43), dada por

$$S_2(T) = S_2(t_0) \exp \left[\left(r + \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) (T - t_0) + \sigma_2 \left(W_2^{S_1}(T) - W_2^{S_1}(t_0) \right) \right].$$

En ella, se reconoce la distribución lognormal, por lo que la solución se puede calcular empleando la FDA de la distribución lognormal, como en el caso del modelo de Black-Scholes.

Ejemplo 7.2.1

También se pueden determinar las dinámicas de los procesos $S_1(t)$ y $S_2(t)$ bajo la medida \mathbb{Q}^{S_1} utilizando los resultados del Apartado 7.2.2. Sea $\mathbf{X}(t) := [S_1(t), S_2(t), M(t)]^T$ un vector que contiene los procesos de los activos y el proceso de la cuenta de ahorros. Expresamos el sistema de (7.37) en función de movimientos brownianos independientes, es decir,

$$d\mathbf{X}(t) = \bar{\mu}^{\mathbb{Q}}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}}(t), \quad (7.44)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t)) &\equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 S_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1(t) & 0 & 0 \\ \rho \sigma_2 S_2(t) & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} S_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Entonces, el modelo se puede escribir como

$$d \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ M(t) \end{bmatrix} = \bar{\mu}^{\mathbb{Q}}(t, \mathbf{X}(t))dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1(t) & 0 & 0 \\ \rho \sigma_2 S_2(t) & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} S_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (7.46)$$

Como vamos a cambiar el numerario a $S_1(t)$, cogemos la primera fila de la matriz de volatilidades y aplicamos (7.32) para transformar la deriva. Además, como el proceso de cuenta de ahorros no tiene volatilidad, es decir, $\bar{\sigma}_M = 0$ en (7.32), obtenemos

$$\bar{\mu}^{S_1}(t, \mathbf{X}(t)) = \bar{\mu}^{\mathbb{Q}}(t, \mathbf{X}(t)) + \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t)) \left[\frac{\sigma_1 S_1(t)}{S_1(t)}, \frac{0}{S_1(t)}, \frac{0}{S_1(t)} \right]^T. \quad (7.47)$$

Después de sustituir y simplificar, llegamos al término de deriva

$$\bar{\mu}^{S_1}(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{bmatrix} r S_1(t) \\ r S_2(t) \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1(t) & 0 & 0 \\ \rho \sigma_2 S_2(t) & \sigma_2 S_2(t) \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

que se puede escribir como

$$\bar{\mu}^{S_1}(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{bmatrix} (r + \sigma_1^2) S_1(t) \\ (r + \rho \sigma_1 \sigma_2) S_2(t) \\ r \end{bmatrix}. \quad (7.49)$$

Es fácil comprobar que el término de deriva $\bar{\mu}^{S_1}(t, \mathbf{X}(t))$ anterior es igual al obtenido en (7.43). \blacklozenge

Resumimos brevemente los cambios de medida que se presentan en este libro. Sea $X(t)$ un «activo negociable», las tres medidas y sus correspondientes propiedades de martingala son:

- Medida en riesgo neutro asociada con la cuenta de ahorros, $M(t)$, como numerario, es decir,

$$dX(t) = \bar{\mu}^Q(t)dt + \bar{\sigma}(t)dW^Q(t) \implies \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(t)}{M(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \frac{X(t_0)}{M(t_0)}.$$

- Medida forward asociada con la CCC, $P(t, T)$, como numerario (introducida en el Capítulo 11), es decir,

$$dX(t) = \bar{\mu}^T(t)dt + \bar{\sigma}(t)dW^T(t) \implies \mathbb{E}^T \left[\frac{X(t)}{P(t, T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \frac{X(t_0)}{P(t_0, T)}.$$

- Medida asociada con el activo, $S(t)$, como numerario, es decir,

$$dX(t) = \bar{\mu}^S(t)dt + \bar{\sigma}(t)dW^S(t) \implies \mathbb{E}^S \left[\frac{X(t)}{S(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \frac{X(t_0)}{S(t_0)}.$$

7.3. Procesos afines

En este apartado, describimos una clase genérica de EDEs (multidimensional) para la cual la función característica, $\phi_X(u; t, T)$, se puede determinar, a menudo en forma cerrada. La clase de procesos estocásticos de difusión afín (DA) forma parte de la clase de los procesos de difusión afín con saltos (DAS), que describiremos en el Apartado 7.3.2.

7.3.1. Procesos de difusión afín

Comenzamos con la descripción de la clase DA. Para la dinámica de un activo, consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}(t), \mathbb{Q})$ y un proceso afín de Markov n -dimensional $\mathbf{X}(t)$, en algún espacio $D \subset \mathbb{R}^n$.

Los modelos estocásticos de esta clase se pueden expresar mediante la siguiente EDE, véase también (7.6), dada por

$$d\mathbf{X}(t) = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\widetilde{\mathbf{W}}(t), \quad 0 \leq t_0 < t,$$

donde $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t)) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$ es un vector columna de movimientos brownianos independientes en \mathbb{R}^n . Asumimos que las funciones $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))$ y $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))$ satisfacen ciertas condiciones, como que sus derivadas de cualquier orden deben existir y estar acotadas (véase Milstein *et al.* (2004)).

Para que un proceso pertenezca a la clase AD, la deriva $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))$, el componente de tipo de interés $\bar{r}(t, \mathbf{X}(t))$ y la matriz de covarianzas $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T$ deben ser de «forma afín», es decir,

$$\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) = a_0 + a_1 \mathbf{X}(t), \text{ para cualquier } (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (7.50)$$

y

$$\bar{r}(t, \mathbf{X}(t)) = r_0 + r_1^T \mathbf{X}(t), \text{ para } (r_0, r_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (7.51)$$

y

$$(\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T)_{i,j} = (c_0)_{ij} + (c_1)_{ij}^T \mathbf{X}_j(t), \quad (7.52)$$

con $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n \times n}$, y donde (7.52) significa que cada elemento de la matriz $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T$ debe ser afín, así como cada elemento de los vectores de deriva y tipo de interés.

Para procesos estocásticos es relativamente fácil satisfacer las dos primeras condiciones (7.50) y (7.51). Sin embargo, verificar la tercera condición (7.52) no siempre es trivial, ya que requiere el análisis de la estructura de covarianzas subyacente. La estructura de covarianzas está directamente relacionada con las correlaciones entre los movimientos brownianos, lo que hace difícil satisfacer la condición (7.52) para algunos sistemas de EDEs.

La condición sobre el proceso de tipo de interés, $\bar{r}(t, \mathbf{X}(t))$ en (7.51) está relacionada con el proceso utilizado para «descontar» el valor del activo mediante, por ejemplo, un proceso estocástico de tipo de interés. En el modelo de Black-Scholes, tenemos simplemente $\bar{r}(t, \mathbf{X}(t)) \equiv r$, así que en (7.51) $r_0 = r$.

Cuando la dinámica del vector $\mathbf{X}(t)$ es afín, se puede demostrar que la función característica (FC) descontada es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t, T) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + i\mathbf{u}^T \mathbf{X}(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = e^{\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)\mathbf{X}(t)}, \quad (7.53)$$

donde la esperanza se toma bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , siendo el tiempo ^a, $\tau = T - t$, y $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$ y $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, 0) = i\mathbf{u}^T$.

^aLa T (entre paréntesis) indica el tiempo de vencimiento, mientras que el superíndice T en \mathbf{u}^T denota al vector traspuesto.

Los coeficientes $\bar{A} := \bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{\mathbf{B}}^T := \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)$ en (7.53) verifican las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de Riccati ³, dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= -r_0 + \bar{\mathbf{B}}^T a_0 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T c_0 \bar{\mathbf{B}}, \\ \frac{d\bar{\mathbf{B}}}{d\tau} &= -r_1 + a_1^T \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T c_1 \bar{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

³Aunque las funciones tienen dos argumentos, la derivada se toma solo sobre τ , por lo que tenemos un conjunto de EDOs, no de EDPs.

Estas EDOs se obtienen insertando la solución para la función característica (7.53), en la EDP de valoración, que resulta del proceso de precios de activos (7.6) con (7.50), (7.51), (7.52), véase también Duffie *et al.* (2000). La dimensión de las EDOs para $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \tau)$ está directamente relacionada con la dimensión del vector $\mathbf{X}(t)$.

Observación 7.3.1

Los modelos estocásticos multifactor (vectoriales), con dimensión $n > 1$, suelen proporcionar un mejor ajuste a los datos observados en mercado que los modelos de un factor. Sin embargo, a medida que crece la dimensión del sistema de EDEs, crece también la complejidad de las EDOs a resolver para determinar la función característica. Si no se puede obtener una solución analítica de las EDOs, se pueden emplear cualquiera de las técnicas numéricas para EDOs, como los métodos de Runge-Kutta. Por supuesto, esto tendrá algún coste computacional extra, que puede ralentizar los cálculos globales.

Para una descripción general de conceptos relacionados con la función característica véase Ushakov (1999). ▲

Así, examinando el sistema de EDEs y comprobando las condiciones de afinidad, podemos saber si la función característica para el sistema de EDEs se puede determinar o no, lo que resulta muy ventajoso. La afirmación puede parecer algo atrevida, pero en realidad es resultado directo de la teoría de EDPs, particularmente de la solución de EDPs de reacción convección-difusión con coeficientes constantes. Existe una conexión directa con los desarrollos realizados en el Apartado 3.2.2, concretamente en (3.27).

A continuación, mostramos un ejemplo de esta idea para la ecuación de Black-Scholes.

Ejemplo 7.3.1 (Black-Scholes y la teoría de difusiones afines)

La EDE (2.26) basada en el MBG es una ecuación unidimensional, por lo que los vectores y matrices que aparecen en la teoría de afinidad se convierten en escalares. Claramente, al examinar la EDE del MBG vemos que este no pertenece a la clase de difusiones afines. Como el término de difusión es igual a σS , el término $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T$ de la teoría es igual a $\sigma^2 S^2$, que claramente es no lineal en S .

Como en otras ocasiones, necesitamos emplear una transformación logarítmica, $X(t) = \log S(t)$, de la que resultan términos de deriva y difusión constantes. Así, al utilizar el lema de Itô, obtenemos una dinámica (logarítmica) del activo afín. Bajo la dinámica de riesgo neutro, tenemos que $a_0 = r - \frac{1}{2}\sigma^2, a_1 = 0, c_0 = \sigma^2, c_1 = 0, r_0 = r, r_1 = 0$ en las Ecuaciones (7.50), (7.52) y (7.51), respectivamente.

Para obtener la función característica, con $\tau = T - t$, de la forma

$$\phi_X(u; t, T) = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(t)},$$

construimos el sistema de EDOs ⁴ dado por

$$\begin{cases} \frac{d\bar{B}}{d\tau} = -r_1 + a_1\bar{B} + \frac{1}{2}\bar{B}c_1\bar{B}, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} = -r_0 + a_0\bar{B} + \frac{1}{2}\bar{B}c_0\bar{B}, \end{cases}$$

que resulta en

$$\begin{cases} \frac{d\bar{B}}{d\tau} = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} = -r + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\bar{B} + \frac{1}{2}\sigma^2\bar{B}^2. \end{cases}$$

Considerando las condiciones iniciales, para $\tau = 0$, esto es, $\bar{B}(u, 0) = iu$ y $\bar{A}(u, 0) = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} \bar{B}(u, \tau) = iu, \\ \bar{A}(u, \tau) = [-r + iu(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2]\tau. \end{cases}$$

◆

Entonces, la función característica viene dada por

$$\phi_X(u; t, T) = e^{iu \log S(t) + iu(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\tau - r\tau}.$$

Ejemplo 7.3.2 (Black-Scholes, función característica)

Consideramos la teoría clásica de EDPs y el teorema de Feynman-Kac, Teorema (3.2.1), y asumimos que la función característica descontada de la forma

$$\phi_X(u; t, T) = \exp(\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X), \quad (7.55)$$

con la condición inicial

$$\phi_X(u; T, T) = e^{iuX} \quad (7.56)$$

es la solución de la EDP de Black-Scholes (3.21).

Derivando la solución $\phi_X \equiv \phi_X(u; t, T)$ en (7.55), obtenemos

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial \tau} = \phi_X \left(\frac{d\bar{A}}{d\tau} + X \frac{d\bar{B}}{d\tau} \right), \quad \frac{\partial \phi_X}{\partial X} = \phi_X \bar{B}, \quad \frac{\partial^2 \phi_X}{\partial X^2} = \phi_X \bar{B}^2.$$

Sustituyendo estas expresiones en la EDP (transformada logarítmicamente) de Black-Scholes (3.21), tenemos que

$$-\left(\frac{d\bar{A}}{d\tau} + X \frac{d\bar{B}}{d\tau} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \bar{B} + \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{B}^2 - r = 0. \quad (7.57)$$

⁴En adelante, utilizaremos a menudo la notación $\bar{A} \equiv \bar{A}(u, \tau)$, $\bar{B} \equiv \bar{B}(u, \tau)$ y similares.

Además, la función característica (7.55) satisface la EDP de Black-Scholes transformada logarítmicamente si los términos delante de la variable X en (7.57) son iguales a cero, y los demás términos (los términos de orden cero) deberían ser también igual a 0. Para lograr esto, se deben verificar las EDOs, $\forall X$, dadas por

$$\frac{d\bar{B}}{d\tau} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{A}}{d\tau} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \bar{B} + \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{B}^2 - r. \quad (7.58)$$

Incorporando la condición inicial para τ en (7.56) a la solución de (7.58), obtenemos

$$\bar{B}(u, \tau) = iu, \quad \text{y} \quad \bar{A}(u, \tau) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) iu\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \tau - r\tau.$$

Entonces, la función característica descontada bajo el proceso MBG transformado logarítmicamente, viene dada por

$$\phi_X(u, t, T) = \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) iu\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \tau - r\tau + iuX \right),$$

que, por supuesto, es idéntica a la obtenida mediante la aplicación de la teoría de difusiones afines en el Ejemplo 7.3.1.

Este desarrollo es un ejemplo específico de la teoría general de los procesos de difusión afín, y su función característica, vista en este apartado. ♦

Ejemplo 7.3.3 (El MBG 2D como proceso de difusión afín)

El proceso MBG 2D correlado, con $\mathbf{S}(t) = [S_1(t), S_2(t)]$, viene dado por el sistema de EDEs (7.11) del Ejemplo 7.1.4, con $\rho dt = dW_1(t)dW_2(t)$.

Este sistema 2D no es afín y, por tanto, se debe aplicar una transformación logarítmica, $\mathbf{X}(t) = [\log S_1(t), \log S_2(t)] =: [X_1(t), X_2(t)]$, de modo que

$$\begin{cases} dX_1(t) &= (\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2) dt + \sigma_1 d\widetilde{W}_1(t), \\ dX_2(t) &= (\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2) dt + \sigma_2 \left(\rho d\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} d\widetilde{W}_2(t) \right), \end{cases} \quad (7.59)$$

con movimientos brownianos independientes $\widetilde{W}_1(t)$, $\widetilde{W}_2(t)$. En notación matricial, el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_1(t) \\ d\widetilde{W}_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ d\mathbf{X}(t) &= \bar{\boldsymbol{\mu}}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t, \mathbf{X}(t))d\widetilde{\mathbf{W}}(t). \end{aligned} \quad (7.60)$$

Empleando las definiciones para procesos DA en el Apartado 7.3.1, obtenemos que

$$a_0 = \begin{bmatrix} \mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad r_0 = r, \quad \text{y} \quad c_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Además, $a_1 = 0$, $c_1 = 0$ y $r_1 = 0$.

Ahora, para el sistema de EDEs afín, se puede obtener fácilmente la función característica 2D (7.53), con $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$, y $\tau = T - t$, dada por

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t, T) = e^{\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{B}_1(\mathbf{u}, \tau)X_1(t) + \bar{B}_2(\mathbf{u}, \tau)X_2(t)}, \quad (7.61)$$

con

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; T, T) = e^{iu_1 X_1(T) + iu_2 X_2(T)}. \quad (7.62)$$

Entonces, en este caso, tenemos que $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$, $\bar{B}_1(\mathbf{u}, 0) = iu_1$ y $\bar{B}_2(\mathbf{u}, 0) = iu_2$. Como a_1 , c_1 y r_1 son vectores y matrices nulos, el sistema de EDOs resultante viene dado por

$$\frac{d\bar{B}_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\bar{B}_2}{d\tau} = 0, \quad (7.63)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= -r + iu_1 \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) + iu_2 \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2}(iu_1)^2\sigma_1^2 + \frac{1}{2}(iu_2)^2\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2(iu_1)(iu_2), \end{aligned}$$

tal que $\bar{B}_1(\mathbf{u}, \tau) = iu_1$, $\bar{B}_2(\mathbf{u}, \tau) = iu_2$, y la solución para $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ es

$$\begin{aligned} \bar{A}(\mathbf{u}, \tau) &= -r\tau + iu_1 \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) \tau + iu_2 \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right) \tau \\ &- \frac{1}{2}u_1^2\sigma_1^2\tau - \frac{1}{2}u_2^2\sigma_2^2\tau - \rho\sigma_1\sigma_2u_1u_2\tau. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Por tanto, la función característica 2D viene dada por

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t, T) = e^{iu_1 X_1(t) + iu_2 X_2(t) + \bar{A}(\mathbf{u}, \tau)},$$

con la función $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ de (7.64). ♦

7.3.2. Proceso de difusión afín con saltos

En este apartado se describen los procesos de precios pertenecientes a la clase de difusiones afines con saltos (DAS), que es una generalización de la clase DA del Apartado 7.3.1. Esta clase proporciona un marco más general, en el que se puede obtener la función característica para, por ejemplo, modelos de difusión afín con saltos. Básicamente, todas las afirmaciones relativas a la función característica para clase DA se pueden generalizar para la clase DAS.

La clase de procesos estocásticos DAS para dinámicas de activos implica un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}(t), \mathbb{Q})$ y un proceso afín de Markov n -dimensional

$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]^T$ en algún espacio $D \subset \mathbb{R}^n$. Por tanto, el modelo estocástico DAS se puede expresar mediante la forma diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}(t) = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))dt + \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\widetilde{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{J}(t)^T d\mathbf{X}_{\mathcal{P}}(t), \quad (7.65)$$

donde $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$ es un vector columna $\mathcal{F}(t)$ -estándar de movimientos brownianos independientes en \mathbb{R}^n , $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, y $\mathbf{X}_{\mathcal{P}}(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de procesos de Poisson ortogonales, descrito por un vector de intensidades $\xi(t, \mathbf{X}(t)) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{J}(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector que rige las magnitudes de los saltos y se asume que es una matriz de variables aleatorias correladas entre sí, pero independientes de los vectores $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{X}_{\mathcal{P}}(t)$.

Para que un proceso pertenezca a la clase DAS, el término de derivada $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t))$, la matriz de covarianzas $\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T$, y el componente de tipo de interés $\bar{r}(t, \mathbf{X}(t))$ deben ser afines (como en el caso anterior), pero también la intensidad de los saltos debe tener forma afín, es decir,

$$\bar{\xi}(t, \mathbf{X}(t)) = l_0 + l_1 \mathbf{X}(t), \text{ con } (l_0, l_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (7.66)$$

Para esta clase se puede demostrar que, para un vector $\mathbf{X}(t)$, la función característica descontada también es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + i\mathbf{u}^T \mathbf{X}(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = e^{\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)\mathbf{X}(t)},$$

con la esperanza bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} .

Los coeficientes $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)$ deben verificar las siguientes EDOs de Riccati complejas, véase Duffie *et al.* (2000), dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= -r_0 + \bar{\mathbf{B}}^T a_0 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T c_0 \bar{\mathbf{B}} + l_0^T \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{J}(\tau) \bar{\mathbf{B}}} - 1 \right], \\ \frac{d\bar{\mathbf{B}}}{d\tau} &= -r_1 + a_1^T \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T c_1 \bar{\mathbf{B}} + l_1^T \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{J}(\tau) \bar{\mathbf{B}}} - 1 \right], \end{aligned}} \quad (7.67)$$

donde la esperanza, $\mathbb{E}[\cdot]$ en (7.67), se toma con respecto a la magnitud del salto $\mathbf{J}(t)$.

La dimensión de las EDOs (complejas) para $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \tau)$ se corresponde con la dimensión del vector $\mathbf{X}(t)$. La interpretación de estas EDOs para los modelos DAS sigue siendo la misma que para el caso de los modelos de difusión afín, vistos en el Apartado 7.3. La utilidad de la expresión (7.67) se pondrá de manifiesto a continuación, en el Apartado 7.3.3.

7.3.3. Proceso de difusión afín con saltos y EID

Anteriormente habíamos visto que, para un precio de activo gobernado por la EDE

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1]) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) + (e^J - 1) dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t), \quad (7.68)$$

la EID de valoración venía dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1]) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r + \xi_p) V + \xi_p \mathbb{E} [V(t, S e^J)] = 0.$$

De acuerdo con las condiciones de afinidad en (7.65), este modelo (7.68) no pertenece a la clase de difusiones afines con saltos. Por lo tanto, consideramos la transformación logarítmica del propio modelo, $X(t) = \log S(t)$, cuya dinámica es

$$dX(t) = \left(r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW^Q(t) + J dX_P^Q(t).$$

Para $V(\tau, X)$, y $\tau := T - t$, obtenemos la EID de valoración

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= \left(r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \\ &\quad - (r + \xi_p) V + \xi_p \mathbb{E} [V(T - \tau, X + J)]. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Ahora, la función característica descontada es de la forma

$$\phi_X := \phi_X(u; t, T) = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(t)},$$

con la condición inicial $\phi_X(u; T, T) = e^{iuX(0)}$. La sustitución de todas las derivadas resulta en

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial \tau} = \phi_X \left(\frac{d\bar{A}}{d\tau} + \frac{d\bar{B}}{d\tau} \right), \quad \frac{\partial \phi_X}{\partial X} = \phi_X \bar{B}, \quad \frac{\partial^2 \phi_X}{\partial X^2} = \phi_X \bar{B}^2,$$

y, debido a que la esperanza en (7.69) se toma con respecto a la magnitud del salto $F_J(y)$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi_{X+J}] &= \mathbb{E} [\exp (\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)(X + J))] \\ &= \phi_X \cdot \mathbb{E} [\exp (\bar{B}(u, \tau)J)]. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Entonces, en la EID de (7.69), obtenemos

$$\begin{aligned} &- \left(\frac{d\bar{A}}{d\tau} + X \frac{d\bar{B}}{d\tau} \right) + \left(r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \bar{B} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{B}^2 - (r + \xi_p) + \xi_p \mathbb{E} [\exp (\bar{B} \cdot J)] = 0. \end{aligned}$$

y necesitamos resolver el sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{d\bar{B}}{d\tau} = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} = (r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2) \bar{B} + \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{B}^2 - (r + \xi_p) + \xi_p \mathbb{E} [e^{\bar{B} \cdot J}]. \end{cases} \quad (7.71)$$

Con la solución, $\bar{B}(u, \tau) = iu$, tenemos que

$$\bar{A}(u, \tau) = \left(r - \xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) iu\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \tau - (r + \xi_p)\tau + \xi_p \tau \mathbb{E} [e^{iuJ}].$$

El sistema de EDOs (7.71) es un ejemplo de la representación en (7.67), empleando $r_0 = r$, $r_1 = 0$, $a_0 = -\xi_p \mathbb{E} [e^J - 1] - \frac{1}{2}\sigma^2$, $a_1 = 0$, $c_0 = \sigma^2$, $c_1 = 0$, $l_0 = \xi_p$, $l_1 = 0$.

Finalizamos así este capítulo, en el que hemos presentado algunos «instrumentos» matemáticos que nos servirán para trabajar con los diferentes procesos estocásticos multidimensionales que aparecerán en los siguientes capítulos.

7.4. Ejercicios

Ejercicio 7.1 Sean $W_1(t)$, $W_2(t)$ y $W_3(t)$ tres procesos de Wiener, donde $dW_1(t) \cdot dW_2(t) = dW_1(t) \cdot dW_3(t) = dW_2(t) \cdot dW_3(t) = \rho dt$. Encontrar la solución para la EDE

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{3}{2}dt + dW_1(t) + dW_2(t) + dW_3(t), \quad S(0) = S_0.$$

Ejercicio 7.2 Considerar el proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) cuya dinámica viene dada por

$$dS(t) = \lambda(\theta - S(t))dt + \gamma\sqrt{S(t)}dW^{\mathbb{P}}(t), \quad (7.72)$$

con todos los parámetros positivos. Además, se tiene la cuenta de ahorros $dM(t) = rM(t)dt$. Realizar las siguientes tareas:

- Cambiar la medida del proceso (7.72) de \mathbb{P} a \mathbb{Q} .
- Obtener la función característica descontada correspondiente. ¿Depende la función característica descontada de los parámetros λ y θ ?

Ejercicio 7.3 Suponer la EDE dada por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t, \cdot)S(t)dW(t), \quad S(t_0) = S_0, \quad (7.73)$$

con tipo de interés constante r y una función de volatilidad (estocástica) $\sigma(t, \cdot)$.

- Mostrar que el modelo en (7.73) no pertenece a la clase de procesos afines.
- Bajo la transformación logarítmica, $X(t) = \log S(t)$, se asume que el modelo anterior es afín, y su dinámica es

$$dX(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(t, \cdot)\right)dt + \sigma(t, \cdot)dW(t), \quad X(t_0) = \log(S_0).$$

Dado que $X(t)$ se asume afín, se puede obtener su función característica $\phi_{X(t)}(u)$.

Determinar la relación entre las densidades de $S(t)$ y $X(t)$, es decir, mostrar que

$$f_{S(T)}(x) = \frac{1}{x}f_{X(T)}(\log(x)), \quad x > 0.$$

Ejercicio 7.4 El modelo de difusión desplazada se describe mediante la EDE

$$dS(t) = \sigma[\vartheta S(t) + (1 - \vartheta)S(t_0)]dW^{\mathbb{P}}(t), \quad S(t_0) > 0, \quad (7.74)$$

con volatilidad constante σ y un «parámetro de desplazamiento» ϑ . Mostrar que el proceso en (7.74) está bien definido bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , mostrando que $S(t)$ dividido por la cuenta de ahorros $M(t)$ es una martingala.

Ejercicio 7.5 Considerando el modelo de difusión desplazada (7.74) con un tipo de interés r no nulo, se puede llevar a cabo la valoración de opciones europeas con la ayuda de un cambio de medida. En el caso de un tipo de interés determinista, el desarrollo es prácticamente directo. Sin embargo, la metodología propuesta deberá ser también válida para el caso de tipos de interés estocásticos.

Cuando el proceso sigue la dinámica en (14.50), podemos considerar el tipo *forward* $S^F(t, T) = \frac{S(t)}{P(t, T)}$.

Mostrar que, con la curva cupón cero como numerario, el activo forward $S^F(t, T)$ es una martingala bajo la correspondiente medida \mathbb{Q}^T .

Ejercicio 7.6 Mostrar que, para dos variables aleatorias que siguen una distribución normal bivariante $X_1 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, con coeficiente de correlación ρ , se verifica que

$$\mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{X_2 > k}] = \left(\mu_1 + \rho \sigma_1 \frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{k-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{k-\mu_2}{\sigma_2}\right)} \right) (1 - F_{X_2}(k)),$$

con $f_{\mathcal{N}(0,1)}(\cdot)$ y $F_{\mathcal{N}(0,1)}(\cdot)$ la FDP y la FDA de la normal estándar, respectivamente, y $F_{X_2}(\cdot)$ la FDA correspondiente a la variable aleatoria X_2 .

Ejercicio 7.7 Considerar el sistema de EDEs dado por

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sigma(t)S(t)dW_1(t), \\ d\sigma(t) &= \gamma\sigma(t)dW_2(t), \end{aligned}$$

con valores iniciales $S(t_0)$ y $\sigma(t_0)$, parámetro de volatilidad γ y coeficiente de correlación ρ . Demostrar que, bajo la transformación logarítmica del activo, $X(t) = \log S(t)$, se tiene que

$$X(T) = X_0 - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(t)dt + \frac{1}{\gamma\rho} \left[\sigma(T) - \sigma(t_0) - \gamma\sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma(t)d\widetilde{W}_2(t) \right] \quad (7.75)$$

donde $\widetilde{W}_2(t)$ es independiente de los otros movimientos brownianos.

Ejercicio 7.8 Empleando el modelo de Black-Scholes para un activo y la cuenta de ahorros bajo la medida \mathbb{Q} , dados por

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ dM(t) &= rM(t)dt, \end{aligned}$$

con $r = 0.065$, $S_0 = 1$ y $\sigma = 0.4$, determinar analíticamente, mediante un cambio de medida, el precio del derivado financiero definido como

$$V(t_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} \max(S^2(T) - S(T)K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (7.76)$$

Ejercicio 7.9 Para la denominada opción «de cambio», esto es, la opción de cambiar un activo por otro, existe una solución analítica obtenida mediante un cambio de medida. La función de payoff viene dada por

$$V^{ex}(T, S_1(T), S_2(T)) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0),$$

y las dinámicas \mathbb{Q} -medibles de $S_1(t)$, $S_2(t)$ son

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t), \quad S_1(0) = S_{1,0}, \\ dS_2(t) &= rS_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2(t), \quad S_2(0) = S_{2,0}, \end{aligned}$$

con $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$.

Obtener la fórmula de Margrabe (1978), para el valor de la opción de cambio en tiempo $t_0 = 0$, que viene dada por

$$\begin{aligned} V^{ex}(t_0, S_1(t_0), S_2(t_0)) &= S_{1,0}F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - S_{2,0}F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2), \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \\ d_1 &= \frac{\log \frac{S_1(t_0)}{S_2(t_0)} + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}, \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S_1(t)}{S_2(t_0)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t_0}, \end{aligned}$$

con $F_{\mathcal{N}(0,1)}(\cdot)$ la función de distribución acumulada de la variable normal estándar.

Pista: Reescribir las ecuaciones en función de la variable $\frac{S_1(t)}{S_2(t)}$ y comparar la dinámica resultante con la expresión en (7.42) del Apartado 7.2.3.

Ejercicio 7.10 Sea el sistema de EDEs dado por

$$dS(t)/S(t) = r(t)dt + \sigma dW_x(t), \quad S(t_0) = S_0 > 0, \quad (7.77)$$

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \quad r(t_0) = r_0, \quad (7.78)$$

donde $W_x(t)$ y $W_r(t)$ son dos movimientos brownianos no correlados con $dW_x(t)dW_r(t) = 0$.

Mostrar que este sistema de EDEs es afín, después de aplicar una transformación logarítmica al proceso $S(t)$.

Determinar las EDOs de Riccati necesarias para obtener la función característica de este sistema de EDEs. (Este sistema se conoce como el modelo de Black-Scholes Hull-White, que será introducido en el Capítulo 13).

CAPÍTULO 8

Modelos de volatilidad estocástica

En este capítulo:

El problema principal del modelo de Black-Scholes es que no es capaz de reproducir la sonrisa de volatilidad implícita presente en muchos mercados financieros de opciones. Ya hemos visto algunos modelos de EDEs alternativos en los capítulos anteriores, pero la importancia de la volatilidad implícita es motivación suficiente para proponer otro modelo para los activos. En este capítulo, estudiaremos un sistema de EDEs para el precio del activo que incluye volatilidad estocástica (**Apartado 8.1**). En particular, estudiaremos el modelo de volatilidad estocástica de Heston, donde la varianza del activo sigue un proceso Cox-Ingersoll-Ross (**Apartado 8.2**).

Las ecuaciones de valoración de opciones resultantes bajo estos procesos de precios son complejas, ya que se obtienen EDPs de valoración bidimensional. Las ecuaciones se pueden deducir a partir de la estrategia de martingalas o de un argumento de cobertura, en el que una opción entra en la cartera de cobertura, junto a los activos y los bonos. Es importante resaltar que, para los modelos de volatilidad estocástica, se puede obtener la función característica descontada, que constituye la base para la utilización de técnicas de Fourier para la valoración de opciones, véase **Apartado 8.3**. En el **Apartado 8.4** se proporcionarán ejemplos numéricos que ayudarán a analizar el «impacto» de los diferentes parámetros del modelo.

Palabras clave de este capítulo: volatilidad estocástica, modelo de Heston, impacto sobre la EDP de valoración, volatilidad implícita, función característica descontada, lema de Itô, estrategia de martingala, modelo de volatilidad estocástica con saltos de Bates.

8.1. Introducción a los modelos de volatilidad estocástica

En capítulos anteriores hemos estudiado modelos de precios de activos alternativos que nos permiten reproducir la volatilidad implícita no constante observada en mercado. Así, hemos visto los modelos de volatilidad local, en el Capítulo 4, y los modelos con saltos, en el Capítulo 5. Cada uno de estos modelos tiene sus ventajas y desventajas. La principal desventaja de los modelos LV es que las dinámicas se adaptan a un mercado observado concreto y a un vencimiento específico. Esto puede ser suficiente para la valoración de opciones europeas pero, cuando tratamos con opciones dependientes de la trayectoria, es importante modelar ciertas propiedades relevantes de las densidades de transición de subyacente.

Los modelos de activos con saltos son capaces de modelar las propiedades de las densidades de transición pero, bajo dinámicas con saltos, no está claro cómo construir una cartera replicante de cobertura. A menudo, los modelos con saltos se utilizan en la valoración de materias primas, donde los precios de las mismas pueden presentar cambios significativos. La cobertura bajo procesos con saltos se puede realizar añadiendo opciones extra a la cartera de cobertura, pero el número de estas opciones no está claro, al menos de manera inmediata. Además, la calibración de los modelos con saltos puede no ser trivial, debido a la confrontación de dinámicas en mundo real y riesgo neutro, la modelización de los parámetros y otras cuestiones.

Otro avance importante en la valoración de opciones con respecto a la suposición de volatilidad constante, propuesto por Hull y White (1987), Stein y Stein (1991), Heston (1993) o Schöbel y Zhu (1999), consiste en modelar la volatilidad como un proceso de difusión. La idea de modelar la volatilidad como una variable aleatoria parte de observar los datos financieros, que indican la naturaleza altamente variable e impredecible de la volatilidad del precio de los activos. Así, los modelos presentados en este capítulo se conocen como modelos de volatilidad estocástica o, por sus siglas en inglés¹, modelos SV. En estos modelos SV, las volatilidades se «comportan y mueven» de manera autónoma (hasta cierto punto), una propiedad que los modelos de volatilidad local no tienen, Ren *et al.* (2007).

Además, las distribuciones del retorno de precios bajo los modelos SV suelen exhibir colas más pesadas que sus homólogas lognormales, por lo que son más realistas. Sin embargo, el argumento más importante para considerar una volatilidad estocástica es que los modelos SV son capaces de reproducir de manera más precisa la sonrisa/mueca de la volatilidad implícita observada en mercado, especialmente para las opciones con un vencimiento a medio o largo plazo.

Añadiendo un proceso estocástico, que además está correlado con el proceso de precios del activo $S(t)$, obtenemos un sistema de EDEs, para cuyo tratamiento será de mucha utilidad la teoría del capítulo anterior.

¹ Stochastic Volatility.

8.1.1. El modelo de volatilidad estocástica de Schöbel-Zhu

Como primera opción para el proceso de volatilidad se puede considerar un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU) con reversión a la media, que se define como

$$d\sigma(t) = \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma dW_{\sigma}^{\mathbb{Q}}(t), \quad \sigma(t_0) = \sigma_0 > 0. \quad (8.1)$$

Los parámetros $\kappa \geq 0$, $\bar{\sigma} \geq 0$ y $\gamma > 0$ son la velocidad de reversión a la media, la media a largo plazo del proceso de volatilidad y la volatilidad de la volatilidad, respectivamente. Teniendo el parámetro, γ , delante del incremento de Wiener en (8.1), el proceso OU para σ es simplemente un proceso gaussiano, con media

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\sigma(t)] = \bar{\sigma},$$

y la varianza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[\sigma(t)] = \gamma^2 / (2\kappa).$$

Un proceso OU incorpora una componente de reversión a la media en la volatilidad. En otras palabras, si la volatilidad excede su media, esta tiende a retornar al valor medio con una velocidad κ de reversión a la media. Lo mismo ocurre si la volatilidad está por debajo de la media.

El modelo SV de Schöbel-Zhu emplea el proceso OU para la volatilidad. Se define mediante el sistema 2D de EDEs dado por

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t)S(t)dW_x(t) \\ d\sigma(t) = \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma dW_{\sigma}(t), \end{cases} \quad (8.2)$$

siendo todos los parámetros positivos y $\rho_{x,\sigma}$ la correlación entre los movimientos brownianos, $dW_x(t)dW_{\sigma}(t) = \rho_{x,\sigma}dt$.

Este modelo tiene varias ventajas. Una de ellas es que el modelo transformado logarítmicamente pertenece a la clase de difusiones afines, véase Apartado 7.3, lo que garantiza que se puede obtener su correspondiente función característica descontada. Sin embargo, su obtención no es trivial, y requiere de la utilización de una nueva variable ($v(t) = \sigma^2(t)$), en un espacio extendido. Una vez obtenida, la valoración de opciones europeas bajo la clase de difusiones afines es relativamente fácil, mediante, por ejemplo, el método COS.

El proceso OU es un proceso normalmente distribuido para el que se conocen muchas propiedades. Una propiedad «no deseable» del proceso OU es que la variable puede alcanzar valores negativos, algo que, por supuesto, no es una propiedad adecuada para la volatilidad.

8.1.2. El proceso CIR para la varianza

En este caso, para evitar volatilidades negativas, la varianza del activo se modela mediante el denominado proceso CIR, dado por

$$dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t), \quad (8.3)$$

con κ la velocidad de reversión a la media, \bar{v} la media a largo plazo y donde γ controla la volatilidad del proceso de varianza. El proceso CIR fue propuesto por Cox *et al.* (1985) para modelar tipos de interés. El proceso, definido aquí bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , es un proceso raíz-cuadrada con reversión a la media, que será descrito con detalle en los siguientes apartados. Un proceso raíz-cuadrada excluye los valores negativos para $v(t)$ y, si $v(t)$ alcanza el cero, pasará a ser positiva de manera inmediata. Esta es una propiedad útil para un proceso de varianza.

Propiedades del proceso CIR

Antes de estudiar en detalle el modelo SV de Heston para precios de activos, nos centramos en la EDE de la varianza (8.3) y su solución. Como ya hemos dicho, la EDE (8.3) modela la varianza del activo, no su volatilidad (aunque, por supuesto, $\sigma = \sqrt{v(t)}$). Analizaremos en detalle el «comportamiento quasingingular» del proceso CIR cerca del origen y estudiaremos los conjuntos relevantes de parámetros que producen este fenómeno.

En el proceso CIR (8.3), la condición de Feller, esto es, $2\kappa\bar{v} \geq \gamma^2$, garantiza que $v(t)$ se mantenga en valores positivos; de lo contrario, si no se cumple la condición de Feller, $v(t)$ puede llegar a ser cero, como se indica en Feller (1951); Cox *et al.* (1985). Cuando la condición de Feller no se satisface, la distribución acumulada presenta un comportamiento quasi-singular cerca del origen o, dicho de otro modo, la cola izquierda de la densidad puede crecer, en valor, extremadamente rápido. Por tanto, cuando la condición de Feller no se satisface, existe una acumulación de masa de probabilidad en torno a 0. Cuanta más acumulación exista, la densidad tiene que comportarse de forma aún más extrema para ajustar la cola cerca de la singularidad (en torno a 0) con la parte continua de la densidad.

Definición 8.1.1 (Proceso CIR: FDA y FDP)

El proceso $v(t)|v(s)$, $t > s > 0$, bajo la dinámica CIR se distribuye como una función $\bar{c}(t, s)$ multiplicada por una variable aleatoria chi-cuadrado no central, $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))$, donde δ es el parámetro «grados de libertad» y $\bar{\kappa}(t, s)$ es el parámetro de no centralidad, tal que

$$v(t)|v(s) \sim \bar{c}(t, s)\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s)), \quad t > s > 0, \quad (8.4)$$

con

$$\bar{c}(t, s) = \frac{1}{4\kappa}\gamma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(t, s) = \frac{4\kappa v(s)e^{-\kappa(t-s)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}. \quad (8.5)$$

Su correspondiente función de distribución acumulada (FDA) es

$$F_{v(t)}(x) = \mathbb{Q}[v(t) \leq x] = \mathbb{Q}\left[\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s)) \leq \frac{x}{\bar{c}(t, s)}\right] = F_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))}\left(\frac{x}{\bar{c}(t, s)}\right), \quad (8.6)$$

donde

$$F_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\bar{\kappa}(t, s)}{2}\right) \frac{\left(\frac{\bar{\kappa}(t, s)}{2}\right)^k}{k!} \frac{\gamma\left(k + \frac{\delta}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{\delta}{2}\right)}, \quad (8.7)$$

con la función gamma incompleta inferior, $\gamma(a, z)$, y la función gamma, $\Gamma(z)$, dadas por

$$\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt, \quad y \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (8.8)$$

respectivamente (véase (5.49)).

La función de densidad de la chi-cuadrado no central (véase, por ejemplo, Johnson y Kotz (1970); Moser (2007)) viene dada por

$$f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))}(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(y+\bar{\kappa}(t, s))} \left(\frac{y}{\bar{\kappa}(t, s)}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{2}-1)} \mathcal{B}_{\frac{\delta}{2}-1}\left(\sqrt{\bar{\kappa}(t, s)y}\right), \quad (8.9)$$

donde

$$\mathcal{B}_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(a+k+1)}, \quad (8.10)$$

es una función de Bessel modificada de tercera especie, véase también Abramowitz y Stegun (1972); Gradshteyn y Ryzhik (1996).

Entonces, la función de densidad para $v(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_{v(t)}(x) &:= \frac{d}{dx} F_{v(t)}(x) = \frac{d}{dx} F_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))}\left(\frac{x}{\bar{c}(t, s)}\right) \\ &= \frac{1}{\bar{c}(t, s)} f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s))}\left(\frac{x}{\bar{c}(t, s)}\right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por las propiedades de la distribución chi-cuadrado no central, la media y la varianza del proceso $v(t)|v(0)$ se conocen explícitamente, esto es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v(t)|\mathcal{F}(0)] &= \bar{c}(t, 0)(\delta + \bar{\kappa}(t, 0)), \\ \text{Var}[v(t)|\mathcal{F}(0)] &= \bar{c}^2(t, 0)(2\delta + 4\bar{\kappa}(t, 0)). \end{aligned} \quad (8.12) \quad \blacktriangleleft$$

Como se indica en Feller (1951); Cox *et al.* (1985), con el parámetro $\delta := 4\kappa\bar{v}/\gamma^2$, la condición de Feller es equivalente a $\delta \geq 2$. Definiendo otro parámetro, $q_F := (2\kappa\bar{v}/\gamma^2) - 1$, la condición de Feller se cumple cuando

$$q_F := \frac{2\kappa\bar{v}}{\gamma^2} - 1 = \frac{\delta}{2} - 1 \geq 0.$$

Aunque cada uno de los tres parámetros, κ , \bar{v} y γ , de la EDE (8.3) juega un único papel en la forma y la magnitud de la densidad de la varianza, el orden de decaimiento de la cola izquierda se puede reproducir considerando valores de q_F en su intervalo de definición $[-1, \infty)$. Recordando que κ , \bar{v} y γ son no negativos, el problema de quasisingularidad ocurre cuando $q_F \in [-1, 0]$, algo que está directamente relacionado con la condición de Feller.

Ejemplo 8.1.1 (FDP y FDA del proceso CIR)

Para afianzar esta idea, en este experimento consideramos dos conjuntos de parámetros y analizamos sus correspondientes FDPs y FDAs. Tenemos un conjunto de parámetros para los que se cumple la condición de Feller, esto es, $q_F = 2$, con $T = 5$, $\kappa = 0.5$, $v_0 = 0.2$, $\bar{v} = 0.05$ y $\gamma = 0.129$; y un conjunto para el cual se viola la condición de Feller, $q_F = -0.5$, con $T = 5$, $\kappa = 0.5$, $v_0 = 0.2$, $\bar{v} = 0.05$ y $\gamma = 0.316$.

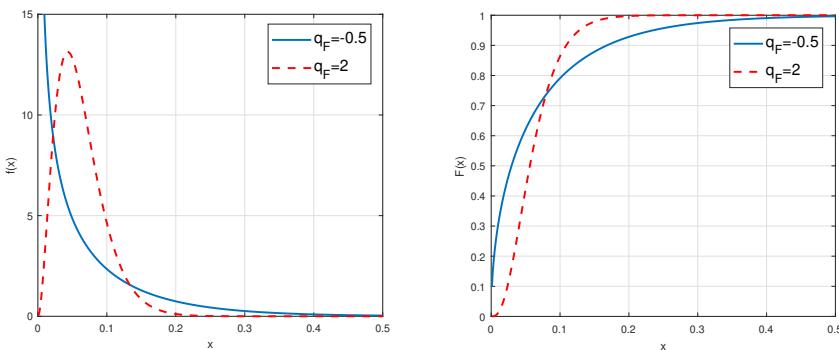


Figura 8.1: Proceso CIR. Izquierda: función de densidad de probabilidad. Derecha: función de distribución acumulada. Líneas azules continuas: $q_F = -0.5$ con $T = 5$, $\kappa = 0.5$, $v_0 = 0.2$, $\bar{v} = 0.05$ y $\gamma = 0.316$. Líneas rojas a trozos: $q_F = 2$ con $T = 5$, $\kappa = 0.5$, $v_0 = 0.2$, $\bar{v} = 0.05$ y $\gamma = 0.129$.



Como podemos observar en la Figura 8.1, el valor de q_F determina el orden de decaimiento de la cola izquierda de la función de densidad de la varianza, mientras que la cola derecha decae hacia cero rápidamente. Para $q_F > 0$, la densidad tiende hacia cero en ambas colas. Para q_F pequeño, acercándose a 0, el decaimiento de la cola izquierda se ralentiza. Cerca de $q_F = 0$, la cola izquierda se mantiene casi constante. Para $q_F \in [-1, 0]$, la cola izquierda crece en valor drásticamente.

La explicación de que q_F determine el orden de decaimiento de la cola izquierda de las FDPs es que, cuando q_F cambia de signo, las funciones de las que depende la FDP, es decir, $(\cdot)^{(\frac{1}{2}\delta-1)} = (\cdot)^{q_F/2}$ y $\mathcal{B}_{q_F}(\cdot)$, cambian de forma en torno al

origen, esto es, pasan de ser funciones monótonamente crecientes a funciones monótonamente decrecientes.

Proceso de Bessel cuadrado

En este apartado veremos que, después de las transformaciones adecuadas, el proceso de varianza se puede escribir como un proceso de Bessel cuadrado. Así, las propiedades de proceso de Bessel cuadrado se pueden relacionar con las del proceso de varianza.

Sean un parámetro $\delta \geq 0$ y un proceso estocástico $Y(t) \geq 0$, la solución del proceso de Bessel cuadrado de dimensión δ , definido por la EDE

$$dY(t) = \delta dt + 2\sqrt{|Y(t)|}dW(t), \quad (8.13)$$

es única y fuerte. El parámetro δ es el parámetro grados de libertad del proceso de Bessel cuadrado.

Tomando

$$\delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \nu = \frac{\gamma^2}{4\kappa},$$

y aplicando la transformación temporal

$$\bar{Y}(t) = e^{-\kappa t}Y(\nu(e^{\kappa t} - 1)), \quad (8.14)$$

podemos transformar el proceso de Bessel cuadrado en (8.13) en el proceso

$$d\bar{Y}(t) = \kappa(\nu \cdot \delta - \bar{Y}(t))dt + 2\sqrt{\kappa\nu\bar{Y}(t)}dW.$$

Por la definición de ν y δ , se observa fácilmente que este proceso \bar{Y} es igual al proceso de varianza del modelo de Heston.

El proceso de Bessel cuadrado es un proceso de Markov y sus correspondientes densidades de transición, para diferentes valores de sus parámetros, se conocen en forma cerrada. En primer lugar, para el caso de $\delta = 0$, la solución de $Y(t)$ es igualmente cero, $Y(t) = 0$. Otras propiedades de los procesos de Bessel cuadrado son bien conocidas. Las presentamos a continuación en forma de resultados.

Resultado 8.1.1 *Para el proceso de Bessel cuadrado estándar, definido por la EDE (8.13), se verifican las siguientes afirmaciones (véase Andersen y Andreasen (2010)):*

1. *Todas las soluciones de la EDE (8.13) son «no explosivas».*
2. *Para $\delta < 2$, se puede alcanzar $Y = 0$ como solución de (8.13).*
3. *Para $\delta \geq 2$, la EDE (8.13) tiene una única solución y no se alcanza el cero.*

4. Para $0 < \delta < 2$, la EDE (8.13) no tiene solución única, a menos que se especifique la condición de frontera para la solución de (8.13) en $Y = 0$.
5. Para $\delta \leq 0$, existe una única solución fuerte de la EDE (8.13), y la frontera en cero es absorbente.

Estos resultados han sido demostrados en el Apéndice A de Andersen y Andreasen (2010), donde la demostración está basada en la teoría presentada en Borodin (2002). Para los dos últimos casos del Resultado 8.1.1 se conocen las densidades de transición, que se presentan en el siguiente resultado.

Resultado 8.1.2 (Densidad del proceso de Bessel cuadrado) La densidad de transición, $f_B(t, Y(t); s, Y(s))$, para el proceso de Bessel cuadrado viene dada por las siguientes funciones:

1. Para $\delta \leq 0$ y $0 < \delta < 2$ como en (8.13), pero solo cuando la frontera es absorbente en $Y(t) = 0$, tenemos que $Y(t) \geq 0, t > 0$, y

$$\begin{aligned} f_B(t, Y(t); s, Y(s)) &= \frac{1}{2(t-s)} \left(\frac{Y(t)}{Y(s)} \right)^{\frac{\delta-2}{4}} \\ &\times \exp \left(-\frac{Y(s) + Y(t)}{2(t-s)} \right) I_{|\frac{\delta-2}{2}|} \left(\frac{\sqrt{Y(s) \cdot Y(t)}}{t-s} \right), \end{aligned} \quad (8.15)$$

2. Para $0 < \delta < 2$, cuando $Y(t) = 0$ es una frontera reflectante, tenemos que $Y(t) \geq 0, t > 0$, y

$$\begin{aligned} f_B(t, Y(t); s, Y(s)) &= \frac{1}{2(t-s)} \left(\frac{Y(t)}{Y(s)} \right)^{\frac{\delta-2}{4}} \\ &\times \exp \left(-\frac{Y(s) + Y(t)}{2(t-s)} \right) I_{\frac{\delta-2}{2}} \left(\frac{\sqrt{Y(s) \cdot Y(t)}}{t-s} \right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

La función $I_a(x)$ en (8.15) y (8.16) es la función de Bessel, definida por

$$I_a(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+a}}{j! \Gamma(a+j+1)},$$

donde $\Gamma(x)$ es de nuevo la función gamma.

Demostración. Véase Borodin (2002) p.136, para las densidades de transición del proceso de Bessel cuadrado. ■

Observación 8.1.1 (Movimiento browniano transformado en tiempo) En (8.14) se sugirió una transformación temporal para transformar dos procesos. Una transformación en tiempo está habitualmente relacionada con la «velocidad» a la que las trayectorias de movimiento browniano se mueven

en tiempo. El movimiento browniano $W(t)$ tiene media cero y varianza igual al tiempo t . Cuando consideramos un tiempo distinto, νt , los incrementos $W(\nu \cdot t) - W(\nu \cdot s)$, $t \geq s \geq 0$, siguen una distribución normal con media cero y varianza $\nu \cdot (t - s)$. Entonces, cualquier escalado del tiempo en un movimiento browniano, $W(\nu \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{\nu} W(t)$, resultará en otro proceso que estará escalado por un factor $\sqrt{\nu}$.

En consecuencia, multiplicando $W(t)$ por un proceso $\bar{\nu}(t)$, independiente de $W(t)$, tenemos la igualdad en distribución

$$\bar{\nu}(t)W(t) \stackrel{d}{=} W(\bar{\nu}^2(t) \cdot t). \quad (8.17)$$

De ahora en adelante, para simplificar la notación, no utilizaremos la «d» para la igualdad en distribución.

La distribución a ambos lados de la ecuación es la misma, pero la velocidad (es decir, el tiempo) a la que evolucionan las trayectorias del movimiento browniano $W(\bar{\nu}^2(t))$ está controlada por el proceso $\bar{\nu}(t)$. Si ahora consideramos la siguiente transformación en tiempo, $\bar{\nu}(t) = (1 - \rho^2) \int_0^t \sigma^2(z)dz$, entonces el movimiento browniano bajo este «reloj» tendrá la misma distribución que $\sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sigma(z)dW(z)$, esto es

$$dW(\bar{\nu}(t)) = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma(t) dW(t),$$

o, en forma integral,

$$W(\bar{\nu}(t)) = \int_0^{\bar{\nu}(t)} dW(t) = \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sigma(z) dW(z).$$



▲

Una transformación temporal no solo cambia el correspondiente movimiento browniano sino que también cambia el tiempo en el término de deriva, ya que $d\bar{\nu}(t) = (1 - \rho^2)\sigma^2(t)dt$.

8.2. El modelo de volatilidad estocástica de Heston

En este apartado introducimos el modelo SV de Heston y su correspondiente sistema de EDEs.

El modelo SV de Heston (1993), se compone de dos ecuaciones diferenciales estocásticas, una para el precio del activo subyacente $S(t)$, y otra para el proceso de varianza $v(t)$, descritas bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , dadas por

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_x^{\mathbb{Q}}(t), & S(t_0) = S_0 > 0 \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t), & v(t_0) = v_0 > 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Los movimientos brownianos subyacentes están correlados, es decir, $dW_v^{\mathbb{Q}}(t)dW_x^{\mathbb{Q}}(t) = \rho_{x,v}dt$. Los parámetros $\kappa \geq 0$, $\bar{v} \geq 0$ y $\gamma > 0$ son la velocidad de reversión a la media, la media a largo plazo del proceso varianza y la volatilidad de la volatilidad, respectivamente.

Medida del mundo real y el modelo SV de Heston

En el caso del modelo de Heston, resulta conveniente asumir que la dinámica del activo ya se encuentra bajo la medida de riesgo neutro (esto es, la medida bajo la cual el precio del activo descontado, $S(t)/M(t)$, es una martingala, con $M(t)$ como en (2.27)). En Wong y Heyde (2006), se realiza un análisis detallado de las transformaciones de la medida para modelos SV. Para el modelo de Heston, la transformación de la medida requiere desarrollos complejos, especialmente para los valores de los parámetros que hacen que la varianza pueda ser cero. El modelo, bajo la medida \mathbb{Q} , evoluciona de acuerdo con un proceso de volatilidad con reversión a la media de tipo CIR. Resumimos brevemente el impacto del cambio de medida sobre la dinámica de los procesos subyacentes del modelo de Heston, partiendo de las dinámicas de Heston bajo la medida del mundo real, \mathbb{P} , es decir,

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_x^{\mathbb{P}}(t), \\ dv(t) = \kappa(\bar{v}^{\mathbb{P}} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{P}}(t), \end{cases} \quad (8.19)$$

con la correlación entre los movimientos brownianos bajo la medida \mathbb{P} dada por $dW_x^{\mathbb{P}}(t)dW_v^{\mathbb{P}}(t) = \rho_{x,v}dt$. Con la ayuda de la factorización de Cholesky, el modelo se puede escribir, en términos de movimientos brownianos independientes, como

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t), \\ dv(t) = \kappa(\bar{v}^{\mathbb{P}} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}\left(\rho_{x,v}d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2}d\widetilde{W}_v^{\mathbb{P}}(t)\right), \end{cases}$$

con los procesos independientes $\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t)$ y $\widetilde{W}_v^{\mathbb{P}}(t)$. Buscamos un proceso, $\Phi(t)$, en

$$d\widetilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(x) = \Phi(t)dt + d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(x),$$

tal que $\frac{S(t)}{M(t)}$ sea una martingala, con $M(t)$ la cuenta de ahorros habitual. Aplicando el lema de Itô a $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{M(t)}$, obtenemos

$$\frac{d\bar{S}(t)}{\bar{S}(t)} = (\mu - r)dt + \sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t). \quad (8.20)$$

De este modo, tenemos la transformación de la medida

$$\begin{cases} d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t) = d\widetilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(t) - (\mu - r)/\sqrt{v(t)}dt, \\ d\widetilde{W}_v^{\mathbb{P}}(t) = d\widetilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t). \end{cases} \quad (8.21)$$

De acuerdo con este cambio de medida, se necesita que $v(t) > 0$.

Entonces, bajo la medida \mathbb{Q} , la dinámica del activo en el modelo de Heston viene dada por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)d\widetilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(t),$$

y el proceso de varianza

$$\begin{aligned} dv(t) &= \kappa(\bar{v}^{\mathbb{P}} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}\left(\rho_{x,v}d\widetilde{W}_x^{\mathbb{P}}(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2}d\widetilde{W}_v^{\mathbb{P}}(t)\right) \\ &= \kappa\left(\bar{v}^{\mathbb{P}} - \frac{\rho_{x,v}}{\kappa}\gamma(\mu - r) - v(t)\right)dt \\ &\quad + \gamma\sqrt{v(t)}\left[\rho_{x,v}d\widetilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2}d\widetilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t)\right]. \end{aligned}$$

Introduciendo la definición $\bar{v} := \bar{v}^{\mathbb{P}} - \rho_{x,v}\gamma(\mu - r)/\kappa$ y reformulando mediante los movimientos brownianos correlados, obtenemos la EDE (8.3) para la varianza en la medida \mathbb{Q} . Aunque el cambio de medida explicado anteriormente se basa en que $v(t) > 0$, se sabe que el proceso CIR puede alcanzar el valor cero, pasando a continuación a valores positivos.

En la práctica, trabajando con datos del mercado financiero, resulta difícil satisfacer la condición de Feller (que garantiza una varianza positiva), véase, por ejemplo, Andersen (2008), donde se afirma que $2\kappa\bar{v} \ll \gamma^2$ en muchas situaciones prácticas. El caso $v(t) = 0$, en lo que respecta al cambio de media, es más complicado, aunque en Desmettre (2018) se ha propuesto un cambio de medida también para esta situación. Esencialmente, se sustituye el término de deriva constante por un término de deriva dependiente (del tiempo y) de la volatilidad, que alcanza el valor r cuando la volatilidad es igual a cero.

8.2.1. La ecuación de valoración de Heston

En este apartado, deducimos la EDP de valoración de Heston siguiendo los dos procedimientos que hemos visto para la obtención de la EDP de Black-Scholes. El argumento de cartera replicante de Black-Scholes se puede utilizar también para determinar la EDP de valoración de opciones bajo la dinámica de Heston. Sin embargo, la construcción de la cartera replicante es, en este caso, más complicada, ya que el valor de la opción depende de cantidades que no son observables, como la volatilidad estocástica. Por tanto, empezamos la deducción de la EDP de Heston empleando el enfoque de martingala.

De ahora en adelante, no utilizaremos el superíndice \mathbb{Q} para indicar que el movimiento browniano se define bajo la medida en riesgo neutro, a menos que se requiera explícitamente.

Enfoque de martingala

Sea el modelo SV de Heston dado en (8.18), consideramos el problema de valoración

$$V(t, S, v) = M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} V(T, S, v) \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad (8.22)$$

con $\mathcal{F}(t) = \sigma(s, S, v; s \leq t)$ (la sigma-álgebra). Dividiendo (8.22) por $M(t)$ obtenemos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} V(T, S, v) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{V(t, S, v)}{M(t)}. \quad (8.23)$$

Asumimos una función derivable para el valor de la opción descontado, que debe ser una martingala. Podemos determinar su dinámica empleando el lema de Itô, esto es

$$d \left(\frac{V}{M} \right) = \frac{1}{M} dV - r \frac{V}{M} dt.$$

Así, con la ayuda del lema de Itô bidimensional obtenemos que un incremento infinitesimal, dV , con las dinámicas de $S(t)$ y $v(t)$ dadas por el modelo de Heston (8.18), tiene la dinámica

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) dt + S \sqrt{v} \frac{\partial V}{\partial S} dW_x + \gamma \sqrt{v} \frac{\partial V}{\partial v} dW_v. \end{aligned}$$

Nótese que la formulación anterior ya está escrita en términos de los movimientos brownianos correlados.

Para satisfacer la propiedad de martingala, la dinámica no debe presentar términos en dt , lo que resulta en

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right. \\ \left. + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) - r \frac{V}{M} = 0, \quad (8.24) \end{aligned}$$

que es la EDP de volatilidad estocástica de Heston, para la valoración de opciones (después de, por supuesto, multiplicar (8.24) por M).

La solución de la EDP de valoración de Heston se puede obtener con la ayuda del teorema de Feynman-Kac, mediante el cual la solución puede escribirse como el payoff esperado descontado bajo la medida en riesgo neutro. Para el modelo de Heston, la función de densidad condicionada que aparece en la representación de Feynman-Kac no se conoce, pero sí se puede determinar su función característica descontada, ya que el modelo de Heston pertenece a la clase de difusiones afines, véase Apartado 8.3.

Enfoque de cobertura

Como segundo procedimiento para obtener la EDP de valoración de Heston, podemos construir una cartera replicante con el valor $\Pi(t, S, v)$, y emplear, de nuevo, el lema de Itô. Sin embargo, el principio de mercado completo establece que el número de activos y el número de fuentes de aleatoriedad (es decir, los movimientos brownianos) deben ser iguales. Anteriormente, en el modelo Black-Scholes, teníamos una ecuación diferencial estocástica con un movimiento browniano, con lo que el mercado era completo. En el caso de las dinámicas de difusión con saltos, el principio no se cumplía, ya que, además del movimiento browniano, tenemos un proceso de Poisson para los saltos. El mercado era incompleto, por lo que introdujimos el concepto de la medida de martingala equivalente (MME).

Cuando se consideran procesos de volatilidad estocástica, la situación tampoco es trivial. La dificultad radica en el hecho de que la volatilidad en sí misma no se puede comprar o vender fácilmente en mercado (para ser precisos, podemos imitar derivados para medir la volatilidad, pero la volatilidad no es una cantidad única, medible y negociada).

La cartera de cobertura para el caso con volatilidad estocástica está compuesta de una opción vendida, de valor $V(t, S, v)$, $-\Delta$ unidades del activo subyacente $S(t)$ y, para cubrirse contra el riesgo asociado a la aleatoriedad de la volatilidad, $-\Delta_1$ unidades de «otra» opción de valor $V_1(t, S, v; K_1, T)$. De esta forma, podemos tener dos fuentes de aleatoriedad, es decir, en $S(t)$ y en $v(t)$. Finalmente, tenemos que

$$\boxed{\Pi(t, S, v) = V(t, S, v; K, T) - \Delta S - \Delta_1 V_1(t, S, v; K_1, T),} \quad (8.25)$$

donde hemos incluido explícitamente la dependencia en K , T y K_1 en los argumentos de V y V_1 , indicando que V_1 es una opción con el mismo vencimiento pero distinto strike K_1 .

Empleando la notación $V \equiv V(t, S, v; K, T)$ y $V_1 \equiv V_1(t, S, v; K_1, T)$ y, aplicando el lema de Itô, obtenemos la dinámica para el cambio infinitesimal de la cartera $\Pi \equiv \Pi(t, S, v)$, dado por

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) dt \\ &\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right) dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} \right) dv. \end{aligned}$$

Imponiendo que

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} = 0, \quad (8.26)$$

eliminamos la aleatoriedad de la dinámica de la cartera.

Al igual que antes, para evitar oportunidades de arbitraje, el retorno de esta cartera determinista y libre de riesgo debe ajustarse al tipo de interés libre de riesgo, esto es, $d\Pi = r\Pi dt$ y, con (8.25), tenemos que $d\Pi = r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1)dt$. Aplicando (8.26) y reordenando algunos términos, obtenemos la igualdad

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right) / \frac{\partial V}{\partial v} = \\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V_1}{\partial S} - r V_1 \right) / \frac{\partial V_1}{\partial v},$$

donde, en el lado izquierdo de la igualdad, el valor de la opción V es una función de las variables independientes t , S y v , y, en el lado derecho, el valor de la opción V_1 es una función de las mismas variables independientes. Ambos lados de esta ecuación deberían, en este contexto, ser iguales a una función específica, $g(t, S, v)$, que «solo» depende de las variables independientes S , v y tiempo t .

La elección, $g(t, S, v) = -\kappa(\bar{v} - v(t))$, como término de deriva en (8.18), resulta en una EDP de valoración bajo la dinámica de Heston, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho_{x,v} \gamma S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} - r V = 0. \quad (8.27)$$

Nótese que esta representación es idéntica a la obtenida mediante el enfoque de martingala, en (8.24).

En Heath y Schweizer (2000), se han estudiado otras posibles alternativas para $g(t, S, v)$.

8.2.2. Impacto de los parámetros en la volatilidad implícita

En este apartado analizamos los patrones de volatilidad implícita que se pueden generar mediante el modelo de Heston. La varianza en el modelo de Heston, es decir, $v(t) = \sigma^2(t)$, evoluciona de acuerdo con un proceso CIR con reversión a la media, y cada parámetro tiene un efecto específico en la curva de volatilidad implícita generada por esta dinámica. Proporcionaremos una idea del impacto de los parámetros en la forma de la volatilidad implícita. Comprender el efecto que tienen los parámetros del modelo puede ser muy útil para, por ejemplo, el proceso de calibración, donde se necesita seleccionar, antes de comenzar la propia calibración, un conjunto inicial de parámetros que servirán para ajustar los parámetros del modelo de Heston, $\{\rho_{x,v}, v_0, \bar{v}, \kappa, \gamma\}$, a los datos de mercado (véase el Apartado 8.2.3).

Para analizar el efecto de los parámetros numéricamente, emplearemos un conjunto de parámetros de referencia, dado por

$$T = 2, S_0 = 100, \kappa = 0.1, \gamma = 0.1, \bar{v} = 0.1, \rho_{x,v} = -0.75, v_0 = 0.05, r = 0.05.$$

El estudio numérico se realiza variando cada parámetro individualmente, manteniendo los demás invariantes. Para cada conjunto de parámetros, se calculan los precios de las opciones con Heston (mediante la resolución numérica de la EDP de Heston) y, a continuación, se emplean en una iteración de Newton-Raphson para determinar la volatilidad implícita de Black-Scholes.

Los dos primeros parámetros del estudio son el parámetro de correlación $\rho_{x,v}$ y el γ , también conocido como vol-vol. En la Figura 8.2 (izquierda) se aprecia que, cuando $\rho_{x,v} = 0\%$, un valor creciente de γ proporciona una «sonrisa» de volatilidad implícita más pronunciada. Por tanto, una volatilidad de la volatilidad más alta incrementa la «curvatura» de la volatilidad implícita. En la Figura 8.2 (derecha), vemos que cuando la correlación entre el proceso del activo y el proceso de varianza, $\rho_{x,v}$, tiende a valores más negativos, crece la pendiente de la «muela» en la curva de volatilidad implícita.

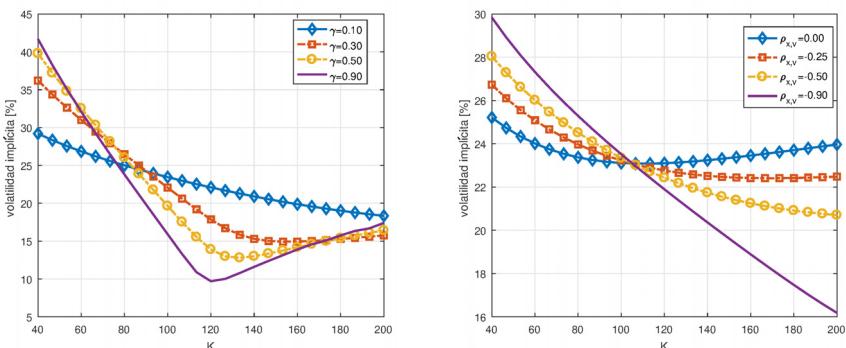


Figura 8.2: Volatilidad implícita bajo el modelo de Heston. Izquierda: impacto del parámetro vol-vol, γ . Derecha: impacto de la correlación, $\rho_{x,v}$.



Otro de los parámetros en la dinámica del modelo de Heston es κ , la velocidad de reversión a la media de $v(t)$. El gráfico de la izquierda en la Figura 8.3 muestra que κ tiene un efecto reducido sobre la sonrisa (o muela) de volatilidad implícita, solo un 1% – 2%. Sin embargo, κ determina la velocidad a la que la volatilidad converge hacia la volatilidad a largo plazo \bar{v} , véase el gráfico de la derecha en la Figura 8.3, que muestra la volatilidad implícita at-the-money (ATM) para distintos valores de κ . En este ejemplo, tenemos que $\sqrt{\bar{v}} \approx 31.62\%$, con lo que un valor alto de κ implica una convergencia más rápida de la volatilidad implícita a este valor, $\sqrt{\bar{v}}$.

Los dos parámetros restantes, la varianza inicial v_0 y el nivel de varianza \bar{v} , tienen un efecto similar sobre la curva de volatilidad implícita, véase la Figura 8.4. El efecto de estos dos parámetros depende también del valor de κ ,

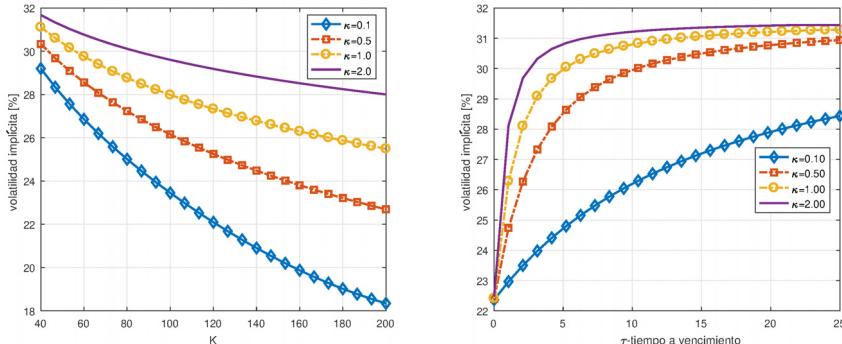


Figura 8.3: Volatilidad implícita bajo el modelo de Heston. Izquierda: impacto del parámetro κ en función del strike K . Derecha: impacto del parámetro κ sobre la volatilidad ATM en función de $\tau = T - t$.



que controla la velocidad a la que la volatilidad implícita converge desde $\sqrt{v_0}$ a $\sqrt{\bar{v}}$ (o desde v_0 a \bar{v}).

8.2.3. Calibración del modelo de Heston

En el procedimiento de calibración del modelo de Heston se pretende encontrar los parámetros del modelo tales que la diferencia entre los precios de opciones vanilla de mercado, V^{mkt} , y los precios del modelo, $V = V^H$, sea lo más pequeña posible. Como ya hemos visto, el conjunto de parámetros cuyo valor deseamos encontrar es $\Omega = \{\rho_{x,v}, v_0, \bar{v}, \kappa, \gamma\}$. Para determinar estos parámetros óptimos, definimos una función objetivo que se basa en la diferencia entre los valores de mercado y los del modelo. Sin embargo, no hay una única función objetivo. Las elecciones más habituales son

$$\min_{\Omega} \sqrt{\sum_i \sum_j w_{i,j} (V_c^{mkt}(t_0, S_0; K_i, T_j) - V_c(t_0, S_0; K_i, T_j, \Omega))^2}, \quad (8.28)$$

y

$$\min_{\Omega} \sqrt{\sum_i \sum_j w_{i,j} (\sigma_{imp}^{mkt}(t_0, S_0; K_i, T_j) - \sigma_{imp}(t_0, S_0; K_i, T_j, \Omega))^2}, \quad (8.29)$$

donde $V_c^{mkt}(t_0, S_0; K_i, T_j)$ es el precio de la opción call con strike K_i y vencimiento T_j en mercado, $V_c(t_0, S_0; K_i, T_j, \Omega)$ es el valor de Heston para la opción call; $\sigma_{imp}^{mkt}(\cdot)$ y $\sigma_{imp}(\cdot)$ son las volatilidades implícitas de mercado y del modelo de Heston, respectivamente, y $w_{i,j}$ es una función de ponderación.

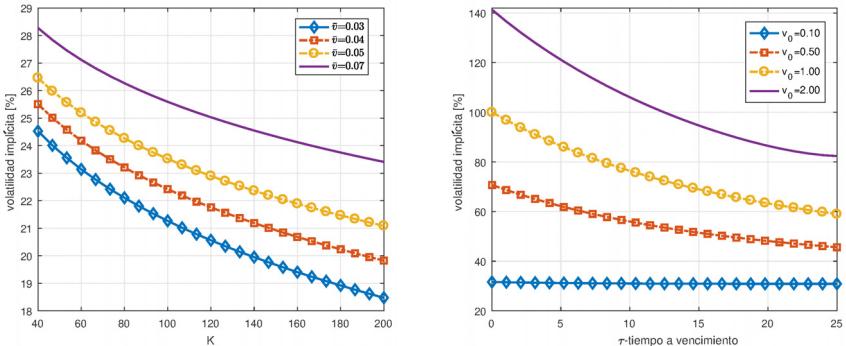


Figura 8.4: Volatilidad implícita bajo el modelo de Heston. Izquierda: impacto del parámetro \bar{v} en función del strike K . Derecha: impacto del parámetro v_0 en función del tiempo a vencimiento $\tau = T - t$.



A menudo, $w_{i,j} = 1$, aunque el hecho de que la función objetivo está habitualmente basada solo en precios de opciones call y put OTM implica una ponderación «natural».

La mayor dificultad en la calibración del modelo de Heston es que el conjunto Ω contiene cinco parámetros que, además, no son completamente independientes. Con esto queremos decir que el efecto que producen los diferentes parámetros en la forma de la sonrisa de volatilidad implícita puede ser bastante parecido. Por esta razón, en el proceso de búsqueda de los valores óptimos de los parámetros nos podemos encontrar con varios mínimos locales. El análisis del impacto de los diferentes parámetros sobre la volatilidad implícita, como en el estudio anterior, puede proporcionar un conjunto inicial de parámetros satisfactorio. El procedimiento de optimización se puede acelerar mediante la reducción del conjunto de parámetros de la función objetivo. Comparando el impacto de los parámetros de velocidad de reversión a la media κ y de curvatura γ (véanse las Figuras 8.2 y 8.3), se puede observar que estos dos parámetros tienen un efecto similar sobre la forma de la volatilidad implícita. Por lo tanto, es habitual imponer (o fijar) uno de ellos. En la industria se suele fijar $\kappa = 0.5$ y optimizar el parámetro γ . De esta manera, la optimización se reduce a cuatro parámetros. Otro parámetro que puede determinarse de antemano, mediante la utilización de la heurística, es el valor inicial del proceso de varianza, v_0 . Para un vencimiento T «cercano a hoy» (es decir, $T \rightarrow 0$), se podría asumir que el precio del activo se comporta, «más o menos», como en el caso de Black-Scholes. El impacto de un proceso de varianza estocástica debería tender a cero, en el límite $T \rightarrow 0$. Por tanto, para opciones con vencimientos cortos, el proceso se

puede aproximar mediante un proceso de la forma

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v_0}S(t)dW_x(t). \quad (8.30)$$

Esto sugiere que, para la varianza inicial v_0 , podemos utilizar el cuadrado de la volatilidad implícita ATM de una opción con el vencimiento más corto, $v_0 \approx \sigma_{imp}^2$, para $T \rightarrow 0$, como una aproximación precisa.

En la Tabla 8.1 se presentan algunos valores de una volatilidad implícita observada. Los valores del strike se determinan como un porcentaje del precio inicial S_0 , de modo que el nivel de strike ATM se corresponde con $K = S_0 = 100$. Así, el valor de varianza inicial v_0 en el modelo de Heston se puede estimar mediante el cuadrado de la volatilidad ATM de una opción con vencimiento $T = 1$ semana, esto es, $v_0 = \sigma_{imp}^2(1s) = (0.05001)^2 = 0.0025$ (indicado por un recuadro en la Tabla 8.1). El valor para la varianza media \bar{v} se puede relacionar con el valor de la volatilidad a 10 años, esto es, $\bar{v} = \sigma_{imp}^2(10a) = (0.07221)^2$.

Tabla 8.1: Volatilidades implícitas (en porcentaje) para distintos vencimientos y strikes. Los strikes son porcentajes de S_0 . «s» denota semana, «m» denota mes y «a» denota año.

| strike \ T | 1s | 1m | 6m | 1a | 2a | 5a | 8a | 10a |
|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 40 | 22.622 | 22.371 | 20.706 | 18.537 | 18.041 | 16.395 | 14.491 | 13.136 |
| 60 | 15.491 | 15.350 | 14.415 | 13.195 | 12.916 | 11.988 | 10.917 | 10.177 |
| 80 | 9.930 | 9.882 | 9.562 | 9.154 | 9.070 | 8.786 | 8.459 | 8.251 |
| 100 | 5.001 | 5.070 | 5.515 | 6.041 | 6.196 | 6.639 | 7.015 | 7.221 |
| 120 | 4.542 | 4.598 | 4.962 | 5.430 | 5.654 | 6.277 | 6.782 | 7.041 |
| 140 | 6.278 | 6.300 | 6.405 | 6.460 | 6.607 | 6.982 | 7.232 | 7.328 |
| 160 | 7.748 | 7.752 | 7.707 | 7.517 | 7.615 | 7.806 | 7.824 | 7.751 |
| 180 | 8.988 | 8.976 | 8.818 | 8.445 | 8.508 | 8.563 | 8.399 | 8.182 |



Para obtener una aproximación inicial precisa de los parámetros de modelo de Heston también se puede utilizar la conexión existente entre la dinámica de Heston y la dinámica de Black-Scholes con una función de volatilidad dependiente del tiempo, como la que se abordó en el Apartado 3.2.3. En el modelo de Heston podríamos, por ejemplo, «proyectar» el proceso de varianza sobre su esperanza, es decir,

$$dS(t) = rS(t)dt + \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]S(t)dW_x(t).$$

Mediante esta proyección, los parámetros del proceso de varianza $v(t)$ se podrían calibrar de manera similar a como se realiza para el modelo de Black-Scholes dependiente del tiempo. Emplear un modelo de volatilidad dependiente del tiempo implica que, durante la calibración, se deba considerar una fila completa de volatilidades (en negrita) de la Tabla 8.1. Por tanto, los parámetros

de Heston se deben determinar de tal forma que

$$\sigma^{ATM}(T_i) = \sqrt{\int_0^{T_i} (\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}])^2 dt},$$

donde $\sigma^{ATM}(T_i)$ es la volatilidad implícita ATM para el vencimiento T_i de la Tabla 8.1.

Otra técnica de calibración para los parámetros de Heston se basa en utilizar la cotización de mercado del índice VIX. Como veremos a continuación, en la Observación 8.2.1, cuando se tienen distintas cotizaciones de mercado para diferentes strikes K_i y vencimientos T_j , los parámetros óptimos se pueden determinar resolviendo, para todos los pares (i, j) , las igualdades

$$K_{i,j} = \bar{v} + \frac{v_0 - \bar{v}}{\kappa(T_j - t_0)} \left(1 - e^{-\kappa(T_i - t_0)} \right). \quad (8.31)$$

Cuando se han determinado los valores iniciales de los parámetros, se puede utilizar la superficie de volatilidad implícita completa de la Tabla 8.1 para determinar los parámetros óptimos del modelo.

Observación 8.2.1 (Swap de varianza bajo el modelo de Heston)

Los swaps de varianza ya he han introducido en el Apartado 4.2.2, donde se presentó una primera metodología de valoración. Posteriormente, se estableció una conexión con la cotización del índice VIX.

Explicamos que los swaps de varianza se cotizan en términos de sus precios de ejercicio, K , que se determinan de manera que el valor del contrato debe ser igual a 0 en la fecha de inicio t_0 . Sin embargo, cuando la volatilidad $\sigma(t)$ se modela mediante un proceso estocástico, la ecuación de valoración de los swaps de varianza se tiene que modificar. Entonces, si los precios del activo evolucionan de acuerdo al modelo de Heston, la expresión en (4.32) se modifica como

$$K = \frac{1}{T - t_0} \mathbb{E}^Q \left[\int_{t_0}^T v(t) dt \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \mathbb{E}^Q [v(t) \middle| \mathcal{F}(t_0)] dt. \quad (8.32)$$

La esperanza de la varianza en el proceso de Heston viene dada por

$$\mathbb{E}^Q [v(t) \middle| \mathcal{F}(t_0)] = v_0 e^{-\kappa(t-t_0)} + \bar{v} \left(1 - e^{-\kappa(t-t_0)} \right), \quad (8.33)$$

de modo que el strike K debe ser igual a

$$K = \bar{v} + \frac{v_0 - \bar{v}}{\kappa(T - t_0)} \left(1 - e^{-\kappa(T - t_0)} \right). \quad (8.34)$$



Ejemplo 8.2.1 (Calibración y superficie de volatilidad)

En la Figura 8.5 se esbozan tres ejemplos del «modo» de calibración. En el primer gráfico, la calibración se realiza para un punto de la superficie de la

volatilidad implícita, por ejemplo, la volatilidad implícita ATM, que se asemeja al caso de Black-Scholes. El segundo gráfico muestra una calibración con una volatilidad dependiente del tiempo, en la que se tiene en cuenta la estructura temporal de la volatilidad. El tercer gráfico representa una calibración a todos los puntos de la superficie de volatilidad implícita.

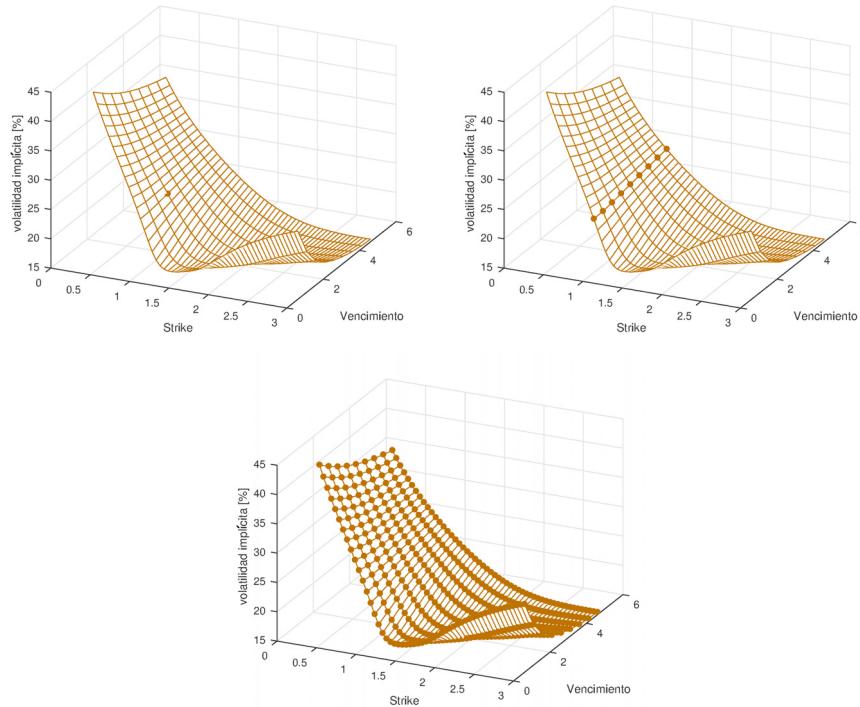


Figura 8.5: Superficies de volatilidad implícita y distintos modos de calibración. Arriba a la izquierda: calibración ATM. Arriba a la derecha: calibración a una estructura temporal. Abajo: calibración a la superficie de volatilidad completa.

Aunque los modelos SV tienen muchas características deseables para la valoración de opciones, no siempre son fáciles de calibrar a un conjunto dado de precios de opciones europeas libres de arbitraje. Concretamente, la precisión del modelo de Heston para valorar opciones de vencimiento corto en el mercado de valores no suele ser completamente satisfactoria, Engelmann *et al.* (2011).

8.3. La función característica de Heston

En este apartado, obtendremos la función característica descontada de Heston y veremos cómo encajar el modelo de Heston en el marco de los procesos DA.

8.3.1. Volatilidad estocástica como un proceso de difusión afín

Un modelo genérico de volatilidad estocástica con una estructura de volatilidad difusiva se puede escribir, bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , como

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + a(t, v)S(t)dW_x(t), \\ dv(t) = b(t, v)dt + c(t, v)dW_v(t), \end{cases} \quad (8.35)$$

con r constante y correlación $dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}dt$, $|\rho_{x,v}| < 1$. Distintas definiciones de $a(t, v)$, $b(t, v)$ y $c(t, v)$, proporcionan diferentes modelos de volatilidad estocástica.

Sea $\mathbf{X}(t) = [X(t), v(t)]^T$, con la transformación logarítmica $X(t) = \log S(t)$, el modelo anterior se puede expresar en términos de movimientos brownianos independientes, como

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dv(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1(t, \mathbf{X}(t)) \\ \bar{\mu}_2(t, \mathbf{X}(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{1,1}(t, \mathbf{X}(t)) & \bar{\sigma}_{1,2}(t, \mathbf{X}(t)) \\ \bar{\sigma}_{2,1}(t, \mathbf{X}(t)) & \bar{\sigma}_{2,2}(t, \mathbf{X}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_x(t) \\ d\widetilde{W}_v(t) \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) &= \begin{bmatrix} r - \frac{1}{2}a^2(t, v) \\ b(t, v) \end{bmatrix}, \\ \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t)) &= \begin{bmatrix} a(t, v) & 0 \\ \rho_{x,v}c(t, v) & \sqrt{(1 - \rho_{x,v}^2)c(t, v)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se pueden determinar las condiciones para que el sistema en (8.35) pertenezca a la clase de procesos DA. Obviamente, el tipo de interés es constante, $\bar{r}(t, \mathbf{X}(t)) = r$. Para los términos de deriva $\mathbf{X}(t)$, tenemos que

$$\bar{\mu}(t, \mathbf{X}(t)) := \begin{bmatrix} r - \frac{1}{2}a^2(t, v) \\ b(t, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1v \\ b_0 + b_1v \end{bmatrix}, \quad \text{para } a_0, b_0, a_1, b_1 \in \mathbb{R}. \quad (8.36)$$

Entonces, $a_0 = r$, $a_1 = -0.5$ y $a^2(t, v) = v$. La última igualdad implica que la función $a(t, v)$ debe ser igual a $\sqrt{v(t)}$ (o igual a una función del tiempo, constante o determinista) para pertenecer a la clase DA. En la segunda fila, la función $b(t, v)$ puede ser una función lineal del tiempo y de $v(t)$.

El término de covarianza viene dado por

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T &= \begin{bmatrix} a^2(t, v) & \rho_{x,v}a(t, v)c(t, v) \\ \rho_{x,v}a(t, v)c(t, v) & c^2(t, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{0,1,1} + c_{1,1,1}v & c_{0,1,2} + c_{1,1,2}v \\ c_{0,2,1} + c_{1,2,1}v & c_{0,2,2} + c_{1,2,2}v \end{bmatrix}. \quad (8.37) \end{aligned}$$

Con $a(t, v) = \sqrt{v}$ determinado anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2(t, v) &= (\sqrt{v})^2 = c_{0,1,1} + c_{1,1,1}v, \\ \rho_{x,v}a(t, v)c(t, v) &= \rho_{x,v}\sqrt{v}c(t, v) = c_{0,1,2} + c_{1,1,2}v, \\ c^2(t, v) &= c_{0,2,2} + c_{1,2,2}v. \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones anteriores se verifican cuando $c(t, v) = \sqrt{v}$ o cuando $c(t, v)$ y $a(t, v)$ son funciones del tiempo deterministas.

El «generador» de un modelo SV, para $\mathbf{X} = [X_1(t), X_2(t)]^T =: [X(t), v(t)]^T$, viene dado por

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^2 \bar{\mu}_i(t, \mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}) \bar{\sigma}(t, \mathbf{X})^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}.$$

Entonces, aplicando el teorema de Feynman-Kac, la correspondiente EDP para $V(t, \mathbf{X})$ es

$$\frac{\partial}{\partial t} V + \mathcal{A}V - rV = 0,$$

con su correspondiente solución

$$V(t, \mathbf{X}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, \mathbf{X}) | \mathcal{F}(t)],$$

y condición final $V(T, \mathbf{X}) = H(T, \mathbf{X})$.

Dinámica de Heston dentro de la clase DA

La dinámica de Heston de (8.18), con $X(t) = \log S(t)$, viene dada por el sistema de EDEs

$$\begin{cases} dX(t) = \left(r - \frac{1}{2}v(t) \right) dt + \sqrt{v(t)} dW_x(t), \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)} dW_v(t), \end{cases} \quad (8.38)$$

con $dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}dt$. El modelo de (8.38) es afín. Para confirmar la afinidad de la matriz de covarianzas, podemos expresar el modelo de Heston en función de dos movimientos brownianos independientes, como en la representación (7.6), esto es

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dv(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \frac{1}{2}v(t) \\ \kappa(\bar{v} - v(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 \\ \rho_{x,v}\gamma\sqrt{v(t)} & \gamma\sqrt{(1 - \rho_{x,v}^2)v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{W}_x(t) \\ d\tilde{W}_v(t) \end{bmatrix}$$

Con la notación de (7.52), tenemos que

$$\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))^T = \begin{bmatrix} v(t) & \rho_{x,v}\gamma v(t) \\ \rho_{x,v}\gamma v(t) & \gamma^2 v(t) \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

que es afín con respecto a las variables $\mathbf{X}(t) = [X(t), v(t)]^T$, para γ y $\rho_{x,v}$ constantes.

8.3.2. Función característica descontada de Heston

La función característica descontada de Heston es de la forma

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) := \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r(T-t) + i\mathbf{u}^T \mathbf{X}(T)) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \exp(\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)\mathbf{X}(t)), \end{aligned} \quad (8.40)$$

con $\mathbf{u}^T = [u, u_2]^T$, $\tau = T - t$, $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \tau) = [\bar{B}(\mathbf{u}, \tau), \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)]^T$. En tiempo T , utilizando $\mathbf{u} = [u, 0]^T$, tenemos

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; T, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{iu^T \mathbf{X}(T)} | \mathcal{F}(T)] = e^{iu^T \mathbf{X}(T)} = e^{iuX(T)}. \quad (8.41)$$

De acuerdo con (8.41), sabemos, en términos de τ , que $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$, $\bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$. Los siguientes lemas definen las EDOs de Riccati como en (7.54) y detallan su solución.

Lema 8.3.1 (EDOs de Heston)

Las funciones $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$, $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ en (8.40) satisfacen el sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{B}}{d\tau} &= 0, \quad \bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu, \\ \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= \bar{B}(\bar{B} - 1)/2 - (\kappa - \gamma\rho_{x,v}\bar{B})\bar{C} + \gamma^2\bar{C}^2/2, \quad \bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= \kappa\bar{v}\bar{C} + r(\bar{B} - 1), \quad \bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0, \end{aligned}$$

con los parámetros κ, γ, \bar{v} , r y $\rho_{x,r}$ del modelo de Heston (8.38). ◀

Resumimos la demostración del Lema 8.3.1. Sea $\mathbf{X}(t) = [X(t), v(t)]^T$, la solución $\phi_{\mathbf{X}} := \phi_{\mathbf{X}}(u; t, T)$ satisface la EDP

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X} + \kappa(\bar{v} - v(t))\frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial v} + \frac{1}{2}\gamma^2 v\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial v^2} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X^2} \\ &\quad + \rho_{x,v}\gamma v\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X \partial v} - r\phi_{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (8.42)$$

sujeto a la condición $\phi_{\mathbf{X}}(u; T, T) = \exp(iuX(0))$, usando $\tau = 0$. Como la EDP en (8.42) es afín, su solución es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; t, T) = \exp(\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{B}(\mathbf{u}, \tau)X(t) + \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)v(t)). \quad (8.43)$$

Sustituyendo esta solución y agrupando las términos de X y v , obtenemos las EDOs del siguiente lema.

Lema 8.3.2 (Solución de la EDOs del modelo de Heston)

La solución del sistema de EDOs especificado en el Lemma 8.3.1, con sus condiciones iniciales, viene dada por

$$\begin{aligned}\bar{B}(\mathbf{u}, \tau) &= iu, \\ \bar{C}(\mathbf{u}, \tau) &= \frac{1 - e^{-D_1\tau}}{\gamma^2(1 - ge^{-D_1\tau})} (\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1), \\ \bar{A}(\mathbf{u}, \tau) &= r(iu - 1)\tau + \frac{\kappa\bar{v}\tau}{\gamma^2} (\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1) - \frac{2\kappa\bar{v}}{\gamma^2} \log\left(\frac{1 - ge^{-D_1\tau}}{1 - g}\right),\end{aligned}$$

con $D_1 = \sqrt{(\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu)^2 + (u^2 + iu)\gamma^2}$ y $g = \frac{\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1}{\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu + D_1}$. ◀

Demostración. Tenemos que $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau) = iu$ y, por tanto, necesitamos resolver un sistema de EDOs, dado por

$$\begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\tau} = a_1 - a_2\bar{C} + a_3\bar{C}^2, & \bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} = b_1 + b_2\bar{C}, & \bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0, \end{cases} \quad (8.44)$$

con $a_1 = -\frac{1}{2}(u^2 + iu)$, $a_2 = \kappa - \gamma\rho_{x,v}iu$ y $a_3 = \frac{1}{2}\gamma^2$, y $b_1 = r(iu - 1)$ y $b_2 = \kappa\bar{v}$. Primero, resolvemos el sistema (8.44) para \bar{C} , donde

$$a_1 - a_2\bar{C} + a_3\bar{C}^2 = a_3(\bar{C} - r_+)(\bar{C} - r_-),$$

con

$$r_{\pm} = \frac{1}{2a_3}(a_2 \pm D_1), \quad \text{y} \quad D_1 = \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}.$$

Mediante separación de variables, obtenemos

$$\frac{1}{a_3(\bar{C} - r_+)(\bar{C} - r_-)} d\bar{C} = d\tau,$$

lo que es equivalente a

$$\left(\frac{1/(r_+ - r_-)}{a_3(\bar{C} - r_+)} - \frac{1/(r_+ - r_-)}{a_3(\bar{C} - r_-)} \right) d\bar{C} = d\tau. \quad (8.45)$$

Integrando (8.45), resulta que

$$\frac{\log(\bar{C} - r_+)}{a_3(r_+ - r_-)} - \frac{\log(\bar{C} - r_-)}{a_3(r_+ - r_-)} = \tau + \tilde{c}. \quad (8.46)$$

Como $a_3(r_+ - r_-) = D_1$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$, la constante de integración \tilde{c} es

$$\tilde{c} = \frac{1}{D_1} \log(-r_+) - \frac{1}{D_1} \log(-r_-),$$

y, por lo tanto, tenemos

$$\frac{r_-}{r_+} = e^{-\tilde{c}D_1} =: g.$$

Resolviendo (8.46) para $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$, obtenemos

$$\bar{C}(\mathbf{u}, \tau) = \left(\frac{1 - e^{-D_1 \tau}}{1 - ge^{-D_1 \tau}} \right) r_- . \quad (8.47)$$

Con $a_1 = -\frac{1}{2}(u^2 + iu)$, $a_2 = \kappa - \gamma\rho_{x,v}iu$ y $a_3 = \frac{1}{2}\gamma^2$, la función $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ queda determinada. A continuación, resolvemos la EDO para $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$, como

$$\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) = b_1\tau + b_2 \int_0^\tau \bar{C}(\mathbf{u}, z) dz = b_1\tau + b_2 \left(\tau r_- - \frac{1}{a_3} \log \left(\frac{1 - ge^{-D_1 \tau}}{1 - g} \right) \right).$$

Con esto, se finaliza la demostración y, por tanto, la función característica descontada queda determinada. ■

Correlación y explosión de momentos

Introducimos los momentos del modelo de Heston y presentamos el problema de la «explosión de momentos», véase Andersen y Piterbarg (2007). La explosión de momentos no es deseable en la práctica, ya que es síntoma de que el modelo es inestable. Como hemos visto en el Apartado 1.1, a partir de la función $\phi_{\log S(t)}(u)$ del proceso transformado logarítmicamente, $X(t) = \log S(t)$, se pueden calcular los momentos de $S(t)$, para $t > 0$, utilizando $\mathbf{u} = [u, 0]^T$ en la función característica. A partir de la definición de la función característica de $\log S(t)$, esto es

$$\begin{aligned} \phi_{\log S(t)}(u) &= \mathbb{E} \left[e^{iu \log S(t)} \right] = \int_0^\infty e^{iu \log y} f_{S(t)}(y) dy \\ &= \int_0^\infty y^{iu} f_{S(t)}(y) = \mathbb{E} [(S(t))^{iu}] , \end{aligned} \quad (8.48)$$

y sustituyendo $u = -ik$, resulta que

$$\phi_{\log S(t)}(-ik) = \int_0^\infty y^k f_{S(t)}(y) \stackrel{d}{=} \mathbb{E} [S^k(t)] , \quad (8.49)$$

que es el momento k -ésimo de $S(t)$. Bajo el modelo de Heston, la función característica es

$$\phi_{\log S(T)}(u) = e^{iu \log S(t_0) + \bar{C}(u, \tau)v(t_0) + \bar{A}(u, \tau)} , \quad (8.50)$$

donde, de acuerdo con el Lema 8.3.1, se necesitan resolver tres EDOs para determinar las funciones $\bar{C}(u, \tau)$, $\bar{A}(u, \tau)$. En concreto, con $u = -ik$, la EDO para $\bar{C}(u, \tau)$ viene dada por

$$\frac{d\bar{C}}{d\tau} = \frac{1}{2}k(k-1) + (\gamma\rho_{x,v}k - \kappa)\bar{C} + \frac{1}{2}\gamma^2\bar{C}^2. \quad (8.51)$$

Como se ha demostrado en Andersen y Piterbarg (2007) y dependiendo del conjunto de parámetros, la solución de (8.51) y, por tanto, $\mathbb{E}[S^k(t)]$ puede volverse inestable, pudiendo incluso «explotar» en un tiempo finito. El lado derecho de (8.51) es un polinomio cuadrático, dado por

$$\frac{d\bar{C}}{d\tau} = a_1 + a_2\bar{C} + a_3\bar{C}^2 =: h(\bar{C}), \quad (8.52)$$

con $a_1 = \frac{1}{2}k(k-1)$, $a_2 = (\gamma\rho_{x,v}k - \kappa)$ y $a_3 = \frac{1}{2}\gamma^2$. El discriminante de $h(\bar{C})$, $D_h(\bar{C})$, se obtiene como

$$D_h(\bar{C}) = a_2^2 - 4a_1a_3 = (\gamma\rho_{x,v}k - \kappa)^2 - 4\frac{1}{2}k(k-1)\frac{1}{2}\gamma^2. \quad (8.53)$$

La existencia de soluciones está relacionada con las posiciones de las raíces de este polinomio. Podemos examinar para qué valores del parámetro $\rho_{x,v}$ el discriminante es positivo, esto es

$$D_h(\bar{C}) > 0 \iff (\gamma\rho_{x,v}k - \kappa)^2 > k(k-1)\gamma^2.$$

Después de simplificar, obtenemos la condición para el coeficiente de correlación $\rho_{x,v}$, dada por

$$\boxed{\rho_{x,v} < \frac{\kappa}{\gamma k} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}}.$$

Si la desigualdad anterior no se verifica, se puede esperar que $\mathbb{E}[S^k(t)] \rightarrow \infty$, $\forall k > 0$. Para garantizar que los momentos de $S(t)$ de orden más alto sean estables, se necesita incluso que la correlación $\rho_{x,v}$ converja a -1 .

8.4. Solución numérica para la EDP de Heston

Como la función característica descontada de Heston se conoce en forma cerrada, podemos resolver la fórmula de valoración en riesgo neutro, es decir, podemos calcular la esperanza descontada que resulta después de aplicar el teorema de Feynman-Kac.

8.4.1. El método COS para el modelo de Heston

Para el modelo de Heston, la fórmula de valoración COS como en (6.28), puede aplicarse directamente (véase Fang y Oosterlee (2011) para una explicación más detallada). Sin embargo, el método COS para el modelo de Heston se puede simplificar. Se puede proporcionar un vector de strikes como argumento en la fórmula COS para Heston, obteniendo un vector de precios de opciones europeas.

Al igual que para los procesos de Lévy, véase (6.48), la «vectorización» de la fórmula COS es posible debido a que, para $\mathbf{X}(t) = [X(t), v(t)]^T$, la función característica en $\mathbf{u} = [u, 0]^T$ se puede expresar como

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; t_0, T) = \varphi_H(u, T; v(t_0)) \cdot e^{iuX(t_0)}, \quad (8.54)$$

siendo $v(t_0)$ la varianza del subyacente en t_0 . La parte relativa al modelo de Heston, $\varphi_H(u, T; v(t_0))$, viene dada por

$$\begin{aligned} \varphi_H(u, T; v(t_0)) &= \exp \left[\left(iur\tau + \frac{v(t_0)}{\gamma^2} \left(\frac{1 - e^{-D_1\tau}}{1 - ge^{-D_1\tau}} \right) (\kappa - i\rho_{x,v}\gamma u - D_1) \right) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{\kappa\bar{v}}{\gamma^2} \left(\tau(\kappa - i\rho_{x,v}\gamma u - D_1) - 2 \log \left(\frac{1 - ge^{-D_1\tau}}{1 - g} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

con $\tau = T - t_0$, y

$$D_1 = \sqrt{(\kappa - i\rho_{x,v}\gamma u)^2 + (u^2 + iu)\gamma^2} \quad \text{y} \quad g = \frac{\kappa - i\rho_{x,v}\gamma u - D_1}{\kappa - i\rho_{x,v}\gamma u + D_1}.$$

Observación 8.4.1 (Función característica de valores complejos)

Esta función característica descontada es única, ya que evaluamos el término $\sqrt{(x + yi)}$ de modo que la parte real es no negativa, y restringimos el logaritmo complejo a su rama principal. En ese caso, la función característica resultante es la correcta, para todo parámetro complejo, u , en el rango de la función característica descontada, como se ha demostrado en Lord y Kahl (2010). ▲

Sea $\mathbf{X}(t) = \log \frac{S(t)}{\mathbf{K}}$, con \mathbf{K} un vector de strikes. La fórmula COS para el modelo de Heston viene dada por

$$V(t_0, \mathbf{x}) \approx \mathbf{K}e^{-r\tau} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_H \left(\frac{k\pi}{b-a}, T; v(t_0) \right) H_k \exp \left(ik\pi \frac{\mathbf{X}(t_0) - a}{b-a} \right) \right\}, \quad (8.55)$$

con $\varphi_H(u, T; v(t_0))$ como en (8.54) y los restantes parámetros descritos anteriormente.

Los parámetros de cobertura Δ y Γ se pueden calcular de la misma manera que en las Ecuaciones (6.36) y (6.37). Para obtener la fórmula COS para Vega, $\frac{\partial V}{\partial v}$, bajo el modelo de Heston (8.55) se necesita evaluar

$$\frac{\partial V}{\partial v} \approx e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \varphi_H \left(\frac{k\pi}{b-a}, T; v(t_0) \right) \exp \left(ik\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \right\} \cdot H_k. \quad (8.56)$$

Por (8.54), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial v} \varphi_H \left(\frac{k\pi}{b-a}, T; v(t_0) \right) = \bar{C}(\mathbf{u}, \tau) \cdot \varphi_H \left(\frac{k\pi}{b-a}, T; v(t_0) \right),$$

donde $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ viene dado por (8.47).

Ejemplo 8.4.1 (Experimento numérico con el modelo de Heston)

Utilizamos el modelo de Heston y valoramos opciones call mediante el método COS, con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} S_0 &= 100, & K = 100, & r = 0, & q = 0, & \kappa = 1.5768, & \gamma = 0.5751, \\ \bar{v} &= 0.0398, & v_0 = 0.0175, & \rho_{x,v} = -0.5711, & \text{y } T = 1. \end{aligned} \quad (8.57)$$



Definimos el intervalo de integración mediante (6.45), que evita el cálculo de los cumulantes. El cumulante ζ_2 puede llegar a ser negativo para conjuntos de parámetros de Heston que no satisfacen la condición de Feller $2\bar{v}\kappa > \gamma^2$, siendo la razón para utilizar el intervalo simplificado.

Aquí, imitamos un procedimiento de calibración, en el cual se calculan muchos valores de opciones simultáneamente. Obtenemos el valor de la opción para 21 precios de strike consecutivos, $K = 50, 55, 60, \dots, 150$. Los resultados se presentan en la Tabla 8.2, donde se muestra el error máximo de entre todos los strikes. Con $N = 160$, el método COS puede valorar las 21 opciones de forma muy precisa en 3 milisegundos.

Tabla 8.2: *Convergencia de error y tiempo de CPU para la valoración de calls bajo el modelo de Heston mediante el método COS, para 21 strikes, con $T = 1$ y los parámetros de (8.57).*

| N | 32 | 64 | 96 | 128 | 160 |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tiempo CPU (ms) | 0.85 | 1.45 | 2.04 | 2.64 | 3.22 |
| err. abs. máx. | 1.43e-01 | 6.75e-03 | 4.52e-04 | 2.61e-05 | 4.40e-06 |



8.4.2. Modelo de Heston con parámetros definidos a trozos

Una de las extensiones más utilizadas del modelo de Heston, que mejora el ajuste en la calibración a datos de mercado, es el modelo de Heston con parámetros dependientes del tiempo, es decir, para $X(t) := \log S(t)$, el sistema tiene las dinámicas

$$\begin{cases} dX(t) = (r(t) - \frac{1}{2}v(t)) dt + \sqrt{v(t)} dW_x(t), \\ dv(t) = \kappa(t)(\bar{v}(t) - v(t))dt + \gamma(t)\sqrt{v(t)} dW_v(t), \end{cases}$$

con la correlación $dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}(t)dt$, y con los restantes parámetros estrictamente positivos y dependientes del tiempo. Si estos parámetros son funciones deterministas del tiempo, el modelo sigue perteneciendo a la clase de procesos afines. Entonces, la función característica para $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ viene dada por

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t_0, T) = \exp\left(\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u}, \tau)\mathbf{X}(t)\right),$$

con $\tau = T - t_0$, $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \tau) = [\bar{B}(\mathbf{u}, \tau), \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)]^T$.

Con $\mathbf{u} = [u, 0]^T$, resultando en $\bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$, se pueden escribir las EDOs de valor complejo² dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= \frac{1}{2}iu(iu - 1) - \left(\kappa(T - \tau) - \gamma(T - \tau)\rho_{x,v}(T - \tau)iu\right)\bar{C} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma^2(T - \tau)\bar{C}^2, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= \kappa(T - \tau)\bar{v}(T - \tau)\bar{C} + r(T - \tau)(iu - 1), \end{aligned}$$

con las condiciones $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$.

Como en este modelo de Heston generalizado aparecen parámetros dependientes del tiempo, las EDOs correspondientes no se pueden resolver analíticamente. Se puede utilizar cualquiera de los métodos numéricos para EDOs, como método de Runge-Kutta de cuarto orden, aunque el uso de estas técnicas puede aumentar el coste computacional.

Sin embargo, en la demostración del Lema 8.3.2, obtuvimos la solución para EDOs de Riccati genéricas con parámetros constantes, es decir, para un sistema genérico de EDOs dado por

$$\begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\tau} = c_1 - c_2\bar{C} + c_3\bar{C}^2, & \bar{C}(\mathbf{u}, 0) = c_0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} = a_1 + a_2\bar{C}, & \bar{A}(\mathbf{u}, 0) = a_0, \end{cases} \quad (8.58)$$

²La EDO para $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau)$ es trivial, con $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau) = iu$.

con las soluciondes para $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ dadas por

$$\begin{aligned}\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) &= a_0 + a_1 \tau + a_2 \left[\left(r_+ - \frac{D_1}{c_3} \right) \tau - \frac{1}{c_3} \log \left(\frac{g e^{-\tau D_1} - 1}{g - 1} \right) \right], \\ \bar{C}(\mathbf{u}, \tau) &= \frac{r_+ g e^{-\tau D_1} - r_-}{g e^{-\tau D_1} - 1},\end{aligned}$$

y donde

$$g = \frac{2c_3 c_0 - (c_2 - D_1)}{2c_3 c_0 - (c_2 + D_1)}, \quad r_{\pm} = \frac{1}{2c_3} (c_2 \pm D_1), \quad \text{y} \quad D_1 = \sqrt{c_2^2 - 4c_1 c_3},$$

con $a_1 = r(T - \tau)(iu - 1)$, $a_2 = \kappa(T - \tau)\bar{v}(T - \tau)$, $c_1 = 1/2iu(iu - 1)$, $c_2 = \kappa(T - \tau) - \gamma(T - \tau)\rho_{x,v}(T - \tau)iu$ y $c_3 = 1/2\gamma^2(T - \tau)$.

Empleando la idea de que las EDOs de Riccati en (8.58) son válidas para a_0 y c_0 no nulas, definimos un modelo de Heston con parámetros constantes a trozos r , κ , γ , $\rho_{x,v}$ y \bar{v} . Definimos una malla de tiempo $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \cdots \leq \tau_{N-1} \leq \tau_N = \tau$. En cada instante de tiempo τ_i , $i = 0, \dots, N$, los parámetros del modelo se evalúan en $T - \tau_i$, de modo que en el primer intervalo $[0, \tau_1]$ tenemos los parámetros de $[T - \tau_1, T]$, en el segundo intervalo $[\tau_1, \tau_2]$ tenemos los parámetros de $[T - \tau_2, T - \tau_1]$, etc.

Tener parámetros constantes a trozos implica que la función característica puede evaluarse de forma recursiva. En el primer intervalo $[0, \tau_1]$, utilizamos las condiciones iniciales $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$. Cuando se ha determinado la solución analítica correspondiente, como en (8.58), obtenemos dos soluciones, a_1 y c_1 . Después, para el intervalo $[\tau_1, \tau_2]$, asignamos las condiciones iniciales $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau_1) = c_1$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau_1) = a_1$. Este procedimiento se repite hasta el último tiempo, donde los valores iniciales c_{N-1} y a_{N-1} se utilizan para evaluar $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau_N)$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau_N)$.

8.4.3. El modelo de Bates

El modelo de Bates (1996) es otra generalización del modelo de Heston, en la que se añaden saltos al proceso de precios de Heston. El modelo se describe mediante el sistema de EDEs

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]) dt + \sqrt{v(t)} dW_x(t) + (e^J - 1) dX_{\mathcal{P}}(t), \\ dv(t) = \kappa (\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v(t), \end{cases}}$$

con $X_{\mathcal{P}}(t)$ un proceso de Poisson de intensidad ξ_p , y magnitud de saltos, J , siguiendo una distribución normal de media μ_J y varianza σ_J^2 , i.e. $J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$. Se asume que $X_{\mathcal{P}}(t)$ es independiente de los movimientos brownianos y de la magnitud de los saltos.

Aplicando la transformación logarítmica, el modelo de Bates resulta en

$$\begin{cases} dX(t) = \left(r - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\right) dt + \sqrt{v(t)} dW_x(t) + J dX_{\mathcal{P}}(t), \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v(t). \end{cases}$$

La EID del modelo de Bates para $V = V(t, X)$, bajo la medida de riesgo neutro, viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}v - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\right) \frac{\partial V}{\partial X} + \kappa(\bar{v} - v(t)) \frac{\partial V}{\partial v} \\ + \frac{1}{2}\gamma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \rho_{x,v} \gamma v \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial v} + \xi_p \mathbb{E}[V(t, X + J)] = (r + \xi_p)V. \end{aligned} \tag{8.59}$$

El modelo de Bates pertenece a la clase de procesos de difusión con saltos, véase Apartado 7.3.2. Por tanto, se puede obtener la correspondiente función característica descontada para $\mathbf{X}(t) = [X(t), v(t)]^T$. El modelo se basa en la misma matriz de covarianzas que el modelo de Heston, véase (8.39). El componente de salto, como en (7.66), viene dado por $\bar{\xi}_p(t, \mathbf{X}(t)) = \xi_{p,0} + \xi_{p,1}\mathbf{X}(t) = \xi_p$, y a_0 y a_1 son

$$a_0 = \begin{bmatrix} r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] \\ \kappa \bar{v} \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}. \tag{8.60}$$

Con $\mathbf{J} = [J, 0]$ y $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \tau) = [\bar{B}(\mathbf{u}, \tau), \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)]^T$, las relaciones de afinidad en la clase de procesos DAS proporcionan el sistema de EDOs descrito en el siguiente lema.

Lema 8.4.1 (EDOs de Bates)

Las funciones $\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau)$, $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ en (7.67) satisfacen el sistema de EDOs dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{B}}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= \frac{1}{2}\bar{B}(\bar{B} - 1) - (\kappa - \gamma\rho_{x,v}\bar{B})\bar{C} + \frac{1}{2}\gamma^2\bar{C}^2, \\ \frac{d\bar{A}_{\text{Bates}}}{d\tau} &= \kappa\bar{v}\bar{C} + r(\bar{B} - 1) - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\bar{B} + \xi_p \mathbb{E}[e^{J\bar{B}} - 1], \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $\bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu$, $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$ y $A_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, 0) = 0$, y donde los parámetros κ, γ, \bar{v} , r y $\rho_{x,r}$ son los del modelo de Heston (8.38). ◀

Las funciones $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau)$ y $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ son las mismas que para el modelo de Heston estándar. Los modelos de Bates y Heston solo se diferencian en $\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau)$, que, en el modelo de Bates consta de componentes de salto. Como los saltos J en el modelo de Bates están normalmente distribuidos, con media μ_J y varianza σ_J^2 , las dos esperanzas en las EDOs de $\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau)$ vienen dadas por

$$\mathbb{E}[e^J - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1, \quad \mathbb{E}[e^{iuJ} - 1] = e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1,$$

de modo que la EDO para $\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau)$ es

$$\frac{d\bar{A}_{\text{Bates}}}{d\tau} = \frac{d\bar{A}}{d\tau} - \xi_p i u \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) + \xi_p \left(e^{i u \mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1 \right),$$

con $\frac{d\bar{A}}{d\tau}$ obtenido para el modelo de Heston en (8.3.2). Entonces, la solución para $\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau)$ también se puede obtener como

$$\bar{A}_{\text{Bates}}(\mathbf{u}, \tau) = \bar{A}(\mathbf{u}, \tau) - \xi_p i u \tau \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) + \xi_p \tau \left(e^{i u \mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1 \right).$$

Ejemplo 8.4.2 (Modelo de Bates: volatilidad implícita)

Los tres gráficos de la Figura 8.6 proporcionan una idea del impacto que tienen los parámetros de salto en el modelo de Bates sobre la volatilidad implícita. En el experimento hemos utilizado $T = 1$ y $S_0 = 100$; los parámetros del modelo de Heston son $\kappa = 1.2$, $\bar{v} = 0.05$, $\gamma = 0.05$, $\rho_{x,v} = -0.75$, $v_0 = 0.05$ y $r = 0$. Se varían los tres parámetros de salto, es decir, la intensidad ξ_p , la media de los saltos μ_J y la volatilidad de los saltos σ_J ; siendo sus valores de referencia $\mu_J = 0$, $\sigma_J = 0.2$ y $\xi_p = 0.1$, respectivamente.

La Figura 8.6 muestra que cambios en los parámetros ξ_p y σ_J reproducen patrones similares en las volatilidades implícitas. Al incrementar el valor del parámetro, aumenta la curvatura de las mismas. Los gráficos también indican que las volatilidades implícitas del modelo de Bates pueden ser mayores que las obtenidas por el modelo de Heston. Esto se explica por la presencia de un componente adicional de salto no correlado en la dinámica del modelo de Bates, que puede incrementar la varianza «realizada» del activo. Un aumento de la volatilidad del activo incrementa el precio de la opción, ya que es más probable que la opción termine in-the-money.

En el caso del parámetro μ_J , que representa la «ubicación esperada» de los saltos, las volatilidades implícitas presentan un comportamiento irregular. El parámetro μ_J puede tomar valores positivos o negativos, ya que determina si las trayectorias del activo tendrán saltos ascendentes o descendentes. Para valores negativos de μ_J se espera que el precio del activo tenga más movimientos a la baja, mientras que para valores positivos de μ_J se esperan saltos positivos en el activo.

Aunque el modelo Bates parece un modelo muy fino desde el punto de vista teórico, debemos tener en cuenta que, en general, es difícil conseguir una cobertura intuitiva bajo modelos de difusión con saltos, además de la necesidad de calibrar bastantes parámetros. Algunos de ellos pueden tener un efecto muy similar, por lo que existe el riesgo de que se sobreajusten y, por lo tanto, de que soluciones con distintos parámetros den lugar a curvas de volatilidad implícita muy similares. La presencia de muchos parámetros no siempre es deseable en la industria financiera, ya que puede ocurrir que las soluciones no sean muy elegantes (con muchos parámetros podemos ajustar todo tipo de características, pero el poder de predicción del modelo puede quedar limitado). ♦

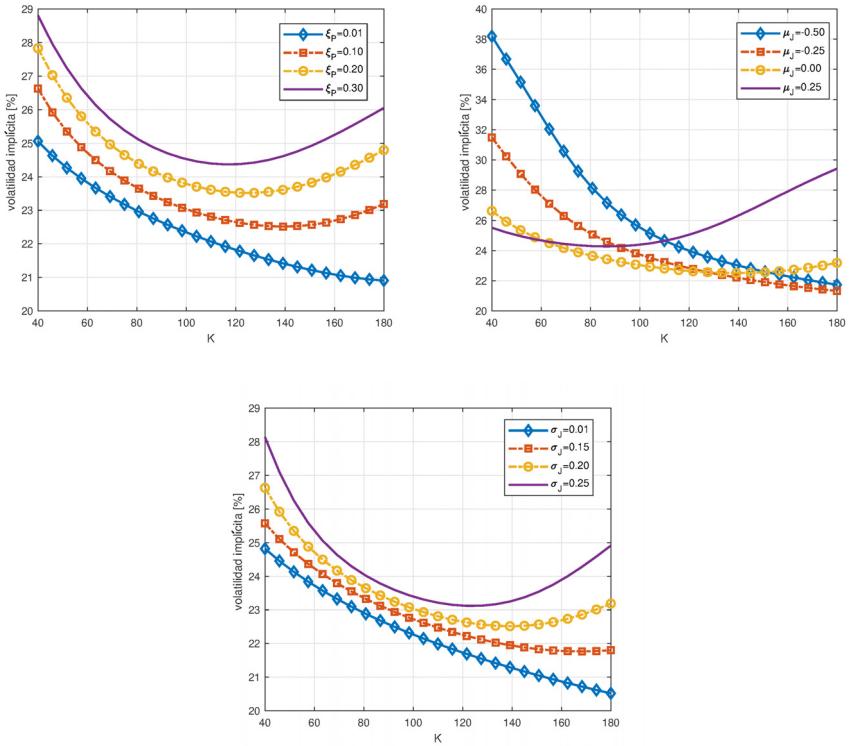


Figura 8.6: Influencia de los parámetros de salto sobre las volatilidades implícitas en el modelo de Bates. Arriba a la izquierda: impacto de ξ_p . Arriba a la derecha: impacto de μ_J . Abajo: impacto de σ_J .



8.5. Ejercicios

Ejercicio 8.1 Dado el proceso $X(t)$, que evoluciona de acuerdo con la dinámica

$$dX(t) = (2\mu X(t) + \sigma^2)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t), \quad X(t_0) = X_0.$$

Obtener la EDE según la que evoluciona el proceso transformado, $Y(t) = \sqrt{X(t)}$.

Ejercicio 8.2 Analizar el modelo de Schöbel-Zhu en términos de la factorización de Cholesky y la matriz de covarianzas instantánea. Mostrar que el sistema de Schöbel-Zhu es un sistema afín.

Ejercicio 8.3 El modelo de Schöbel-Zhu evoluciona de acuerdo con el proceso de volatilidad $\sigma(t)$. Obtener la distribución del correspondiente proceso de varianza $v(t) = \sigma^2(t)$.

Ejercicio 8.4 Con $\gamma = 0$, el modelo de Heston se convierte en el modelo de Black-Scholes con un parámetro de volatilidad dependiente del tiempo $\sigma(t)$. Obtener la función $\sigma(t)$ para este caso. Mostrar el comportamiento de la volatilidad implícita de Black-Scholes variando los parámetros κ, \bar{v} y v_0 .

Ejercicio 8.5 Con la ayuda del lema de Itô multidimensional, probar que, efectivamente, el enfoque de martingala resulta en la ecuación en derivadas parciales de Heston.

Ejercicio 8.6 Confirmar que las EDOs del Lema 8.3.2 son correctas.

Ejercicio 8.7 Calcular, utilizando el método COS, las griegas delta, gamma y vega para el modelo de Heston, y comparar los resultados con las aproximaciones por diferencias finitas. Emplear los valores de los parámetros del modelo de Heston considerados en el Ejemplo 8.4.1.

Ejercicio 8.8 Considerar el modelo de Heston con vencimiento $T = 4$, tipo de interés constante $r = 0.05$, varianza inicial $v(t_0) = 0.02$ y precio inicial $S(t_0) = 100$, y con los parámetros constantes a trozos dados por

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= 1.3\mathbb{1}_{0 \leq t < 1} + 0.9\mathbb{1}_{1 \leq t < 2} + 0.8\mathbb{1}_{2 \leq t < 3} + 0.7\mathbb{1}_{3 \leq t < 4}, \\ \bar{v}(t) &= 0.21\mathbb{1}_{0 \leq t < 1} + 0.14\mathbb{1}_{1 \leq t < 2} + 0.12\mathbb{1}_{2 \leq t < 3} + 0.08\mathbb{1}_{3 \leq t < 4}, \\ \gamma(t) &= 0.3\mathbb{1}_{0 \leq t < 1} + 0.2\mathbb{1}_{1 \leq t < 2} + 0.15\mathbb{1}_{2 \leq t < 3} + 0.1\mathbb{1}_{3 \leq t < 4}, \\ \rho_{x,v}(t) &= -0.7\mathbb{1}_{0 \leq t < 1} - 0.5\mathbb{1}_{1 \leq t < 2} - 0.2\mathbb{1}_{2 \leq t < 3} - 0.1\mathbb{1}_{3 \leq t < 4}.\end{aligned}$$

Realizar las siguientes tareas:

- Obtener la función característica para este modelo con parámetros constantes a trozos.
- Emplear la función característica para recuperar la función de densidad de probabilidad.
- Utilizar el método COS con $N = 500$ términos en la expansión y dominio de integración $[-16, 16]$ para valorar una opción put con strikes en el rango $K = \{50, 55, \dots, 295, 300\}$.
- Determinar los precios de las correspondientes opciones call mediante la paridad put-call.

- e. Implementar una simulación de Monte Carlo con 100.000 trayectorias y 100 pasos de tiempo (Euler-Maruyama). Para evitar la aparición de números complejos, considerar el siguiente truncamiento $v(t_i) = \max(v(t_i), 0)$ en cada paso de tiempo t_i . Este esquema de Monte Carlo se presentará en el siguiente capítulo. Comparar los resultados con los obtenidos mediante el método COS.

Ejercicio 8.9 Mostrar que, para un proceso CIR, $v(t)$, dado por

$$dv(t) = \kappa(v(t_0) - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW(t),$$

se verifica la igualdad

$$\mathbb{E}[v(t)v(s)] = v_0^2 + v_0 e^{-\kappa t} \gamma^2 \frac{e^{\kappa s} - e^{-\kappa s}}{2\kappa}, \quad \text{for } s \leq t. \quad (8.61)$$

Ejercicio 8.10 Bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , donde todos los activos subyacentes son martingalas con respecto a la cuenta de ahorros $M(t)$, con $dM(t) = rM(t)dt$, el modelo de Heston, en términos de movimientos brownianos independientes, se define como

$$\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= rdt + \sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_x(t), \\ dv(t) &= \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}\left[\rho_{x,v}d\widetilde{W}_x(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2}d\widetilde{W}_v(t)\right]. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Obtener la dinámica del modelo bajo la medida del activo \mathbb{Q}^S , bajo la cual todos los activos son martingalas con respecto al proceso de precios $S(t)$ en (8.62). Se deben seguir los siguientes pasos:

- a. Definir un proceso $Y(t) = M(t)/S(t)$ y mostrar que su dinámica viene dada por

$$dY(t)/Y(t) = v(t)dt - \sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_x(t).$$

- b. Definir otro movimiento browniano, $\widetilde{W}_x^S(t)$, para el cual el proceso $Y(t)$ es una martingala, esto es, mostrar que

$$d\widetilde{W}_x^S(t) = \sqrt{v(t)}dt - d\widetilde{W}_x(t).$$

- c. Utilizar la transformación de la medida obtenida para mostrar que el modelo de Heston bajo la medida \mathbb{Q}^S es

$$\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= (r + v(t))dt - \sqrt{v(t)}dW_x^S(t), \\ dv(t) &= \kappa^*(\bar{v}^* - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^S(t), \end{aligned}$$

con parámetro de correlación $\rho_{x,v}^* = -\rho_{x,v}$, y $\kappa^* = \kappa - \rho_{x,v}\gamma$ y $\bar{v}^* = \kappa\bar{v}/(\kappa - \rho_{x,v}\gamma)$.

- d. Empleando la técnica de cambio de medida del Apartado 7.2.2 y $d\widetilde{W}_x^S(t) = -dW_x^S(t)$, mostrar que el modelo de Heston, bajo la medida del activo \mathbb{Q}^S , está gobernado por el sistema de EDEs

$$\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= (r + v(t))dt + \sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_x^S(t), \\ dv(t) &= \kappa^*(\bar{v}^* - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_v^S(t), \end{aligned}$$

con $d\widetilde{W}_x^S(t)d\widetilde{W}_v^S(t) = \rho_{x,v}dt$, $\kappa^* = \kappa - \rho_{x,v}\gamma$ y $\bar{v}^* = \kappa\bar{v}/(\kappa - \rho_{x,v}\gamma)$.

Ejercicio 8.11 Utilizar el método COS para recuperar la función de densidad de probabilidad del modelo de Bates. Comparar la densidad del modelo Bates con la densidad del modelo Heston. Emplear los valores de los parámetros del modelo de Heston del Ejemplo 8.4.1. Variar los parámetros de salto del modelo Bates y sacar conclusiones sobre su efecto en las colas de la distribución.

CAPÍTULO 9

Simulación de Monte Carlo

En este capítulo:

Este capítulo aborda el método de Monte Carlo y presenta diferentes procedimientos para «simular trayectorias» del activo. En el **Apartado 9.1** se proporciona una introducción básica a la discretización de Monte Carlo. En el **Apartado 9.2** se detallan los «esquemas de discretización» para EDEs de Euler estocástico y Milstein, poniendo especial énfasis en la obtención del esquema de Milstein. Sin embargo, la aplicación del esquema de Euler al proceso CIR puede resultar en trayectorias no deseadas y poco realistas, debido a que el proceso CIR garantiza la no negatividad mientras que la discretización de Euler básica no lo hace. En el **Apartado 9.3** introducimos algunas discretizaciones alternativas para este caso y, en el **Apartado 9.4** las generalizamos para el sistema de EDEs con volatilidad estocástica de Heston. El cálculo de las griegas de la opción mediante Monte Carlo se describe en el **Apartado 9.5**.

Palabras clave de este capítulo: simulación de Monte Carlo, integración estocástica, discretización de Euler, discretización de Milstein, proceso CIR, simulación exacta, esquema QE, modelo de Heston.

9.1. Fundamentos de Monte Carlo

Los métodos de integración de Monte Carlo son métodos de muestreo, basados en la teoría de la probabilidad. Combinan ensayos y aleatoriedad para revelar información, pudiéndose aplicar a una amplia gama de problemas. En este capítulo nos centraremos en la valoración de derivados financieros. Boyle (1977) escribió un primer artículo que abogaba por el uso de métodos de Monte Carlo para la valoración de opciones, véase Boyle *et al.* (1997).

En el contexto de las finanzas cuantitativas, los métodos de Monte Carlo se aplican de la siguiente manera. En primer lugar, se generan trayectorias estocásticas del activo, bajo la medida de riesgo neutro (o cualquier otra medida forward). Para cada trayectoria aleatoria del activo, se puede calcular el valor correspondiente de la función de payoff, empleando el valor de la trayectoria del activo en el instante final T . Entonces, se obtiene una aproximación del valor de la opción en $t = t_0$ como la media descontada de todos los valores de payoff simulados.

Desde un punto de vista matemático, los métodos de Monte Carlo se basan en el teorema central del límite y la ley de los grandes números. Dado que el resultado de un experimento es un número aleatorio, la estructura del error que se comete con este método, tiene una distribución probabilística. Esto significa que la solución es, habitualmente, un valor esperado, que proviene del experimento de Monte Carlo con varianza.

El método de Monte Carlo es especialmente apropiado para valorar opciones «dependientes de la trayectoria». Consideramos una opción cuya función de payoff, $H(T, S)$, puede depender de la trayectoria de un activo subyacente $S(t)$, con $t_0 \leq t \leq T$. Entonces, el valor hoy de un derivado de estilo europeo viene dado, en aplicación del teorema de Feynman-Kac (Teorema 3.2.1), por

$$\begin{aligned} V(t_0, S_0) &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, S) | \mathcal{F}(t_0)] \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} H(T, y) f_S(T, y; t_0, S_0) dy, \end{aligned} \quad (9.1)$$

donde $S_0 = S(t_0)$, la esperanza $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ se toma bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , y $f_S(T, y; t_0, S_0)$ representa la función de densidad de probabilidad asociada a la dinámica general de Itô en riesgo neutro dada por

$$dS(t) = \bar{\mu}^{\mathbb{Q}}(t, S)dt + \bar{\sigma}(t, S)dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad t > t_0, \quad (9.2)$$

como en (3.19). Cuando la FDP no está disponible en forma cerrada, el método de Monte Carlo es un método de valoración apropiado y ventajoso. Mediante la aproximación y la simulación de la dinámica del activo, se approxima «implícitamente» su correspondiente FDP. Con un número lo suficientemente grande de trayectorias de precios del activo se puede estimar la FDP mediante un histograma, contando los precios del activo en tiempo T .

Las técnicas de simulación estocástica también son muy útiles para problemas de integración en alta dimensión, para los que las reglas de cuadratura

(«cubatura») no se pueden aplicar, ya que su coste computacional en cálculo y memoria se ve significativamente afectado por la «maldición de la dimensión» (esto es, con el aumento de la dimensión del problema se produce un crecimiento exponencial del número de puntos de integración en la malla del producto tensorial).

El algoritmo de Monte Carlo para aproximar el valor de la opción tiene los siguientes pasos:

1. Dividir el intervalo de tiempo $[0, T]$, tal que se obtienen los siguientes instantes de tiempo, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Los instantes de tiempo se definen como $t_i = \frac{i \cdot T}{m}$, $i = 1, \dots, m$, donde m es el número de pasos de tiempo. El paso de tiempo se denota por $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, donde la partición del tiempo no tiene por qué ser necesariamente uniforme.
2. Generar los valores del activo, $s_{i,j}$, teniendo en cuenta la dinámica en riesgo neutro del modelo subyacente. Nótese que el valor del activo $s_{i,j}$ tiene dos índices, $i = 1, \dots, m$ (pasos de tiempo) y $j = 1, \dots, N$, siendo N el número de trayectorias del activo generadas con Monte Carlo.
3. Calcular los N valores de payoff, H_j , y almacenar los resultados. En el caso de opciones europeas, tenemos $H_j = H(T, s_{m,j})$ mientras que, en el caso de opciones dependientes de la trayectoria, podemos tener $H_j = H(T, s_{i,j})$, $i = 1, \dots, m$.
4. Calcular el promedio de la forma

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, S) | \mathcal{F}(t_0)] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H_j.$$

El lado derecho se conoce como la «estimación de Monte Carlo».

5. Calcular el valor de la opción como

$$V(t_0, S) \approx e^{-r(T-t_0)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H_j.$$

6. Determinar el error estándar (desviación típica) asociado a los precios obtenidos en el paso 5.

Observación 9.1.1 (Error estándar en el método Monte Carlo)

Empleando el método Monte Carlo aproximamos la solución mediante una secuencia de realizaciones aleatorias, es decir, con N trayectorias de Monte Carlo, obtenemos la aproximación

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [H(T, S)] \approx \bar{H}_N(T, S) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H_j.$$

Por la ley fuerte de los grandes números sabemos que, para $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{H}_N(T, S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H(T, S)], \quad \text{con probabilidad } 1.$$

Para estimar el error que se comete debido a la utilización de un número finito de trayectorias de Monte Carlo, necesitamos calcular la varianza del estimador $\bar{V}_N(t_0, S)$, como

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}^{\mathbb{Q}}[\bar{H}_N(T, S)] &= \mathbb{V}\text{ar}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H_j\right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \mathbb{V}\text{ar}^{\mathbb{Q}}[H_j] \\ &\approx \frac{1}{N} \mathbb{V}\text{ar}^{\mathbb{Q}}[H(T, S)], \end{aligned} \quad (9.3)$$

bajo la suposición de que las muestras $s_{i,j}$ son generadas de manera independiente.

En la práctica, la varianza $\mathbb{V}\text{ar}^{\mathbb{Q}}[H(T, S)]$ es desconocida. Sin embargo, esta se puede aproximar mediante la varianza muestral, \bar{v}_N^2 , que es un estimador insesgado, es decir,

$$\bar{v}_N^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (H_j - \bar{H}_N(T, S))^2.$$

Entonces, el error estándar, ϵ_N , se define como

$$\epsilon_N := \frac{\bar{v}_N}{\sqrt{N}}. \quad (9.4)$$

Observando (9.4) podemos deducir que, si el número de muestras se multiplica por 4, el error solo se divide por 2. \blacktriangle

En los siguientes apartados se presentan métodos de simulación basados en las trayectorias de Monte Carlo.

En este capítulo, a menos que se indique lo contrario, trabajaremos con precios de activos bajo la medida de riesgo neutro.

9.1.1. Integración de Monte Carlo

Como parte de la descripción básica de los métodos de Monte Carlo, consideramos ahora dos ejemplos de integración estocástica, en los que aparece un proceso de Wiener $W(t)$.

Primero, para una función determinista $g(t)$ dada, deseamos calcular numéricamente la integral

$$\int_0^T g(t) dW(t).$$

(9.5)

Para ello, definimos una partición del intervalo de integración, de la forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, $t_i = i\frac{T}{m}$, y $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

La aproximación numérica proporcionada por una técnica de integración estocástica se basa en la definición de la integral de Itô (Definición 1.3.1), concretamente en (1.24), donde omitimos el límite ($m \rightarrow \infty$), esto es

$$X(T) := \int_0^T g(t)dW(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (9.6)$$

Para simular los incrementos de Wiener utilizamos la relación

$$W(t_{i+1}) - W(t_i) \stackrel{d}{=} Z\sqrt{\Delta t}, \text{ con } Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

y recordamos que $\mathcal{N}(0, 1)$ es la distribución normal estándar. Podemos expresar (9.6) como

$$dX(t) = g(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (9.7)$$

y emplear un esquema de discretización tan simple como

$$x_{i+1} = x_i + g(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (9.8)$$

con $X(t_i) = x_i$.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, la integración de Monte Carlo se basa en la ley de los grandes números y en el teorema central del límite. Por lo tanto, necesitamos simular «muchas» trayectorias de integración entre 0 y T para obtener una precisión aceptable. Cada trayectoria se indica mediante un segundo índice j , que va de 1 a N (el número de trayectorias de Monte Carlo). Para cada intervalo y para cada trayectoria generamos un número aleatorio Z siguiendo la distribución normal estándar, esto es, cada vez que necesitamos aproximar $W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $\forall i, j$. Este procedimiento, generando N trayectorias de Monte Carlo, da lugar a dos índices, i, j , tal que

$$x_{i+1,j} = x_{i,j} + g(t_i) (W(t_{i+1,j}) - W(t_{i,j})), \quad j = 1, \dots, N, \quad (9.9)$$

con $X(t_i) = x_i$.

Ejemplo 9.1.1 (Integración por Monte Carlo de $\int_0^1 t^2 dW(t)$)

Comprobamos los resultados numéricos obtenidos mediante el método de Monte Carlo para un ejemplo concreto de (9.5), con $g(t) = t^2$ y $T = 1$. Observando la expresión (9.7), sabemos que $X(T)$ está normalmente distribuido con

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(1)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 t^2 dW(t)\right] = 0, \\ \mathbb{V}\text{ar}[X(1)] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\int_0^1 t^2 dW(t)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 t^2 dW(t)\right)^2\right] = \int_0^1 t^4 dt = 0.2. \end{aligned}$$

Estos resultados se obtienen a partir de los conceptos introducidos en las Ecuaciones (1.32) y (1.33) del Capítulo 1.

Utilizando la simulación de Monte Carlo para resolver este problema de integración estocástica, con $m = 100$ intervalos de tiempo y $N = 10\,000$ trayectorias simuladas, obtenemos los resultados que se muestran en la Figura 9.1.

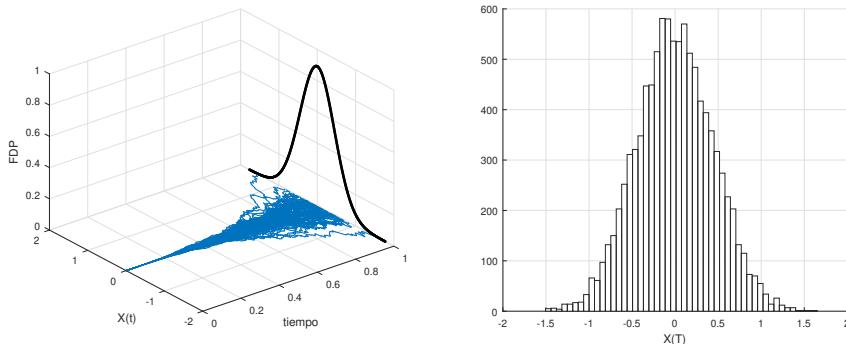


Figura 9.1: Ejemplo 9.1.1. Izquierda: trayectorias de Monte Carlo para $X(t)$. Derecha: histograma en $T = 1$.



Con los parámetros elegidos, tenemos que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 t^2 dW(t) \right] \approx -0.0037, \quad \text{Var} \left[\int_0^1 t^2 dW(t) \right] \approx 0.2047,$$

como una primera aproximación, posiblemente rudimentaria aunque bastante precisa, de la solución analítica. La solución se puede mejorar empleando intervalos de tiempo más cortos y/o aumentando el número de trayectorias. ♦

Ejemplo 9.1.2 (Integración por Monte Carlo de $\int_0^2 W(t)dW(t)$)

Como segundo ejemplo, recuperamos (1.41) del Ejemplo 1.3.1 en el Capítulo 1, donde se obtuvo la solución exacta para una integral estocástica que, además, contenía un movimiento browniano $W(t)$, esta es

$$X(T) = \int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Utilizando como ejemplo particular, $T = 2$, obtenemos, analíticamente, que

$$\mathbb{E}[X(2)] = \mathbb{E} \left[\int_0^2 W(t)dW(t) \right] = 0, \quad \text{Var}[X(2)] = \text{Var} \left[\int_0^2 W(t)dW(t) \right] = 2.$$

En este caso, $X(t)$ no sigue una distribución normal. Como la solución de $X(t)$ contiene un movimiento browniano al cuadrado, este seguirá una distribución chi-cuadrado no central desplazada. El término $-0.5T$ representa el desplazamiento que mueve la distribución hacia valores negativos.

Como antes, para aproximar la solución de $X(t)$, discretizamos su correspondiente EDE, $dX(t) = W(t)dW(t)$, mediante el esquema

$$x_{i+1} = x_i + W(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (9.10)$$

y generamos N trayectorias de la misma.

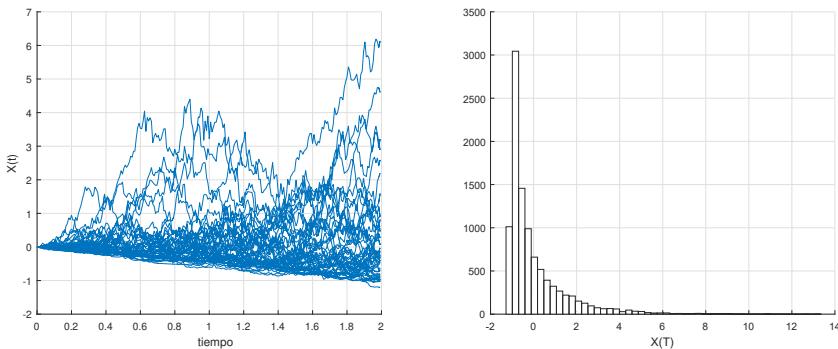


Figura 9.2: Ejemplo 9.1.2. Izquierda: trayectorias de Monte Carlo para $X(t)$. Derecha: histograma en $T = 2$.



La aproximación por Monte Carlo de la esperanza y la varianza, en forma de un histograma, se presenta en el gráfico de la derecha en la Figura 9.2, junto con algunas trayectorias discretas en el gráfico de la izquierda. ♦

Ejemplo 9.1.3 (Esperanza y varianza de $(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2$)

En la Observación 2.1.2 del Capítulo 2, proporcionamos un argumento heurístico para determinar que $dW^2 = dt$. Realizamos ahora un experimento numérico en el cual estimamos la esperanza y la varianza del término $(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2$, con respecto a la discretización en tiempo.

Los resultados, en la Figura 9.3, confirman que la varianza converge a 0 mucho más rápido que la esperanza, que converge a dt . ♦

Ejemplo 9.1.4 (Suavidad del payoff y convergencia de Monte Carlo)

En este ejemplo mostramos que la convergencia de Monte Carlo depende de la suavidad de la función en cuestión. Tenemos dos funciones, una no suave y otra suave, dadas por

$$g_1(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0}, \quad \text{y} \quad g_2(x) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(x),$$

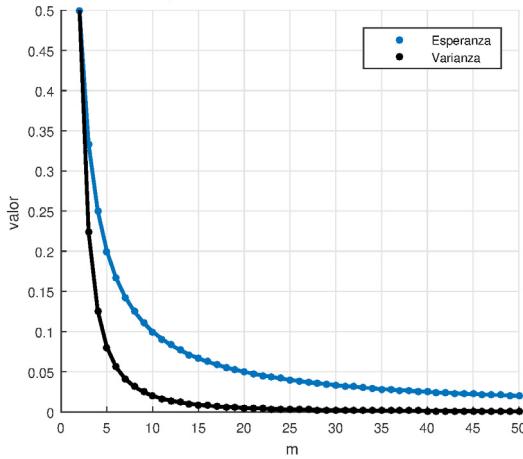


Figura 9.3: Esperanza y varianza en la aproximación numérica de dW^2 en función del parámetro m .



y consideramos las siguientes esperanzas, $\mathbb{E}[g_i(W(1))|\mathcal{F}(t_0)]$, para $i = 1, 2$, donde $W(1)$ es un movimiento browniano en tiempo $T = 1$. Las dos esperanzas se pueden resolver analíticamente, siendo iguales a $\frac{1}{2}$, ya que

$$\begin{aligned} V_1 := \mathbb{E}[g_1(W(1))|\mathcal{F}(t_0)] &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x \geq 0} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{2}, \\ V_2 := \mathbb{E}[g_2(W(1))|\mathcal{F}(t_0)] &= \int_{\mathbb{R}} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dF_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \\ &= \left. \frac{1}{2} F_{\mathcal{N}(0,1)}^2(x) \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definimos el error

$$\tilde{c}_i^N = \tilde{V}_i^N - V_i, \quad \text{con} \quad \tilde{V}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_i(w_j),$$

donde w_j son muestras de $W(1) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $V_i = 1/2$ es la solución exacta. En la Figura 9.4 se muestran los resultados obtenidos, donde se observa una mayor varianza del error para la función no suave $g_1(x)$.

Además, los resultados en la Figura 9.4 confirman que las funciones que son del tipo opción digital, por tanto, no suaves, pueden requerir de más trayectorias para alcanzar el mismo nivel de precisión que las funciones suaves. ♦

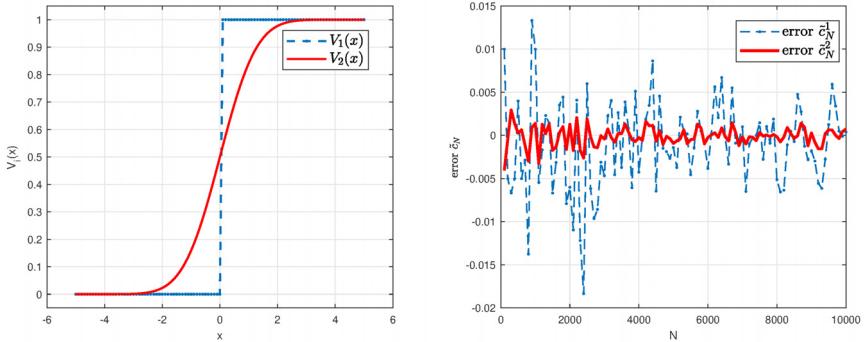


Figura 9.4: Relación entre la suavidad de una función y la convergencia de Monte Carlo. Izquierda: payoffs $V_1(x)$ y $V_2(x)$. Derecha: Errores \tilde{c}_N^1 y \tilde{c}_N^2 .



9.1.2. Simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas

La EDE genérica, que involucra un término de deriva $\bar{\mu}(t, X(t))$ y un término de volatilidad $\bar{\sigma}(t, X(t))$, se define como

$$dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t), \quad t > t_0, \quad (9.11)$$

y su solución viene dada por

$$X(T) = x_0 + \int_{t_0}^T \bar{\mu}(t, X(t))dt + \int_{t_0}^T \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t). \quad (9.12)$$

En general, si en los dos lados de (9.12) aparece el término $X(t)$, la EDE se tiene que resolver numéricamente. Solo para unos pocos procesos estándar se dispone de una solución explícita.

Para ello, definimos una malla equidistante de tiempo entre $[0, T]$ como se ha explicado anteriormente, obteniendo, para cada instante de tiempo t_i , la discretización

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\mu}(t, X(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t), \quad (9.13)$$

donde $x_i = X(t_i)$.

Para aproximar las integrales en (9.13), se pueden emplear esquemas de integración numérica. El orden de convergencia de estos esquemas de integración se define en el siguiente resultado.

Definición 9.1.1 (Convergencia)

Denotamos por x_m la aproximación para $X(T)$, donde Δt es el tamaño del paso de tiempo y m se corresponde con el último elemento de la discretización, $t_i = i \cdot T/m$, $i = 0, \dots, m$. Entonces, la aproximación x_m converge «en un sentido fuerte» a $X(T)$, con orden $\alpha > 0$, si

$$\epsilon^s(\Delta t) := \mathbb{E}^\mathbb{Q}[|x_m - X(T)|] = O(\Delta t^\alpha).$$

Para una función suficientemente suave $g(\cdot)$, la aproximación x_m converge «en un sentido débil» a $X(T)$, con respecto a $g(\cdot)$, con orden $\beta > 0$, si

$$\epsilon^w(\Delta t) := |\mathbb{E}^\mathbb{Q}[g(x_m)] - \mathbb{E}^\mathbb{Q}[g(X(T))]| = O(\Delta t^\beta).$$

En otras palabras, un método de integración numérica converge en un sentido fuerte si los precios del activo convergen, mientras que la convergencia débil implica una aproximación convergente de la distribución de probabilidad de $X(T)$, dado un tiempo T . ◀

9.2. Esquemas de Euler estocástico y Milstein

En este apartado, estudiamos en detalle los esquemas de discretización de Euler estocástico y Milstein para EDEs. Además de introducir estos métodos, presentamos también sus propiedades de convergencia.

9.2.1. Esquema de Euler

El esquema de Euler estocástico o de Euler-Maruyama es un método de integración numérica sencillo, aplicado sobre las integrales definidas en (9.13). Este esquema aproxima (9.13) como

$$x_{i+1} \approx x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\mu}(t_i, x_i) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(t_i, x_i) dW(t).$$

Por tanto, en el esquema de Euler las integrales se aproximan por sus valores «en el límite izquierdo» del intervalo de integración. Dicho de otro modo, cada integrando se aproxima (o «congela») en su valor inicial, resultando

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + \bar{\mu}(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i) + \bar{\sigma}(t_i, x_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &\stackrel{d}{=} x_i + \bar{\mu}(t_i, x_i)\Delta t + \bar{\sigma}(t_i, x_i)W(\Delta t), \end{aligned} \tag{9.14}$$

donde x_i denota la aproximación de $X(t_i)$ y $x_0 = X(t_0)$.

La cantidad $W(\Delta t)$ está normalmente distribuida con media cero y varianza Δt , es decir, $W(\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Se puede obtener una muestra de esta distribución mediante la expresión $Z \cdot \sqrt{\Delta t}$, donde Z se genera a partir de una distribución normal estándar, esto es, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Entonces, la EDE discretizada en (9.14) se puede simular por medio de

$$x_{i+1} \approx x_i + \bar{\mu}(t_i, x_i)\Delta t + \bar{\sigma}(t_i, x_i)\sqrt{\Delta t}Z. \tag{9.15}$$

Ejemplo 9.2.1 (Esquema de Euler para el proceso MBG)

Empleando simulación de Monte Carlo, la discretización de Euler para el i -ésimo paso de tiempo y la j -ésima trayectoria del proceso MBG resulta en

$$s_{i+1,j} \approx s_{i,j} + rs_{i,j}\Delta t + \sigma s_{i,j} (W_{i+1,j} - W_{i,j}), \quad (9.16)$$

con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, para cualquier $i = 1, \dots, m$, $s_0 = S(t_0)$ y $j = 1, \dots, N$.

El proceso MBG, con dinámica $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, tiene solución exacta en el intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$, dada por

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right). \quad (9.17)$$

Para el ejemplo, tomamos $S(t_0) = 50$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ y determinamos el error de convergencia fuerte a vencimiento T , esto es

$$\epsilon^s(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |S_j(T) - s_{m,j}| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |S(t_0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_{m,j}} - s_{m,j}|,$$

para distintos valores de Δt , así como el error de convergencia débil, dado por

$$\begin{aligned} \epsilon^w(\Delta t) &= \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j(T) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_{m,j} \right| \\ &= \left| S(t_0) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_{m,j}} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_{m,j} \right|, \end{aligned}$$

donde m es el índice de tiempo, $t_m \equiv T$, y el índice j indica el número de trayectoria en la que se evalúan las soluciones de (9.17) y (9.16). Nótese que en este experimento es crucial emplear el mismo movimiento browniano para ambas ecuaciones, (9.17) y (9.16). Si los movimientos brownianos no fueran los mismos, no podríamos medir la convergencia fuerte, ya que las trayectorias aleatorias serían diferentes.

En la Figura 9.5 se presentan los resultados obtenidos para distintas granularidades, Δt , en la discretización. Postulamos que

$$\epsilon^s(\Delta t) \leq C \cdot (\Delta t)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}((\Delta t)^{\frac{1}{2}}).$$

En el lado derecho de la Figura 9.5, se puede observar claramente que, para el modelo de Black-Scholes, el esquema de Euler converge, en sentido fuerte, con orden $\frac{1}{2}$ y, en sentido débil, con orden 1. Para la demostración de este resultado numérico, consultar Kloeden y Platen (1992, 1995, 1999). En el lado izquierdo de la figura, se muestran las diferencias en las trayectorias producidas por la aproximación de Euler (9.16) con respecto al esquema exacto (9.17). ♦

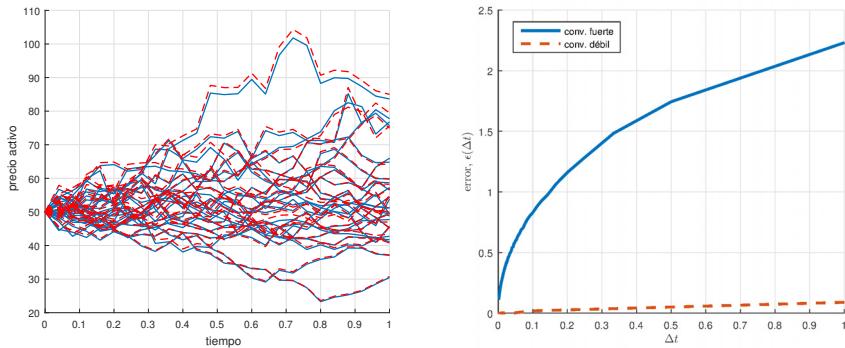


Figura 9.5: Simulación exacta (Ecuación 9.17) versus aproximación de Euler (Ecuación 9.16). Izquierda: trayectorias de Monte Carlo. Derecha: error de la discretización de Euler en función del paso de tiempo, Δt .



En el caso de ecuaciones diferenciales deterministas, se puede emplear la expansión de Taylor para definir discretizaciones que proporcionen un orden de convergencia más alto. Para el caso de ecuaciones diferenciales estocásticas se dispone de un procedimiento similar, que se basa en la expansión de Taylor estocástica, la denominada expansión de Itô-Taylor. La aproximación de Euler estocástico se basa en los dos primeros términos de esta expansión.

Para la EDE del proceso de Itô, $dX(t) = \bar{\mu}(t, X(t))dt + \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t)$, la discretización bajo el esquema de Milstein se obtiene añadiendo un tercer término a la discretización de Euler, esto es

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\mu}(t, X(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(t, X(t))dW(t) \\ &\approx x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\mu}(t_i, x_i)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(t_i, x_i)dW(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\sigma}(t_i, x_i)(W^2(\Delta t) - \Delta t) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(t_i, x_i), \end{aligned}$$

con $x_0 = X(t_0)$.

En el caso del proceso MBG en riesgo neutro, con $\bar{\mu}^Q(t, S(t)) = rS(t)$ y $\bar{\sigma}(t, S(t)) = \sigma S(t)$, la discretización de Milstein resulta en

$$\begin{aligned}s_{i+1} &\approx s_i + rs_i \Delta t + \sigma s_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\&+ \frac{1}{2} \sigma^2 s_i ((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - \Delta t) \\&\stackrel{d}{=} s_i + rs_i \Delta t + \sigma s_i \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} \sigma^2 s_i (\Delta t Z^2 - \Delta t).\end{aligned}$$

El término adicional de corrección en el esquema de Milstein mejora la velocidad de convergencia en comparación con la discretización de Euler para EDEs escalares. Para el modelo de Black-Scholes, así como para el modelo de volatilidad local, este esquema exhibe una convergencia de orden 1 tanto en el sentido fuerte como en el débil. Consultar Kloeden y Platen (1992, 1995, 1999) para la demostración.

Aunque el esquema de Milstein resulta perfectamente viable para el caso unidimensional, su extensión a problemas con EDEs multidimensionales no es trivial.

9.2.2. Esquema de Milstein

Proporcionamos una descripción detallada de la obtención del esquema de discretización de Milstein, comenzando con el proceso de Itô genérico (9.11), y su discretización (9.13). Por claridad, en algunas ocasiones emplearemos la notación

$$a_1(t) \equiv \bar{\mu}(t) := \bar{\mu}(t, X(t)), \quad \text{y} \quad a_2(t) \equiv \bar{\sigma}(t) := \bar{\sigma}(t, X(t)).$$

Como $\bar{\mu}(t)$ y $\bar{\sigma}(t)$ dependen de $X(t)$, véase (9.12), son, por tanto, variables estocásticas y podemos obtener su dinámica

$$da_k(t) = \frac{\partial a_k}{\partial t} dt + \frac{\partial a_k}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_k}{\partial X^2} (dX(t))^2, \quad k = 1, 2. \quad (9.18)$$

Integrando los procesos de (9.18), para $k = 1$ y $k = 2$, en el intervalo de tiempo $[t_i, t]$ con $t \leq t_{i+1}$, tenemos

$$\begin{aligned}a_k(t) &= a_k(t_i) + \int_{t_i}^t \left(\underbrace{\frac{\partial a_k}{\partial z} + \bar{\mu}(z) \frac{\partial a_k}{\partial X} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(z) \frac{\partial^2 a_k}{\partial X^2}}_{A_k(z)} \right) dz \\&+ \int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial a_k}{\partial X} dW(z),\end{aligned} \quad (9.19)$$

donde hemos definido las cantidades $A_k(z), k = 1, 2$. Sustituyendo (9.19) en (9.13), obtenemos

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\bar{\mu}(t_i) + \int_{t_i}^t A_1(z) dz + \int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\mu}(z)}{\partial X} dW(z) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\bar{\sigma}(t_i) + \int_{t_i}^t A_2(z) dz + \int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\sigma}(z)}{\partial X} dW(z) \right] dW(t). \end{aligned}$$

Despreciando los términos de orden alto, es decir, $(dt)^2 = 0$ y $dt \cdot dW(t) = 0$, (véase la Tabla 2.1 del Capítulo 2) la dinámica resultante es

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\mu}(t_i) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(t_i) dW(t) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\sigma}(z)}{\partial X} dW(z) \right) dW(t). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Las dos primeras integrales en la expresión anterior se pueden simplificar, esto es

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \bar{\mu}(t_i) \Delta t + \bar{\sigma}(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\sigma}(z)}{\partial X} dW(z) \right) dW(t). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Aplicamos la discretización de Euler a la integral interior del último término, es decir,

$$\int_{t_i}^t \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\sigma}(z)}{\partial X} dW(z) \approx \bar{\sigma}(t_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X}(t_i) (W(t) - W(t_i)).$$

Como ahora la expresión bajo la integral exterior en (9.21) es constante en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, se puede sacar fuera de la integral, resultando

$$\bar{\sigma}(t_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X}(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W(t) - W(t_i)) dW(t). \quad (9.22)$$

La integral estocástica del lado derecho se puede simplificar con la ayuda de la solución del Ejemplo 9.1.2, es decir,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (W(t) - W(t_i)) dW(t) = \frac{1}{2} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - \frac{1}{2} \Delta t.$$

Sustituyendo, la expresión en (9.22) viene dada por

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{\sigma}(z) \frac{\partial \bar{\sigma}(z)}{\partial X} dW(z) \right) dW(t) \approx \frac{1}{2} \bar{\sigma}(t_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X}(t_i) ((W(\Delta t))^2 - \Delta t).$$

Entonces, obtenemos la dinámica discreta

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + \bar{\mu}(t_i, x_i)\Delta t + \bar{\sigma}(t_i, x_i)W(\Delta t) \\ &+ \frac{1}{2}\bar{\sigma}(t_i, x_i)(W^2(\Delta t) - \Delta t)\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial X}(t_i, x_i), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $W(t_{i+1}) - W(t_i) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t}Z$, con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esta es la conocida discretización de Milstein

Ejemplo 9.2.2 (Esquema de Milstein)

Tomamos de nuevo, $S(t_0) = 50$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, y medimos las convergencias fuerte y débil como en el Ejemplo 9.2.1. Presentamos los resultados en la Figura 9.6.

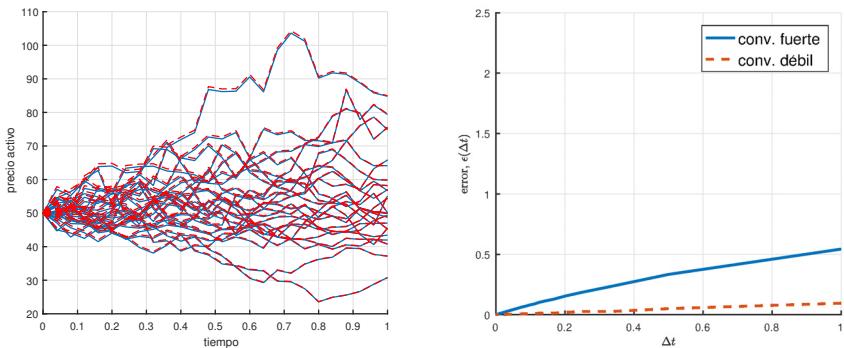


Figura 9.6: Simulación exacta (Ecuación 9.17) versus aproximación de Milstein. Izquierda: trayectorias de Monte Carlo. Derecha: error de la discretización de Milstein en función del paso de tiempo, Δt .



En la Figura 9.7, se compara la distribución de los errores producidos por los esquemas de Euler y Milstein. Observando los resultados de la Figura 9.6, podemos confirmar que, para este test,

$$\boxed{\epsilon^s(\Delta t) \leq C \cdot \Delta t = \mathcal{O}(\Delta t)},$$

con el esquema de Milstein.

Si comparamos las trayectorias de Euler con las de Milstein, a simple vista no podemos apreciar ninguna diferencia significativa, especialmente para valores pequeños de la volatilidad. ♦

Ejemplo 9.2.3 (Modelo BS: solución mediante Monte Carlo)

Tomamos $S(t_0) = 5$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.06$, $T = 1$ y número de pasos de tiempo $m = 1000$ (tal que $\Delta t = 1/1000$), y comparamos los valores de la opción

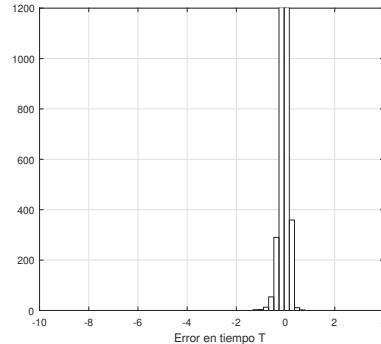
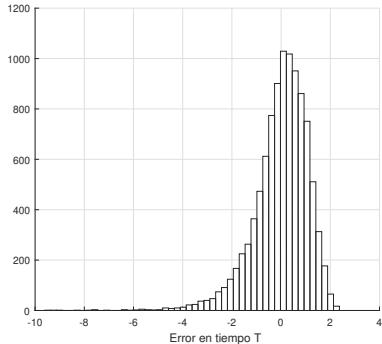


Figura 9.7: Comparación del error cometido por los esquemas de discretización para $T = 1$ con $\Delta t = 0.1$. Izquierda: esquema de Euler. Derecha: esquema de Milstein.



Tabla 9.1: Precios de opción call en función del número de trayectorias de Monte Carlo para las discretizaciones de Euler y Milstein.

| N | 100 | 1000 | 5000 | 10 000 | 50 000 | 100 000 | BS |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| Euler | 0.7709 | 0.7444 | 0.7283 | 0.7498 | 0.7328 | 0.7356 | 0.7359 |
| Milstein | 0.7690 | 0.7438 | 0.7283 | 0.7497 | 0.7327 | 0.7356 | |
| Euler | 2.8253 | 2.4062 | 2.4665 | 2.4411 | 2.4502 | 2.4469 | 2.4483 |
| Milstein | 2.8253 | 2.4062 | 2.4674 | 2.4406 | 2.4515 | 2.4462 | |



call obtenidos mediante Monte Carlo con la solución analítica a partir de la fórmula de Black-Scholes, con strike $K = S(t_0)$, es decir, $V_c(t_0, S(t_0)) = 0.7359$. La Tabla 9.1 muestra que Euler y Milstein necesitan un número similar de trayectorias para alcanzar resultados de valoración satisfactorios. Esto es un indicador de que los esquemas de Euler y Milstein exhiben el mismo orden de convergencia débil.

En la misma tabla, mostramos la convergencia para una opción digital, cuya solución exacta viene dada por (3.26). El precio de Black-Scholes de la opción digital es igual a 2.4483. Para este caso, también se observa una convergencia aceptable en términos de N , el número de trayectorias de Monte Carlo. ♦

Simulación de Monte Carlo con muestras bidimensionales

La simulación de Monte Carlo también permite generar fácilmente muestras multidimensionales. Para ello, es conveniente partir de una formulación de un sistema de EDEs con movimientos brownianos independientes, para los cuales los números aleatorios se pueden generar de manera independiente.

En la Figura 9.8, presentamos un experimento en 2D, donde se generan muestras bivariadas mediante Monte Carlo, mostrando también su correspondiente distribución (1D) marginal. En el experimento, con un fin meramente ilustrativo, se han generado 5000 muestras de Monte Carlo de $\mathbf{X} = [X, Y]^T$, con la configuración

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2, \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2, \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right), \text{ con } \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.5, \rho = 0.8.$$

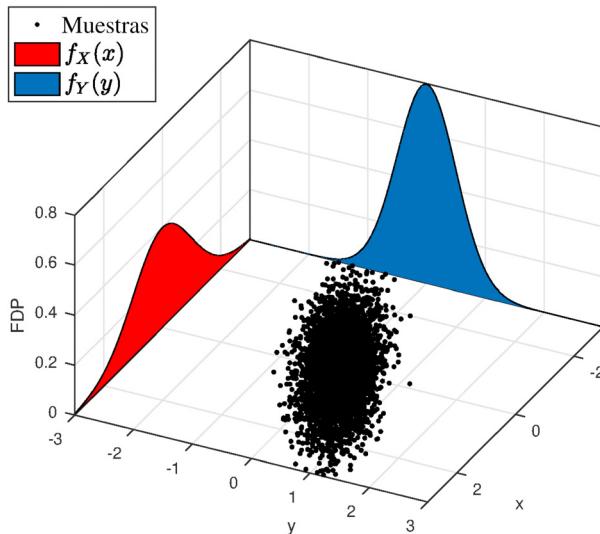


Figura 9.8: Muestras de Monte Carlo (puntos negros) y sus correspondientes distribuciones marginales.



Simulación de Monte Carlo y saltos

Detallamos ahora el esquema de discretización para el caso de un proceso de difusión con saltos. En el Apartado 5.1, hemos estudiado la dinámica de difusión con saltos para un activo, descrita por (5.10). Bajo la transformación logarítmica $X(t) = \log S(t)$, la dinámica viene dada por (véase (5.11))

$$dX(t) = \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) + J dX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t). \quad (9.23)$$

Asumiendo independencia entre la magnitud del salto J , el proceso de Poisson $X_{\mathcal{P}}(t)$ y el movimiento browniano $W(t)$, la solución de (9.23) es

$$\begin{aligned} X(T) &= X_0 + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W^{\mathbb{Q}}(T) + \sum_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(T)} J \\ &= X_0 + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W^{\mathbb{Q}}(T) + J X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(T). \end{aligned}$$

Así, utilizando que $S(t) = \exp(X(t))$, obtenemos

$$\begin{aligned} S(T) &= S(t_0) \exp \left(\left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W^{\mathbb{Q}}(T) + J X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(T) \right) \\ &= S(t_0) \exp \left(\left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W^{\mathbb{Q}}(T) \right) \prod_{k=1}^{X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(T)} e^J. \end{aligned}$$

Aplicando la discretización de Euler sobre el proceso de (9.23), tenemos que

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma (W^{\mathbb{Q}}(t_{i+1}) - W^{\mathbb{Q}}(t_i)) \\ &\quad + J (X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t_{i+1}) - X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t_i)). \end{aligned}$$

Los incrementos $X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t_{i+1}) - X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t_i)$ representan el número de saltos que ocurrirán en el intervalo de tiempo (t_i, t_{i+1}) . Como se define en (5.2), el número de saltos en un intervalo Δt sigue una distribución de Poisson con parámetro ξ_p . Dependiendo de la distribución de la variable de magnitud de salto J , la esperanza en la deriva será diferente, pero será una cantidad determinista. Recordamos que $X_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t)$ es un proceso de Poisson (véase Definición 5.1.2), de modo que la simulación del proceso viene dada por

$$x_{i+1} \stackrel{d}{=} x_i + \left(r - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z + J X_{\mathcal{P}}, \quad (9.24)$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, y $X_{\mathcal{P}}$ es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con

$$\mathbb{Q}[X_{\mathcal{P}} = k] = e^{-\xi_p \Delta t} (\xi_p \Delta t)^k / k!$$

Resumiendo, la simulación de Monte Carlo para un proceso de difusión con siguiendo el esquemas de discretización de Euler es perfectamente factible.

Observación 9.2.1 (Saltos y trayectorias de Monte Carlo)

A menudo los procesos con saltos presentan intensidades de salto relativamente pequeñas, lo que significa que los saltos son poco frecuentes. Esto implica que, dentro de la simulación de Monte Carlo, se deben generar muchas trayectorias de Monte Carlo para obtener estadísticos aceptables con respecto a la ocurrencia de los saltos.

Si la simulación de Monte Carlo para MBG requiere de N trayectorias para obtener resultados precisos y satisfactorios, cuando el proceso estocástico se completa con saltos que ocurren con poca frecuencia, se pueden necesitar hasta $10N$ trayectorias.



9.3. Simulación del proceso CIR

Los esquemas de discretización estándar, tales como los esquemas de Euler y Milstein, son apropiados para simular una amplia gama de procesos estocásticos. Sin embargo, como veremos en este apartado, no suelen presentar un comportamiento correcto para procesos que son positivos por definición, y tienen masa de probabilidad en torno a cero.

9.3.1. Problemas de los esquemas de discretización estándar

El ejemplo típico de un proceso con masa de probabilidad en torno a cero es el proceso CIR, que se emplea para modelar la varianza en el modelo de volatilidad estocástica de Heston del Capítulo 8, y que presenta la dinámica

$$dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW(t), \quad v(t_0) > 0. \quad (9.25)$$

Se sabe que si se satisface la condición de Feller, $2\kappa\bar{v} > \gamma^2$, el proceso $v(t)$ no puede alcanzar el cero pero, si la condición no se cumple, el origen es alcanzable y altamente reflectante. En ambos casos, el proceso $v(t)$ no puede ser negativo. En la Figura 9.9, se presentan algunas trayectorias para estos dos casos. Cuando la condición de Feller no se satisface, las trayectorias se «acumulan» alrededor del cero.

El problema de la no negatividad se hace evidente cuando se emplea una discretización estándar. Si aplicamos, por ejemplo, la discretización de Euler al proceso (9.25), es decir,

$$v_{i+1} = v_i + \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t + \gamma\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z.$$

y asumimos que $v_i > 0$, podemos calcular la probabilidad de que el próximo valor, v_{i+1} , sea negativo, es decir, $\mathbb{P}[v_{i+1} < 0]$, dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[v_{i+1} < 0 | v_i > 0] &= \mathbb{P}[v_i + \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t + \gamma\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z < 0 | v_i > 0] \\ &= \mathbb{P}[\gamma\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z < -v_i - \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t | v_i > 0], \end{aligned}$$

que es igual a

$$\mathbb{P}[v_{i+1} < 0 | v_i > 0] = \mathbb{P}\left[Z < -\frac{v_i + \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t}{\gamma\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}} \middle| v_i > 0\right] > 0.$$

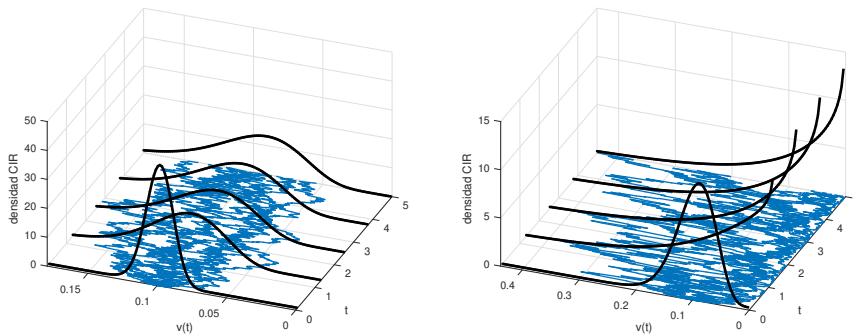


Figura 9.9: Trayectorias del proceso CIR (Ecuación 9.25) y su correspondiente FDP, con $\kappa = 0.5$, $v_0 = 0.1$ y $\bar{v} = 0.1$. Izquierda: $\gamma = 0.1$ (se satisface la condición de Feller). Derecha: $\gamma = 0.35$ (no se satisface la condición de Feller).



Como Z es una variable aleatoria normalmente distribuida, no está acotada. Por tanto, bajo la discretización de Euler, la probabilidad de que v_i sea negativo es positiva, lo que implica que $\mathbb{P}[v_{i+1} < 0 | v_i > 0] > 0$.

Cuando no se cumple la condición de Feller, la mayor parte de la masa de probabilidad de la varianza se concentra alrededor de cero. Este hecho implica que existe una alta probabilidad de que, al utilizar el esquema de discretización de Euler, la varianza sea negativa. Esta es una característica claramente no deseable. Se puede llevar a cabo un ejercicio similar para el esquema de Milstein.

La aplicación del esquema de Euler a procesos tipo CIR puede producir trayectorias no deseadas y poco realistas. Mientras que el proceso CIR con reversión a la media garantiza la no negatividad, la discretización de Euler no lo hace.

Ejemplo 9.3.1 (Proceso de Jacobi acotado)

Estudiamos otro proceso de similares (en interesantes) características, el proceso de Jacobi, que se suele utilizar para modelar variables para las cuales las trayectorias necesitan estar limitadas a una cierta región. Por ejemplo, el proceso de Jacobi acotado se emplea para modelar una correlación estocástica. Así, todas las realizaciones deben estar acotadas por el intervalo $[-1, 1]$, y la dinámica viene dada por

$$d\rho(t) = \kappa_\rho (\mu_\rho - \rho(t)) dt + \gamma_\rho \sqrt{1 - \rho^2(t)} dW(t). \quad (9.26)$$

Nótese que el proceso de Jacobi tiene dos cotas, en $\rho(t) = -1$ y en $\rho(t) = 1$. Dada la condición

$$\kappa_\rho > \max\left(\frac{\gamma_\rho^2}{1-\mu_\rho}, \frac{\gamma_\rho^2}{1+\mu_\rho}\right), \quad (9.27)$$

las cotas $\rho(t) = -1$ o $\rho(t) = 1$ no son alcanzables. Empleando la discretización de Euler, el proceso discreto correspondiente a (9.26) viene dado por

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \kappa_\rho (\mu_\rho - \rho_i) \Delta t + \gamma_\rho \sqrt{1 - \rho_i^2} \sqrt{\Delta t} Z, \quad (9.28)$$

con, de nuevo, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Al igual que en el ejemplo del proceso CIR, se puede demostrar que, debido a la discretización de Euler,

$$\mathbb{P}[|\rho_{i+1}| > 1 \mid |\rho_i| < 1] > 0.$$

En este libro, no entraremos en más detalles sobre el concepto de correlación estocástica. ♦

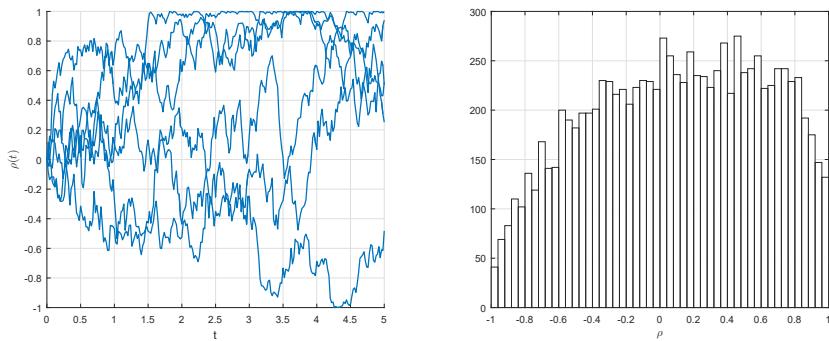


Figura 9.10: Proceso de Jacobi acotado con $\rho(t_0) = 0$, $\kappa = 0.25$, $\mu_\rho = 0.5$ y $\gamma_\rho = 0.6$. Izquierda: trayectorias de Monte Carlo con discretización de Euler. Derecha: histograma en $T = 5$



9.3.2. Simulación basada en Taylor del proceso CIR

Como un proceso con reversión a la media es un proceso continuo, solo puede ser negativo si antes ha alcanzado el cero. Nótese que (9.25) es determinista para $v(t) = 0$. Tan pronto como la varianza alcance el cero, inmediatamente después será positiva. Por el contrario, la discretización de Euler no es continua. En otras palabras, la forma discreta puede llegar a ser negativa de manera inmediata. En este apartado, introduciremos posibles soluciones a este problema.

Esquema de Euler truncado

El esquema de Euler truncado, como su nombre indica, se basa en el esquema de Euler presentado anteriormente. Para evitar que el proceso cruce el eje, necesitamos gestionar las incursiones de trayectorias de v_{i+1} en la región negativa. El esquema de Euler truncado ofrece una solución muy simple de afrontar este problema (véase Lord *et al.* (2010)). El esquema se puede escribir como

$$\begin{cases} \hat{v}_{i+1} = v_i + \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t + \gamma\sqrt{v_i\Delta t}Z, \\ v_{i+1} = \max(\hat{v}_{i+1}, 0). \end{cases}$$

Aunque es evidente que el esquema proporciona trayectorias no negativas, la precisión del mismo depende de los parámetros, en el sentido de que, cuando la condición de Feller no se cumple y la densidad se acumula alrededor de cero, las trayectorias «ajustadas» pueden llegar a ser altamente sesgadas debido al truncamiento. Básicamente, mediante el truncamiento estamos representando numéricamente un proceso distinto al proceso CIR original. Cuando se produce el truncamiento de muchas trayectorias de Monte Carlo, la precisión puede quedar limitada, ya que el sesgo producido por la discretización podría ser alto.

Esquema de Euler reflectante

Una de las propiedades importantes del proceso CIR es que el origen es alcanzable aunque, sin embargo, este «no» es una frontera absorbente. Esto significa que las trayectorias de Monte Carlo pueden «alcanzar» la frontera $v = 0$, pero no pueden permanecer en la frontera (deben abandonarla inmediatamente). Cuando se utiliza el esquema de Euler truncado presentado anteriormente, empleando $v_{i+1} = \max(\hat{v}_{i+1}, 0)$, las trayectorias que alcanzan valores negativos son proyectadas al origen. Otra posible modificación para la simulación del proceso CIR, que resulta particularmente útil cuando no se cumple la condición de Feller, es utilizar el denominado «principio de reflexión», con el que las trayectorias de la varianza se ven obligadas a moverse de nuevo hacia arriba.

El esquema de Euler reflectante es un ajuste del esquema de Euler que viene dado por

$$\begin{cases} \hat{v}_{i+1} = v_i + \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t + \gamma\sqrt{v_i\Delta t}Z, \\ v_{i+1} = |\hat{v}_{i+1}|. \end{cases} \quad (9.29)$$

En la Figura 9.11, se comparan algunas trayectorias generadas mediante los esquemas de Euler truncado y reflectante. Las trayectorias generadas por ambos esquemas son esencialmente las mismas hasta que alcanzan la frontera en $v(t) = 0$. Despues de alcanzar el origen, el esquema reflectante producirá trayectorias que estarán por encima de las generadas por el esquema de truncado. Nótese,

sin embargo, que el esquema reflectante «no mejora» la calidad del esquema de Euler.

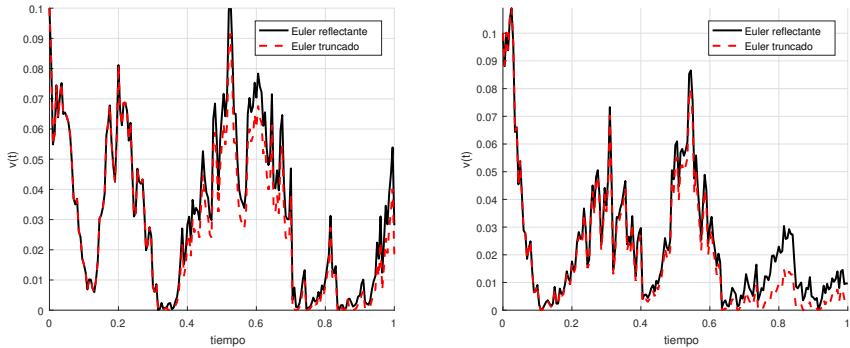


Figura 9.11: Comparación de los esquemas de Euler truncado y reflectante para dos trayectorias de Monte Carlo específicas.



9.3.3. Simulación exacta del modelo CIR

Existe un enfoque diferente para simular trayectorias del proceso CIR, que se basa en el hecho de que el proceso $v(t)$ sigue la distribución chi-cuadrado no central. En la Definición 8.1.1 ya hemos introducido la distribución chi-cuadrado no central en el contexto del modelo de volatilidad estocástica de Heston. Condicionada a un estado anterior $v(s)$, $s < t$, la distribución en tiempo t viene dada por

$$v(t)|v(s) \sim \bar{c}(t, s) \cdot \chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, s)), \quad (9.30)$$

con

$$\bar{c}(t, s) = \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(t, s) = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t-s)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})} v(s).$$

La expresión en (9.30) puede considerarse el punto de partida para un esquema de «simulación exacta» de trayectorias del proceso CIR, esto es, para $i = 0, \dots, m - 1$,

$$\begin{aligned}\bar{c}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}\right), \\ \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)})} \boxed{v_i}. \\ \boxed{v_{i+1}} &= \bar{c}(t_{i+1}, t_i) \chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)),\end{aligned}$$

con $\delta = 4\kappa\bar{v}/\gamma^2$ un parámetro constante, y valor inicial $v(t_0) = v_0$.

Mediante el esquema de simulación anterior, se pueden simular trayectorias CIR sin prestar una especial atención a la condición de Feller. Sin embargo, el esquema requiere generar muestras de la distribución chi-cuadrado no central de manera eficiente. Aunque esta distribución está bastante extendida, la mayoría de paquetes de software científico estándar no incluyen todavía un algoritmo de generación de muestras de la misma que sea, en términos computacionales, eficiente, en especial cuando no se satisface la condición de Feller o el número de simulaciones es muy grande.

Por esa razón, en el siguiente apartado, presentamos el esquema Exponencial Cuadrático que permite, mediante una serie de aproximaciones relativamente sofisticadas, la generación eficiente y robusta de muestras de la distribución chi-cuadrado no central.

9.3.4. El esquema exponencial cuadrático (QE)

En Andersen (2008) se introdujo el denominado esquema exponencial cuadrático conocido, por sus siglas en inglés¹, como el esquema QE. Este esquema fue propuesto originalmente para la simulación del proceso de varianza de Heston, $v(t)$, gobernado por la dinámica CIR (9.25).

En esencia, el esquema QE para simular $v(t)$ consiste en dos algoritmos de generación de muestras diferentes, y la decisión de que algoritmo emplear depende de los valores de los parámetros del proceso CIR. Se consideran dos casos: uno cuando la densidad del proceso $v(t)$ «está lejos» del entorno del cero, y otro cuando la distribución «está cerca» del origen.

En el primer caso, el análisis se basa en la observación de que la distribución chi-cuadrado no central con valores medio-altos del parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}$, se puede aproximar con precisión mediante una función potencia aplicada a una variable gaussiana (véase Patnaik (1949)), es decir,

$$\boxed{v(t) \approx v_1(t) = a(b + Z_v)^2}, \quad (9.31)$$

para algunas constantes a y b , y $Z_v \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

¹Quadratic Exponential.

Para determinar las constantes a y b , se emplea el método de igualdad de momentos, mediante la que se equiparan los dos primeros momentos de las dos distribuciones. Como vimos en la Definición 8.1.1, la media \bar{m} y la varianza \bar{s}^2 de un proceso tipo CIR $v(t)$ son conocidas y vienen dadas por

$$\begin{cases} \bar{m} := \mathbb{E}[v(t)|\mathcal{F}(0)] = \bar{c}(t, 0)(\delta + \bar{\kappa}(t, 0)), \\ \bar{s}^2 := \text{Var}[v(t)|\mathcal{F}(0)] = \bar{c}^2(t, 0)(2\delta + 4\bar{\kappa}(t, 0)), \end{cases} \quad (9.32)$$

con los parámetros $\delta, \bar{c}(t, 0), \bar{\kappa}(t, 0)$ como en la Definición 8.1.1. La expresión de (9.31) indica básicamente que $v(t)$ se distribuye como una distribución chi-cuadrado no central con un grado de libertad y parámetro de no centralidad b^2 , multiplicada por a , esto es

$$v_1(t) \sim a \cdot \chi^2(1, b^2),$$

con lo que tenemos expresiones para la esperanza y la varianza, dadas por

$$\mathbb{E}[v_1(t)|\mathcal{F}(0)] = a(1 + b^2), \quad \text{Var}[v_1(t)|\mathcal{F}(0)] = 2a^2(1 + 2b^2). \quad (9.33)$$

Igualando estos dos pares de ecuaciones, $\mathbb{E}[v(t)] = \mathbb{E}[v_1(t)]$ y $\text{Var}[v(t)] = \text{Var}[v_1(t)]$, obtenemos

$$\bar{m} = a(1 + b^2), \quad \bar{s}^2 = 2a^2(1 + 2b^2). \quad (9.34)$$

De la primera ecuación se deduce que $a = \bar{m}/(1 + b^2)$, por lo que la segunda ecuación resulta

$$b^4 - 2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2} + 1 + 2b^2 \left(1 - 2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2}\right) = 0. \quad (9.35)$$

Definiendo $z := b^2$, obtenemos una ecuación de segundo grado en z , es decir,

$$z^2 - 2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2} + 1 + 2z \left(1 - 2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2}\right) = 0, \quad (9.36)$$

que tiene solución si $\bar{s}^2/\bar{m}^2 \leq 2$. Bajo esta condición, la solución para b^2 viene dada por

$$b^2 = 2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2} - 1 + \sqrt{2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2}} \sqrt{2\frac{\bar{m}^2}{\bar{s}^2} - 1} \geq 0, \quad \text{y} \quad a = \frac{\bar{m}}{1 + b^2}. \quad (9.37)$$

La condición $\bar{s}^2/\bar{m}^2 \leq 2$ se corresponde con el caso en el que la densidad del proceso de varianza $v(t)$ está lejos de cero (lo que también puede deducirse del hecho de que la media \bar{m} es significativamente más grande que la varianza \bar{s}^2). Como se muestra en Andersen (2008), la representación (9.31) es muy precisa para valores grandes de $v(t)$ pero, sin embargo, la aproximación (9.31) puede producir imprecisiones cuando la masa de probabilidad de $v(t)$ se acumula alrededor del cero.

Cuando la representación (9.31) no proporciona un resultado lo suficientemente preciso, se propone aproximar la función de distribución acumulada de $v(t)$ mediante una función exponencial, como

$$F_{v(t)}(x) := \mathbb{P}[v(t) \leq x] \approx F_{v_2(t)}(x) = c + (1 - c)(1 - e^{-dx}), \quad \text{para } x \geq 0,$$

y su densidad resulta

$$f_{v(t)}(x) \approx f_{v_2(t)}(x) = c\delta(0) + d(1 - c)e^{-dx}, \quad \text{para } x \geq 0,$$

con los parámetros constantes $c \in [0, 1]$ y $d \in \mathbb{R}$.

De nuevo, a partir de la aproximación anterior, se pueden determinar la media y la varianza, esto es

$$\mathbb{E}[v_2(t)|\mathcal{F}(t_0)] = \frac{1 - c}{d}, \quad \text{Var}[v_2(t)|\mathcal{F}(t_0)] = \frac{1 - c^2}{d^2}, \quad (9.38)$$

Para ajustar los parámetros c y d , aplicamos una vez más la técnica de igualdad de momentos, con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\bar{m} = \frac{1 - c}{d}, \quad \bar{s}^2 = \frac{1 - c^2}{\left(\frac{1-c}{\bar{m}}\right)^2}.$$

Resolviendo el sistema para c y d , teniendo en cuenta la condición $c \in [0, 1]$, los parámetros vienen dados por

$$c = \frac{\frac{\bar{s}^2}{\bar{m}^2} - 1}{\frac{\bar{s}^2}{\bar{m}^2} + 1}, \quad \text{y} \quad d = \frac{1 - c}{\bar{m}} = \frac{2}{\bar{m} \left(\frac{\bar{s}^2}{\bar{m}^2} + 1 \right)}. \quad (9.39)$$

Claramente, para satisfacer que $c \in [0, 1]$, necesitamos asumir $\frac{\bar{s}^2}{\bar{m}^2} \geq 1$.

La principal ventaja de esta representación radica en el hecho de que $F_{v_2(t)}(\cdot)$ es invertible, de modo que se pueden generar muestras de $v_2(t)$ directamente, recordando que

$$v_2(t) = F_{v_2(t)}^{-1}(u), \quad \text{para } u \sim \mathcal{U}([0, 1]). \quad (9.40)$$

La inversa de $F_{v_2(t)}(x)$ viene dada por

$$F_{v_2(t)}^{-1}(u) := F_{v_2(t)}^{-1}(u; c, d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq c, \\ d^{-1} \log \left(\frac{1-c}{1-u} \right), & c < u \leq 1, \end{cases} \quad (9.41)$$

con c y d dados en (9.39).

La descripción del esquema QE se puede concluir especificando una regla para seleccionar el algoritmo de generación de muestras a utilizar. El primer algoritmo está bien definido para $\bar{s}^2/\bar{m}^2 \leq 2$, mientras que el segundo está bien definido para $\bar{s}^2/\bar{m}^2 \geq 1$. Como estos intervalos de \bar{s}^2/\bar{m}^2 se solapan, se propone elegir algún punto $a^* \in [1, 2]$. Cuando $\bar{s}^2/\bar{m}^2 \leq a^*$, se debe emplear el primer algoritmo, utilizando (9.31) y, cuando $\bar{s}^2/\bar{m}^2 > a^*$, se debe emplear el segundo, utilizando (9.41).

Como hemos dicho, la combinación de los algoritmos de generación basados en (9.31) y (9.41) se denomina esquema Exponencial Cuadrático o esquema QE.

Ejemplo 9.3.2

En este experimento numérico analizamos el comportamiento del esquema QE y lo comparamos con la simulación exacta. Fijamos $a^* = 1.5$ y consideramos dos situaciones, la primera con

$$\bar{s}^2/\bar{m}^2 < a^*,$$

y parámetros $\gamma = 0.2$, $\bar{v} = 0.05$, $v(0) = 0.3$ y $\kappa = 0.5$, y la segunda con

$$\bar{s}^2/\bar{m}^2 \geq a^*,$$

y parámetros $\gamma = 0.6$, $\bar{v} = 0.05$, $v(0) = 0.3$ y $\kappa = 0.5$. Una vez que las muestras han sido generadas mediante el esquema QE, se recuperan las FDAs correspondientes a los dos casos, representadas en la Figura 9.12.

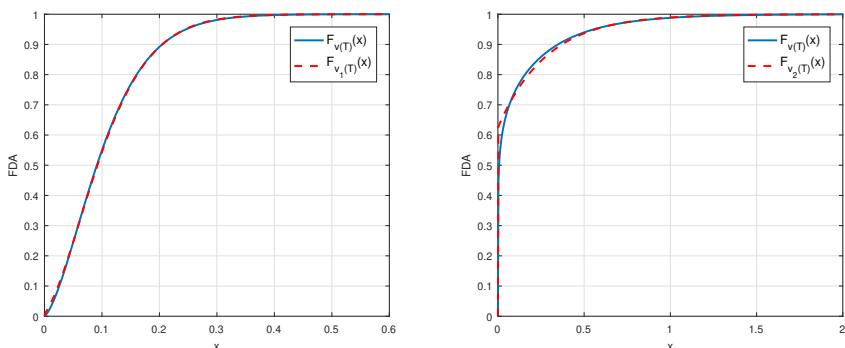


Figura 9.12: Comparativa, en términos de las correspondientes FDAs, entre el esquema QE y la simulación exacta, con $\bar{v} = 0.05$, $v(0) = 0.3$ y $\kappa = 0.5$. Izquierda: $\gamma = 0.2$. Derecha: $\gamma = 0.6$.



Se observa un alta concordancia entre la FDA generada por el esquema QE y la obtenida directamente mediante la inversión de la distribución chi-cuadrado no central. ♦

9.4. Esquema Monte Carlo para el modelo de Heston

En este apartado, generalizamos los conceptos del apartado anterior para un sistema de EDEs. Primero introducimos el concepto de «muestra condicionada» para un modelo EDE simplificado, después de lo cual presentaremos un esquema Monte Carlo eficiente para el modelo de volatilidad estocástica de Heston. La muestra condicionada está relacionada con una reformulación del sistema de EDEs en la que aparecerá el proceso de «varianza integrada en tiempo».

9.4.1. Ejemplo de muestra condicionada y varianza integrada

El concepto de muestra condicionada de un proceso integrado se observa cuando se pretenden usar «pasos de tiempo» grandes Δt en la simulación de Monte Carlo. En los esquemas de Euler y Milstein, la convergencia se expresa en términos del paso de tiempo Δt . Aquí consideramos un enfoque de simulación diferente, para el cual, en principio, no necesitamos ningún paso de tiempo intermedio en la simulación del proceso estocástico.

Para aclarar este concepto consideramos, bajo la transformación logarítmica $X(t) = \log S(t)$, el modelo

$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{1}{2}v(t)dt + \sqrt{v(t)}dW(t), \\ dv(t) = \sqrt{v(t)}dW(t), \end{cases} \quad (9.42)$$

donde, con una intención meramente ilustrativa, asumimos que los procesos están gobernados por el mismo movimiento browniano $W(t)$. Para generar muestras de $X(T)$ en tiempo T , integramos las EDEs (9.42), obteniendo

$$\begin{cases} X(T) = X(s) - \frac{1}{2} \int_s^T v(t)dt + \int_s^T \sqrt{v(t)}dW(t), \\ v(T) = v(s) + \int_s^T \sqrt{v(t)}dW(t). \end{cases} \quad (9.43)$$

De la segunda ecuación de (9.43) se deduce que

$$\int_s^T \sqrt{v(t)}dW(t) = v(T) - v(s),$$

que, al sustituirlo en la primera EDE en (9.43), tenemos

$$X(T) = X(s) - v(s) + v(T) - \frac{1}{2} \int_s^T v(t)dt. \quad (9.44)$$

De este modo, para generar muestras de $X(T)$, necesitamos muestras de $v(s)$ y $v(T)$, pero también muestras de $\int_s^T v(t)dt$. Las muestras de $v(s)$ y $v(T)|v(s)$ que se requieren en (9.44) se pueden generar mediante las técnicas descritas en los Apartados 9.3.3 o 9.3.4. Sin embargo, también debemos generar muestras de la varianza integrada, dadas las muestras de $v(s)$ y $v(T)|v(s)$. Para ello, consideramos el proceso CIR integrado, Y , como

$$dY(t) = v(t)dt, \quad Y(t_0) = 0, \quad (9.45)$$

que es equivalente a

$$Y(t) = \int_{t_0}^t v(z) dz, \quad t_0 < t. \quad (9.46)$$

Para dos realizaciones cualesquiera, $v(s)$ y $v(t)|v(s)$, necesitamos la distribución de $Y(t)$. En la Figura 9.13 se esboza la idea principal detrás de la muestra condicionada.

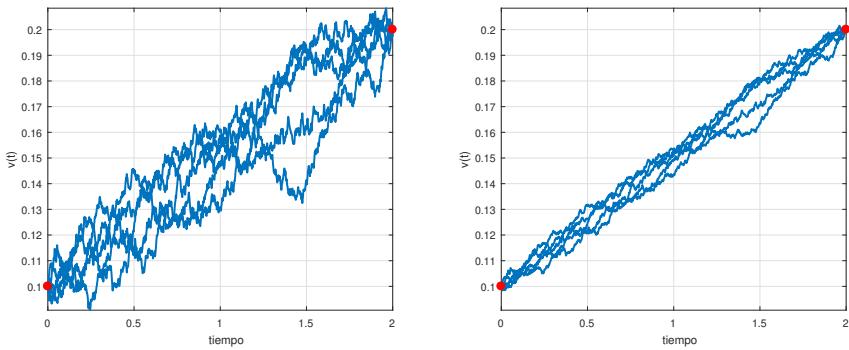


Figura 9.13: Muestras de $Y(t)$ dadas las realizaciones de $v(s) = 0.1$ y $v(t)|v(s) = 0.2$ (puntos rojos), generadas mediante la técnica de puente browniano.



El objetivo es encontrar la función característica condicionada de $Y(t)$, dados el valor inicial $v(s)$ y el valor final $v(t)$, es decir, $\phi_{Y(t)|v(s),v(t)}(u; s, t)$. Para obtener la función característica condicionada del proceso CIR integrado podemos utilizar el hecho de que, para el proceso de Bessel cuadrado de dimensión δ , definido por la EDE,

$$dy(t) = \delta dt + 2\sqrt{|y(t)|}dW_y(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (9.47)$$

con $\delta \geq 0$, se conoce analíticamente la esperanza condicionada (véase Pitman y Yor (1982)), dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{c^2}{2} \int_s^t y(u) du} \middle| y(s), y(t) \right] &= \frac{c \cdot \tau}{\sinh(c \cdot \tau)} \\ &\times \exp \left(\frac{y(s) + y(t)}{2\tau} (1 - c \cdot \tau \coth(c \cdot \tau)) \right) \\ &\times I_{\frac{\delta}{2}-1} \left(\frac{c\sqrt{y(s)y(t)}}{\sinh(c \cdot \tau)} \right) / I_{\frac{\delta}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{y(s)y(t)}}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (9.48)$$

para una constante $c \in \mathbb{R}$ y $\tau = t - s$.

El proceso de Bessel cuadrado se ha estudiado en el capítulo anterior, véase (8.13). La esperanza de (9.48) se puede utilizar para obtener la esperanza condicionada para el proceso CIR, expresando la dinámica del proceso CIR en términos del proceso de Bessel (9.47).

9.4.2. El proceso CIR integrado y la muestra condicionada

El objetivo es emplear la función característica (9.48) en el contexto del proceso CIR de varianza de Heston (9.25). Integrando este proceso en el intervalo de tiempo $[s, t]$, resulta

$$v(t) = v(s) + \int_s^t \kappa(\bar{v} - v(z))dz + \int_s^t \gamma\sqrt{v(z)}dW(z). \quad (9.49)$$

El proceso de Bessel de (9.47) tiene un coeficiente de volatilidad igual a 2, mientras que en el proceso CIR (9.25) el coeficiente de volatilidad es igual a γ . Aplicamos una «transformación temporal» (véase Observación 8.1.1) en el último término de (9.49), que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \int_s^t \gamma\sqrt{v(z)}dW(z) &= 2 \int_s^t \frac{\gamma}{2}\sqrt{v(z)}dW(z) \\ &= 2 \int_s^t \sqrt{v\left(\frac{\gamma^2 z}{4}\right)}dW\left(\frac{\gamma^2 z}{4}\right). \end{aligned}$$

Entonces, el proceso en (9.49) se puede escribir como

$$v(t) = v(s) + \int_s^t \kappa \left[\bar{v} - v\left(\frac{\gamma^2 z}{4}, \frac{4}{\gamma^2}\right) \right] dz + 2 \int_s^t \sqrt{v\left(\frac{\gamma^2 z}{4}, \frac{4}{\gamma^2}\right)} dW\left(\frac{\gamma^2 z}{4}\right).$$

Introduciendo una nueva variable, $w = \frac{\gamma^2}{4}z$, tal que $dw = \frac{\gamma^2}{4}dz$, tenemos que

$$v(t) = v(s) + \frac{4}{\gamma^2} \int_{\frac{\gamma^2}{4}s}^{\frac{\gamma^2}{4}t} \kappa \left[\bar{v} - v\left(\frac{4w}{\gamma^2}\right) \right] dw + 2 \int_{\frac{\gamma^2}{4}s}^{\frac{\gamma^2}{4}t} \sqrt{v\left(\frac{4w}{\gamma^2}\right)} dW(w).$$

Definimos otro proceso, $\nu(w) := v\left(\frac{4w}{\gamma^2}\right)$, con $\nu_0 = v_0$, cuya dinámica viene dada por

$$\nu\left(\frac{\gamma^2 t}{4}\right) = \nu\left(\frac{\gamma^2 s}{4}\right) + \frac{4}{\gamma^2} \int_{\frac{\gamma^2}{4}s}^{\frac{\gamma^2}{4}t} \kappa(\bar{v} - \nu(w)) dw + 2 \int_{\frac{\gamma^2}{4}s}^{\frac{\gamma^2}{4}t} \sqrt{\nu(w)} dW(w), \quad (9.50)$$

tal que

$$\nu(\bar{t}) = \nu(\bar{s}) + \int_{\bar{s}}^{\bar{t}} (2a\nu(w) + b) dw + 2 \int_{\bar{s}}^{\bar{t}} \sqrt{\nu(w)} dW(w), \quad (9.51)$$

con $a = -2\kappa/\gamma^2$, $b = 4\kappa\bar{v}/\gamma^2$, $\bar{s} = \gamma^2 s/4$ y $\bar{t} = \gamma^2 t/4$, y donde la dinámica $\nu(t)$ viene dada por

$$d\nu(t) = (2a\nu(t) + b) dt + 2\sqrt{\nu(t)}dW(t), \quad \nu_0 = v_0. \quad (9.52)$$

La volatilidad del proceso (9.52) es de la forma deseada, como en (9.47). Sin embargo, en la dinámica (9.52) aparece un término de deriva adicional con respecto a la deriva en (9.47).

En general, la deriva de un proceso se puede adaptar mediante un cambio de medida, esto es, cambiando la medida la deriva también cambia, mientras que la volatilidad del proceso sigue siendo la misma. Esto indica que podemos definir, bajo un nuevo movimiento browniano $\widehat{W}(t)$, un proceso modificado de $\nu(t)$, como

$$d\nu(t) = bdt + 2\sqrt{\nu(t)}d\widehat{W}(t), \quad (9.53)$$

para un movimiento browniano $\widehat{W}(t)$. Igualando los lados derechos de las Ecuaciones (9.52) y (9.53), tenemos que

$$(2a\nu(t) + b) dt + 2\sqrt{\nu(t)}dW(t) = bdt + 2\sqrt{\nu(t)}d\widehat{W}(t),$$

lo que resulta en el cambio de medida

$$d\widehat{W}(t) = dW(t) + a\sqrt{\nu(t)}dt.$$

El cambio de medida propuesto involucra la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\widehat{\mathbb{Q}}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \exp \left(-\frac{a^2}{2} \int_s^t \nu(z)dz + a \int_s^t \sqrt{\nu(z)}d\widehat{W}(z) \right).$$

La última integral de esta expresión se puede expresar, con la ayuda de (9.53), como

$$\int_s^t \sqrt{\nu(z)}d\widehat{W}(z) = \frac{1}{2} \int_s^t (d\nu(z) - bdz) = \frac{1}{2} [\nu(t) - \nu(s) - b \cdot (t - s)].$$

de modo que la derivada de Radon-Nikodym se puede escribir de la forma

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\widehat{\mathbb{Q}}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \exp \left(-\frac{a^2}{2} \int_s^t \nu(z)dz + \frac{a}{2} [\nu(t) - \nu(s) - b \cdot (t - s)] \right). \quad (9.54)$$

Mediante la transformación de la medida podemos cambiar las medidas basándonos en la fórmula de Bayes, esto es

$$\mathbb{E}^A[X] = \mathbb{E}^B \left[X \frac{d\mathbb{Q}^A}{d\mathbb{Q}^B} \Big|_{\mathcal{F}} \right] / \mathbb{E}^B \left[\frac{d\mathbb{Q}^A}{d\mathbb{Q}^B} \right], \quad (9.55)$$

para dos medidas equivalentes cualesquiera \mathbb{Q}^A y \mathbb{Q}^B y una variable aleatoria $X \in \mathcal{F}$.

Cambio de variables y muestra condicionada

Da una constante $c \in \mathbb{R}$, la esperanza condicionada para la varianza integrada $Y(t)$ en (9.46), en términos del proceso $\nu(t)$, es igual a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-cY(t)} | v(s), v(t) \right] &:= \mathbb{E} \left[\exp \left(-c \int_s^t v(z) dz \right) | v(s), v(t) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-c \int_s^t \nu \left(\frac{\gamma^2 z}{4} \right) dz \right) | \nu \left(\frac{\gamma^2 s}{4} \right), \nu \left(\frac{\gamma^2 t}{4} \right) \right].\end{aligned}$$

Mediante un cambio de variables adicional, utilizando $s_* = \frac{\gamma^2}{4}s$ y $t_* = \frac{\gamma^2}{4}t$, tenemos que

$$\mathbb{E} \left[e^{-cY(t)} | v(s), v(t) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{4c}{\gamma^2} \int_{s_*}^{t_*} \nu(w) dw \right) | \nu(s_*), \nu(t_*) \right].$$

La última igualdad se puede resolver con la ayuda del cambio de medida (9.54), esto es

$$\mathbb{E} \left[e^{-cY(t)} | v(s), v(t) \right] = \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}} \left[\exp \left(-\frac{4c}{\gamma^2} \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz \right) \frac{d\mathbb{Q}}{d\hat{\mathbb{Q}}} | \nu(s_*), \nu(t_*) \right]}{\hat{\mathbb{E}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\hat{\mathbb{Q}}} | \nu(s_*), \nu(t_*) \right]} =: \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (9.56)$$

Para simplificar, denotamos $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}[\cdot | \nu(s_*), \nu(t_*)] =: \hat{\mathbb{E}}[\cdot | s_*, t_*]$, de modo que, teniendo en cuenta (9.54), la esperanza en el denominador es

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(-\frac{a^2}{2} \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz + \frac{a}{2} (\nu(t_*) - \nu(s_*) - b\tau_*) \right) | s_*, t_* \right] \\ &= e^{\frac{a}{2}(\nu(t_*) - \nu(s_*) - b\tau_*)} \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(-\frac{a^2}{2} \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz \right) | s_*, t_* \right],\end{aligned}$$

con $\tau_* = t_* - s_*$. La esperanza del numerador es igual a

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(-\left(\frac{4c}{\gamma^2} + \frac{a^2}{2} \right) \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz + \frac{a}{2} (\nu(t_*) - \nu(s_*) - b\tau_*) \right) | s_*, t_* \right] \\ &= e^{\frac{a}{2}(\nu(t_*) - \nu(s_*) - b\tau_*)} \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(-\left(\frac{4c}{\gamma^2} + \frac{a^2}{2} \right) \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz \right) | s_*, t_* \right].\end{aligned}$$

Como los primeros términos exponenciales en ω_1 y ω_2 son idénticos, la expresión (9.56) se reduce a

$$\mathbb{E} \left[e^{-c \int_s^t v(z) dz} | v(s), v(t) \right] = \frac{\hat{\mathbb{E}} \left[e^{-\left(\frac{4c}{\gamma^2} + \frac{a^2}{2} \right) \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz} | s_*, t_* \right]}{\hat{\mathbb{E}} \left[e^{-\frac{a^2}{2} \int_{s_*}^{t_*} \nu(z) dz} | s_*, t_* \right]}, \quad (9.57)$$

donde $\nu(t)$ evoluciona de acuerdo con la EDE (9.53). Después de substituir (9.48) en las dos esperanzas (en el numerador y en el denominador) y simplificar, obtenemos una expresión relativamente complicada que, sin embargo, es una expresión en forma cerrada, dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-cY(t)} \middle| v(s), v(t) \right] &= \frac{\psi(c)e^{-0.5(\psi(c)-\kappa)\tau}(1-e^{-\kappa\tau})}{\kappa(1-e^{-\psi(c)\tau})} \\ &\times \exp \left[\frac{v(s)+v(t)}{\gamma^2} \left(\frac{\kappa(1+e^{-\kappa\tau})}{1-e^{-\kappa\tau}} - \frac{\psi(c)(1+e^{-\psi(c)\tau})}{1-e^{-\psi(c)\tau}} \right) \right] \\ &\times \frac{I_{\frac{b}{2}-1} \left(\frac{4\psi(c)\sqrt{v(t)v(s)}}{\gamma^2} \frac{e^{-0.5\psi(c)\tau}}{1-e^{\psi(c)\tau}} \right)}{I_{\frac{b}{2}-1} \left(\frac{4\kappa\sqrt{v(t)v(s)}}{\gamma^2} \frac{e^{-0.5\kappa\tau}}{1-e^{\kappa\tau}} \right)} =: J(c), \end{aligned} \quad (9.58)$$

con $\tau = t - s$ y $\psi(c) = \sqrt{\kappa^2 + 2\gamma^2 c}$. Tomando $c = -iu$, obtenemos la función característica condicionada buscada, es decir,

$$\boxed{\phi_{Y(t)|v(s),v(t)}(u; s, t) = J(-iu).}$$

Con la técnica de muestra condicionada introducida se pueden generar las muestras necesarias para un proceso $X(t)$. Aunque la técnica se considera «exacta», tiene un alto coste computacional. La generación de cada muestra requiere de la inversión de la FDA, dada en términos de la función característica. A continuación se presenta un enfoque alternativo para generar muestras de la volatilidad estocástica, en el contexto del modelo de Heston.

9.4.3. Simulación quasi-exacta del modelo de Heston

Nos centramos ahora en el modelo de volatilidad estocástica de Heston que, bajo transformación logarítmica, se define como

$$\begin{cases} dX(t) = (r - \frac{1}{2}v(t)) dt + \sqrt{v(t)} [\rho_{x,v} d\widetilde{W}_v(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} d\widetilde{W}_x(t)], \\ dv(t) = \kappa (\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_v(t), \end{cases} \quad (9.59)$$

con los parámetros presentados en (8.18).

Resulta crucial que el proceso de varianza está gobernado por un movimiento browniano independiente, mientras que el proceso $X(t) := \log S(t)$ está correlado con $v(t)$. El motivo es que, de esta forma, podremos utilizar las propiedades de la distribución marginal de $v(t)$. Integrando los dos procesos de (9.59) en un cierto intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$, se obtiene el esquema de

discretización

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r - \frac{1}{2}v(t) \right) dt + \rho_{x,v} \boxed{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_v(t)} \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_x(t), \end{aligned}$$

y

$$v_{i+1} = v_i + \kappa \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \boxed{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_v(t)}.$$

Nótese que las dos integrales con $\widetilde{W}_v(t)$ de la EDEs anteriores son la misma, que, en términos de realizaciones de la varianza, viene dada por

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_v(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_{i+1} - v_i - \kappa \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{v} - v(t)) dt \right). \quad (9.60)$$

Por tanto, la varianza v_{i+1} se puede simular, para un valor dado v_i , como un proceso CIR, esto es, mediante la distribución chi-cuadrado no central o mediante el esquema QE (las técnicas presentadas en los Apartados 9.3.3 o 9.3.4, respectivamente). Para finalizar la simulación del modelo de Heston, la discretización de x_{i+1} viene dada por

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r - \frac{1}{2}v(t) \right) dt \\ &+ \frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \left(v_{i+1} - v_i - \kappa \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{v} - v(t)) dt \right) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)} d\widetilde{W}_x(t). \end{aligned} \quad (9.61)$$

Aproximamos todas las integrales que aparecen en la expresión anterior por los valores de sus integrandos en el extremo izquierdo del intervalo de integración, como en el esquema de discretización de Euler, es decir,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r - \frac{1}{2}v_i \right) dt \\ &+ \frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \left(v_{i+1} - v_i - \kappa \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{v} - v_i) dt \right) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v_i} d\widetilde{W}_x(t). \end{aligned}$$

Así, el cálculo de las integrales es trivial, resultando que

$$\begin{aligned}x_{i+1} &\approx x_i + \left(r - \frac{1}{2}v_i\right)\Delta t \\&+ \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}(v_{i+1} - v_i - \kappa(\bar{v} - v_i)\Delta t) \\&+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2}\sqrt{v_i}\left(\widetilde{W}_x(t_{i+1}) - \widetilde{W}_x(t_i)\right).\end{aligned}$$

Agrupando todos los términos y empleando la propiedad de la variables aleatorias normalmente distribuidas habitual, es decir, $\widetilde{W}_x(t_{i+1}) - \widetilde{W}_x(t_i) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t}Z_x$, con $Z_x \sim \mathcal{N}(0, 1)$, obtenemos

$$\begin{cases} x_{i+1} \approx x_i + k_0 + k_1 v_i + k_2 v_{i+1} + \sqrt{k_3 v_i} Z_x, \\ v_{i+1} = \bar{c}(t_{i+1}, t_i) \chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)), \end{cases}$$

como en (9.30), con

$$\begin{aligned}\bar{c}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \\ \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta t}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})} v_i,\end{aligned}$$

y $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(\cdot, \cdot))$ la distribución chi-cuadrado no central con δ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)$. La demás constantes representan

$$\begin{aligned}k_0 &= \left(r - \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}\kappa\bar{v}\right)\Delta t, \quad k_1 = \left(\frac{\rho_{x,v}\kappa}{\gamma} - \frac{1}{2}\right)\Delta t - \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}, \\k_2 &= \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}, \quad k_3 = (1 - \rho_{x,v}^2)\Delta t.\end{aligned}$$

Ejemplo 9.4.1 (Modelo de Heston: simulación Monte Carlo)

El esquema de simulación presentado en el Apartado 9.4.3, se denominará esquema de Simulación Quasi-Exacta o, por sus siglas en inglés², esquema AES, para el modelo de Heston. Este no es el esquema QE, ya que se emplea la generación directa de muestras, a través de la distribución chi-cuadrado no central, para simular el proceso de varianza.

En este experimento de simulación, se valoran opción call europeas mediante el esquema AES, con $S(t_0) = 100$, para tres precios de strike diferentes: $K = 100$ (ATM), $K = 70$ (ITM) y $K = 140$ (OTM). Los resultados se comparan con los obtenidos mediante una discretización de Euler con la técnica de truncamiento descrita en el Apartado 9.3. En el experimento se utilizan diferentes pasos de tiempo, desde un solo paso de tiempo al año hasta 64 pasos de tiempo al año. Los parámetros de modelo son

$$\kappa = 0.5, \gamma = 1, \bar{v} = 0.04, v_0 = 0.04, r = 0.1, \rho_{x,v} = -0.9.$$

² Almost Exact Simulation.

En la Tabla 9.2 se presentan los resultados numéricos obtenidos, calculados con 500 000 trayectorias de Monte Carlo. Los valores de referencia se obtienen mediante el método COS del Apartado 8.4. El experimento muestra que los resultados numéricos para el esquema AES mejoran al considerar pasos de tiempo, Δt , más pequeños. Este patrón no se observa cuando se emplea la discretización de Euler truncado, para la cual el error parece no converger. Esta falta de convergencia se debe al sesgo que genera el truncamiento. ♦

Observación 9.4.1

Este capítulo sirve como introducción a la simulación de Monte Carlo, detallando cómo abordar una simulación precisa para los modelos de precios de activos con volatilidad estocástica y para el proceso CIR. Hemos estudiado los esquemas de discretización basados en Taylor de Euler y Milstein, así como el esquema de simulación exacta para los procesos tipo CIR. Este último esquema resulta ser más complejo, pero es más preciso. Se pueden utilizar pasos de tiempo más grandes en la simulación, por lo que se requieren menos pasos de tiempo para obtener una precisión satisfactoria. El punto de partida de este tipo de esquemas es la simulación exacta de Broadie y Kaya (2006). Otros ejemplos de simulación (casi) exacta son el método Stochastic Collocation Monte Carlo (SCMC) de Grzelak *et al.* (2018) o los métodos de simulación para el modelo SABR de Chen *et al.* (2012); Leitao *et al.* (2017b,a). Así mismo, existe una relación estrecha entre el esquema de muestra condicionada del Apartado 9.4 y la técnicas de puente browniano, mediante las cuales se puede acelerar la convergencia de Monte Carlo. ▲

Tabla 9.2: Errores en la simulación de Monte Carlo del modelo de Heston. «AES» representa la simulación quasi-exacta y «Euler» representa el esquema de Euler truncado del Apartado 9.3.

| Δt | $K = 100$ | | | $K = 70$ | | | $K = 140$ | | |
|------------|--------------|----------------|---------------|----------------|--------------|-----------------|-----------|-----|-------|
| | Euler | AES | Euler | AES | Euler | AES | Euler | AES | Euler |
| 1 | 0.94 (0.023) | -1.00 (0.012) | -0.82 (0.028) | -0.53 (0.016) | 1.29 (0.008) | 0.008 (0.001) | | | |
| 1/2 | 2.49 (0.022) | -0.45 (0.011) | -0.11 (0.030) | -0.25 (0.016) | 1.03 (0.008) | -0.0006 (0.001) | | | |
| 1/4 | 2.40 (0.016) | -0.18 (0.010) | 0.37 (0.027) | -0.11 (0.016) | 0.53 (0.005) | 0.0005 (0.001) | | | |
| 1/8 | 2.08 (0.016) | -0.10 (0.010) | 0.43 (0.025) | -0.07 (0.016) | 0.22 (0.003) | 0.0009 (0.001) | | | |
| 1/16 | 1.77 (0.015) | -0.03 (0.010) | 0.40 (0.023) | -0.03 (0.016) | 0.08 (0.001) | 0.0002 (0.001) | | | |
| 1/32 | 1.50 (0.014) | -0.03 (0.009) | 0.34 (0.022) | -0.01 (0.016) | 0.03 (0.001) | -0.002 (0.001) | | | |
| 1/64 | 1.26 (0.013) | -0.001 (0.009) | 0.27 (0.021) | -0.005 (0.016) | 0.02 (0.001) | 0.001 (0.001) | | | |



9.4.4. Mejoras en la simulación de Monte Carlo

La «aceleración» de la convergencia del método Monte Carlo clásico puede lograrse de varias maneras. La utilización de «variables antitéticas» es uno de las técnicas más sencillas para acelerar la convergencia del método Monte Carlo, ya que reduce la varianza de las muestras generadas. Para ello, en la simulación, además de emplear una muestra aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, también se emplea la muestra $-Z$ para generar otra trayectoria. Se sabe que si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces también $-Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esta propiedad puede utilizarse para reducir drásticamente el número de caminos necesarios en una simulación de Monte Carlo. Suponemos que V_i^N representa la aproximación obtenida por el método Monte Carlo, y que \hat{V}_i^N representa la aproximación usando $-Z$. Haciendo el promedio, $\bar{V}_i^N = 1/2(V_i^N + \hat{V}_i^N)$, se obtiene otra aproximación. Como V_i^N y \hat{V}_i^N son variables aleatorias, pretendemos que $\text{Var}[\bar{V}_i^N] < \text{Var}[V_i^N] + \text{Var}[\hat{V}_i^N]$. Tenemos que

$$\text{Var}[\bar{V}_i^N] = \frac{1}{4}\text{Var}[V_i^N + \hat{V}_i^N] = \frac{1}{4}(\text{Var}[V_i^N] + \text{Var}[\hat{V}_i^N]) + \frac{1}{2}\text{Cov}[V_i^N, \hat{V}_i^N]$$

Así, asumiendo una correlación negativa entre V_i^N y \hat{V}_i^N , se deduce que $\text{Var}[\bar{V}_i^N] \leq \frac{1}{4}(\text{Var}[V_i^N] + \hat{V}_i^N)$.

Otras técnicas muy conocidas para la reducción de la varianza en los métodos Monte Carlo son el *importance sampling*, los métodos de Quasi Monte Carlo (QMC), el *stratified sampling* y las «variables de control». En esta última técnica de reducción de la varianza se emplea una función (o modelo) muy similar a la cantidad de interés, para la cual se conocen analíticamente algunas propiedades esenciales que dan lugar a una reducción significativa de la varianza de Monte Carlo.

Los métodos de Monte Carlo multinivel, denominados MLMC por sus siglas en inglés³, propuestos por Giles (2007, 2008); Giles y Reisinger (2012), son una alternativa reciente muy interesante para la reducción de la varianza, basada en la aditividad del operador esperanza. Todas estas técnicas de reducción de la varianza se ha aplicado de manera exitosa en el ámbito de las finanzas cuantitativas, donde, a veces, incluso se combinan para mejorar el orden de convergencia aún más.

Técnica de **importance sampling**

En este apartado, se presenta una manera intuitiva de entender la derivada de Radon-Nikodym, en forma de una técnica de reducción de la varianza, el importance sampling, en el contexto de la simulación de Monte Carlo. Deseamos calcular la esperanza $\mathbb{E}^X[g(X)]$ de alguna función $g(\cdot)$ sobre una variable aleatoria X , con densidad de probabilidad $f_X(x)$, es decir,

$$\mathbb{E}^X[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_X(x). \quad (9.62)$$

³ Multi-Level Monte Carlo

Para reducir la varianza, consideramos otra variable aleatoria Y con densidad de probabilidad $f_Y(x)$, tal que $f_X(x) \neq 0$ para todo x donde $f_Y(x) \neq 0$, y escribimos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} f_Y(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} dF_Y(x),\end{aligned}\quad (9.63)$$

lo que implica que

$$\mathbb{E}^X [g(X)] = \mathbb{E}^Y [g(Y)L(Y)], \quad \text{con } L(x) = \frac{f_X(x)}{f_Y(x)}. \quad (9.64)$$

La función $L(x)$ se conoce como la función *score* en simulación de Monte Carlo, la razón de verosimilitud en estadística, y la derivada de Radon-Nikodym en teoría de la probabilidad. Con la ayuda de la derivada de Radon-Nikodym, obtenemos la expresión

$$\mathbb{E}^X [g(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(y_j)L(y_j), \quad (9.65)$$

donde los y_j son muestras de Y . Esta representación se denomina *importance sampling*.

Ejemplo 9.4.2 (Simulación de Monte Carlo: importance sampling)

Empleamos la simulación de Monte Carlo para aproximar $\mathbb{P}[X > 3]$, lo que es equivalente a calcular $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X>3}]$ con $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Sabemos que $\mathbb{P}[X > 3] = 0.001349898031630$.

Consideramos dos distribuciones como posibles candidatas para aplicar la técnica de reducción de la varianza de importance sampling: $\mathcal{U}([0, 3.5])$ y $\mathcal{N}(0, 3)$. En la Figura 9.14, se puede observar claramente que la variable de importance sampling que mejor resultado proporciona es $\mathcal{N}(0, 3)$, ya que no introduce sesgo y la convergencia mejora significativamente. Por el contrario, la distribución $\mathcal{U}([0, 3.5])$ no funciona correctamente, debido a que su dominio no es lo suficientemente grande para cubrir todo el dominio de la $\mathcal{N}(0, 1)$. Por tanto concluimos que el dominio de las variables auxiliares utilizadas para aplicar importance sampling debe ser elegido con cuidado.

9.5. Cálculo de las griegas con Monte Carlo

En la industria financiera, el cálculo de las griegas es un procedimiento muy importante, que se lleva a cabo para todos los derivados en las carteras de negociación. Los bancos tienen que comunicar la denominada atribución⁴ de

⁴También denominado «P&L explicado».

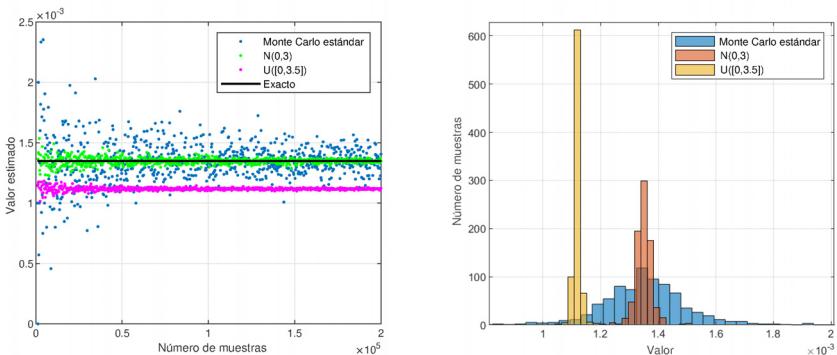


Figura 9.14: Impacto de la variable auxiliar en importance sampling. Izquierda: muestras generadas. Derecha: histograma.



P&L para sus operaciones diarias, explicando el impacto de las fluctuaciones diarias en el valor del derivado. Para ilustrar esto, consideramos una cartera $\Pi(t, S)$ que contiene una opción $V(t, S)$ sobre una acción subyacente $S(t)$, y Δ unidades de activo que se utilizan como cobertura, $\Pi(t, S) = V(t, S) - \Delta S(t)$. Discretizando tenemos que

$$\Pi_{i+1} = \Pi_i + V_{i+1} - V_i - \Delta(S_{i+1} - S_i). \quad (9.66)$$

En cada tiempo t_{i+1} , el valor de la opción V_{i+1} se sustituye, así como el valor de la acción S_{i+1} , y se calcula el valor de la cartera Π_{i+1} en tiempo t_{i+1} . Cuando los lados izquierdo y derecho de la ecuación tienen valores lo suficientemente cercanos, se dice que el P&L está bien explicado. La atribución de P&L se utiliza para verificar si todos los factores de riesgo modelados son suficientes para explicar materialmente los cambios en el valor de la cartera. Sin embargo, cuando los dos lados de (9.66) difieren sustancialmente, tenemos una indicación de que la cobertura no se ha llevado a cabo de manera correcta, debido a que, seguramente, algún factor de riesgo no ha sido tenido en cuenta adecuadamente para la estrategia de cobertura. Las griegas de la opción constituyen la base de las atribuciones.

En la práctica, los modelos de precios de activos se calibran a precios de mercado, obteniendo un conjunto óptimo de parámetros del modelo, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Entonces, desde la perspectiva de la gestión del riesgo, resulta crucial comprender cómo evolucionarán los precios de los derivados financieros si cambian los parámetros del modelo del activo. Cuando el precio de la opción varía significativamente con el cambio de los parámetros, se requiere de una estrategia de reequilibrado de la cobertura frecuente y, por lo tanto, un aumento

de los costes de cobertura. Por otro lado, si la sensibilidad del precio de los derivados con respecto al parámetro del modelo no es destacable, bastaría con una frecuencia baja de reequilibrado, lo que implica una reducción de los costes. En el contexto de los métodos de Monte Carlo para valoración, existen básicamente tres técnicas para la aproximación de las griegas de la opción: diferencias finitas (perturbar y reevaluar), sensibilidad de la trayectoria y método de la razón de verosimilitud, que serán introducidas a continuación.

9.5.1. Diferencias finitas

En este apartado utilizaremos la notación

$$V(\theta) \equiv V(t_0, S; \theta) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(T, S; \theta)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

con un parámetro θ . La sensibilidad de la opción con respecto al parámetro θ se puede aproximar mediante la diferencia posterior, esto es

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \approx \frac{V(\theta + \Delta\theta) - V(\theta)}{\Delta\theta}. \quad (9.67)$$

Sea $V(\theta)$ continua y, al menos, dos veces derivable, tenemos que, para cualquier $\Delta\theta > 0$,

$$V(\theta + \Delta\theta) = V(\theta) + \frac{\partial V}{\partial \theta} \Delta\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Delta\theta^2 + \dots \quad (9.68)$$

Así, para la diferencia posterior, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{V(\theta + \Delta\theta) - V(\theta)}{\Delta\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2). \quad (9.69)$$

En el contexto de Monte Carlo, la sensibilidad con respecto a θ se estima mediante

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \approx \frac{\bar{V}(\theta + \Delta\theta) - \bar{V}(\theta)}{\Delta\theta}, \quad (9.70)$$

donde $\bar{V}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i(\theta)$. Como el valor medio es un estimador «insesgado» de la esperanza, es decir, $\mathbb{E}[V(\theta)] \equiv \bar{V}(\theta)$, el error de la diferencia posterior es

$$\epsilon_1(\Delta\theta) := \mathbb{E} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) \right] = \mathcal{O}(\Delta\theta).$$

Como alternativa, se puede utilizar la aproximación basada en las diferencias centrales, es decir,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \approx \frac{V(\theta + \Delta\theta) - V(\theta - \Delta\theta)}{2\Delta\theta}. \quad (9.71)$$

Con la ayuda de la expansión de Taylor, podemos deducir que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{V(\theta + \Delta\theta) - V(\theta - \Delta\theta)}{2\Delta\theta} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2). \quad (9.72)$$

El error de las diferencias centrales viene dado por

$$\epsilon_2(\Delta\theta) = \mathcal{O}(\Delta\theta^2).$$

Las diferencias centrales generalmente producen un sesgo menor que la aproximación por diferencia posterior.

Ejemplo 9.5.1 (Diferencias finitas: delta y vega de Black-Scholes)

En este experimento numérico, analizamos los errores cometidos cuando estimamos las griegas mediante Monte Carlo para el modelo de Black-Scholes, utilizando diferencias finitas posteriores y centrales. Para un opción call, simulamos la delta, $\frac{\partial V}{\partial S(t_0)}$, y la vega, $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ de Black-Scholes, y las comparamos con sus expresiones analíticas.

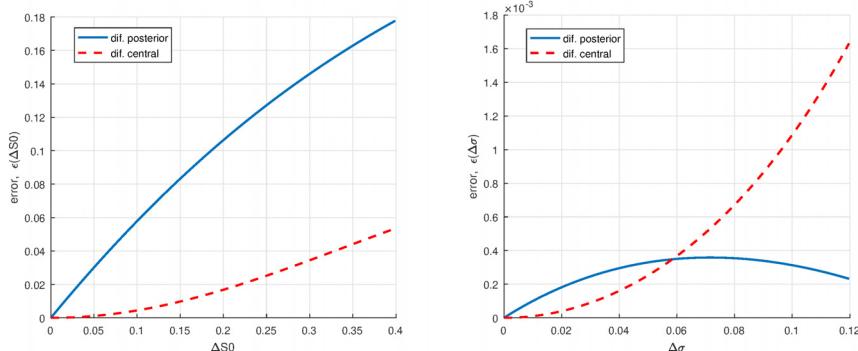


Figura 9.15: Errores en las griegas de Black-Scholes estimadas con diferencias posterior y central. Se consideran los parámetros $S(t_0) = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ y $K = S(t_0)$. Izquierda: delta. Derecha: vega.



En la Figura 9.15 se confirma que la técnica de diferencias centrales tienen mejores propiedades de convergencia que la de diferencias posteriores. Curiosamente, en la aproximación de vega, se observa que, cuando el tamaño de la perturbación, $\Delta\sigma$, es grande, la diferencia posterior puede mejorar a las diferencias centrales. Nótense además las diferencias en las magnitudes de los errores de las sensibilidades. Para un tamaño de la perturbación de aproximadamente un 40 %, el error máximo para delta es de 0.18, mientras que para la misma magnitud de perturbación, el error de vega está alrededor de 0.0016. ♦

9.5.2. Sensibilidades en la trayectoria

Como segunda técnica para calcular las griegas en el contexto de Monte Carlo consideramos el método de sensibilidad en la trayectoria, también conocida como sensibilidades *pathwise*. Este método se desarrolló concretamente para calcular sensibilidades de modelos discretos. El objetivo es estimar eficientemente las sensibilidades en tiempo t_0 , esto es, con respecto a $S(t_0)$ o con respecto a otros parámetros del modelo. Esta técnica no necesita reevaluar y simular trayectorias Monte Carlo «perturbadas», como el método de diferencias finitas, donde, para la diferencia posterior, necesitamos una simulación adicional y, para la diferencia central, necesitamos dos simulaciones adicionales.

El método de sensibilidad en la trayectoria se puede aplicar cuando tratamos con funciones continuas de los parámetros de interés. Se basa en intercambiar los operadores de derivación y esperanza, esto es

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(T, S(T); \theta)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{V(T, S(T); \theta)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (9.73)$$

El método no se puede aplicar fácilmente para el caso de funciones de payoff no suaves, ya que la derivación de un payoff no suave, como una opción barrera o una opción digital, no es inmediata.

Asumiendo un tipo de interés constante, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\partial V(T, S(T); \theta)}{\partial S(T)} \frac{\partial S(T)}{\partial \theta} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (9.74)$$

En tiempo T , $V(T, S(T); \theta)$ es una cantidad estocástica, que depende de la distribución de $S(T)$. Para calcular la derivada con respecto a θ , se «congela» el espacio de probabilidad de $S(T)$, es decir, si el proceso $S(T)$ está gobernado por un movimiento browniano $W(t)$, las trayectorias de $W(t)$ no se verán afectadas por un cambio en el parámetro θ .

Ejemplo 9.5.2 (Sensibilidad en la trayectoria: delta y vega de BS)

Como ejemplo, aplicamos el método de sensibilidad en la trayectoria de (9.74) a una opción call bajo el modelo de Black-Scholes, es decir,

$$V(T, S; \theta) = \max(S(T) - K, 0),$$

con $S(T) = S(t_0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0)+\sigma(W(T)-W(t_0))}$. La derivada del payoff con respecto a $S(T)$ viene dada por

$$\frac{\partial V}{\partial S(T)} = \mathbf{1}_{S(T)>K}, \quad (9.75)$$

y las derivadas con respecto a $S(t_0)$ y σ son

$$\frac{\partial S(T)}{\partial S(t_0)} = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0)+\sigma(W(T)-W(t_0))},$$

$$\frac{\partial S(T)}{\partial \sigma} = S(T) (-\sigma(T - t_0) + W(T) - W(t_0)).$$

Así, obtenemos las estimaciones para delta y vega dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial S(t_0)} &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{S(T) > K} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0) + \sigma(W(T) - W(t_0))} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(T)}{S(t_0)} \mathbb{1}_{S(T) > K} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{S(T) > K} S(T) (-\sigma(T-t_0) + W(T) - W(t_0)) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{e^{-r(T-t_0)}}{\sigma} \\ &\quad \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S(T) \left(\log \left(\frac{S(T)}{S(t_0)} \right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t_0) \right) \mathbb{1}_{S(T) > K} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].\end{aligned}$$

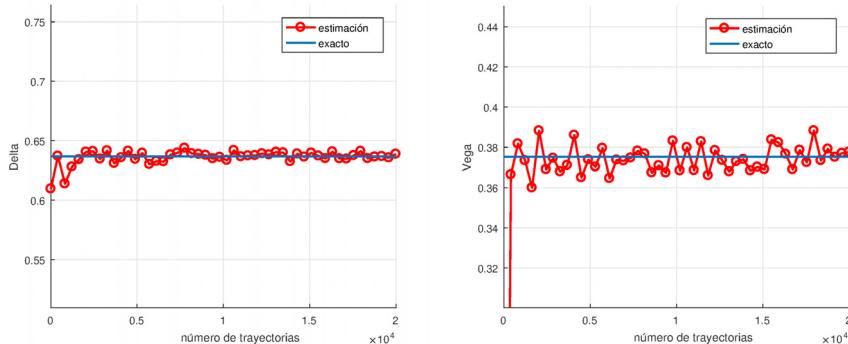


Figura 9.16: Griegas de Black-Scholes estimadas mediante el método de sensibilidad en la trayectoria. Se consideran los parámetros $S(t_0) = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ y $K = S(t_0)$. Izquierda: delta. Derecha: vega.



En la Figura 9.16, podemos observar la convergencia del método en función del número de trayectorias de Monte Carlo. ♦

Ejemplo 9.5.3 (Sensibilidad en la trayectoria: delta de Heston)

Ahora, comprobamos la sensibilidad del valor de una opción call bajo un proceso de precios gobernado por el modelo SV de Heston. La sensibilidad en la trayectoria para la delta de Heston viene dada por

$$\frac{\partial V}{\partial S(t_0)} = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\partial V(T, S; S(t_0))}{\partial S(T)} \frac{\partial S(T)}{\partial S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]$$

La derivada de la función de payoff con respecto a $S(T)$ es

$$\frac{\partial V(T, S; \theta)}{\partial S(T)} = \mathbb{1}_{S(T) > K}, \quad (9.76)$$

y la solución para el proceso Heston se obtiene

$$S(T) = S(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^T \left(r - \frac{1}{2} v(t) \right) dt + \int_{t_0}^T \sqrt{v(t)} dW_x(t) \right],$$

de modo que la sensibilidad con respecto a $S(t_0)$ viene dada por

$$\frac{\partial S(T)}{\partial S(t_0)} = \frac{S(T)}{S(t_0)}. \quad (9.77)$$

Como en el modelo de Black-Scholes, la griega delta se calcula como

$$\frac{\partial V}{\partial S(t_0)} = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(T)}{S(t_0)} \mathbb{1}_{S(T) > K} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

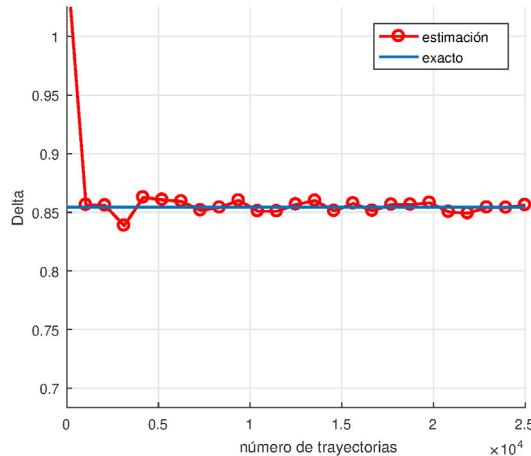


Figura 9.17: Convergencia de la delta de Heston estimada mediante el método de sensibilidad en la trayectoria. Se consideran los parámetros $\gamma = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\bar{v} = 0.04$, $\rho_{x,v} = -0.9$, $v_0 = 0.04$, $T = 1.0$, $S(t_0) = 100$ y $r = 0.1$.



La convergencia del método para esta cantidad se presenta en la Figura 9.17. ♦

Ejemplo 9.5.4 (Opción asiática: delta y vega)

Consideramos ahora un , véase el Ejercicio 5.9, cuya función de payoff se define como

$$V(T, S) = \max(A(T) - K, 0), \quad A(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i),$$

y el proceso de precios evoluciona de acuerdo con el modelo MBG, es decir,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

cuya solución es

$$S(t_i) = S(t_0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_i - t_0) + \sigma(W^{\mathbb{Q}}(t_i) - W^{\mathbb{Q}}(t_0))}. \quad (9.78)$$

Como la función de payoff depende de m valores del activo a lo largo del tiempo, la sensibilidad en la trayectoria con respecto a $S(t_0)$ viene dada por

$$\frac{\partial V}{\partial S(t_0)} = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial V(T, S(t_i); S(t_0))}{\partial S(t_i)} \frac{\partial S(t_i)}{\partial S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

De manera análoga, la sensibilidad con respecto a la volatilidad σ es

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial V(T, S(t_i); \sigma)}{\partial S(t_i)} \frac{\partial S(t_i)}{\partial \sigma} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

La derivada del payoff con respecto al precio del activo en tiempo t_i viene dada por

$$\frac{\partial V}{\partial S(t_i)} = \frac{1}{m} \mathbb{1}_{A(T) > K}. \quad (9.79)$$

Además, obtenemos la sensibilidad del activo con respecto a su valor inicial y a la volatilidad como

$$\frac{\partial S(t_i)}{\partial S(t_0)} = \frac{S(t_i)}{S(t_0)}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial S(t_i)}{\partial \sigma} = S(t_i) (-\sigma(t_i - t_0) + W^{\mathbb{Q}}(t_i) - W^{\mathbb{Q}}(t_0)).$$

Resumiendo, para una opción asiática, tenemos que delta se puede estimar por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S(t_0)} &= e^{-r(T-t_0)} \frac{1}{m} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{A(T) > K} \sum_{i=1}^m \frac{S(t_i)}{S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{A(T) > K} \frac{A(T)}{S(t_0)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

y que vega se puede estimar mediante

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \frac{e^{-r(T-t_0)}}{m} \\ &\times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{A(T) > K} \sum_{i=1}^m S(t_i) (-\sigma(t_i - t_0) + W^{\mathbb{Q}}(t_i) - W^{\mathbb{Q}}(t_0)) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

De (9.78) deducimos que

$$S(t_i) \left(-\sigma(t_i - t_0) + W^{\mathbb{Q}}(t_i) - W^{\mathbb{Q}}(t_0) \right) = \frac{1}{\sigma} S(t_i) \left(\log \left(\frac{S(t_i)}{S(t_0)} \right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_i - t_0) \right).$$

Entonces, la estimación de vega resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S(t_0))}{\partial \sigma} &= \frac{e^{-r(T-t_0)}}{m} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[1_{A(T)>K} \right. \\ &\quad \times \sum_{i=1}^m \left. \frac{S(t_i)}{\sigma} \left(\log \left(\frac{S(t_i)}{S(t_0)} \right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_i - t_0) \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

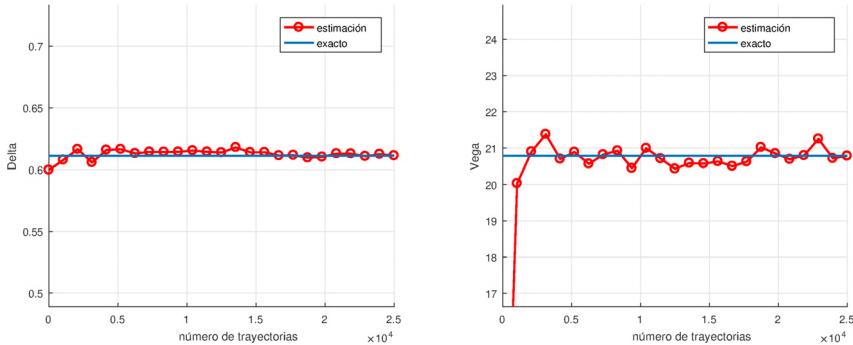


Figura 9.18: Estimaciones de las griegas mediante el método de sensibilidad en la trayectoria para una opción asiática. Se consideran los parámetros $S(t_0) = 100$, $\sigma = 0.15$, $T = 1$, $r = 0.05$, $K = S(t_0)$ y $m = 10$ (instantes de tiempo equiespaciados). Izquierda: delta. Derecha: vega.



En la Figura 9.18 se muestra la convergencia del método. ♦

9.5.3. Método de la razón de verosimilitud

Como tercera alternativa para determinar las griegas de Monte Carlo introducimos el método de la razón de verosimilitud, también conocido como método *likelihood*. Nótese que los principios fundamentales del método de la razón de verosimilitud ya han sido estudiados en el Apartado 9.4.4, donde se presentaron algunas técnicas para mejorar la convergencia de la simulación de Monte Carlo, véase (9.64).

El método de la razón de verosimilitud se basa en derivar la función de densidad de probabilidad, en vez de, como en el caso del método de sensibilidad en la trayectoria, la función de payoff. Para explicar el método de razón de verosimilitud, comenzamos con la fórmula de valoración de opciones, en formulación integral (asumiendo tipos de interés contantes),

$$V(\theta) \equiv V(t_0, S(t_0); \theta) = e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} V(T, z) f_{S(T)}(z; \theta) dz, \quad (9.80)$$

donde, como siempre, $V(T, z) = H(T, z)$ es la función de payoff y $f_{S(T)}(s; \theta)$ es la función de densidad de probabilidad de $S(T)$.

Para calcular la sensibilidad con respecto al parámetro θ , los operadores de integración y derivación se intercambian, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= e^{-r(T-t_0)} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} V(T, z) f_{S(T)}(z; \theta) dz \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} V(T, z) \frac{\partial}{\partial \theta} f_{S(T)}(z; \theta) dz. \end{aligned} \quad (9.81)$$

El intercambio de los operadores de integración y derivación no suele ser problemático, ya que las funciones de densidad de probabilidad en finanzas son, habitualmente, suaves. La expresión anterior se puede escribir en términos del operador esperanza, multiplicando y dividiendo el integrando por $f_{S(T)}(z; \theta)$, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} V(T, z) \frac{\partial f_{S(T)}(z; \theta)}{\partial \theta} \frac{f_{S(T)}(z; \theta)}{f_{S(T)}(z; \theta)} dz \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_{\mathbb{R}} V(T, z) \frac{\partial}{\partial \theta} f_{S(T)}(z; \theta) f_{S(T)}(z; \theta) dz \\ &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V(T, z) \frac{\partial}{\partial \theta} f_{S(T)}(z; \theta) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (9.82)$$

La razón en (9.82) se puede expresar en términos logarítmicos, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V(T, z) \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_{S(T)}(z; \theta) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V(T, z) L(z; \theta) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

La expresión $L(z; \theta)$ bajo el operador esperanza es, de nuevo, la función *score* o el «peso» de la razón de verosimilitud.

Puesto que necesitamos calcular la primera derivada de la función de densidad, y no la del payoff, podemos emplear distintas funciones de payoff de una forma relativamente fácil, ya que la función score seguirá siendo la misma. Este hecho simplifica el uso del método. Como desventaja, el cálculo de la primera derivada con respecto a los parámetros no será trivial cuando la función de densidad de probabilidad del modelo de precios no se conozca en forma cerrada, como en el caso del modelo de Heston, por ejemplo. Concluimos este apartado con algunos ejemplos, en los que mostramos que el método de la razón de verosimilitud exhibe un mayor sesgo que el método de sensibilidad en la trayectoria.

Ejemplo 9.5.5 (Razón de verosimilitud: delta y vega de BS)

Recordamos que la función de densidad de probabilidad del modelo de Black-Scholes es

$$f_{S(T)}(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi(T-t_0)}} \exp \left[-\frac{\left(\log \frac{x}{S(t_0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0) \right)^2}{2\sigma^2(T-t_0)} \right].$$

Las primeras derivadas con respecto a $S(t_0)$ y σ son

$$\frac{\partial \log f_{S(T)}(x)}{\partial S(t_0)} = \frac{\beta(x)}{S(t_0)\sigma^2(T-t_0)}$$

con

$$\text{beta}(x) = \log \frac{x}{S(t_0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t_0),$$

y

$$\frac{\partial \log f_{S(T)}(x)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3(T-t_0)} \beta^2(x) - \frac{1}{\sigma} \beta(x),$$

respectivamente.

Por tanto, la estimación para delta viene dada por

$$\frac{\partial V}{\partial S(t_0)} = \frac{e^{-r(T-t_0)}}{S(t_0)\sigma^2(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max(S(T) - K, 0) \beta(S(T)) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

mientras que la estimación para vega es

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3(T-t_0)} \beta^2(S(T)) - \frac{1}{\sigma} \beta(S(T)) \right) \middle| \mathcal{F}(t_0)]. \end{aligned}$$

♦

En la Figura 9.19, comparamos la convergencia de los métodos de sensibilidad en la trayectoria y la razón de verosimilitud. Los resultados muestran que el método de sensibilidad en la trayectoria proporciona una mejor convergencia. En la Figura 9.20, se presentan las aproximaciones de delta y vega en

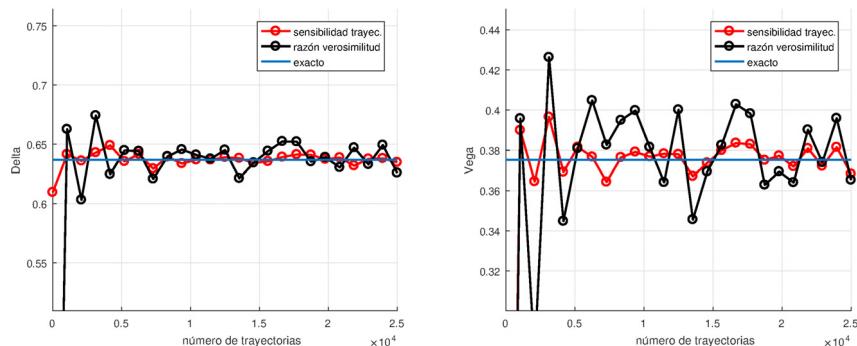


Figura 9.19: Convergencia para los métodos de sensibilidad en la trayectoria y la razón de verosimilitud para el cálculo de griegas. Se consideran los parámetros $S(t_0) = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ y $K = S(t_0)$. Izquierda: delta. Derecha: vega.

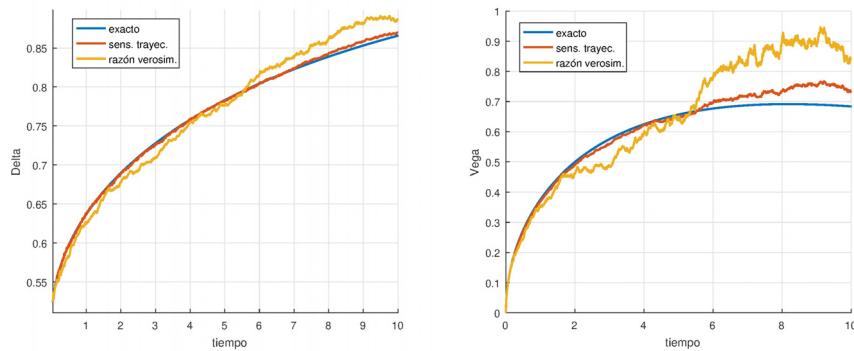


Figura 9.20: Estimaciones para las griegas obtenidas mediante los métodos de sensibilidad en la trayectoria y la razón de verosimilitud en función del vencimiento de la opción. Se consideran los parámetros $S(t_0) = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ y $K = S(t_0)$, con 25 000 trayectorias y 1000 pasos de tiempo. Izquierda: delta. Derecha: vega.



función del vencimiento de la opción. Claramente, el método de sensibilidad en la trayectoria parece que proporciona un comportamiento más estable de convergencia, con menor varianza.

Observación 9.5.1 (Monte Carlo: opciones con ejercicio anticipado)

No hemos incluido los métodos de Monte Carlo destinados a valorar opciones con oportunidades de ejercicio anticipado, como las opciones bermuda y las opciones americanas. Este tipo de técnicas de Monte Carlo combinan una etapa de simulación de trayectorias hacia adelante, con una etapa hacia atrás en la que se deben aproximar las esperanzas condicionadas. Esto se suele llevar a cabo mediante alguna estrategia de regresión de las muestras de Monte Carlo a una forma funcional, combinación de funciones base. Uno de los ejemplos más destacados es el método de LSM de Longstaff y Schwartz (2001). Así mismo, la técnica denominada Stochastic Grid Bundling Method (SGBM) de Jain y Oosterlee (2015), que aplica regresión local dentro de grupos de muestras del activo, resulta ser una alternativa muy atractiva para las opciones con ejercicio anticipado, facilitando a su vez el cálculo de las griegas de la opción, requeridas para el cálculo del Credit Value Adjustment (CVA), véanse los Capítulos 12, 13 y 15.

Por supuesto, hay mucho más que decir sobre esta fascinante técnica numérica. Existe una amplia bibliografía sobre el método de Monte Carlo en finanzas, incluyendo versiones eficientes del mismo para la valoración de distintos contratos de derivados financieros, así como para su aplicación en la gestión de riesgos. Algunos textos monográficos sobre el método Monte Carlo son Kloeden y Platen (1992, 1995, 1999); Glasserman (2003); Jäckel (2002), aunque el los métodos Monte Carlo se han abordado en muchos otros textos, tales como Seydel (2017); Higham (2004).



9.6. Ejercicios

Ejercicio 9.1 Para una función determinista $g(t) = \cos(t)$ dada y $T = 2$, determinar, teóricamente, que

$$\int_0^T g(t)dW(t).$$

Confirmar la solución obtenida mediante un experimento de Monte Carlo.

Ejercicio 9.2 Para una función desteminista $g(t) = \exp(t)$ dada y $T = 2$, determinar, teóricamente, que

$$\int_0^T g(t)dW(t).$$

Confirmar la solución obtenida mediante un experimento de Monte Carlo.

Ejercicio 9.3 Para una función $g(t) = W^4(t)$ dada y $T = 2$, determinar, teóricamente, que

$$\int_0^T g(t)dW(t).$$

Confirmar la solución obtenida mediante un experimento de Monte Carlo.

Ejercicio 9.4 En el Ejercicio 1.7, se dedujo que

$$\int_0^T W(z)dz = \int_0^T (T-z)dW(z).$$

Tomar $T = 5$ y comprobar que esta igualdad se cumple mediante un experimento de Monte Carlo.

Ejercicio 9.5 Mediante simulación de Monte Carlo, mostrar que:

- a. $\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(t_0)] = W(t_0)$ para $t_0 = 0$.
- b. $\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] = W(s)$, con $s < t$. Nótese que esta tarea requiere de simulaciones de Monte Carlo «anidadadas».



Ejercicio 9.6 Este ejercicio está relacionado con el Ejercicio 2.9. Sea $\mathbf{X}(t) = [X(t), Y(t)]^T$, donde suponemos que $X(t)$ verifica la EDE

$$dX(t) = 0.04X(t)dt + \sigma X(t)dW^{\mathbb{P}}(t),$$

e $Y(t)$ verifica

$$dY(t) = \beta Y(t)dt + 0.15Y(t)dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Considerar $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.38$, la cuenta de ahorros, $dM(t) = rM(t)dt$, con tipo de interés libre de riesgo $r = 6\%$, vencimiento $T = 7$ y valores para el strike desde $K = 0$ a $K = 10$ con saltos $\Delta K = 0.5$. Emplear la discretización de Euler para obtener

$$V(t, \mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} \max \left(\frac{1}{2} X(T) - \frac{1}{2} Y(T), K \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

y representar los resultados ($V(t, \mathbf{X})$ en función del strike).

Pista: Se necesita un cambio de medida para valorar la opción.

Ejercicio 9.7 Dado un proceso de Wiener $W(t)$, considerar

$$X(t) = W(t) - \frac{t}{T}W(T-t), \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

Tomando $T = 10$, obtener $\text{Var}[X(t)]$ analíticamente y realizar una simulación numérica para comprobar el resultado. ¿Es la precisión sensible a t ?

Ejercicio 9.8 Para un MBG, con $S(t_0) = 1$ y $r = 0.045$, considerar la función de volatilidad dependiente del tiempo dada por

$$\sigma(t) = 0.2 + e^{-0.3 \cdot t}.$$

Implementar una simulación de Monte Carlo con Euler para un vencimiento de $T = 2$, con $N = 100\,000$ trayectorias y $m = 200$ pasos de tiempo. Estudiar la precisión de los denominados parámetros efectivos⁵ en el contexto de la valoración de opciones call europeas para diferentes strikes, $K = 0, 0.1, \dots, 4$.

Calcular también las volatilidades implícitas para distintos vencimientos, $T = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Describir las volatilidades implícitas observadas.

Ejercicio 9.9 Los esquemas de Euler y Milstein no son adecuados para simular procesos estocásticos positivos y que tienen masa de probabilidad en cero. Un ejemplo de este tipo de procesos es el proceso CIR, cuya dinámica es

$$dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW(t), \quad v(t_0) > 0. \quad (9.83)$$

Cuando la condición de Feller, $2\kappa\bar{v} > \gamma^2$, se satisface, $v(t)$ no puede ser cero pero, sin embargo, si esta condición no se cumple, el origen es alcanzable. En ambos casos, $v(t)$ no puede ser negativo. Teniendo esto en cuenta:

- Seleccionar un conjunto de parámetros específicos y mostrar que la discretización de Euler puede producir valores de $v(t)$ negativos.
- Emplear la simulación quasi-exacta (generar muestras a partir de la distribución chi-cuadrado no central, como en el Apartado 9.3.3) y comprobar que las trayectorias del activo no son negativas, utilizando los mismos valores para los parámetros que en el punto anterior. Realizar dos experimentos en los que cambie el paso de tiempo. Proporcionar las esperanzas y las varianzas.

Ejercicio 9.10 Realizar una simulación de Monte Carlo para un modelo de difusión con saltos. Utilizar tanto el modelo de Kou como el modelo de Merton con el conjunto de parámetros dado en el Ejercicio 5.11. Simular la distribución en tiempo T generando muestras de $S(T)$ como sigue:

- A partir de la función característica se puede obtener la FDA de $S(T)$ utilizando el método COS (Ejercicio 6.4).
- Generar muestras uniformes $u_i = U([0, 1])$;
- Emplear la iteración de Newton-Raphson para generar las muestras $s_i = F_{S(T)}^{-1}(u_i)$, donde $F_{S(T)}(\cdot)$ es la función calculada en el punto 1.

Responder a las siguientes preguntas:

⁵Los parámetros efectivos suelen ser parámetros promediados en tiempo, véase, por ejemplo, σ_* en el Ejemplo 2.2.1.

- a. ¿Cuántas trayectorias se deberían generar en cada caso, de forma que se obtengan valores de opción fiables, con sus varianzas correspondientes?
- b. Comparar los valores de la opción con los obtenidos mediante el método COS en el Ejercicio 6.6.
- c. Realizar también un simulación de Monte Carlo para el modelo de difusión con saltos de Kou, considerando los siguientes conjuntos de parámetros:

Caso I: $\xi_p = 8, p_1 = 0.4, p_2 = 0.6, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 5$.

Caso II: $\xi_p = 8, p_1 = 0.2, p_2 = 0.8, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 5$.

Caso III: $\xi_p = 0.1, p_1 = 0.2, p_2 = 0.8, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 50$.

Comparar los resultados con los obtenidos mediante el método COS, y representar 10 trayectorias relevantes del precio del activo para los modelos de difusión con saltos de Merton y Kou. Nótese que los resultados pueden presentar alguna sensibilidad a la elección de dt .

Ejercicio 9.11 Realizar una simulación de Monte Carlo para los modelos de Lévy de actividad infinita VG, CGMY y NIG. El objetivo es aproximar lo mejor posible los valores de opción obtenidos en el Ejercicio 6.8. Simular la distribución en tiempo T generando muestras de $S(T)$ como sigue:

1. A partir de la función característica se puede obtener la FDA de $S(T)$ utilizando el método COS (Ejercicio 6.4).
2. Generar muestras uniformes $u_i = U([0, 1])$.
3. Emplear la iteración de Newton-Raphson para generar las muestras $s_i = F_{S(T)}^{-1}(u_i)$, donde $F_{S(T)}(\cdot)$ es la función calculada en el punto 1.

Ejercicio 9.12 Analizar la sensibilidad de una opción digital activo o nada modificada, presentada anteriormente en (7.38), y que viene dada por

$$V(\rho) \equiv V(t_0, S_1, S_2; \rho) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_2(T) \mathbb{1}_{S_1(T)>K} | \mathcal{F}(t_0)],$$

donde los procesos S_1 y S_2 vienen dados, con la ayuda de la factorización de Cholesky, por

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= rdt + \sigma_1 d\widetilde{W}_1^{\mathbb{Q}}(t), \\ \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} &= rdt + \sigma_2 \left(\rho d\widetilde{W}_1^{\mathbb{Q}}(t) + \sqrt{1-\rho^2} d\widetilde{W}_2^{\mathbb{Q}}(t) \right), \end{aligned}$$

y cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1(t_0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)T + \sigma_1 \widetilde{W}_1^{\mathbb{Q}}(T)}, \\ S_2(T) &= S_2(t_0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)T + \sigma_2 \rho \widetilde{W}_1^{\mathbb{Q}}(T) + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \widetilde{W}_2^{\mathbb{Q}}(T)}. \end{aligned}$$

Utilizar el método de sensibilidad en la trayectoria para obtener la sensibilidad de esta opción con respecto al parámetro de correlación ρ , y representar la convergencia de $\frac{\partial V}{\partial \rho}$

en función del número de trayectorias de los activos, con los parámetros: $S_1(t_0) = 1$, $S_2(t_0) = 1$, $r = 0.06$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.2$, $T = 1$, $K = S_1(t_0)$ y $\rho = 0.7$.



CAPÍTULO 10

Opciones Forward Start y Modelo de volatilidad local estocástica

En este capítulo:

Las opciones *forward start* son contratos de opción que comienzan en algún momento futuro («no ahora», en t_0). Estas opciones son dependientes de la trayectoria, por lo que se requiere de una representación precisa de la función de densidad de probabilidad del proceso de su activo subyacente, para modelar las características de las opciones forward start que se observan en los mercados financieros. En este capítulo analizaremos las complicaciones adicionales que esto implica. La valoración de opciones forward start bajo diferentes dinámicas de activo, se aborda en el **Apartado 10.1**. En este capítulo también consideraremos un modelo alternativo, en el que el modelo de volatilidad estocástica de Heston se completa con un componente de volatilidad local no paramétrico, resultando el denominado modelo de Heston-Stochastic Local Volatility (Heston-SLV o H-SLV), presentado en el **Apartado 10.2**. Veremos que el modelo Heston-SLV produce un comportamiento «estable» de cobertura además de una valoración precisa de los denominados productos sensibles a la volatilidad forward, como las opciones forward start.

Palabras clave de este capítulo: modelado de opciones forward start bajo diferentes dinámicas, modelos de volatilidad local estocástica, cálculo de esperanzas, método de Monte Carlo por lotes.

10.1. Opciones forward start

En este apartado estudiamos el modelado y la valoración de las opciones forward start, también llamadas «opciones de comportamiento». Las opciones forward start pueden ser vistas como opciones europeas que comienzan en el futuro. Por tanto, este tipo de opciones son ejemplos de opciones dependientes de la trayectoria o exóticas. Mientras que, en las opciones europeas vanilla, el valor inicial del activo, S_0 , es conocido en tiempo t_0 , en el caso de las opciones forward start, el valor inicial del activo es «desconocido», ya que la opción se activa en un tiempo futuro $t = T_1$. Así, las opciones forward start no dependen directamente del valor «hoy» del activo subyacente, sino no del comportamiento del activo dentro de un periodo de tiempo futuro $[T_1, T_2]$.

10.1.1. Introducción a las opciones forward start

Aunque las opciones forward start parecen bastante sencillas, su modelización puede no ser trivial. Empezamos presentando algunos resultados genéricos sobre la valoración de opciones forward start, sin considerar ningún modelo subyacente en particular. En los apartados siguientes, se abordará el impacto de las diferentes alternativas para las dinámicas del activo subyacente sobre los precios de las opciones forward start.

Dados dos vencimientos T_1 y T_2 , con $t_0 < T_1 < T_2$, definimos la función de payoff de una opción forward start como

$$V^{\text{fwd}}(T_2, S(T_2)) := \max \left(\frac{S(T_2) - S(T_1)}{S(T_1)} - K, 0 \right), \quad (10.1)$$

para un strike K . El valor del contrato viene determinado por el «comportamiento porcentual» del activo subyacente $S(t)$, medido en los instantes futuros T_1 y T_2 . Obviamente, tomado $t_0 = T_1$, el payoff resultante es el de una opción europea estándar «escalada» con vencimiento en T_2 , es decir, igual a

$$V^{\text{fwd}}(T_2, S(T_2)) = \frac{1}{S_0} \max(S(T_2) - S_0 \cdot K^*, 0), \quad K^* = K + 1.$$

La función de payoff de la opción call forward start en (10.1) también se puede expresar como

$$V^{\text{fwd}}(T_2, S(T_2)) = \max \left(\frac{S(T_2)}{S(T_1)} - K^*, 0 \right).$$

con $K^* = K + 1$.

El contrato se liquida en tiempo T_2 , por lo que su «valor hoy» viene dado por

$$V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) = M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_2)} \max \left(\frac{S(T_2)}{S(T_1)} - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (10.2)$$

donde $M(t)$ es la cuenta de ahorros.

Considerando un tipo de interés r constante, la ecuación de valoración es

$$\begin{aligned} V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) &= \frac{M(t_0)}{M(T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(\frac{S(T_2)}{S(T_1)} - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{M(t_0)}{M(T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(e^{x(T_1, T_2)} - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

donde

$$x(T_1, T_2) := \log S(T_2) - \log S(T_1).$$

Se puede obtener la función característica de $x(T_1, T_2)$ como

$$\phi_x(u) \equiv \phi_x(u, t_0, T_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iu(\log S(T_2) - \log S(T_1))} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Por la ley de esperanzas iteradas, tenemos que

$$\phi_x(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iu(\log S(T_2) - \log S(T_1))} \middle| \mathcal{F}(T_1) \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Como $\log S(T_1)$ es medible con respecto a la filtración $\mathcal{F}(T_1)$, podemos escribir

$$\phi_x(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-iu \log S(T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iu \log S(T_2)} \middle| \mathcal{F}(T_1) \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Para hacer aparecer una función característica descontada, introducimos un término de descuento apropiado, es decir,

$$\phi_x(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-iu \log S(T_1)} e^{r(T_2 - T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T_2 - T_1)} e^{iu \log S(T_2)} \middle| \mathcal{F}(T_1) \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Así, la esperanza interior se puede ver como la función característica descontada de $X(T_2) = \log S(T_2)$, por lo que tenemos

$$\phi_x(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-iuX(T_1)} e^{r(T_2 - T_1)} \psi_X(u, T_1, T_2) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (10.3)$$

A continuación se presentan dos ejemplos de la función $\psi_X(u, T_1, T_2)$, para las dinámicas de Black-Scholes y Heston.

Hasta ahora, no se ha especificado ninguna dinámica en particular para el activo subyacente $S(t)$, para la que solo se asume un tipo de interés constante. En los siguientes apartados, abordaremos la valoración de opciones forward start bajo distintas dinámicas, empezando por el modelo de Black-Scholes.

10.1.2. Valoración bajo el modelo de Black-Scholes

Bajo el modelo de Black-Scholes, la función característica descontada, $\psi_X(u, T_1, T_2)$, para el proceso transformado logarítmicamente $X(t) = \log S(t)$, condicionado a la información disponible hasta el instante T_1 , ya se obtuvo en (3.29), que adaptada a este contexto es

$$\begin{aligned}\psi_X(u, T_1, T_2) &= \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) iu(T_2 - T_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 (T_2 - T_1) - r(T_2 - T_1) + iuX(T_1) \right].\end{aligned}\tag{10.4}$$

Sustituyendo la función característica forward del modelo de Black-Scholes (10.4) en (10.3), se obtiene la expresión para la función característica forward, $\phi_x(u)$, de $x(T_1, T_2)$, dada por

$$\begin{aligned}\phi_x(u) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})iu(T_2 - T_1) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 (T_2 - T_1)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) iu(T_2 - T_1) - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 (T_2 - T_1) \right).\end{aligned}\tag{10.5}$$

De hecho, esta es la función característica de una densidad normal de media $(r - 1/2\sigma^2)(T_2 - T_1)$ y varianza $\sigma^2(T_2 - T_1)$. La expresión en (10.5) no depende de $S(t)$, sino solo depende del tipo de interés y de la volatilidad. Puede resultar sorprendente que el valor del activo no aparezca en la expresión anterior, pero es una consecuencia lógica del hecho de que la relación $S(T_2)/S(T_1)$, bajo una dinámica lognormal, tiene como solución

$$\frac{S(T_2)}{S(T_1)} = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \sigma(W(T_2) - W(T_1))}.\tag{10.6}$$

Este resultado implica que podemos obtener una expresión en forma cerrada para el valor de una opción forward start bajo el modelo de Black-Scholes.

Teorema 10.1.1 (Opciones forward start: modelo de Black-Scholes)
El precio de una opción call forward start en $t_0 = 0$, definida en (10.1), bajo la dinámica de Black-Scholes para un activo $S(t)$, viene dado por

$$V^{fwd}(t_0, S_0) = e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(\frac{S(T_2)}{S(T_1)} - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]$$

con $K^* = K + 1$, cuya solución en forma cerrada es

$$V^{fwd}(t_0, S_0) = e^{-rT_1} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - K^* e^{-rT_2} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),\tag{10.7}$$

con

$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{1}{K^*} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}, \quad d_2 = \frac{\log \left(\frac{1}{K^*} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}.$$

Demostración. Utilizando (10.6), la ecuación de valoración se puede reescribir como

$$\begin{aligned} V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) &= e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max \left(\frac{S(T_2)}{S(T_1)} - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-rT_2} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \sigma\sqrt{T_2 - T_1}x} - K^*, 0 \right) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx, \end{aligned}$$

con $f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ la FDP de la variable normal estándar. Para un strike positivo, se deduce que

$$\begin{aligned} V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) &= e^{-rT_2} \int_a^{\infty} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \sigma\sqrt{T_2 - T_1}x} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx \\ &\quad - K^* e^{-rT_2} (1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(a)), \end{aligned}$$

con $a = \frac{1}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}} (\log K^* - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1))$. La integral de la última expresión se puede simplificar de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} &\exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T_2 - T_1) + \sigma\sqrt{T_2 - T_1}x \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\sigma^2(T_2 - T_1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T_2 - T_1})^2} dx \\ &= e^{r(T_2 - T_1)} \left(1 - F_{\mathcal{N}(0,1)} \left(a - \sigma\sqrt{T_2 - T_1} \right) \right), \end{aligned}$$

con lo que resulta la siguiente expresión para $V^{\text{fwd}}(t_0, S_0)$, dada por

$$\begin{aligned} V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) &= e^{-rT_1} \left(1 - F_{\mathcal{N}(0,1)} \left(a - \sigma\sqrt{T_2 - T_1} \right) \right) \\ &\quad - K^* e^{-rT_2} (1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(a)). \end{aligned}$$

Empleando la propiedad de la FDA de la normal estándar, $F_{\mathcal{N}(0,1)}(a) = 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-a)$, tenemos que

$$V^{\text{fwd}}(t_0, S_0) = e^{-rT_1} F_{\mathcal{N}(0,1)} \left(\sigma\sqrt{T_2 - T_1} - a \right) - K^* e^{-rT_2} F_{\mathcal{N}(0,1)}(-a).$$

Definiendo

$$\begin{aligned} d_1 &:= \sigma\sqrt{T_2 - T_1} - a \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}} \left[\log \left(\frac{1}{K^*} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T_2 - T_1) \right], \end{aligned}$$

y con $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}$, obtenemos la fórmula (10.7). ■

Observación 10.1.1 (Volatilidad implícita forward)

Empleando la ecuación de valoración de Black-Scholes para opciones forward start, se puede determinar, dados los precios de mercado de estas opciones,

la correspondiente volatilidad implícita forward. De la misma manera que se abordó en el Apartado 4.1.1, la volatilidad implícita forward de Black-Scholes σ_{imp}^{fwd} se obtiene resolviendo

$$V^{fwd}(t_0, K^*, T_1, T_2, \sigma_{imp}^{fwd}) = V^{fwd, mkt}(K, T). \quad \blacktriangle$$

10.1.3. Valoración bajo el modelo de Heston

En este apartado, valoramos la opción forward start bajo la dinámica de volatilidad estocástica de Heston. Como ya hemos visto, la valoración de opciones forward start, bajo la suposición de tipo de interés constante, se reduce a obtener una expresión para la siguiente función característica como en (10.3), esto es

$$\phi_x(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-iuX(T_1)} e^{r(T_2-T_1)} \psi_X(u, T_1, T_2) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (10.8)$$

Para adaptar esta función característica al modelo de Heston, se requiere de una expresión para $\psi_X(u, T_1, T_2)$ bajo ese modelo. Esta función característica, con el vector $\mathbf{u}^T = (u, 0)^T$, tiene la forma

$$\psi_X(u, T_1, T_2) = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(T_1) + \bar{C}(u, \tau)v(T_1)}, \quad (10.9)$$

con $\tau = T_2 - T_1$ y las funciones complejas $\bar{A}(u, \tau)$, $\bar{B}(u, \tau)$ y $\bar{C}(u, \tau)$, introducidas en el Lema 8.3.2. Recordamos que, para el modelo de Heston, tenemos $\bar{B}(u, \tau) = iu$, lo que simplifica la expresión de $\phi_x(u)$ en (10.8), resultando

$$\phi_x(u) = e^{\bar{A}(u, \tau) + r(T_2 - T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\bar{C}(u, \tau)v(T_1)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (10.10)$$

Como en el caso de Black-Scholes, la función característica forward bajo la dinámica de Heston no depende ni del activo $S(t)$ ni de su transformación logarítmica $X(t) = \log S(t)$, estando completamente determinada por la volatilidad del modelo.

Para completar el análisis bajo el modelo de Heston, debemos calcular la esperanza de (10.10). Esta esperanza es una representación de la función generadora de momentos de $v(t)$. El siguiente teorema nos proporciona su correspondiente solución.

Teorema 10.1.2 (Proceso CIR: Función generadora de momentos)

Para un proceso estocástico $v(t)$, cuya dinámica viene dada por

$$dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t), \quad v(t_0) = v_0,$$

con $t \geq t_0$, la función generadora de momentos (o la transformada de Laplace) tiene la forma

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{uv(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \left(\frac{1}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta} \exp \left(\frac{u\bar{c}(t, t_0)\bar{\kappa}(t, t_0)}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right),$$

donde la función $\bar{c}(t, t_0)$, los grados de libertad δ , y el parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t, t_0)$, vienen dados por

$$\bar{c}(t, t_0) = \frac{\gamma^2}{4\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-t_0)}), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(t, t_0) = \frac{4\kappa v_0 e^{-\kappa(t-t_0)}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa(t-t_0)})}. \quad (10.11)$$

Demostración. Como se ha visto en la Observación 8.1.1, la variable aleatoria $v(t)$ sigue una distribución chi-cuadrado no central, cuya densidad viene dada por

$$f_{v(t)}(x) = \frac{1}{\bar{c}(t, t_0)} f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, t_0))} \left(\frac{x}{\bar{c}(t, t_0)} \right),$$

La densidad de la distribución chi-cuadrado no central $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, t_0))$ es

$$f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, t_0))}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2}} \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right)^k f_{\chi^2(\delta+2k)}(x),$$

donde $\chi^2(\delta+2k)$ es la distribución chi-cuadrado con $\delta+2k$ grados de libertad. Empleando la definición de la función generadora de momentos (véase el Apartado 1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{v(t)}(u) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{uv(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \frac{1}{\bar{c}(t, t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2}} \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right)^k \int_0^{\infty} e^{uy} f_{\chi^2(\delta+2k)} \left(\frac{y}{\bar{c}(t, t_0)} \right) dy. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Mediante un cambio de variables, esto es, $y = \bar{c}(t, t_0)x$, obtenemos

$$\mathcal{M}_{v(t)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2}} \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right)^k \int_0^{\infty} e^{u\bar{c}(t, t_0)x} f_{\chi^2(\delta+2k)}(x) dx.$$

Se observa que la integral de la última expresión es la función generadora de momentos de la distribución chi-cuadrado, con $\delta+2k$ grados de libertad, es decir,

$$\mathcal{M}_{\chi^2(\delta+2k)}(u\bar{c}(t, t_0)) = \int_0^{\infty} e^{u\bar{c}(t, t_0)x} f_{\chi^2(\delta+2k)}(x) dx = \left(\frac{1}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta+k}.$$

Sumando y restando un término exponencial, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{v(t)}(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2}} \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right)^k \left(\frac{1}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta+k} \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2\bar{c}(t, t_0)u} \right)^{\frac{1}{2}\delta} \exp \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2(1 - 2u\bar{c}(t, t_0))} - \frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2(1 - 2u\bar{c}(t, t_0))}} \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2(1 - 2u\bar{c}(t, t_0))} \right)^k. \end{aligned}$$

La expresión bajo el sumatorio representa la probabilidad $\mathbb{P}(Y = k)$ de una distribución de Poisson con parámetro $\hat{\alpha}$, esto es, $Y \sim \text{Poisson}(\hat{\alpha})$, con

$$\mathbb{P}[Y = k] = \frac{1}{k!} e^{-\hat{\alpha}} \hat{\alpha}^k.$$

Utilizando $\hat{\alpha} := \bar{\kappa}(t, t_0) / (2(1 - 2u\bar{c}(t, t_0)))$, la relación es directa, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{v(t)}(u) &= \left(\frac{1}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta} \exp \left(\frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2(1 - 2u\bar{c}(t, t_0))} - \frac{\bar{\kappa}(t, t_0)}{2} \right) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[Y = k]. \end{aligned}$$

Como el sumatorio de probabilidades sobre todas las posibles realizaciones de una variable aleatoria es igual a 1, entonces tenemos que

$$\mathcal{M}_{v(t)}(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{uv(t)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \left(\frac{1}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta} \exp \left(\frac{u\bar{c}(t, t_0)\bar{\kappa}(t, t_0)}{1 - 2u\bar{c}(t, t_0)} \right),$$

con lo que finaliza la demostración. ■

La función característica $\phi_x(u)$, introducida en (10.10) con $\mathbf{u}^T = [u, 0]^T$, queda completamente determinada como

$$\begin{aligned} \phi_x(u) &= e^{\bar{A}(u, \tau) + r(T_2 - T_1)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{\bar{C}(u, \tau)v(T_1)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \exp \left(\bar{A}(u, \tau) + r\tau + \frac{\bar{C}(u, \tau)\bar{c}(T_1, t_0)\bar{\kappa}(T_1, t_0)}{1 - 2\bar{C}(u, \tau)\bar{c}(T_1, t_0)} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{1 - 2\bar{C}(u, \tau)\bar{c}(T_1, t_0)} \right)^{\frac{1}{2}\delta}, \end{aligned} \tag{10.13}$$

con $\tau = T_2 - T_1$, los parámetros δ , $\bar{\kappa}(t, t_0)$, $\bar{c}(t, t_0)$ como en (10.11), la función $\bar{C}(u, \tau)$ obtenida para la función característica de Heston, véase (8.47) en el Capítulo 8, y $\bar{A}(u, \tau)$ dada en el Lema 8.3.2.

Ejemplo 10.1.1 (Modelo de Heston: volatilidad implícita forward)

En este experimento obtenemos las volatilidades implícitas forward para el modelo de Heston. Se considera el conjunto de parámetros:

$$r = 0, \kappa = 0.6, \bar{v} = 0.1, \gamma = 0.2, \rho_{x,v} = -0.5, v(t_0) = 0.05.$$

En un primer test, empleamos $T_1 = 1, 2, 3, 4$ y $T_2 = T_1 + 2$, mientras que para el segundo test tomamos $T_1 = 1$ y $T_2 = 2, 3, 4, 5$. Los resultados se muestran en la Figura 10.1.

Claramente, el modelo de Heston admite volatilidades implícitas forward que, además, cambian en función del «periodo de comportamiento» delimitado por T_1 y T_2 . En el primer test, cuando T_1 y T_2 se mueven sincronizados, se puede observar cómo la volatilidad implícita forward evoluciona con el tiempo. En el segundo test, se pueden observar las volatilidades agregadas. ♦

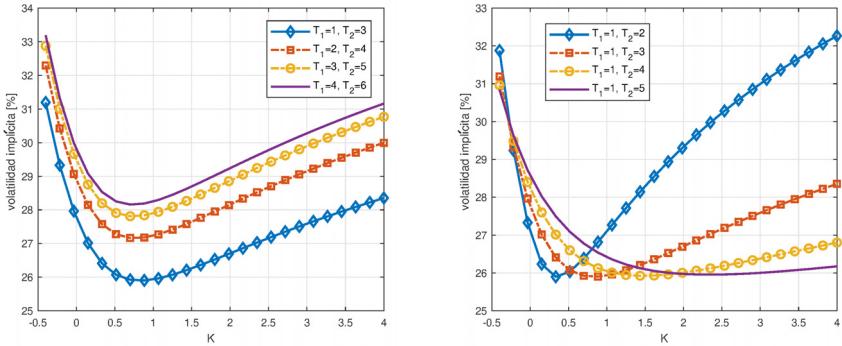


Figura 10.1: Volatilidades implícitas forward para el modelo de Heston.



10.1.4. Volatilidad local versus volatilidad estocástica

En la industria financiera, el modelo (LV) de volatilidad local, tal y como se presentó en el Apartado 4.3, se emplea a menudo para gestionar los riesgos de sonrisa y mueca. Sin embargo, un inconveniente de este modelo es que tiende a aplanar las sonrisas de volatilidad implícita forward, lo que puede producir una mala valoración de los contratos sensibles a la volatilidad forward, como las opciones forward start. Además, el modelo LV no es capaz de modelar con exactitud el movimiento de la sonrisa de volatilidad implícita cuando el valor del subyacente cambia. La consecuencia de esto puede ser una posición de cobertura inestable.

Como ejemplo, realizamos un experimento con una opción forward start, en el que se compara el modelo de volatilidad local con el modelo de volatilidad estocástica de Heston. En el experimento, se obtienen primero los precios de opción call mediante el modelo de Heston y, a continuación, estos se utilizan dentro del modelo de volatilidad local. En el modelo de volatilidad local, como se describe en el Apartado 4.3, se necesitan aproximar con precisión varias derivadas parciales. Se emplean las opciones call europeas con vencimiento $T = 1$, $S_0 = 1$ y precios de strike en el rango desde $0.5 \cdot S_0$ hasta $1.7 \cdot S_0$. Para el modelo de Heston, se consideran los siguientes parámetros, $\kappa = 1.3$, $\bar{v} = 0.05$, $\gamma = 0.3$, $\rho_{x,v} = -30\%$, $v(0) = 0.1$ y $r = 0$.

En la Figura 10.2 (izquierda), se representan las volatilidades implícitas de Black-Scholes resultantes para cada uno de los modelos. El modelo de volatilidad local, empleando diferencias finitas para aproximar las derivadas parciales, reproduce con exactitud la volatilidad implícita calculada con los valores de la opción producidos por el modelo de Heston. Los resultados de la volatilidad local dependen completamente de los precios de las opciones europeas en el instante inicial t_0 , a través de la fórmula (4.49). Este hecho, que es

inherente al modelo LV, puede producir diferencias de valoración significativas para funciones de payoff basadas en más de un pago/vencimiento.

Como estos dos modelos de precios de activos proporcionan, aproximadamente, los mismos valores para opciones vanilla de estilo europeo, las dos densidades de transición, de t_0 a T , «deberían ser aproximadamente iguales». Sin embargo, la volatilidad implícita en un modelo de volatilidad local tiene la tendencia a «aplanarse». Para opciones forward start que comienzan en $t = T_1$ con vencimiento en $t = T$, se esperaría que la volatilidad tuviese una estructura muy similar a la volatilidad implícita observada hoy. Sin embargo, utilizando el modelo de volatilidad local, la volatilidad resultante es «plana», por lo que no refleja la estructura esperada. Esto se observa para una variable $Y(T_1)$, con $t_0 < T_1 < T$, dada por

$$Y(T_1) := \frac{S(T) - S(T_1)}{S(T_1)},$$

que representa la variable forward start. En la Figura 10.2 (derecha), se muestran las dos funciones de distribución acumulada de $Y(T_1)$ producidas por los modelos de Heston y volatilidad local. Aunque los dos modelos coinciden en su distribución final (ajuste casi perfecto en la Figura 10.2, derecha), son muy diferentes cuando se involucra a otras distribuciones. Generalmente, un modelo SV reproduce la dinámica de las opciones forward start de mercado mejor que un modelo LV.

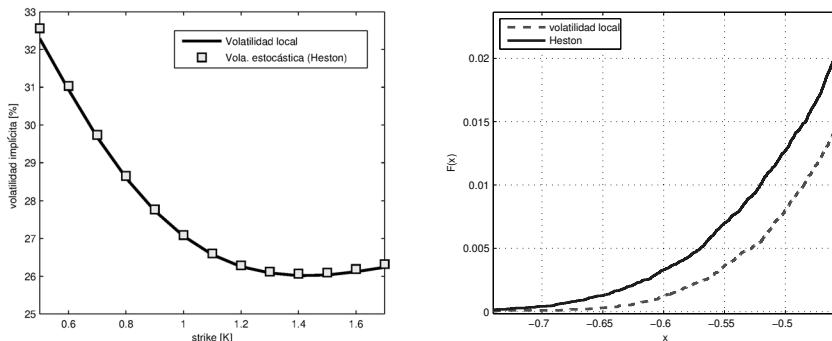


Figura 10.2: Modelo de volatilidad local versus modelo de Heston. Izquierda: volatilidades implícitas. Derecha: zoom de la cola izquierda de las FDAs de $Y(T_1)$.



Observación 10.1.2 (Opciones forward start)

Las opciones forward start son componentes básicos para definir otros derivados financieros, tales como las opciones cliquet (también denominadas opciones ratchet). Las opciones cliquet se encuentran en los mercados de tipos de interés, y consisten en un serie de opciones forward start consecutivas.

Al igual que las opciones forward start, las opciones cliquet también están basadas en el retorno

$$R(T_k) = \frac{S(T_k) - S(T_{k-1})}{S(T_{k-1})}.$$

En la opción cliquet, el retorno suele tener un límite superior, Cap, y un límite inferior, Floor, tal que

$$R^b(T_k) = \max(\min(R(T_k), Cap), Floor).$$

La opción cliquet que también consta de un límite inferior global, Floor_g, es un producto cuyo payoff se define mediante la expresión

$$V^{cliq}(T) = \max \left(\sum_{k=1}^m R_k^b, Floor_g \right), \quad (10.14)$$

donde Floor_g es el valor mínimo global que se puede alcanzar en el contrato. La vida de la opción cliquet, desde $t = 0$ hasta $t = T$ se divide en m instantes de tiempo $T_k, k = 1, \dots, m$ con «intervalos de reinicio» de duración Δt . De este modo, tenemos m instantes de tiempo en los cuales se calcula el «retorno acotado» R_k^b , que aparece en el payoff de la opción cliquet.

Una de las ventajas de las opciones cliquet es que permiten al inversor bloquear periódicamente los beneficios. Si un cierto activo se comporta favorablemente en un período de tiempo $[T_k, T_{k+1}]$, pero tiene un comportamiento deficiente en $[T_{k+1}, T_{k+2}]$, el inversor recibirá el beneficio acumulado en el primer período y no perderá el dinero en el segundo período. Como los beneficios potenciales también pueden estar limitados, es decir, en el contrato puede especificarse que el beneficio no puede ser mayor que, por ejemplo, un 20 %, las opciones cliquet se pueden considerar como una alternativa relativamente barata a las opciones vanilla europeas. ▲

10.2. Modelos de volatilidad local estocástica (SLV)

En el apartado anterior, mostramos que el modelo de volatilidad estocástica de Heston produce una sonrisa de volatilidad implícita forward con una forma similar a la volatilidad implícita observada hoy. Esto es consecuente con lo que se observa en el mercado financiero, por lo que propicia métodos de valoración precisos para productos sensibles a la volatilidad implícita forward. Sin embargo, la calibración del modelo de Heston no es siempre una tarea fácil, además de que no todos los tipos de sonrisas o muecas de volatilidad implícita se pueden modelar mediante la dinámica de Heston. Por el contrario, la clase de modelos de volatilidad local es relativamente fácil de calibrar a opciones vanilla europeas de mercado, aunque, como hemos visto, tiene el inconveniente del aplanamiento de la sonrisa de volatilidad implícita forward, debido a una representación inexacta de la función de densidad de probabilidad de transición.

Con el objetivo de aprovechar las ventajas de cada modelo por separado y eliminar, en la medida de lo posible, sus inconvenientes, se desarrolló la clase de los modelos de volatilidad local estocástica, véase Jex *et al.* (1999) y Lipton (2002); Lipton y McGhee (2002), entre otros. Como se menciona en Clark (2011) y Lipton *et al.* (2014), los modelos de volatilidad local estocástica se emplean a menudo en la valoración de opciones sensibles a la volatilidad forward.

El modelo de volatilidad local estocástica, o modelo SLV por sus siglas en inglés^a, bajo la medida \mathbb{Q} evoluciona de acuerdo con el sistema de EDEs

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = rdt + \bar{\sigma}(t, S(t))\bar{\xi}(v(t))dW_x(t), \\ dv(t) = a_v(t, v(t))dt + b_v(t, v(t))dW_v(t), \\ dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}dt, \end{cases} \quad (10.15)$$

donde $\rho_{x,v}$ es el parámetro de correlación entre los movimientos brownianos, W_x, W_v , y r es un tipo de interés constante. La función $\bar{\sigma}(t, S(t))$ es la componente de volatilidad local, mientras que $\bar{\xi}(v(t))$ controla la volatilidad estocástica, y los términos $a_v(t, v(t))$ y $b_v(t, v(t))$ representan la deriva y la difusión del proceso de varianza, respectivamente.

^aStochastic Local Volatility.

El modelo SLV genérico se puede concretar en el modelo SV puro o en el modelo LV. Por un lado, si la componente de volatilidad local es $\bar{\sigma}(t, S(t)) = 1$, el modelo se reduce a un modelo de volatilidad estocástica «puro». Por otro lado, si la componente estocástica de la varianza, $b_v(t, v(t)) = 0$, el modelo se reduce al modelo de volatilidad local.

Dos famosos modelos que se enmarcan en esta definición genérica son el modelo SV de Heston (1993), donde el proceso de varianza sigue una dinámica CIR (véase Cox *et al.* (1985)), $\bar{\xi}(v(t)) = \sqrt{v(t)}$, con $a_v(t, v(t)) = \kappa(\bar{v} - v(t))$, $b_v(t, v(t)) = \gamma\sqrt{v(t)}$, y el modelo de Schöbel y Zhu (1999), con $\bar{\xi}(v(t)) = v(t)$, $a_v(t, v(t)) = \kappa(\bar{v} - v(t))$ y $b_v(t, v(t)) = \gamma$. Recordamos que el parámetro κ controla la velocidad de reversión a la media, \bar{v} es el parámetro de media a largo plazo y γ representa la volatilidad del proceso $v(t)$.

El modelo SLV descrito en (10.15) no está todavía completo, ya que el término $\bar{\sigma}(t, S(t))$ no se ha especificado. Esta función puede adoptar diferentes formas. Aquí estudiaremos una «forma no paramétrica» de $\bar{\sigma}(t, S(t))$.

En el marco SLV, se dispone por tanto de una función a determinar, la componente de volatilidad local $\bar{\sigma}(t, S(t))$, que puede ser definida de tal manera que las densidades implícitas de mercado y del modelo sean iguales. Sabemos que, a partir de los datos de mercado de opciones europeas, la densidad implícita de mercado $f_{S(T)}(\cdot)$ del activo $S(T)$ se puede determinar, véase el Capítulo 4.

Observación 10.2.1 (Forma paramétrica)

La componente de volatilidad local $\bar{\sigma}(t, S(t))$ se puede representar como en el modelo CEV¹, esto es, $\bar{\sigma}(t, S(t)) = \sigma S^{\beta-1}(t)$, una de las formas paramétricas más conocidas. Optar por una forma paramétrica para $\bar{\sigma}(t, S(t))$ tiene el inconveniente de que σ y β deben calibrarse. En otras palabras, además de los parámetros SV, también tendríamos que incluir los parámetros LV en el procedimiento de calibración. ▲

10.2.1. Componente de volatilidad local

En este apartado, proponemos una expresión para la componente de volatilidad local $\bar{\sigma}(t, S(t))$ del modelo de volatilidad local estocástica. Comenzamos con una opción call europea, cuyo precio viene dado por

$$V_c(t_0, S_0) = \frac{M(t_0)}{M(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S(t) - K)^+ | \mathcal{F}(t_0) \right],$$

donde $dM(t) = rM(t)dt$, $M(t_0) = 1$. Desde ahora, se omite la notación $\mathcal{F}(t_0)$ por claridad. Aplicando el lema de Itô, obtenemos la dinámica del valor de la opción call, dada por

$$\begin{aligned} dV_c(t_0, S_0) &= \left(d \frac{1}{M(t)} \right) \mathbb{E} \left[(S(t) - K)^+ \right] + \frac{1}{M(t)} d\mathbb{E} \left[(S(t) - K)^+ \right] \\ &= -\frac{r}{M(t)} \mathbb{E} \left[(S(t) - K)^+ \right] dt + \frac{1}{M(t)} \mathbb{E} \left[d(S(t) - K)^+ \right], \end{aligned} \tag{10.16}$$

donde la igualdad $d(\mathbb{E} \left[(S(t) - K)^+ \right]) = \mathbb{E} \left[d(S(t) - K)^+ \right]$ se justifica mediante el teorema de Fubini². Analizando el lado derecho de (10.16), vemos que no se puede aplicar directamente el lema de Itô para determinar la dinámica de $d(S(t) - K)^+$, ya que la función $g(x) = (x - a)^+$ no es derivable en el punto $x = a$.

La función $g(t, x)$ de t y la variable estocástica $X_t = x$ deben ser de clase C^2 con respecto a la variable espacial x . En la literatura, se han propuesto varias generalizaciones de la fórmula de Itô para funciones $g(t, X)$ que no son C^2 con respecto a la variable espacial. Una de las extensiones más conocidas es la denominada fórmula de Tanaka-Meyer, introducida en Tanaka (1963) para $g(t, X) = |X|$, y generalizada para funciones $g(t, X)$ absolutamente continuas con $\frac{\partial g(t, X)}{\partial X}$ de variación acotada, por Meyer (1976) y Wang (1977) (véase también Protter (2005); Karatzas y Shreve (1991)).

¹Acrónimo para la constante de elasticidad de la varianza, en inglés *Constant Elasticity of Variance*.

²El teorema de Fubini establece que una condición suficiente para que se verifique la igualdad $\mathbb{E}[\int_0^t g(X(z))dz] = \int_0^t \mathbb{E}[g(X(z))]dz$ es que $X(t)$ y g sean suficientemente regulares y que $\int_0^t \mathbb{E}[|g(X(z))|]dz$ esté acotada.

Teorema 10.2.1 (Fórmula de Tanaka-Meyer)

Dada un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, sea, para $t_0 \leq t < \infty$, $X(t) = X(t_0) + X_I(t) + X_{II}(t)$ una semimartingala, donde $X_I(t)$ es una martingala local continua, y $X_{II}(t)$ es un proceso càdlàg adaptado de variación localmente acotada, es decir, $X_{II}(t)$ se define en \mathbb{R} (o en un subconjunto) y es continuo por la derecha con límites izquierdos en casi todos sus puntos.

Entonces, para la función $g(x) = (x - a)^+$, con $a \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\begin{aligned} g(X(t)) &= g(X(t_0)) + \int_{t_0}^t \mathbf{1}_{X(z)>a} dX_I(z) + \int_{t_0}^t \mathbf{1}_{X(z)>a} dX_{II}(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t g''(X(z))(dX_I(z))^2. \end{aligned}$$

La demostración completa se puede encontrar en Tanaka (1963).

Observación 10.2.2 (Martingala local)

Una martingala local es un proceso estocástico que es una martingala localmente. En general, una martingala local no es una martingala, porque su esperanza puede verse distorsionada por valores grandes de probabilidad pequeña. Los procesos de Itô que se describen mediante una EDE sin término de derivadas son martingalas locales, aunque no siempre martingalas. El proceso MBG, con $dX(t) = X(t)dW(t)$, es un ejemplo de una martingala local que también es una martingala. Sin embargo, el modelo CEV, $dX(t) = X^\beta(t)dW(t)$, con un exponente mayor que uno es una martingala local pero no es una martingala, ya que $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_0] < X_0, \forall t > 0$. La variable $X(t)$ es una martingala estrictamente local cuando $\beta > 1$, mientras que $X(t)$ es una martingala para $\beta < 1$, como se muestra en Lindsay y Brecher (2012). \blacktriangle

Tiempos de espera y martingalas locales

Como veremos a continuación, la definición general de martingala local está conectada con el concepto de tiempo de espera.

Definición 10.2.1 (Tiempo de espera)

Una variable aleatoria no negativa τ_S se denomina un «tiempo de espera» (o tiempo de Markov), con respecto a la filtración, $\mathcal{F}(t)$, si, para todo $t \geq 0$, el evento $\{\tau_S \leq t\}$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible o, en otras palabras, si, para el sigma-álgebra, se cumple que

$$\sigma(\tau_S \leq t) \in \mathcal{F}(t).$$

Si $\tau_S \leq \infty$ c.s., denominamos τ_S como un tiempo de espera finito. \blacktriangleleft

Intuitivamente, τ_S es un tiempo de espera si, para todo instante de tiempo t , podemos determinar si τ_S ha ocurrido antes del instante t a partir de la información que tenemos hasta tiempo t .

Ejemplo 10.2.1 (Tiempo de espera)

Sea un movimiento browniano $W(t)$ y un tiempo de espera definido como $\tau_S = \min\{t : W(t) > 2\}$. El tiempo de espera representa el primer instante en el que el movimiento browniano $W(t)$ alcanza el valor 2. En la Figura 10.3 se presentan algunas trayectorias. Los puntos negros indican los instantes en los cuales cada trayectoria alcanza el valor 2. A repetir este ejercicio para muchas trayectorias, se puede visualizar la distribución del tiempo de espera τ_S (véase el gráfico de la derecha en la Figura 10.3).

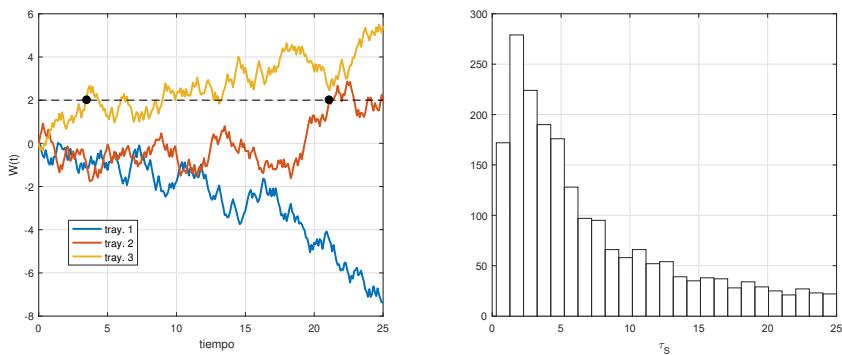


Figura 10.3: Ejemplo de tiempo de espera. Izquierda: trayectorias Monte Carlo del movimiento browniano $W(t)$ y los instantes en los que $W(t) > 2$ por primera vez. Derecha: histograma del tiempo de espera, τ_S , obtenido con 3000 trayectorias.



A partir de esta distribución, se puede determinar el instante de tiempo en el que es más probable que el proceso alcance un cierto nivel. ♦

Observación 10.2.3 (Proceso detenido)

El «proceso detenido» $X^{\tau_S}(t)$ se define como

$$X^{\tau_S}(t) := X(t \wedge \tau_S) = \begin{cases} X(t), & t \leq \tau_S, \\ X(\tau_S), & t > \tau_S. \end{cases} \quad (10.17)$$

▲

Una propiedad importante del proceso detenido es la propiedad de martingala, concretada en la siguiente proposición.

Proposición 10.2.1

Si un proceso $X(t)$ es una martingala, entonces el proceso detenido $X^{\tau_S}(t) = X(t \wedge \tau_S)$ también es una martingala. En particular, para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$\mathbb{E}[X^{\tau_S}(t) | \mathcal{F}(t_0)] = \mathbb{E}[X(t_0) | \mathcal{F}(t_0)] = X(t_0).$$

La demostración se puede consultar en Williams (1991), Teorema 10.9. ◀

Establecida la conexión entre la martingala y el tiempo de espera, podemos avanzar y definir el concepto de martingala local.

Definición 10.2.2 (Martingala local)

Un proceso estocástico adaptado y continuo $X(t)$ es una martingala local, si existe una secuencia $\tau_{S,i} \in \mathbb{N}$ de tiempos de espera que verifica:

1. $\tau_{S,1} \leq \tau_{S,2} \leq \dots$ y $\tau_{S,i} \rightarrow \infty$, c.s.
2. Los procesos detenidos, $X^{\tau_{S,i}}$, son martingalas para todo i .

La secuencia $\tau_{S,i}$ se denomina una «secuencia de localización» o secuencia fundamental. ◀

A partir de la definición anterior, se desprende claramente que toda martingala es también una martingala local, pero lo inverso no es siempre cierto.

Obtención del término de volatilidad local estocástica

Retomamos el desarrollo a partir de (10.16). Aplicando la fórmula de Tanaka-Meyer, tenemos que

$$\begin{aligned} (S(t) - K)^+ &= (S(t_0) - K)^+ + \int_{t_0}^t \mathbf{1}_{S(z) > K} dS(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \delta(S(z) - K) (dS(z))^2, \end{aligned}$$

donde δ es la función delta de Dirac, véase (1.17) o el Ejemplo 4.2.2. Con un cierto abuso de notación (por conveniencia), escribimos la expresión anterior en forma diferencial, esto es

$$d(S(t) - K)^+ = \mathbf{1}_{S(t) > K} dS(t) + \frac{1}{2} \delta(S(t) - K) (dS(t))^2.$$

Sustituyendo la dinámica SLV de $S(t)$, obtenemos, en orden creciente,

$$\begin{aligned} d(S(t) - K)^+ &= \mathbf{1}_{S(t) > K} (rS(t)dt + \bar{\sigma}(t, S(t))\bar{\xi}(v(t))S(t)dW_x(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta(S(t) - K) \bar{\sigma}^2(t, S(t))\bar{\xi}^2(v(t))S^2(t)dt. \end{aligned}$$

Entonces, la dinámica del precio de la opción call se puede escribir como

$$\begin{aligned} dV_c(t_0, S_0) &= -\frac{r}{M(t)} \mathbb{E}[(S(t) - K)^+] dt \\ &\quad + \frac{1}{M(t)} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t) > K} (rS(t)dt + \bar{\sigma}(t, S(t))\bar{\xi}(v(t))S(t)dW_x(t))] \\ &\quad + \frac{1}{2M(t)} \mathbb{E}[\delta(S(t) - K) \bar{\sigma}^2(t, S(t))\bar{\xi}^2(v(t))S^2(t)] dt. \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede simplificar empleando la igualdad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S(t) - K)^+] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t)>K}(S(t) - K)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t)>K} S(t)] - K \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t)>K}],\end{aligned}$$

obteniendo el siguiente resultado.

Resultado 10.2.1 *La dinámica del precio de una opción call europea $V_c(t_0, S_0)$, con $S(t)$ y $v(t)$ siguiendo las dinámicas en (10.15), viene dada por*

$$\begin{aligned}dV_c(t_0, S_0) &= \frac{rK}{M(t)} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t)>K}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2M(t)} \mathbb{E}[\delta(S(t) - K) \bar{\sigma}^2(t, S(t)) \bar{\xi}^2(v(t)) S^2(t)] dt,\end{aligned}$$

donde las esperanzas están condicionadas a $\mathcal{F}(t_0)$.

A continuación, presentamos otro resultado.

Lema 10.2.1

El precio de la opción call europea $V_c(t_0, S_0; K, T) = V_c(t_0, S_0)$, con $S(t)$ y $v(t)$ siguiendo la dinámicas en (10.15), verifica que

$$\frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K} = -\frac{1}{M(t)} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S(t)>K} | \mathcal{F}(t_0)], \quad (10.18)$$

y

$$\frac{\partial V_c^2(t_0, S(t_0); K, t)}{\partial K^2} = \frac{f_{S(t)}(K)}{M(t)}, \quad (10.19)$$

donde $f_{S(t)}$ es la función de densidad de probabilidad marginal de $S(t)$. \blacktriangleleft

La demostración de este lema es muy parecida a los desarrollos vistos en el Capítulo 4.

Empleando la dinámica del precio de la call del Resultado 10.2.1, e incluyendo los resultados del Lema 10.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned}dV_c(t_0, S_0; K, t) &= -rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K} dt \\ &\quad + \frac{1}{2M(t)} \mathbb{E}[\delta(S(t) - K) \bar{\sigma}^2(t, S(t)) \bar{\xi}^2(v(t)) S^2(t)] dt,\end{aligned} \quad (10.20)$$

lo que resulta en

$$\begin{aligned}\Xi(t)dt &:= \mathbb{E}[\delta(S(t) - K) \bar{\sigma}^2(t, S(t)) \bar{\xi}^2(v(t)) S^2(t)] dt \\ &= 2M(t) \left(dV_c(t_0, S_0; K, t) + rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K} dt \right)\end{aligned} \quad (10.21)$$

con

$$\begin{aligned}\Xi(t) &:= \iint_{\mathbb{R}} \delta(s - K) \bar{\sigma}^2(t, s) \bar{\xi}^2(z) s^2 f_{v(t), S(t)}(z, s) ds dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bar{\xi}^2(z) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta(s - K) s^2 \bar{\sigma}^2(t, s) f_{v(t), S(t)}(z, s) ds \right) dz.\end{aligned}\quad (10.22)$$

Utilizando la igualdad, $\int_{\mathbb{R}} \delta(s - K) f_{S(t)}(s) ds = f_{S(t)}(K)$, la integral interior se simplifica a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(s - K) s^2 \bar{\sigma}^2(t, s) f_{v(t), S(t)}(z, s) ds = K^2 \bar{\sigma}^2(t, K) f_{v(t), S(t)}(z, K). \quad (10.23)$$

Entonces, la expresión para el término $\Xi(t)$ es

$$\Xi(t) = K^2 \bar{\sigma}^2(t, K) \int_{\mathbb{R}} \bar{\xi}^2(z) f_{v(t), S(t)}(z, K) dz, \quad (10.24)$$

que es equivalente a

$$\Xi(t) = K^2 \bar{\sigma}^2(t, K) f_{S(t)}(K) \mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t)) | S(t) = K].$$

La dinámica del precio viene dada por

$$\begin{aligned}dV_c(t_0, S_0; K, t) &= -rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K} dt \\ &+ \frac{1}{2M(t)} K^2 \bar{\sigma}^2(t, K) f_{S(t)}(K) \mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t)) | S(t) = K] dt.\end{aligned}\quad (10.25)$$

Utilizando la segunda ecuación del Lema 10.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned}dV_c(t_0, S_0; K, t) &= \left(-rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} K^2 \bar{\sigma}^2(t, K) \mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t)) | S(t) = K] \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K^2} \right) dt,\end{aligned}\quad (10.26)$$

que se puede expresar como

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2(t, K) \mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t)) | S(t) = K] &= \frac{\frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial t} + rK \frac{\partial V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; K, t)}{\partial K^2}} \\ &=: \sigma_{LV}^2(t, K),\end{aligned}$$

donde $\sigma_{LV}(t, K)$ denota el término de volatilidad local de Dupire (1994).

Para modelos SLV, se obtiene la expresión

$$\bar{\sigma}^2(t, K) = \frac{\sigma_{LV}^2(t, K)}{\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t))|S(t) = K]}. \quad (10.27)$$

Entonces, la componente de volatilidad $\bar{\sigma}^2(t, K)$ en SLV la forman dos elementos, una volatilidad local determinista $\sigma_{LV}(t, K)$ y una esperanza condicionada $\mathbb{E}[\bar{\xi}^2(v(t))|S(t) = K]$.

La evaluación numérica del término $\sigma_{LV}(t, K)$ está ampliamente estudiada, véase el Apartado 4.3, y Andreasen y Huge (2011); Coleman *et al.* (1999); De Marco *et al.* (2013). El cálculo eficiente de la esperanza condicionada en (10.27) será abordado a continuación. El proceso $S(t)$ consta de una componente de volatilidad local $\sigma_{LV}(t, S)$, para la que no se tiene expresión analítica. Sin embargo, la dificultad radica en el hecho de que la distribución conjunta de la varianza v y el activo S , es decir, $f_{v(t), S(t)}$, no es conocida.

Observación 10.2.4 (Literatura)

*En el marco de SLV, se necesita determinar una esperanza condicionada. La forma exacta de la misma depende de la elección del proceso estocástico. A diferencia de lo que ocurría con el modelo LV, la esperanza condicionada no puede extraerse directamente de las cotizaciones de mercado. Una de las estrategias más comunes es la resolver la ecuación en derivadas parciales (EDP) de Kolmogorov forward, véase Deelstra y Rayée (2012); Ren *et al.* (2007); Clark (2011), aproximando simultáneamente la esperanza condicionada y la componente de volatilidad local estocástica. En la industria financiera, la utilización de técnicas de discretización para EDPs en el contexto de una volatilidad local híbrida es práctica habitual.*

La técnica de proyección de Markov también ha sido aplicada en el contexto SLV, para lo que remitimos al lector a Piterbarg (2007); Henry-Labordère (2009). Aunque este método es de aplicación genérica, involucra la aproximación de varias esperanzas condicionadas.

*En Lorig *et al.* (2015), se propone una familia de expansiones asintóticas para los precios y las volatilidades implícitas de opciones de estilo europeo bajo una clase genérica de modelos de volatilidad local estocástica. Además, en Pascucci y Mazzon (2017) se presenta una expansión asintótica para las opciones forward start bajo un modelo de volatilidad local estocástica multifactor, que resulta en una fórmula de aproximación explícita para la volatilidad implícita forward. En van der Stoep *et al.* (2014), se introduce, en el marco de Monte Carlo, un método no paramétrico para la evaluación de la esperanza condicionada de interés, que se basa en la agrupación por lotes de las realizaciones de Monte Carlo. Se propone una técnica similar en Guyon y Henry-Labordère (2012); Jourdain y Sbai (2012), basada en estimadores kernel en un sistema de partículas interactivo.*

10.2.2. Simulación Monte Carlo para el modelo SLV

No centramos en la simulación Monte Carlo del modelo SLV.

En primer lugar, empleando una discretización de Euler, podemos simular el modelo SLV (10.15), como

$$s_{i+1,j} = s_{i,j} + r s_{i,j} \Delta t + \sqrt{\frac{\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})}{\mathbb{E}[\bar{\xi}^2(v(t_i))|S(t_i) = s_{i,j}]}} s_{i,j} \bar{\xi}(v_{i,j}) \sqrt{\Delta t} Z_x \quad (10.28)$$

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + a_v(t_i, v_{i,j}) \Delta t + b_v(t_i, v_{i,j}) \sqrt{\Delta t} Z_v,$$

con $j = 1, \dots, N$ (el número de trayectorias de Monte Carlo) e $i = 0, \dots, m$ (el número de pasos de tiempo) y $Z_x = Z_1$, $Z_v = \rho_{x,v} Z_1 + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} Z_2$, Z_1 y Z_2 dos variables normales estándar independientes. El paso de tiempo es $\Delta t = i \cdot \frac{T}{m}$.

Para determinar los valores de las trayectorias del activo en el siguiente paso de tiempo, t_{i+1} , debemos aproximar dos componentes, $\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})$ y $\mathbb{E}[\bar{\xi}^2(v(t_i))|S(t_i) = s_{i,j}]$. La evaluación eficiente de $\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})$ ya se ha explicado en el Capítulo 4, y la esperanza condicionada se abordará en este apartado. Una de las mayores dificultades es que el condicionamiento en la evaluación se debe tomar para cada realización del activo, $s_{i,j}$, esto es, en una discretización de $\{S, v\}$, cada realización de $s_{i,j}$ tiene su correspondiente realización (solo una) de la varianza $v_{i,j}$ lo que complica la evaluación de la esperanza condicionada. En el siguiente apartado, se presenta un método no paramétrico para la esperanza condicionada.

Método no paramétrico por lotes

Suponemos que, para una discretización en tiempo dada, con $t_i, i = 1, \dots, m$, existen N pares de realizaciones de Monte Carlo, $(s_{i,1}, v_{i,1}), (s_{i,2}, v_{i,2}), \dots, (s_{i,N}, v_{i,N})$, para los que se necesita aproximar la esperanza condicionada de (10.28). Para cada valor $s_{i,j}$ tenemos solo un valor $v_{i,j}$, con lo que la esperanza condicionada sería, entonces, igual a $\bar{\xi}^2(v_{i,j})$, lo que es incorrecto. Esto es consecuencia de discretizar un sistema continuo (S, v) . Obviamente, una estimación más precisa requeriría de un «número infinito» de trayectorias, lo que es inviable en la práctica.

Una posible estrategia para solventar este problema se basa en agrupar pares de realizaciones «en lotes», lo que podría proporcionar una estimación más precisa de la esperanza deseada. Dividimos entonces el rango de valores de $S(t_i)$ en l particiones mutuamente excluyentes, $(b_1, b_2], (b_2, b_3], \dots, (b_l, b_{l+1}]$, con $b_1 \geq 0$ y $b_{l+1} < \infty$. Para una realización particular del activo $s_{i,j}$, donde $s_{i,j} \in (b_k, b_{k+1}]$ para algún $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, se propone la aproximación

$$\mathbb{E}[\bar{\xi}^2(v(t_i))|S(t_i) = s_{i,j}] \approx \mathbb{E}[\bar{\xi}^2(v(t_i))|S(t_i) \in (b_k, b_{k+1}]] \quad (10.29)$$

Definiendo los límites izquierdo y derecho de $(b_k, b_{k+1}]$ como $s_{i,j} - \varepsilon$ y $s_{i,j} + \varepsilon$, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) | S(t_i) = s_{i,j}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) | S(t_i) \in (s_{i,j} - \varepsilon, s_{i,j} + \varepsilon)] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) \mathbb{1}_{S(t_i) \in (s_{i,j} - \varepsilon, s_{i,j} + \varepsilon)}]}{\mathbb{Q}[S(t_i) \in (s_{i,j} - \varepsilon, s_{i,j} + \varepsilon)]}.(10.30)\end{aligned}$$

En el límite, donde los dos extremos de la partición son iguales a $s_{i,j}$, la aproximación de la esperanza condicionada convergería a su valor exacto. Esto es indicativo de que la aproximación en (10.29) es pertinente. Se pueden determinar unos límites «apropiados» para los lotes, b_k para $k = 1, \dots, l + 1$, ordenando los valores de las trayectorias del activo, $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,N}$, y obteniendo así una secuencia creciente, $\bar{s}_{i,1} \leq \bar{s}_{i,2} \leq \dots \leq \bar{s}_{i,N}$, siendo $\bar{s}_{i,1}$ t $\bar{s}_{i,N}$ los valores menor y mayor en el paso de tiempo i , respectivamente. Los lotes se definen de tal forma que cada partición contiene aproximadamente el mismo número de trayectorias de Monte Carlo. De este modo, los extremos de las particiones, $b_{i,k}$, $k = 1, \dots, l + 1$, dependen del número de trayectorias por lote, esto es

$$b_{i,1} = \bar{s}_{i,1}, \quad b_{i,l+1} = \bar{s}_{i,N}, \quad b_{i,k} = \bar{s}_{i,(k-1)N/l}, \quad k = 2 \dots l. \quad (10.31)$$

Por tanto, cada par $(s_{i,j}, v_{i,j})$ se asigna a un lote según su valor $s_{i,j}$. Denotamos por $\mathcal{J}_{i,k}$ los índices de trayectoria correspondientes al lote k -ésimo en tiempo t_i , esto es, $\mathcal{J}_{i,k} := \{j | (s_{i,j}, v_{i,j}) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]\}$, siendo el número de trayectorias del lote k -ésimo, $N_k := |\mathcal{J}_{i,k}|$.

Entonces, la esperanza condicionada se puede aproximar mediante

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) | S(t_i) = s_{i,j}] &\approx \frac{\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) \mathbb{1}_{S(t_i) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})}]}{\mathbb{Q}[S(t_i) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})]} \\ &\approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\xi}^2(v_{i,j}) \mathbb{1}_{s_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})}}{\mathbb{Q}[S(t_i) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})]} \\ &= \frac{1}{N \alpha(k)} \sum_{j \in \mathcal{J}_{i,k}} \bar{\xi}^2(v_{i,j}), \quad (10.32)\end{aligned}$$

donde $\alpha(k) := \mathbb{Q}[S(t_i) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})]$ representa la probabilidad de que el valor del activo esté en el lote k -ésimo.

La aproximación del segundo paso se debe a la estimación de la esperanza por la media, calculada con un número finito de pares $(s_{i,j}, v_{i,j})$. El valor de $\alpha(k)$ depende de como se construyen los lotes, esto es, $\alpha(k) = 1/l$.

Observación 10.2.5

La elección de las particiones afecta a la convergencia del método no paramétrico. Al definir las particiones como se especifica en (10.31), los lotes cercanos

al valor medio de la densidad conjunta son mucho más pequeños que los lotes en las colas. Esta es una característica deseable, ya que la región cercana a la media contiene muchas más observaciones, por lo que, para mantener una alta precisión, se requiere de lotes pequeños. ▲

Resumimos el método no paramétrico en el Algoritmo 10.1.

Algorithm 10.1 Método no paramétrico

Para cada paso de tiempo $t_i, i = 1 \dots m$

Generar N pares de observaciones $(s_{i,j}, \bar{\xi}^2(v_{i,j}))$, $j = 1 \dots N$.

Ordenar los elementos $\bar{s}_{i,j}$: $\bar{s}_{i,1} \leq \bar{s}_{i,2} \leq \dots \leq \bar{s}_{i,N}$.

Determinar las particiones de los l lotes $(b_{i,k}, b_{i,k+1}]$, $k = 1 \dots l$, según (10.31).

Para el lote k -ésimo: aproximar

$$\mathbb{E} [\bar{\xi}^2(v(t_i)) | S(t_i) \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]] \approx \frac{1}{N\alpha(k)} \sum_{j \in \mathcal{J}_{i,k}} \bar{\xi}^2(v_{i,j}),$$

con $\mathcal{J}_{i,k}$ los índices de trayectoria j tal que $s_{i,j} \in (b_k, b_{k+1})$
y $\alpha(k)$ la probabilidad de que el activo esté en el lote k -ésimo.

Ejemplo 10.2.2

En el primer ejemplo consideramos el modelo SV de Heston puro, donde $\bar{\xi}(x) = \sqrt{x}$ y la esperanza condicionada viene dada por $\mathbb{E}[v(t_i)|S(t_i) = s_{i,j}]$. Para el modelo de Heston «puro», la esperanza condicionada se puede calcular de una manera altamente eficiente mediante la versión 2D del método COS, introducida en Ruijter y Oosterlee (2012).

En la Figura 10.4, se muestra la aproximación de la esperanza condicionada empleando el método por lotes, y la función de referencia, obtenida mediante expansiones de Fourier. En ambos gráficos se representan la FDP conjunta, su correspondiente esperanza condicionada y su aproximación por lotes. En las simulaciones, se han utilizado 10^5 trayectorias de Monte Carlo, con 5 y 20 lotes, respectivamente.

La aproximación obtenida por el algoritmo propuesto converge a la esperanza de referencia.

A continuación, en Figura 10.5 comparamos la aproximación proporcionada por el método no paramétrico con un método basado en regresión en dos situaciones, distinguiendo entre si se cumple la condición de Feller o no. Vemos que, aunque ambos métodos tienen un buen comportamiento cuando esta se satisface, el método no paramétrico aproxima mucho mejor el valor de referencia en el caso en que se viola la condición de Feller.

10.2.3. Esquema AES de Monte Carlo para el modelo SLV

El esquema de simulación quasi-exacta o esquema AES, basado en el esquema QE de Andersen (2008) (véase el Apartado 9.3.4), se puede generalizar para la

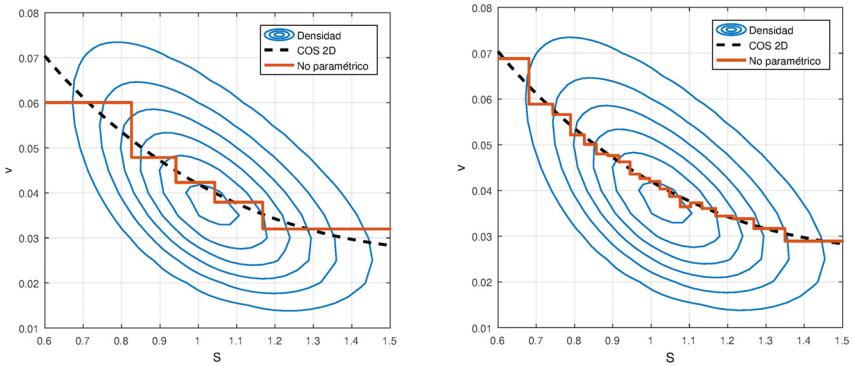


Figura 10.4: La aproximación obtenida mediante el método por lotes no paramétrico converge a la esperanza condicionada obtenida mediante el método COS cuando el número de lotes aumenta. Izquierda: 5 lotes. Derecha: 20 lotes.

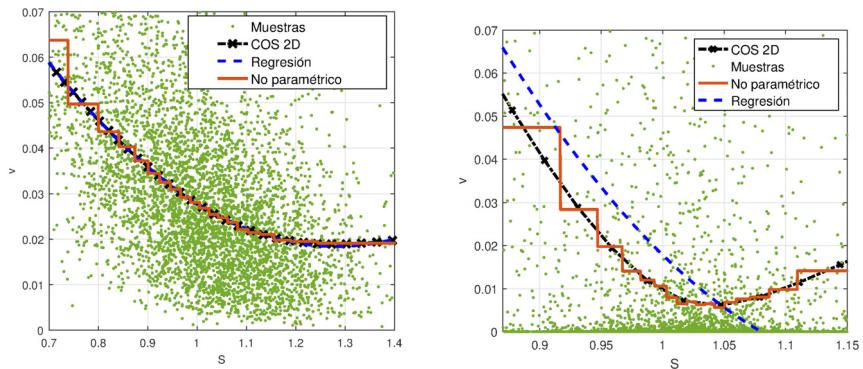


Figura 10.5: Aproximación mediante el método no paramétrico comparada con un método basado en regresión. El valor de referencia se obtiene con el método COS 2D. Izquierda: se satisface la condición de Feller. Derecha: no se satisface la condición de Feller



simulación del modelo SLV de Heston. La principal diferencia en la simulación de Monte Carlo entre los modelo SV puro y SVL de Heston radica en que la varianza de este último incorpora una componente de volatilidad local

dependiente del activo. Esto requiere de una aproximación adicional como, por ejemplo, la congelación de los coeficientes. Como veremos en los experimentos numéricos, con esta aproximación se obtiene una simulación que mantiene la precisión.

Recordamos que la dinámica del modelo SLV de Heston, expresado en términos de dos movimientos brownianos independientes, es

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = rdt + \bar{\sigma}(t, S(t))\sqrt{v(t)} \left(\rho_{x,v} d\widetilde{W}_v(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} d\widetilde{W}_x(t) \right), \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}d\widetilde{W}_v(t), \end{cases}$$

donde $\rho_{x,v}$ es el parámetro de correlación entre los procesos $S(t)$ y $v(t)$.

La discretización de $X(t) = \log(S(t))$, con (abusando de la notación) $\bar{\sigma}(t, X(t)) := \bar{\sigma}(t, e^{X(t)})$, viene dada por

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &= X(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left(r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(z, X(z))v(z) \right) dz \\ &+ \rho_{x,v} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z))\sqrt{v(z)}d\widetilde{W}_v(z) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z))\sqrt{v(z)}d\widetilde{W}_x(z). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Del Apartado 8.1.2 sabemos que el proceso de varianza sigue una distribución chi-cuadrado no central escalada, es decir,

$$v(t + \Delta t)|v(t) \sim \bar{c}(t + \Delta t, t)\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t + \Delta t, t)), \quad (10.34)$$

donde $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t + \Delta t, t))$ es una distribución chi-cuadrado no central con δ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t + \Delta t, t)$, y

$$\bar{c}(t + \Delta t, t) = \frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t}), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(t + \Delta t, t) = \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta t}}{\gamma^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})}v(t).$$

Integrando el proceso de varianza, véase (9.49), obtenemos

$$\int_t^{t+\Delta t} \sqrt{v(z)}d\widetilde{W}_v(z) = \frac{1}{\gamma} \left(v(t + \Delta t) - v(t) - \kappa\bar{v}\Delta t + \kappa \int_t^{t+\Delta t} v(z)dz \right). \quad (10.35)$$

En la última integral de (10.33), las volatilidades local y estocástica están acopladas. Este hecho complica la simulación, ya que la varianza integrada, como en (10.35), no se puede emplear directamente. Dado que la simulación de Monte Carlo con una componente de volatilidad local habitualmente involucra muchos pasos de tiempo, el término $\bar{\sigma}(s, X(s))$ en (10.33) se «congela localmente», es decir,

$$\int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z))\sqrt{v(z)}d\widetilde{W}_v(z) \approx \bar{\sigma}(t, X(t)) \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{v(z)}d\widetilde{W}_v(z). \quad (10.36)$$

Dada la aproximación en (10.36), podemos utilizar (10.35) en (10.33), tal que

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &\approx X(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left(r - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(z, X(z)) v(z) \right) dz \\ &+ \frac{\rho_{x,v} \bar{\sigma}(t, X(t))}{\gamma} \left(v(t + \Delta t) - v(t) - \kappa \bar{v} \Delta t + \kappa \int_t^{t+\Delta t} v(z) dz \right) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z)) \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_x(z). \end{aligned}$$

Empleando una discretización de Euler para todas las integrales con respecto al tiempo, la discretización del proceso $X(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &\approx X(t) + r \Delta t - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, X(t)) v(t) \Delta t \\ &+ \frac{1}{\gamma} \rho_{x,v} \bar{\sigma}(t, X(t)) (v(t + \Delta t) - v(t) - \kappa \bar{v} \Delta t + \kappa v(t) \Delta t) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z)) \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_x(z). \end{aligned}$$

Además, aplicando la isometría de Itô, tenemos que

$$\int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}(z, X(z)) \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_x(z) \sim \tilde{Z}_x \sqrt{\int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}^2(z, X(z)) v(z) dz}, \quad (10.37)$$

donde $\tilde{Z}_x \sim N(0, 1)$. La integral en el lado derecho de (10.37) se puede aproximar de nuevo mediante la discretización de Euler, esto es, $\int_t^{t+\Delta t} \bar{\sigma}^2(z, X(z)) v(z) dz \approx \bar{\sigma}^2(t, X(t)) v(t) \Delta t$, de modo que el esquema de discretización resultante es

$$\begin{aligned} v_{i+1,j} &\sim \bar{c}(t + \Delta t, t) \chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)), \\ x_{i+1,j} &= x_{i,j} + r \Delta t - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t_i, x_{i,j}) v_{i,j} \Delta t + \frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \bar{\sigma}(t_i, x_{i,j}) (v_{i+1,j} - \kappa \bar{v} \Delta t \\ &+ v_{i,j} (\kappa \Delta t - 1)) + \sqrt{1 - \rho_{x,v}^2} \sqrt{\bar{\sigma}^2(t_i, x_{i,j}) v_{i,j} \Delta t} \tilde{Z}_x, \end{aligned}$$

con

$$\bar{\sigma}^2(t_i, x_{i,j}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\sigma}^2(t_i, e^{x_{i,j}}) = \frac{\sigma_{\text{LV}}^2(t_i, s_{i,j})}{\mathbb{E}[v(t_i)|S(t_i) = s_{i,j}]} \quad (10.38)$$

En (10.38), la componente de volatilidad local de Dupire se calcula como

$$\sigma_{\text{LV}}^2(t_i, s_{i,j}) = \left. \frac{\frac{\partial V_c(t_0, S_0; s, t)}{\partial t} + rs \frac{\partial V_c(t_0, S_0; s, t)}{\partial s}}{\frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2 V_c(t_0, S_0; s, t)}{\partial s^2}} \right|_{s=s_{i,j}, t=t_i}$$

empleando la aproximación habitual mediante diferencias finitas, con paso de tiempo Δt e incremento del precio del activo Δs , es decir,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial V_c(t, s_{i,j})}{\partial t}\right|_{t=t_i} &\approx \frac{V_c(t_i + \Delta t, s_{i,j}) - V_c(t_i, s_{i,j})}{\Delta t}, \\ \left.\frac{\partial V_c(t_i, s)}{\partial s}\right|_{s=s_{i,j}} &\approx \frac{V_c(t_i, s_{i,j} + \Delta s) - V_c(t_i, s_{i,j})}{\Delta s},\end{aligned}$$

y

$$\left.\frac{\partial^2 V_c(t_i, s)}{\partial s^2}\right|_{s=s_{i,j}} \approx \frac{V_c(t_i, s_{i,j} + \Delta s) - 2V_c(t_i, s_{i,j}) + V_c(t_i, s_{i,j} - \Delta s)}{\Delta s^2}. \quad (10.39)$$

Por razones de estabilidad, las derivadas se suelen expresar en términos de las volatilidades implícitas, véase el Apartado 4.3.1 y, también, Deelstra y Rayée (2012). Como no se dispone de un continuo de precios de calls europeas en vencimiento y strike, se requiere de una interpolación, como se explica en el Apartado 4.3.3 y en Andreasen y Huge (2011).

Ejemplo 10.2.3 (Esquema de simulación eficiente)

En este ejemplo, comparamos el esquema AES con el esquema de discretización de Euler para el modelo SLV de Heston. Generamos nuestros propios «datos de mercado», empleando el modelo SV de Heston con los siguientes parámetros (que se corresponden con el Caso III de Andersen (2008)):

$$\kappa = 1.05, \gamma = 0.95, \bar{v} = 0.0855, v_0 = 0.0945, \rho_{x,v} = -0.315, r = 0,$$

y $T = 5$.

Ahora, empleamos el modelo SLV de Heston para recuperar las volatilidades implícitas «observadas en mercado». Para ello, utilizamos los siguiente parámetros SLV, $\gamma = 0.7125$, $\kappa = 1.3125$, $\rho_{x,v} = -0.3937$, $\bar{v} = 0.0641$ y $v_0 = 0.1181$. La componente de volatilidad local se emplea para ajustar las volatilidades implícitas. Considerando varios pasos de tiempo Δt y precios de strike K , calculamos el error absoluto en las volatilidades implícitas $|\sigma_{\text{imp}}^{\text{mkt}} - \sigma_{\text{imp}}^{\text{SLV}}|$, donde $\sigma_{\text{imp}}^{\text{mkt}}$ y $\sigma_{\text{imp}}^{\text{SLV}}$ denotan las volatilidades implícitas de mercado y del modelo SLV de Heston, respectivamente. Se realizan veinte simulaciones de Monte Carlo, con 5×10^4 trayectorias. El número de lotes se fija a 20.

En la Tabla 10.1, se muestran los resultados obtenidos.

El esquema AES para la simulación del modelo SLV de Heston supera al esquema de Euler, ya que proporciona una mayor precisión y una convergencia más rápida al valor de referencia. ♦

Resultados de opciones europeas bajo el modelo SLV

Analizamos el comportamiento del modelo SLV de Heston con respecto a la calidad de un modelo de Heston precalibrado. Si el modelo de Heston está bien calibrado, se espera que la componente de volatilidad local tenga una

Tabla 10.1: Error promedio $|\sigma_{imp}^{mkt} - \sigma_{imp}^{SLV}|$ de las simulaciones de Monte Carlo del modelo SLV de Heston con los esquemas de Euler y AES, utilizando 20 semillas aleatorias, para varios tamaños del paso de tiempo Δt y strikes K . Entre paréntesis se muestran las desviaciones típicas.

| Δt | Error (%): $ \sigma_{imp}^{mkt} - \sigma_{imp}^{SLV} $ | | | | | |
|----------------|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 70 % | | 100 % | | 150 % | |
| | Euler | AES | Euler | AES | Euler | AES |
| 1 | 0.34 (0.12) | 3.15 (0.10) | 0.80 (0.13) | 2.68 (0.11) | 1.89 (0.19) | 2.27 (0.17) |
| $\frac{1}{2}$ | 0.32 (0.13) | 1.24 (0.11) | 1.03 (0.15) | 0.90 (0.11) | 1.59 (0.20) | 0.66 (0.15) |
| $\frac{1}{4}$ | 0.40 (0.16) | 0.34 (0.12) | 0.82 (0.15) | 0.13 (0.11) | 1.09 (0.20) | 0.06 (0.13) |
| $\frac{1}{8}$ | 0.28 (0.13) | 0.02 (0.12) | 0.50 (0.13) | 0.11 (0.14) | 0.62 (0.19) | 0.13 (0.20) |
| $\frac{1}{16}$ | 0.16 (0.15) | 0.02 (0.15) | 0.30 (0.15) | 0.07 (0.16) | 0.35 (0.18) | 0.06 (0.21) |
| $\frac{1}{32}$ | 0.05 (0.13) | 0.02 (0.14) | 0.11 (0.15) | 0.03 (0.14) | 0.14 (0.21) | 0.00 (0.19) |



contribución limitada, véase van der Stoep *et al.* (2014). Por otro lado, si el modelo de Heston no está suficientemente bien calibrado, la contribución de la volatilidad local debería ser más pronunciada. Entonces, la calidad del ajuste se puede relacionar con la aproximación de la esperanza condicionada.

Utilizando el esquema AES del apartado anterior, valoramos opciones call europeas bajo el modelo SLV de Heston, dentro del contexto de Monte Carlo. Comparamos los resultados con el modelo de Heston y con el modelo de volatilidad local estándar. Como referencia, utilizamos un modelo de Heston con los parámetros:

$$\gamma = 0.5, \kappa = 0.3, \rho_{x,v} = -0.6, r = 0, v_0 = 0.04, \bar{v} = 0.05.$$

La condición de Feller no se satisface, ya que $2\kappa\bar{v}/\gamma^2 = 0.12$. Se consideran la opciones de estilo europeo con vencimientos (en años), $T = \{0.5, 2, 5, 8, 10\}$. La simulación de Monte Carlo se realiza con 5×10^5 trayectorias, 100 pasos de tiempo por año y 20 lotes para aproximar la esperanza condicionada.

En la Figura 10.6 (izquierda), mostramos los resultados obtenidos para un experimento en el que el modelo de Heston no está suficientemente bien calibrado. En ese caso, la componente de volatilidad local es capaz de compensar la gran diferencia entre las volatilidades implícitas de mercado y del modelo de Heston. Entonces, la componente de volatilidad local del modelo SLV de Heston actúa como un «compensador», reduciendo la brecha entre los precios de mercado y los precios calibrados del modelo SV de Heston, en el caso de una calibración no satisfactoria del mismo. En el lado derecho de la Figura 10.6, se

representan las sonrisas forward de una opción forward start para el caso en el que el modelo de Heston no está suficientemente bien calibrado. Observamos que el modelo SLV proporciona una sonrisa de volatilidad implícita forward ubicada «entre» las volatilidades implícitas del modelo de Heston y del modelo LV. Como en Engelmann *et al.* (2011), las volatilidades implícitas forward no se aplanan, como suele pasar con el modelo de volatilidad local, si no que preservan una forma muy similar a la del modelo de Heston. Los resultados proporcionados por el modelo SLV parecen representar una «interpolación avanzada», entre los modelos de Heston y volatilidad local. En los experimentos numéricos, se han utilizado 10^5 trayectorias de Monte Carlo y 20 lotes, con lo que el cálculo de la esperanza condicionada en el método no paramétrico se ejecuta en menos de 0.025 segundos por paso de tiempo.

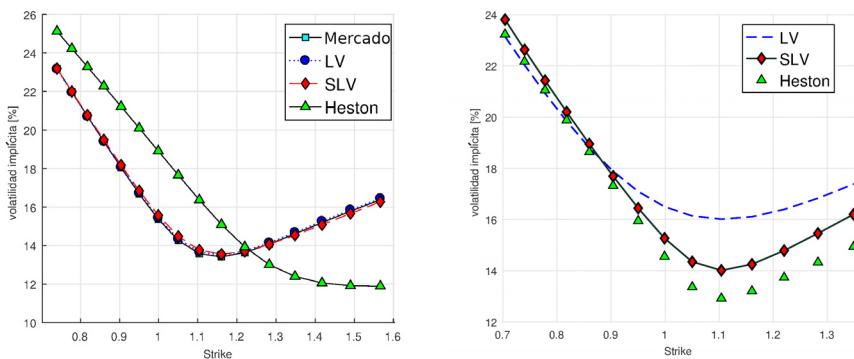


Figura 10.6: Volatilidad implícita en $T = 2$, para un modelo de Heston que no está suficientemente bien calibrado. La volatilidad implícita «de mercado» se ha generado mediante el modelo SV de Heston con $\gamma = 0.5$, $\kappa = 0.3$, $\rho_{x,v} = -0.6$, $\bar{v} = 0.05$ y $v_0 = 0.04$, mientras que los parámetros del modelo SLV de Heston son $\gamma = 0.3750$, $\kappa = 0.3750$, $\rho_{x,v} = -0.75$, $\bar{v} = 0.0375$ y $v_0 = 0.05$. Izquierda: opción call europea. Derecha: opción forward start con $T_1 = 2$, $T_2 = 4$.



En la valoración Monte Carlo bajo la dinámica SLV se introduce un sesgo, que se debe, básicamente, a tres fuentes de error: la discretización de la dinámica SLV mediante el esquema AES, el cálculo del término de volatilidad local de Dupire (10.38) mediante la técnica de diferencias finitas empleada en la tres derivadas de (10.39) y la aproximación de $\mathbb{E}[v(t)|S(t) = s]$ en cada paso de tiempo mediante el método no paramétrico. En van der Stoep *et al.* (2014), se presenta el análisis del error de esta técnica.

10.3. Ejercicios

Ejercicio 10.1 En el Teorema 10.1.1, se obtiene el precio de una opción call forward start. Siguiendo el mismo procedimiento, obtener el precio de una opción put forward start.

Ejercicio 10.2 Valorar una opción forward start mediante el método COS (eligiendo unos parámetros adecuados):

- Bajo la dinámica de Black-Scholes para el subyacente (para poder comprobar el resultado con respecto a la solución proporcionada por el Teorema 10.1.1).
- Bajo la dinámica de Heston, basándose en la función característica dada en (10.10).

Realizar una simulación de Monte Carlo con estas dinámicas y comparar los resultados con los obtenidos anteriormente con el método COS.

Ejercicio 10.3 Sea el proceso

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \bar{\sigma}_F(t)dW_F(t), \quad F(t_0) = \frac{S_0}{P(t_0, T_2)}, \quad (10.40)$$

la dinámica del proceso forward transformado logarítmicamente, $X(t) := \log F(t)$, está gobernado por una EDE unidimensional.

Mostrar que su correspondiente función característica, $\phi^{T_2} := \phi_X^{T_2}(u, X, t, T)$, viene dada por³

$$\frac{\partial \phi^{T_2}}{\partial t} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2(t)\frac{\partial \phi^{T_2}}{\partial X} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2(t)\frac{\partial^2 \phi^{T_2}}{\partial X^2} = 0. \quad (10.41)$$

Como el proceso forward transformado logarítmicamente es afín (solamente incluye una volatilidad dependiente del tiempo determinista), el modelo pertenece a la clase de procesos afines. Además, su función característica tiene la forma

$$\phi_X^{T_2}(u, X, t, T) = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(t)}, \quad (10.42)$$

con $\tau = T - t$ y $X(t) := \log F(t)$.

Mostrar que, para (10.42), obtenemos

$$\bar{B}(u, \tau) = iu, \quad \bar{A}(u, \tau) = -\frac{1}{2}u(i+u)\int_0^\tau \bar{\sigma}_F^2(T-\tau)d\tau.$$

Ejercicio 10.4 Considerar el siguiente modelo 2D, con dos movimientos brownianos geométricos correlados, dado por

$$dY_1(t) = \sigma_1 Y_1(t)dW_1(t), \quad Y_1(0) = y_{10}, \quad (10.43)$$

$$dY_2(t) = \sigma_2 Y_2(t)dW_2(t), \quad Y_2(0) = y_{20}, \quad (10.44)$$

con $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$. Mostrar que la esperanza de $Y_2(t)$ condicionada al evento $Y_1(t) = y_1$, viene dada por

$$\mathbb{E}[Y_2(t)|Y_1(t) = y_1] = y_{20} \left(\frac{y_1}{y_{10}} \right)^{\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} e^{t(\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\rho^2)}. \quad (10.45)$$

³Nótese que la función característica debe ser igual a la del modelo de Black-Scholes con $r = 0$ y volatilidad dependiente del tiempo $\bar{\sigma}_F(t)$.

Ejercicio 10.5 Utilizando el modelo del Ejercicio 10.4, tomar $y_{10} = 1$, $y_{20} = 0.05$, $\rho = -0.5$ y $t = 5$, y considerar dos conjuntos de parámetros de volatilidad, el Caso 1 donde $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ y el Caso 2 (más extremo) con $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.9$. Con estos dos conjuntos de parámetros:

- Realizar una simulación de Monte Carlo con distinto número de trayectorias y utilizando $y_1 = 1.75$.
- Comparar la expresión analítica de (10.45) con la aproximación numérica empleando el método no paramétrico por lotes, propuesto en el Apartado 10.2.2, con $l = 50$ lotes. Variar el número de lotes y estudiar la calidad de las aproximaciones.

Ejercicio 10.6 Considerar el modelo de Schöbel-Zhu de (8.2), con el siguiente conjunto de parámetros:

$$S(t_0) = 5, \sigma(t_0) = 0.1, \kappa = 0.1, \bar{\sigma} = 0.25, \gamma = 0.25, \rho_{x,\sigma} = -0.5.$$

Calcular la volatilidad implícita forward de Black-Scholes para $T_1 = 2$, $T_2 = 3$. Variar los parámetros κ , $\bar{\sigma}$, γ y $\rho_{x,\sigma}$, y estudiar su impacto sobre las volatilidades implícitas. *Pista:* Calcular el correspondiente precio de la opción con el método de Monte Carlo.

Ejercicio 10.7 Generalizar el procedimiento relativo al modelo de Heston presentado en el Apartado 10.1.3 para el modelo de Bates y calcular sus correspondientes volatilidades implícitas forward para los parámetros especificados en el Ejemplo 10.1.1 y con $\mu_J = 0.05$, $\sigma_J = 0.2$, $\xi_p = 0.1$. Variar los parámetros y estudiar su impacto.

Ejercicio 10.8 En (10.27), se obtuvo la función de volatilidad local $\bar{\sigma}^2(t, K)$ para el modelo de volatilidad local estocástica. Obtener esta función para el caso donde la dinámica del proceso $S(t)$ incluye saltos. *Pista:* Considerar el modelo de Bates como ejemplo.

Ejercicio 10.9 Realizar un experimento de cobertura, como en el Apartado 3.3 (para el modelo de Black-Scholes) o en el Apartado 5.2.3 (para el modelo de Merton), pero simulando el mercado con el modelo SV de Heston. Utilizar los parámetros de Heston del Apartado 8.2.2, que dan lugar a patrones de sonrisa y/o mueca para la volatilidad implícita. Mostrar que, cuando un mercado está gobernado por una volatilidad implícita de sonrisa o mueca, la cobertura delta no es suficiente para cubrir todo el riesgo.

Ejercicio 10.10 Realizar un experimento de cobertura, como en el Apartado 3.3 (para el modelo de Black-Scholes) o en el Apartado 5.2.3 (para el modelo de Merton), pero simulando el mercado con el modelo SV de Bates. Utilizar los parámetros de Heston del Ejemplo 8.4.2, que dan lugar a patrones de sonrisa y/o mueca para la volatilidad implícita. Mostrar que, cuando un mercado está gobernado por una volatilidad implícita de sonrisa o mueca, la cobertura delta no es suficiente para cubrir todo el riesgo.

CAPÍTULO 11

Modelos de tipos de interés

En este capítulo:

A partir de ahora, nos adentramos en el mundo de los tipos de interés, en el que abordaremos el modelado de tipos de interés estocásticos. Después de una breve introducción, en el **Apartado 11.1**, a los tipos de interés (mercados y productos), en el **Apartado 11.2** definiremos el tipo *short-rate* instantáneo, como el tipo de interés que se gana con una inversión sin riesgo en un período de tiempo infinitesimal. El modelado del tipo short-rate es el tema principal de este capítulo. Además, describiremos el marco de Heath-Jarrow-Morton (HJM) propuesto en Heath *et al.* (1992), que incluye a los modelos asociados con la dinámica de los tipos *forward* «instantáneos». De entre los muchos modelos existentes, los más utilizados en la práctica son los propuestos por Vašíček (1977), Cox *et al.* (1985) y Hull y White (1990), y que se estudiarán en detalle en el **Apartado 11.3**. Presentaremos el marco teórico general y mostraremos que, cambiando la volatilidad instantánea, se pueden obtener los diferentes modelos de tipos de interés. El concepto de cambio de medidas será de mucha utilidad, como veremos en el **Apartado 11.4**.

Palabras clave de este capítulo: tipos short-rate, marco de Heath-Jarrow-Morton, modelos afines, modelo Hull-White.

11.1. Introducción a los tipos de interés

Comenzaremos con el modelado matemático de tipos de interés para la valoración de productos financieros relacionados con los mismos. En particular, en este capítulo, abordamos los denominados modelos short-rate¹. Antes de profundizar en los modelos, proporcionaremos una breve introducción de algunos productos básicos y de la terminología asociada.

11.1.1. Bonos

Los bonos son productos financieros que pagan un interés regular, denominado «cupón», sobre una cantidad de dinero predeterminada. Los principales emisores de bonos en los mercados financieros globales son los gobiernos locales y centrales, mientras que las empresas pueden emitir los denominados «bonos corporativos».

La principal razón para emitir bonos es la de pedir dinero prestado a los inversores en el mercado financiero. Si se cree que la empresa A es más fiable (la posibilidad de quiebra es menor) que la empresa B, se solicitará un tipo de interés más alto sobre el dinero prestado a la empresa B. Los bonos se devuelven en forma de cupones. Un bono puede considerarse como un derivado de crédito, ya que el emisor puede dejar de pagar sus obligaciones. En esta situación, denominada *default* o quiebra, el inversor no recupera la inversión, o lo hace solo parcialmente.

El mercado de bonos es uno de los mercados financieros más grandes en volumen, existiendo muchos tipos de bonos distintos. Estos no solo difieren en cuanto a sus emisores y a los tipos de cupones, sino que también se puede variar el plazo de vencimiento en que se efectúan los últimos pagos. Tradicionalmente, los bonos emitidos por los gobiernos se consideraban sin riesgo. Sin embargo, la historia ha demostrado que, en al menos una docena de casos², algunos países no pudieron pagar sus obligaciones financieras. Tal vez sea más apropiado afirmar que los grandes gobiernos son menos propensos al default que las empresas. El riesgo de quiebra de la contraparte suele estar asociado a que el mercado cree que existe la probabilidad de no pagar las obligaciones financieras. En la práctica, la estimación de la probabilidad de default la realizan las agencias de calificación que evalúan la calidad de los productos financieros emitidos. Cuanto más baja es esta calificación, más bajo es el valor del bono, y por lo tanto más alto es el tipo de interés que un inversor puede solicitar cuando invierte en este producto (nótese la relación entre el precio del bono y su calificación).

En los bonos emitidos, podemos distinguir básicamente entre dos tipos de cupones. Los cupones que se pagarán en el futuro pueden estar predeterminados

¹ Aunque en algunos contextos se traduce como modelos de tipos a corto o modelos a corto plazo, en este libro preferimos mantener la denominación en inglés, ya que es la que más se utiliza en la práctica.

² En http://en.wikipedia.org/wiki/Sovereign_default se presenta un resumen de los defaults soberanos en los siglos XIX y XX.

(fijados), para los denominados «títulos de renta fija», o pueden ser cupones variables, que se reajustan periódicamente, dando lugar a los «títulos de renta variable». Para los derivados de tipos de interés, cotizados como un porcentaje o en puntos básicos, es importante conocer sobre qué capital de «referencia» se aplica este porcentaje. La cantidad que se utiliza para determinar los pagos de cupones se denomina «capital nominal». Así, si un inversor recibe, por ejemplo, el 5% sobre un nominal de 1000 €, el cupón será de 50 €.

Definición 11.1.1 (Bono cupón cero)

Uno de los productos de tipos de interés más básico es el bono cupón cero, $P(t, T)$, que paga 1 unidad monetaria a vencimiento T , es decir, $P(T, T) = 1$. Estamos interesados en su valor en tiempo $t < T$.

El teorema fundamental de valoración de activos establece que el precio en tiempo t de cualquier producto derivado con payoff, $H(T)$, viene dado por

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z)dz} H(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad (11.1)$$

donde la esperanza se toma bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} .

Entonces, el precio de un bono cupón cero en tiempo t con vencimiento T viene dado por

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z)dz} \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad (11.2)$$

ya que $H(T) = V(T) = P(T, T) \equiv 1$. ◀

Un bono cupón cero es un contrato con precio $P(t, T)$ en tiempo $t < T$, que entrega en tiempo T , $P(T, T) = 1€$, véase el esquema de la Figura 11.1.



Figura 11.1: Flujos de caja para el bono cupón cero, $P(t, T)$, con pago en tiempo T .

11.1.2. Bono de tipo fijo

Otra de las versiones clásicas de un bono es el bono de tipo fijo, en el que no hay estocasticidad en los pagos futuros, ya que el tipo de interés se fija para toda la duración del contrato.

Para un tipo fijo r , un capital nominal N y un conjunto de fechas de pago T_1, T_2, \dots, T_m dados, un bono con tipo de interés fijo es una inversión con varios pagos de cupón, definidos como

$$V_i^{\text{fijo}}(T_i) \equiv H_i^{\text{fijo}}(T_i) = \begin{cases} rN\tau_i, & i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \\ rN\tau_m + N, & i = m, \end{cases} \quad (11.3)$$

con $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Dado que este bono es una suma de pagos, cada flujo de caja se puede valorar por separado, es decir,

$$V_i^{\text{fijo}}(t_0) = M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} V_i^{\text{fijo}}(T_i) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = P(t_0, T_i) V_i^{\text{fijo}}(T_i), \quad (11.4)$$

ya que cada pago del bono tipo fijo está «predeterminado». Sin embargo, tendremos $M(t_0) = 1$. En la Figura 11.2 se muestra una representación esquemática de la estructura de pagos de este tipo de bonos.

En general, el precio de un bono tipo fijo en tiempo t_0 es^a

$$V^{FRB}(t_0) = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} V_i^{\text{fijo}}(T_i) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \sum_{i=1}^m P(t_0, T_i) V_i^{\text{fijo}}(T_i).$$

^aLas siglas FRB se corresponden con la denominación en inglés de este producto, *fixed-rate bond*.

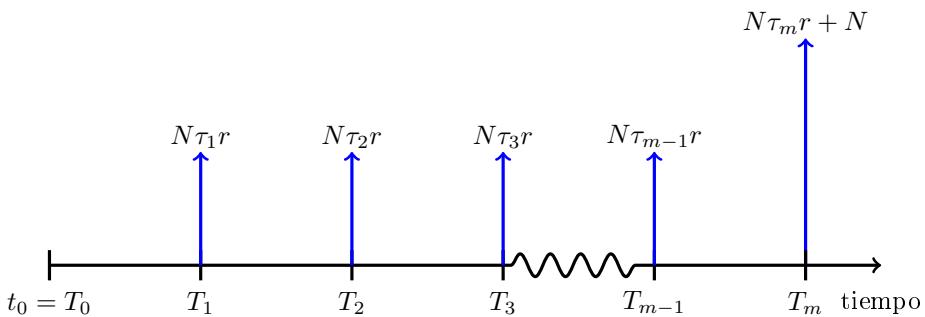


Figura 11.2: Flujos de caja para un bono tipo fijo con m pagos de $r\%$ y nominal N .

La Figura 11.3 muestra un bono tipo fijo antiguo (histórico) del estado de Louisiana.

11.2. Tipos de interés en el marco Heath-Jarrow-Morton

En muchas situaciones, los tipos de interés se modelan mediante una función determinista sencilla de, por ejemplo, el tiempo. Los tipos de interés deterministas se pueden generalizar modelando los mismos mediante un proceso short-rate instantáneo estocástico, $r(t)$.



Figura 11.3: Un billete de \$5 del Banco del Estado de Louisiana del año 1878. Estos billetes se llamaban «bonos bebé», por el retrato de la niña que aparece en ellos. Desde entonces, el nombre «bono bebé» se relaciona con los títulos de renta fija sobre pequeñas cantidades. Después de la guerra civil de EE.UU., el gobierno federal impuso una tasa sobre los billetes de banco estatales. El estado de Louisiana emitió pequeños billetes de banco y los vendió como bonos que devengaban intereses (evitando así el impuesto). El bono tenía cuatro pagos de 7.5% cada uno, pagados semestralmente desde agosto de 1884 hasta febrero de 1886.

El tipo short-rate instantáneo se define como el tipo de interés que se gana con una inversión sin riesgo en un período de tiempo infinitesimal dt .

De entre los muchos modelos existentes, los modelos short-rate más populares (debido a su sencillez) son los propuestos por Vašiček (1977), Cox *et al.* (1985) y Hull y White (1990), siendo los dos últimos extensiones del primero.

11.2.1. El marco HJM

El marco Heath-Jarrow-Morton (HJM) (véase Heath *et al.* (1992)) abarca una clase de modelos de tipos de interés o modelos IR³, que representan la dinámica de los denominados tipos forward instantáneos. Introduciremos el marco HJM y mostraremos como, cambiando la volatilidad instantánea, se pueden obtener distintos modelos de tipos de interés. Para ello, primero necesitamos la definición del tipo forward.

Definición 11.2.1 (Tipos forward y forward instantáneo)

Suponemos que, en tiempo t , entramos en un contrato forward que entrega en tiempo T_1 , $t < T_1 < T_2$, un bono cuyo vencimiento es T_2 . Denotamos el precio forward del bono en tiempo t por $P_f(t, T_1, T_2)$. Suponemos también

³Por sus siglas en inglés, *interest rate*.

que, al mismo tiempo, adquirimos un bono cupón cero con vencimiento en T_1 , $P(t, T_1)$, y un bono con vencimiento en tiempo T_2 , $P(t, T_2)$. Asumiendo que no hay arbitraje y que el mercado es completo, se tiene que verificar la igualdad

$$P_f(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}. \quad (11.5)$$

El tipo forward implícito en tiempo t para el período $[T_1, T_2]$, es decir, $r_F(t, T_1, T_2)$, se define como

$$P_f(t, T_1, T_2) = e^{-(T_2 - T_1)r_F(t, T_1, T_2)}. \quad (11.6)$$

Igualando las Ecuaciones (11.5) y (11.6) obtenemos

$$e^{-(T_2 - T_1)r_F(t, T_1, T_2)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Por tanto, el tipo forward $r_F(t, T_1, T_2)$ se define como

$$r_F(t, T_1, T_2) := -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Tomando el límite $T_2 - T_1 \rightarrow 0$, llegamos a la definición del tipo forward instantáneo, dado por

$$f^r(t, T_2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T_1 \rightarrow T_2} r_F(t, T_1, T_2) = -\frac{\partial}{\partial T_2} \log P(t, T_2). \quad \blacktriangleleft$$

En el marco HJM, la dinámica del tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$ tiene una gran importancia.

Asumimos que, para un vencimiento fijado $T \geq 0$, el tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$, bajo la medida del mundo real \mathbb{P} , está gobernado por la dinámica

$$df^r(t, T) = \alpha^{\mathbb{P}}(t, T)dt + \bar{\eta}(t, T)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad f^r(0, T) = f_{0,T}^r, \quad (11.7)$$

para cualquier instante $t < T$, con sus correspondientes términos de derivada $\alpha^{\mathbb{P}}(t, T)$ y volatilidad $\bar{\eta}(t, T)$. Además,

$$f_{0,T}^r = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(0, T).$$

En el marco HJM, el tipo short-rate $r(t)$ se define como el tipo forward instantáneo $r(t) \equiv f^r(t, t)$.

También definimos la cuenta de ahorros como

$$M(t) := \exp \left(\int_0^t r(z)dz \right) = \exp \left(\int_0^t f^r(z, z)dz \right). \quad (11.8)$$

El bono cupón cero $P(t, T)$, con vencimiento T , es un activo negociable, por lo que debe ser una martingala. Así, su valor es

$$P(t, T) = M(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} \cdot 1 \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(z)dz \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \quad (11.9)$$

La medida \mathbb{Q} es la medida de riesgo neutro asociada con la cuenta de ahorros $M(t)$ como numerario. Un cambio de medida, de la medida de mundo real \mathbb{P} a la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , afectará a los términos de deriva de la difusión (11.7), de modo que la dinámica de $f^r(t, T)$ bajo la medida \mathbb{Q} viene dada por

$$df^r(t, T) = \alpha^{\mathbb{Q}}(t, T)dt + \bar{\eta}(t, T)dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad f^r(0, T) = f_{0,T}^r, \quad (11.10)$$

donde $\alpha^{\mathbb{Q}}(t, T)$ es una función asociada a la medida \mathbb{Q} .

Observación 11.2.1 (BCC y curva de rentabilidad)

Aunque el BCC, $P(0, T)$, se puede valorar con en (11.9), su valor se puede relacionar directamente con la curva de rentabilidad de hoy mediante

$$f^r(0, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(0, T). \quad (11.11)$$

La construcción de la curva de rentabilidad se tratará en el Apartado 12.1.5. Para estimar el tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$ para $t = t_0 = 0$ en función del precio del bono cupón cero $P(0, T)$, se puede aproximar la derivada de (11.11) mediante una discretización de diferencias finitas, esto es

$$f^r(0, T) \approx -\frac{\log(P(0, T + \Delta T)) - \log(P(0, T - \Delta T))}{2\Delta T}.$$

Alternativamente, podemos escribir

$$f^r(0, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(0, T) = -\frac{1}{P(0, T)} \frac{\partial}{\partial T} P(0, T),$$

ya que la discretización de esta última representación suele ser más estable numéricamente.

En la Figura 11.4 se muestran las curvas del bono cupón cero $P(0, T)$ y los tipo forwards instantáneos $f^r(0, T)$.

Dada la naturaleza discreta de las cotizaciones de mercado, los $f^r(0, T)$ obtenidos pueden no ser suaves. En la práctica, se suele aplicar un procedimiento de suavizado (el promedio, por ejemplo). ▲

La condición HJM para un modelo libre de arbitraje

Un resultado importante dentro del marco HJM es la ausencia de arbitraje en la relación entre la deriva $\alpha^{\mathbb{Q}}(t, T)$ y la estructura de volatilidad $\bar{\eta}(t, T)$. En este apartado mostramos cómo se construye esa relación.

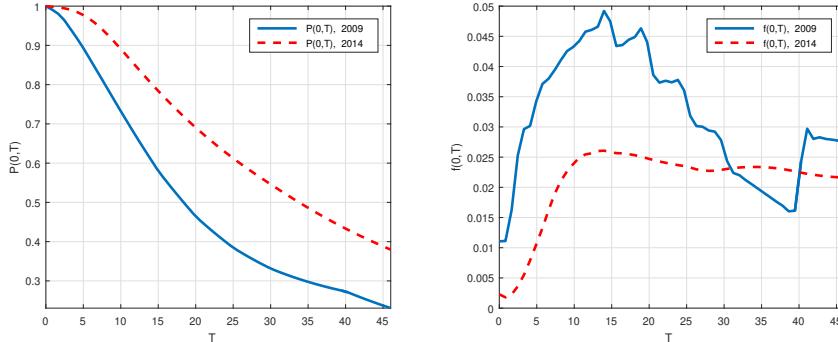


Figura 11.4: Curvas obtenidas a partir de los datos de mercado de los años 2009 y 2014. Izquierda: bono cupón cero $P(0, T)$. Derecha: tipo forward instantáneo $f^r(0, T)$.



El BCC está directamente relacionado con los tipos forward instantáneos $f^r(t, T)$, mediante la expresión

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f^r(t, z) dz \right), \quad (11.12)$$

obtenida a partir de (11.11). Así, obtenemos la dinámica del BCC descontado bajo la medida \mathbb{Q} , como

$$d\Pi_p(t) := d \left(\frac{P(t, T)}{M(t)} \right) = d \left[\exp \left(- \int_t^T f^r(t, z) dz - \int_0^t r(z) dz \right) \right]. \quad (11.13)$$

Entonces, este derivado financiero negociable, $P(t, T)$, descontado con la cuenta de ahorros, es una martingala (véase Harrison y Kreps (1979)) y su dinámica debe estar libre de términos de deriva⁴. Este hecho implica que la dinámica de $f^r(t, T)$ tiene que ser de una forma específica. En el siguiente lema, se presentan las condiciones HJM para la ausencia de arbitraje.

Lema 11.2.1 (Condición HJM de ausencia de arbitraje)

Para los tipos forward instantáneos modelados por la EDE

$$df^r(t, T) = \alpha^{\mathbb{Q}}(t, T) dt + \bar{\eta}(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

la condición de ausencia de arbitraje para la deriva viene dada por

$$\alpha^{\mathbb{Q}}(t, T) = \bar{\eta}(t, T) \int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz. \quad (11.14)$$

⁴Nótese que, sin embargo, el proceso short-rate descontado y la volatilidad descontada «no» son martingalas, ya que son cantidades no negociables (es decir, no podemos comprar directamente un tipo short-rate o una volatilidad).

La demostración se basa en obtener de la dinámica de $\Pi_p(t)$ e igualar el término de derivada a cero.

Por tanto, la dinámica de $f^r(t, T)$ está totalmente determinada por la estructura de volatilidad, $\bar{\eta}(t, T)$. Esta es una observación crucial, ya que indica que, empleando la volatilidad $\bar{\eta}(t, T)$, se puede obtener un modelo completo libre de riesgo.

11.2.2. Dinámica del tipo short-rate bajo el marco HJM

A partir de la igualdad $f^r(t, t) = r(t)$ e integrando el sistema en (11.10), obtenemos la dinámica short-rate en el marco HJM, que es de la forma

$$f^r(t, T) = f^r(0, T) + \int_0^t \alpha^Q(z, T) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, T) dW^Q(z). \quad (11.15)$$

Empleando $T = t$, resulta que

$$r(t) \equiv f^r(t, t) = f^r(0, t) + \int_0^t \alpha^Q(z, t) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z). \quad (11.16)$$

Proposición 11.2.1 (Dinámica short-rate bajo el marco HJM)

Suponemos que $f^r(0, t)$, $\alpha^Q(t, T)$ y $\bar{\eta}(t, T)$ son derivables con respecto a su segundo argumento, con

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) \right| < \infty.$$

Entonces, el proceso short-rate bajo el marco HJM viene dado por

$$dr(t) = \bar{\zeta}(t) dt + \bar{\eta}(t, t) dW^Q(t), \quad (11.17)$$

o, en forma integral

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \bar{\zeta}(z) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, z) dW^Q(z), \quad (11.18)$$

con

$$\bar{\zeta}(t) = \alpha^Q(t, t) + \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha^Q(z, t) dz + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z).$$

Demostración. Recordamos que

$$r(t) = f^r(0, t) + \int_0^t \alpha^Q(z, t) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z). \quad (11.19)$$

La segunda integral se puede expresar como

$$\begin{aligned}\int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z) &= \int_0^t \bar{\eta}(z, z) dW^Q(z) + \int_0^t (\bar{\eta}(z, t) - \bar{\eta}(z, z)) dW^Q(z) \\ &= \int_0^t \bar{\eta}(z, z) dW^Q(z) + \int_0^t \left(\int_z^t \frac{\partial}{\partial u} \bar{\eta}(z, u) du \right) dW^Q(z).\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini a la última integral, obtenemos

$$\int_0^t \left(\int_z^t \frac{\partial}{\partial u} \bar{\eta}(z, u) du \right) dW^Q(z) = \int_0^t \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} \bar{\eta}(z, u) dW^Q(z) \right) du, \quad (11.20)$$

y

$$\int_0^t \alpha^Q(z, t) dz = \int_0^t \alpha^Q(z, z) dz + \int_0^t \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} \alpha^Q(z, u) dz \right) du.$$

Además,

$$\begin{aligned}f^r(0, t) &= f^r(0, 0) + f^r(0, t) - f^r(0, 0) \\ &= r(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} f^r(0, z) dz,\end{aligned}$$

ya que $f^r(0, 0) = r(0)$. Agrupando términos, (11.19) se convierte en

$$\begin{aligned}r(t) &= f^r(0, t) + \int_0^t \alpha^Q(z, t) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z) \\ &= r(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} f^r(0, z) dz \\ &\quad + \left(\int_0^t \alpha^Q(z, z) dz + \int_0^t \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} \alpha^Q(z, u) dz \right) du \right) \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} \bar{\eta}(z, u) dW^Q(z) \right) du + \int_0^t \bar{\eta}(z, z) dW^Q(z).\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \bar{\zeta}(z) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, z) dW^Q(z),$$

con

$$\bar{\zeta}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \alpha^Q(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha^Q(z, t) dz + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{\eta}(z, t) dW^Q(z). \blacksquare$$

Nos faltaría por estudiar la dinámica del bono de cupón cero. Ya hemos visto que $P(t, T)$ se puede definir en función de los tipos forward, y que el BCC se puede obtener, para un tiempo t dado, integrando la curva de rentabilidad que se conoce en tiempo t . El siguiente lema detalla la dinámica de $P(t, T)$, para un tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$ dado.

Lema 11.2.2 (Dinámica del BCC bajo la medida de riesgo neutro)

La dinámica del BCC en riesgo neutro viene dada por

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt - P(t, T) \left(\int_t^T \bar{\eta}(z, T)dz \right) dW^Q(t). \quad (11.21)$$

◀

Demostración. En (11.12), el BCC viene dado por $P(t, T) = \exp(Z(t, T))$, con $Z(t, T) := -\int_t^T f^r(t, s)ds$. Entonces, aplicando el lema de Itô, la dinámica de $P(t, T)$ es

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = dZ(t, T) + \frac{1}{2}(dZ(t, T))^2. \quad (11.22)$$

El elemento que falta en la dinámica del BCC en (11.22) es la derivada de Itô del proceso $Z(t, T)$. Para obtenerlo, comenzamos utilizando cálculo básico, tal que

$$dZ(t, T) = f^r(t, t)dt - \int_t^T df^r(t, z)dz. \quad (11.23)$$

A partir de la definición del short-rate, $r(t) := f^r(t, t)$ en (11.16), y la definición del tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$ bajo la medida Q de (11.15), tenemos que

$$dZ(t, T) = \left(r(t) - \int_t^T \alpha^Q(t, z)dz \right) dt - \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z)dz \right) dW^Q(t),$$

de modo que la dinámica del BCC bajo el modelo HJM genérico se puede escribir como

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = D(t, T)dt - \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z)dz \right) dW^Q(t),$$

donde

$$D(t, T) := r(t) - \int_t^T \alpha^Q(t, z)dz + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z)dz \right)^2. \quad (11.24)$$

Para finalizar la demostración, faltaría probar que $D(t, T) = r(t)$. Partiendo de la condición HJM de la deriva bajo la medida de riesgo neutro y derivando la última integral con respecto a T , obtenemos

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{1}{2} \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z)dz \right)^2 \right] = \bar{\eta}(t, T) \int_t^T \bar{\eta}(t, z)dz =: \alpha^Q(t, T), \quad (11.25)$$

donde la última igualdad es consecuencia de (11.14) en el Lema 11.2.1. Integrando ambos lados de la igualdad (11.25) obtenemos

$$\int_t^T \alpha^{\mathbb{Q}}(t, z) dz = \frac{1}{2} \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz \right)^2,$$

lo que implica que $D(t, T)$ en (11.24) es igual a $r(t)$, completando la demostración. ■

11.2.3. La dinámica de Hull-White en el marco HJM

Consideramos un modelo short-rate específico, generado por una volatilidad HJM dada por

$$\boxed{\bar{\eta}(t, T) = \eta \cdot e^{-\lambda(T-t)}}.$$

Originalmente, se añadía la condición $\lambda > 0$ a la expresión anterior. Sin embargo, en la industria, este parámetro se suele obtener mediante un proceso de calibración, por lo que es habitual encontrarse con valores negativos de λ . Aplicando el Lema 11.2.1, tenemos que

$$\alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) = \eta e^{-\lambda(t-z)} \int_z^t \eta e^{-\lambda(\bar{z}-z)} d\bar{z} = -\frac{\eta^2}{\lambda} e^{-\lambda(t-z)} (e^{-\lambda(t-z)} - 1),$$

lo que implica que $\alpha^{\mathbb{Q}}(t, t) = 0$. Los otros términos de (11.16) son

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) dz = \frac{\eta^2}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1),$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\eta}(z, t) = -\lambda \eta e^{-\lambda(t-z)} = -\lambda \bar{\eta}(z, t), \quad (11.26)$$

con $\bar{\eta}(t, t) = \eta$. Por tanto, la dinámica de $r(t)$ viene dada por

$$dr(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) dz - \lambda \int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^{\mathbb{Q}}(z) \right] dt + \eta dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (11.27)$$

donde el movimiento browniano $W^{\mathbb{Q}}(t)$ aparece dos veces. Para resolver la integral $\int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^{\mathbb{Q}}(z)$, podemos utilizar (11.16), resultando

$$r(t) = f^r(0, t) + \int_0^t \alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) dz + \int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^{\mathbb{Q}}(z),$$

tal que

$$\int_0^t \bar{\eta}(z, t) dW^{\mathbb{Q}}(z) = r(t) - f^r(0, t) - \int_0^t \alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) dz.$$

Como

$$\int_0^t \alpha^{\mathbb{Q}}(z, t) dz = \frac{\eta^2}{2\lambda^2} e^{-2\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^2,$$

obtenemos la dinámica para el proceso $r(t)$, dada por

$$\begin{aligned} dr(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) - \lambda r(t) + \lambda f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \right) dt + \eta dW^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}) - r(t) \right) dt + \eta dW^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

Definiendo

$$\theta(t) := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}), \quad (11.28)$$

la dinámica del proceso $r(t)$ viene dada por

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (11.29)$$

que se conoce como el proceso Hull-White.

El proceso Hull-White está libre de arbitraje si y solo si la función $\theta(t)$ viene dada por (11.28), con el tipo forward instantáneo

$$f^r(0, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \log P_{mkt}(0, t),$$

donde $P_{mkt}(0, t)$ es un BCC observado en el mercado financiero. Esto es consecuencia inmediata de que un modelo pertenezca al marco HJM. La esperanza $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-\int_0^t r(s)ds} | \mathcal{F}(0)]$, por construcción, debe ser igual al $P_{mkt}(0, t)$, que se observa en $t_0 = 0$ y tiene como vencimiento t . Este se emplea para el cálculo de $\theta(t)$ en (11.28).

La dinámica del BCC bajo el modelo Hull-White

En el Lema 11.2.2 se introdujo la dinámica genérica para el bono cupón cero en el marco HJM, que evoluciona de acuerdo con el proceso short-rate $r(t)$

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt - \left(\int_t^T \bar{\eta}(z, T)dz \right) dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

En el modelo Hull-White, la volatilidad HJM viene dada por

$$\bar{\eta}(t, T) = \eta e^{-\lambda(T-t)}.$$

Por tanto, bajo el modelo Hull-White, se obtiene la dinámica para el BCC dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r(t)dt - \left(\int_t^T \eta e^{-\lambda(T-z)} dz \right) dW^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= r(t)dt + \eta \bar{B}_r(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t),\end{aligned}\quad (11.30)$$

con $\bar{B}_r(t, T) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1)$.

A continuación, describimos en detalle las propiedades principales del modelo Hull-White.

11.3. El modelo Hull-White

El modelo de Hull y White (1990) es un modelo de un factor sin arbitraje para la curva de rentabilidad, en el que el tipo de interés a corto plazo evoluciona de acuerdo con un proceso con reversión a la media Ornstein-Uhlenbeck (OU) extendido, esto es

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t)) dt + \eta dW_r(t), \quad r(0) = r_0, \quad (11.31)$$

donde $\theta(t)$ es un término de derivación dependiente del tiempo, utilizado para ajustar los precios numéricos del bono a los observados en la curva de rentabilidad en mercado, y $W_r(t) \equiv W_r^{\mathbb{Q}}(t)$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q} . La EDE de modelo Hull-White y la definición del parámetro $\theta(t)$ ya se habían introducido en el apartado anterior, en (11.29). El parámetro η determina el nivel global de la volatilidad y el parámetro λ determina la velocidad de reversión. Un valor grande de λ produce movimientos a corto plazo que se atenúan rápidamente, de modo que la volatilidad a largo plazo se reduce.

11.3.1. Solución de la EDE de Hull-White

En este apartado, presentamos la solución, así como la función característica, para proceso Hull-White de tipos de interés. Para obtener la solución a la EDE de (11.31), aplicamos el lema de Itô a un proceso $y(t) := e^{\lambda t} r(t)$, es decir,

$$dy(t) = \lambda y(t)dt + e^{\lambda t} dr(t). \quad (11.32)$$

Sustituyendo (11.31), tenemos que

$$dy(t) = \lambda y(t)dt + e^{\lambda t} [\lambda(\theta(t) - r(t)) dt + \eta dW_r(t)],$$

con lo que disponemos del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y(t) = e^{\lambda t} r(t), \\ dy(t) = \lambda \theta(t) e^{\lambda t} dt + \eta e^{\lambda t} dW_r(t). \end{cases} \quad (11.33)$$

El lado derecho de la dinámica $y(t)$ no depende de vector $y(t)$, por lo que podemos determinar la solución de $y(t)$ integrando en ambos lados de la EDE, esto es

$$\int_0^t dy(z) = \lambda \int_0^t \theta(z)e^{\lambda z} dz + \eta \int_0^t e^{\lambda z} dW_r(z),$$

lo que resulta en

$$y(t) = y(0) + \lambda \int_0^t \theta(z)e^{\lambda z} dz + \eta \int_0^t e^{\lambda z} dW_r(z).$$

Aplicando la definición de $y(t)$, con $y(0) = r_0$, la solución para el proceso $r(t)$ es

$$r(t) = e^{-\lambda t} r_0 + \lambda \int_0^t \theta(z)e^{-\lambda(t-z)} dz + \eta \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} dW_r(z).$$

Entonces, el tipo de interés $r(t)$ sigue una distribución normal con

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}(t_0)] = r_0 e^{-\lambda t_0} + \lambda \int_0^{t_0} \theta(z)e^{-\lambda(t_0-z)} dz,$$

tomando $t_0 = 0$, y

$$\text{Var}[r(t)|\mathcal{F}(t_0)] = \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}).$$

Además, si $\theta(t)$ es constante, es decir, $\theta(t) \equiv \theta$ (en cuyo caso recuperamos el modelo de Vašíček (1977)), tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}(t_0)] = \theta.$$

Esto significa que, para valores grandes de t , el primer momento del proceso converge al nivel de reversión a la media θ .

11.3.2. La función característica del modelo HW

Para obtener la función característica del proceso Hull-White, utilizamos una descomposición basada en la siguiente proposición (véase también Arnold (1973); Øksendal (2000); Pelsser (2000)).

Proposición 11.3.1 (Descomposición de Hull-White)

El proceso Hull-White (11.31) se puede descomponer como

$$r(t) = \tilde{r}(t) + \psi(t),$$

donde

$$\psi(t) = r_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \theta(z) e^{-\lambda(t-z)} dz,$$

y

$$d\tilde{r}(t) = -\lambda \tilde{r}(t) dt + \eta dW_r(t), \text{ con } \tilde{r}_0 = 0. \quad (11.34)$$

Demostración. La demostración es consecuencia del lema de Itô. ■

Una de las ventajas de esta transformación es que el proceso estocástico $\tilde{r}(t)$ en (11.34) es un proceso OU con reversión a la media simple, determinado por λ y η , e independiente de la función $\psi(t)$, lo que facilita el análisis de este modelo.

La función característica descontada del tipo de interés, $r(t)$, bajo el modelo Hull-White viene dada por

$$\phi_{HW}(u; t, T) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z) dz + iur(T)} | \mathcal{F}(t) \right],$$

que, empleando la descomposición de $r(t)$ de la Proposición 11.3.1, se puede expresar como

$$\begin{aligned} \phi_{HW}(u; t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{iu\psi(T) - \int_t^T \psi(z) dz} \cdot e^{iu\tilde{r}(T) - \int_t^T \tilde{r}(z) dz} | \mathcal{F}(t) \right] \\ &= e^{iu\psi(T) - \int_t^T \psi(z) dz} \cdot \phi_{\widetilde{HW}}(u; t, T), \end{aligned}$$

donde podemos utilizar que el proceso $\tilde{r}(t)$ es afín. Así, la función característica descontada, denotada por $\phi_{\widetilde{HW}}(u; t, T)$, con $u \in \mathbb{C}$, para el modelo short-rate afín es la forma

$$\phi_{\widetilde{HW}}(u; t, T) = \exp(\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)\tilde{r}(t)). \quad (11.35)$$

La condición inicial en $\tau = 0$, que acompaña a (11.35), es

$$\phi_{\widetilde{HW}}(u; T, T) = \exp(iu\tilde{r}(T)),$$

de modo que $\bar{A}(u, 0) = 0$ y $\bar{B}(u, 0) = iu$. La soluciones para $\bar{A}(u, \tau)$ y $\bar{B}(u, \tau)$ se proporcionan en el siguiente lema.

Lema 11.3.1 (Coeficientes de la FC descontada para HW)

Las funciones $\bar{A}(u, \tau)$ y $\bar{B}(u, \tau)$ en (11.35) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{A}(u, \tau) &= \frac{\eta^2}{2\lambda^3} \left(\lambda\tau - 2(1 - e^{-\lambda\tau}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda\tau}) \right) - iu \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda\tau})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} u^2 \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda\tau}), \\ \bar{B}(u, \tau) &= iue^{-\lambda\tau} - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\tau}). \end{aligned}$$

Nótese que $\bar{B}(0, \tau) \equiv \bar{B}_r(t, T)$, como en (11.30).

La demostración se puede obtener mediante las técnicas empleadas en el Apartado 7.3 del Capítulo 7.

Tomando $u = 0$, la fórmula de valoración libre de riesgo para un bono cupón cero $P(t, T)$ viene dada por

$$\begin{aligned} P(t, T) = \phi_{HW}(0; t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z)dz} \cdot 1 | \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \exp \left(- \int_t^T \psi(z)dz + \bar{A}(0, \tau) + \bar{B}(0, \tau)\tilde{r}(t) \right). \\ &=: \exp \left(- \int_t^T \psi(z)dz + \bar{A}_r(t, T) + \bar{B}_r(t, T)\tilde{r}(t) \right). \end{aligned}$$

Por tanto, bajo la medida \mathbb{Q} , el bono cupón cero se puede escribir como el producto de un factor determinista y el precio del bono para un modelo de Vašíček con media cero. Recordamos que el proceso $\tilde{r}(t)$ en tiempo $t = 0$ es igual a 0, de modo que

$$P(0, T) = \exp \left(- \int_0^T \psi(z)dz + \bar{A}_r(t, T) \right).$$

Entonces, obtenemos

$$\psi(T) = - \frac{d}{dT} \log P(0, T) + \frac{d}{dT} \bar{A}_r(t, T) = f^r(0, T) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda T})^2,$$

donde $f^r(t, T)$ es el tipo forward instantáneo.

Esto nos muestra que la función $\psi(t)$ se puede obtener a partir de la curva forward inicial $f^r(0, T)$. Los parámetros que no dependen del tiempo, λ y η , tienen que ser estimados utilizando precios de mercado de ciertos derivados de tipos de interés. De la descomposición de Hull-White en la Proposición 11.3.1, obtenemos

$$\theta(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) + \psi(t),$$

que resulta en

$$\theta(t) = f^r(0, t) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (11.36)$$

La función característica $\phi_{HW}(u; t, T)$ del modelo Hull-White se puede obtener mediante la integración de $\psi(z)$ en el intervalo $[t, T]$.

Ejemplo 11.3.1 (El modelo de Vašíček)

Tomando $\theta(t) \equiv \theta$ en la descomposición de Hull-White de la Proposición 11.3.1, podemos obtener la función característica para el modelo de Vašíček. Así,

mediante integración, obtenemos la función $\psi(t)$ de Vašiček, dada por

$$\psi(t) = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\lambda t}, \quad (11.37)$$

lo que resulta en la función característica

$$\begin{aligned}\phi_{\text{Vaš}}(u; t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(z) dz + i u r(T) \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \exp \left(- \int_t^T \psi(z) dz + i u \psi(T) \right) \cdot \phi_{\text{HW}}(u; t, T),\end{aligned}$$

con $\phi_{\text{HW}}(u; t, T)$ dada por (11.35). Integrando $\psi(t)$ en (11.37), tenemos

$$\begin{aligned}\exp \left(- \int_t^T \psi(z) dz + i u \psi(T) \right) &= \exp \left[\frac{1}{\lambda} (r_0 - \theta) (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t}) - (T - t) \theta \right] \\ &\quad \times \exp [i u (\theta + (r_0 - \theta) e^{-\lambda T})].\end{aligned}$$



Observación 11.3.1 (Función $\theta(t)$)

En el modelo Hull-White (11.31), la función $\theta(t)$ viene dada por

$$\theta(t) := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (11.38)$$

Esta función se determina derivando el tipo forward instantáneo $f^r(0, t)$. Esto puede causar inestabilidades, ya que $f^r(0, t)$ también se obtiene derivando el BCC en (11.11).

Se puede obtener una representación estable de la función $\psi(t)$ con la descomposición de Hull-White (Proposición 11.3.1), dada por $r(t) = \tilde{r}(t) + \psi(t)$,

$$\psi(t) := r_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \theta(z) e^{-\lambda(t-z)} dz \quad (11.39)$$

Sustituyendo (11.38) en (11.39), la función $\psi(t)$ se simplifica, tal que

$$\psi(t) = e^{-\lambda t} \left[r_0 + e^{\lambda t} f^r(0, t) - f^r(0, 0) + \frac{\eta^2}{\lambda^2} (\cosh(\lambda t) - 1) \right], \quad (11.40)$$

donde $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La expresión para $\psi(t)$ en (11.40) solo depende del tipo forward instantáneo $f^r(0, t)$ en $t_0 = 0$ y del tiempo final t . No se basa en la integración o la derivación de la función $\theta(t)$, lo que hace que esta representación sea computacionalmente atractiva. Además, esta representación también es preferible desde el punto de vista de la estabilidad.



Solución alternativa del BCC

Se puede evitar el uso de la descomposición de Hull-White de la Proposición 11.3.1 para obtener el precio del BCC. Bajo la dinámica Hull-White, el valor presente de $P(t, T)$, que paga 1 unidad monetaria a vencimiento T , viene dado por

$$P(t, T) = M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z) dz} \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

con $dM(t) = r(t)M(t)dt$.

En el modelo Hull-White, la volatilidad es constante y la deriva es una función lineal de la variable espacial $r(t)$, de modo que el modelo pertenece a la clase de procesos afines. Por tanto, su función característica descontada se puede obtener directamente.

11.3.3. El modelo CIR bajo el marco HJM

Una de las alternativas al modelo Hull-White es el modelo CIR. La dinámica de un proceso Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para un short-rate $r(t)$, viene dada por la EDE

$$dr(t) = \lambda(\theta - r(t))dt + \gamma\sqrt{r(t)}dW_r(t), \quad (11.41)$$

con λ la velocidad de reversión a la media, θ la media a largo plazo y donde γ controla la volatilidad. El proceso raíz-cuadrada de (11.41) evita los valores negativos para $r(t)$ y, si $r(t)$ alcanza el cero, este pasa a ser positivo de manera inmediata. El proceso raíz-cuadrada se ha estudiado en detalle en el contexto del proceso de varianza del modelo de Heston en el Apartado 8.1.2.

En este caso, la condición de Feller se define mediante $2\lambda\theta \geq \gamma^2$, lo que garantiza que $r(t)$ se mantiene positivo; de lo contrario, puede alcanzar el cero. Por tanto, el short-rate $r(t)$ bajo la dinámica CIR sigue la distribución

$$r(t)|r(s) \sim \bar{c}(t, s)\chi^2(\delta, \bar{\lambda}(t, s)), \quad 0 < s < t, \quad (11.42)$$

con

$$\bar{c}(t, s) = \frac{1}{4\lambda}\gamma^2(1 - e^{-\lambda(t-s)}), \quad \delta = \frac{4\lambda\theta}{\gamma^2}, \quad \bar{\lambda}(t, s) = \frac{4\lambda r(s)e^{-\lambda(t-s)}}{\gamma^2(1 - e^{-\lambda(t-s)})}. \quad (11.43)$$

La función de distribución acumulada (FDA) se introdujo en (8.6). La correspondiente función de densidad viene dada por (8.9), en términos de la función de Bessel modificada de primera especie, como en (8.10).

El proceso CIR, con parámetros constantes λ , θ y γ , es afín, ya que la deriva es una función lineal de $r(t)$ y la covarianza instantánea es igual a $\gamma^2 r(t)$, que también es lineal en $r(t)$. Básandonos en los resultados del Apartado 7.3, la función característica descontada es

$$\phi_{\text{CIR}}(u; t, T) = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)r(t)}, \quad (11.44)$$

Tomando $u = 0$ en (11.44), obtenemos el precio del BCC, esto es

$$\begin{aligned}\phi_{\text{CIR}}(0; t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(z) dz \right) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= e^{\bar{A}(0, \tau) + \bar{B}(0, \tau)r(t)} =: P(t, T).\end{aligned}\quad (11.45)$$

Resolviendo las correspondientes EDOs de Riccati, tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{B}(0, \tau) &= \frac{2(1 - e^{\tau a})}{(a + \lambda)(e^{\tau a} - 1) + 2a}, \\ \bar{A}(0, \tau) &= \frac{2\lambda\theta}{\gamma^2} \log \left(\frac{2ae^{\frac{1}{2}\tau(a+\lambda)}}{2a + (a + \lambda)(e^{a\tau} - 1)} \right),\end{aligned}$$

con $a = \sqrt{(\lambda^2 + 2\gamma^2)}$, y los demás parámetros constantes.

Empleando la notación, con $u = 0$, $\bar{A}(0, \tau) \equiv \bar{A}_{\text{CIR}}(t, T)$ y $\bar{B}(0, \tau) \equiv \bar{B}_{\text{CIR}}(t, T)$, y aplicando el lema de Itô, la EDE asociada al precio del bono cupón cero $P(t, T)$ en (11.45) viene dado por

$$\begin{aligned}\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= \left[\frac{d\bar{A}_{\text{CIR}}(t, T)}{dt} + r(t) \frac{d\bar{B}_{\text{CIR}}(t, T)}{dt} + \lambda \bar{B}_{\text{CIR}}(t, T)(\theta - r(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\gamma^2 \bar{B}_{\text{CIR}}^2(t, T)r(t) \right] dt + \gamma \bar{B}_{\text{CIR}}(t, T) \sqrt{r(t)} dW_r(t).\end{aligned}\quad (11.46)$$

Al mismo tiempo, aplicando el Lema 11.2.2, sabemos que, en el marco HJM general, la dinámica del bono cupón cero bajo la medida en riesgo neutro viene dada por

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt - \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz \right) dW_r(t). \quad (11.47)$$

Igualando los términos de difusión de las EDEs en (11.46) y (11.47), se verifica la relación

$$\int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz = -\gamma \bar{B}_{\text{CIR}}(t, T) \sqrt{f^r(t, t)}, \quad (11.48)$$

con $f^r(t, t) \equiv r(t)$ y $\bar{B}(0, \tau) \equiv \bar{B}_{\text{CIR}}(t, T)$ (lo que indica que la función \bar{B}_{CIR} depende explícitamente del tiempo final T). Derivando (11.48) con respecto al parámetro T , obtenemos el generador de volatilidad HJM, dado por

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(t, T) &= -\gamma \sqrt{f^r(t, t)} \frac{d\bar{B}_{\text{CIR}}(t, T)}{dT} \\ &= \frac{4\gamma a^2 e^{a(T-t)}}{(\lambda(e^{a(T-t)} - 1) + a(e^{a(T-t)} + 1))^2} \sqrt{f^r(t, t)}.\end{aligned}$$

Ejemplo 11.3.2

En las Figuras 11.5 y 11.6, se muestra el impacto de los parámetros de reversión y volatilidad sobre las trayectorias de Monte Carlo. En la Figura 11.5 se muestran distintas trayectorias del modelo Hull-White, mientras que en la Figura 11.6 se muestran trayectorias del modelo CIR. Antes del año 2008 parecía obvio considerar solo tipos de interés positivos. Sin embargo, después de la grave crisis financiera de 2007, se han observado tipos negativos en los mercados financieros. Los tipos de interés negativos se tratarán con más detalle en el Apartado 14.4.1 del siguiente capítulo.

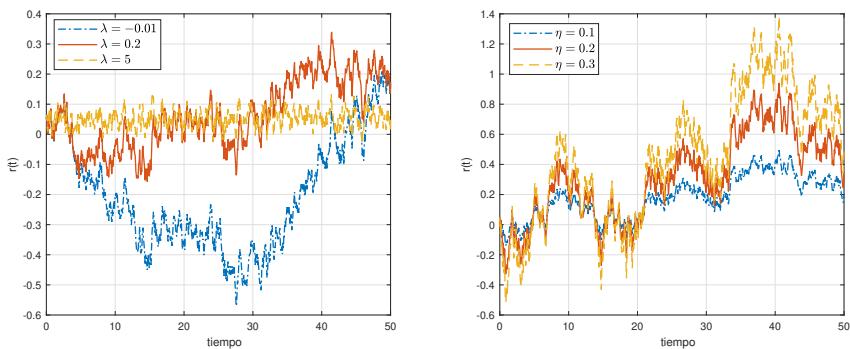


Figura 11.5: *Trayectorias de Monte Carlo del modelo HW. Izquierda: impacto del parámetro de reversión a la media, λ . Derecha: impacto del parámetro de volatilidad, η .*



11.4. El modelo HJM bajo la medida T -forward

Hasta ahora, hemos considerado el modelo HJM bajo la medida de riesgo neutro, generada por la cuenta de ahorros $M(t)$ como numerario. En este apartado, extendemos el marco HJM para que se puedan emplear los tipos forward bajo la medida T_i -forward. Este análisis es particularmente útil en el contexto del modelo de mercado Libor, conocido como LMM por sus siglas en inglés⁵, donde los tipos forward se modelan mediante un sistema de EDEs multidimensional. En el Apartado 14.1, detallaremos el modelado del LMM. Un cambio de medida, de la medida de riesgo neutro, \mathbb{Q} , generada por la cuenta de ahorros, $M(t)$, a una medida generada por el bono cupón cero, $P(t, T_i)$, con

⁵Libor market model

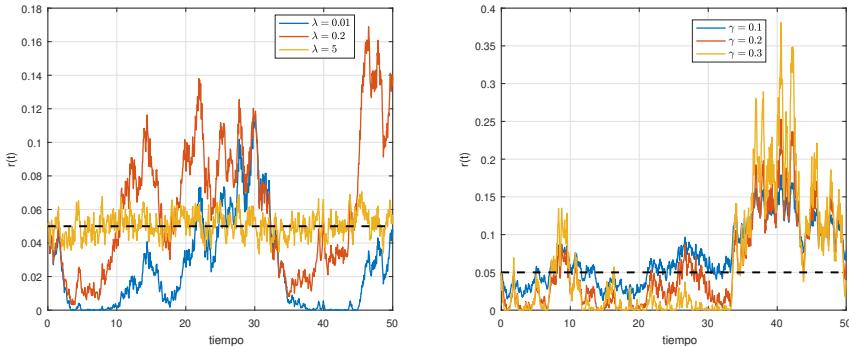


Figura 11.6: Trayectorias de Monte Carlo del modelo CIR. Izquierda: impacto del parámetro de reversión a la media, λ . Derecha: impacto del parámetro de volatilidad, γ .



$t_0 < t < T_i$, requiere de la derivada de Radon-Nikodym dada por

$$\boxed{\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t) = \frac{d\mathbb{Q}^{T_i}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T_i)}{P(t_0, T_i)} \frac{M(t_0)}{M(t)}} \quad (11.49)$$

Aplicando el lema de Itô, la dinámica de $\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t)$ es

$$\begin{aligned} d\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t) &= \frac{M(t_0)}{P(t_0, T_i)} d\left(\frac{P(t, T_i)}{M(t)}\right) \\ &= \frac{M(t_0)}{P(t_0, T_i)} \left[\frac{1}{M(t)} dP(t, T_i) - \frac{P(t, T_i)}{M^2(t)} dM(t) \right]. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Recordemos que $M(t_0) = 1$. Con la ayuda del Lema 11.2.2, sustituimos la dinámica HJM libre de arbitraje por el BCC, esto es

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r(t)dt - \left(\int_t^{T_i} \bar{\eta}(z, T_i)dz \right) dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (11.51)$$

con la función de volatilidad $\bar{\eta}(z, T_i)$ definida en el Lema 11.2.1.

Después de sustituir (11.51) en (11.50), la EDE de $\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t)$ viene dada por

$$\frac{d\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t)}{\lambda_{\mathbb{Q}}^i(t)} = - \left(\int_t^{T_i} \bar{\eta}(z, T_i)dz \right) dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (11.52)$$

Aplicando el Theorem 7.2.2 (Girsanov), la transformación de la medida de la medida \mathbb{Q} a la medida T_i -forward \mathbb{Q}^{T_i} , viene dada por

$$dW^i(t) = \left(\int_t^{T_i} \bar{\eta}(z, T_i) dz \right) dt + dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (11.53)$$

Esta transformación se puede utilizar para determinar la dinámica del tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$, con $t < T < T_i$, bajo la medida \mathbb{Q}^{T_i} . Aplicando el resultado principal del Lema 11.2.1, la dinámica libre de arbitraje del tipo forward, $f^r(t, T)$, es

$$df^r(t, T) = \bar{\eta}(t, T) \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz \right) dt + \bar{\eta}(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Empleando la igualdad de (11.53), la dinámica de $f^r(t, T)$ viene dada por

$$\begin{aligned} df^r(t, T) &= \bar{\eta}(t, T) \left(\int_t^T \bar{\eta}(t, z) dz \right) dt \\ &+ \bar{\eta}(t, T) \left[dW^i(t) - \left(\int_t^{T_i} \bar{\eta}(z, T_i) dz \right) dt \right], \end{aligned}$$

que, simplificando, resulta en

$$df^r(t, T) = -\bar{\eta}(t, T) \left(\int_T^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dz \right) dt + \bar{\eta}(t, T) dW^i(t), \quad (11.54)$$

para $T < T_i$.

11.4.1. La dinámica Hull-White bajo la medida T -forward

Estudiamos la dinámica del modelo Hull-White bajo la medida T -forward. En el Capítulo 13, se evidenciarán las ventajas de un modelo short-rate bajo un cambio de medida, en el contexto de los modelos híbridos. Recordamos que el modelo Hull-White bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , viene dado por la EDE (11.31).

Para intercambiar medidas, de la medida \mathbb{Q} gobernada por la cuenta de ahorros, $M(t)$, a la medida T -forward, \mathbb{Q}^T , generada por el bono cupón cero, $P(t, T)$, empleamos de nuevo la derivada de Radon-Nikodym, es decir,

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t) = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T)}{P(t_0, T)} \frac{M(t_0)}{M(t)}, \quad \text{para } t > t_0. \quad (11.55)$$

Considerando la dinámica del BCC en (11.30) y la definición de la cuenta de ahorros $M(t)$, la dinámica de $\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)$ es

$$\begin{aligned} d\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t) &= \frac{M(t_0)}{P(t_0, T)} \left(\frac{1}{M(t)} dP(t, T) - \frac{P(t, T)}{M^2(t)} dM(t) \right) \\ &= \frac{M(t_0)}{P(t_0, T)} \frac{P(t, T)}{M(t)} \eta \bar{B}_r(t, T) dW_r^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

con $\bar{B}_r(t, T) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1)$. Así, utilizando la definición de $\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)$ en (11.55), tenemos que

$$\frac{d\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)}{\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)} = \eta \bar{B}_r(t, T) dW_r^{\mathbb{Q}}(t). \quad (11.56)$$

Esta representación proporciona el núcleo de Girsanov que permite intercambiar medidas, de la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} a la medida T -forward \mathbb{Q}^T , es decir,

$$dW_r^T(t) = -\eta \bar{B}_r(t, T) dt + dW_r^{\mathbb{Q}}(t). \quad (11.57)$$

Aplicando esta transformación de la medida, se define la dinámica short-rate bajo la medida \mathbb{Q}^T , dada por

$$\begin{aligned} dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= \lambda \left(\theta(t) + \frac{\eta^2}{\lambda} \bar{B}_r(t, T) - r(t) \right) dt + \eta dW_r^T(t). \end{aligned} \quad (11.58)$$

El proceso en (11.58) se puede reescribir como

$$dr(t) = \lambda \left(\hat{\theta}(t, T) - r(t) \right) dt + \eta dW_r^T(t), \quad (11.59)$$

con

$$\hat{\theta}(t, T) = \theta(t) + \frac{\eta^2}{\lambda} \bar{B}_r(t, T), \quad \text{donde } \bar{B}_r(t, T) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1).$$

11.4.2. Opciones sobre BCC bajo el modelo Hull-White

En este último apartado, estudiamos las opciones europeas con vencimiento en tiempo T , sobre un bono cupón cero $P(T, T_S)$ con vencimiento T_S , $T < T_S$. Aunque este producto es muy sencillo y no requiere de un análisis muy profundo, es importante considerarlo, ya que es un componente fundamental para la valoración de productos *swaption*, que veremos en el siguiente capítulo. Una opción de estilo europeo se define mediante la ecuación

$$V^{\text{BCC}}(t_0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T)} \max(\bar{\alpha}(P(T, T_S) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

con $\bar{\alpha} = 1$ para una call y $\bar{\alpha} = -1$ para una put, strike K y $dM(t) = r(t)M(t)dt$. Aplicando un cambio de medida, de la medida riesgo neutro a la medida T -forward, la ecuación de valoración resulta en

$$V^{\text{BCC}}(t_0, T) = P(t_0, T)\mathbb{E}^T \left[\max(\bar{\alpha}(P(T, T_S) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Como $r(t)$ es un modelo short-rate afín, el bono cupón cero $P(T, T_S)$ es una función exponencial, y la ecuación de valoración se puede expresar como

$$\begin{aligned} V^{\text{BCC}}(t_0, T) &= P(t_0, T)\mathbb{E}^T \left[\max \left(\bar{\alpha} \left(e^{\bar{A}_r(\tau) + \bar{B}_r(\tau)r(T)} - K \right), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T)e^{\bar{A}_r(\tau)}\mathbb{E}^T \left[\max \left(\bar{\alpha} \left(e^{\bar{B}_r(\tau)r(T)} - \hat{K} \right), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (11.60)$$

donde $\tau = T_S - T$, $\hat{K} = Ke^{-\bar{A}_r(\tau)}$ y $r(T)$ es el proceso short-rate en tiempo T bajo la medida T -forward \mathbb{Q}^T . $\bar{A}_r(\tau)$ y $\bar{B}_r(\tau)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{A}_r(\tau) &:= \lambda \int_0^\tau \theta(T_S - z)\bar{B}_r(z)dz + \frac{\eta^2}{4\lambda^3} (e^{-2\lambda\tau}(4e^{\lambda\tau} - 1) - 3) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2}\tau, \\ \bar{B}_r(\tau) &:= \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda\tau} - 1). \end{aligned} \quad (11.61)$$

La dinámica Hull-White del short-rate $r(t)$ bajo la medida T -forward viene dada por (11.59). El proceso Hull-White sigue una distribución normal, $r(T) \sim \mathcal{N}(\mu_r(T), v_r^2(T))$, con media $\mu_r(T)$ y varianza $v_r^2(T)$, dadas por

$$\begin{aligned} \mu_r(T) &= r_0 e^{-\lambda(T-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^T \hat{\theta}(z, T)e^{-\lambda(T-z)}dz, \\ v_r^2(T) &= \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda(T-t_0)}), \end{aligned} \quad (11.62)$$

con $\hat{\theta}(z, T)$ como en (11.59). Esto implica que $\bar{B}_r(\tau)r(T)$ también sigue una distribución normal, esto es

$$z(T) := \bar{B}_r(\tau)r(T) \sim \mathcal{N}\left(\bar{B}_r(\tau)\mu_r(T), \bar{B}_r^2(\tau)v_r^2(T)\right),$$

con lo obtenemos la expresión para la opción call europea sobre el BCC de (11.60), dada por

$$\begin{aligned} V_c^{\text{BCC}}(t_0, T) &= P(t_0, T)e^{\bar{A}_r(\tau)}\mathbb{E}^T \left[\max \left(e^{z(T)} - \hat{K}, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T)e^{\bar{A}_r(\tau)} \int_{-\infty}^a \left(e^{\bar{B}_r(\tau)\mu_r(T) + \bar{B}_r(\tau)v_r(T)x} - \hat{K} \right) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx, \end{aligned} \quad (11.63)$$

con $f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ la FDP de la normal estándar, y⁶

$$a = \frac{\log \hat{K} - \bar{B}_r(\tau)\mu_r(T)}{\bar{B}_r(\tau)v_r(T)}. \quad (11.64)$$

⁶Nótese que $\bar{B}_r(\tau) \leq 0$.

La integral anterior se puede descomponer en dos integrales, es decir,

$$\int_{-\infty}^a \left(e^{\bar{B}_r(\tau)\mu_r(T) + \bar{B}_r(\tau)v_r(T)x} - \hat{K} \right) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx = \psi_1 + \psi_2,$$

donde

$$\psi_1 = e^{\bar{B}_r(\tau)\mu_r(T)} \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\bar{B}_r(\tau)v_r(T)x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

que, simplificando, se puede escribir como

$$\psi_1 = \exp \left(\frac{1}{2} \bar{B}_r^2(\tau) v_r^2(T) + \bar{B}_r(\tau) \mu_r(T) \right) F_{\mathcal{N}(0,1)}(a - \bar{B}_r(\tau) v_r(T)),$$

y

$$\psi_2 := -\hat{K} \int_{-\infty}^a f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx = -\hat{K} F_{\mathcal{N}(0,1)}(a),$$

donde $F_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ es la FDA de la normal estándar y a viene dado por (11.64). Tomando $d_1 = a - \bar{B}_r(\tau) v_r(T)$ y $d_2 = d_1 + \bar{B}_r(\tau) v_r(T)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \exp \left(\frac{1}{2} \bar{B}_r^2(\tau) v_r^2(T) + \bar{B}_r(\tau) \mu_r(T) \right) F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1), \\ \psi_2 &= -\hat{K} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2). \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de valoración viene dada por

$$\frac{V_c^{\text{BCC}}(t_0, T)}{P(t_0, T)} = \exp(\bar{A}_r(\tau)) \left[\exp \left(\frac{1}{2} \bar{B}_r^2(\tau) v_r^2(T) + \bar{B}_r(\tau) \mu_r(T) \right) F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) \right. \\ \left. - \hat{K} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \right], \quad (11.65)$$

donde $\tau = T_S - T$, $d_1 = a - \bar{B}_r(\tau) v_r(T)$, $d_2 = d_1 + \bar{B}_r(\tau) v_r(T)$, y con a en (11.64), $\bar{A}_r(\tau)$ y $\bar{B}_r(\tau)$ en (11.61), $\mu_r(T)$ y $v_r(T)$ en (11.62) y $\hat{K} = K e^{-\bar{A}_r(\tau)}$.

La ecuación de valoración para una opción put se puede obtener de manera análoga. Alternativamente, se puede utilizar la paridad put-call, que también aplica para los productos de tipo de interés.

Así concluimos el análisis de los procesos short-rate y los BCCs bajo distintas medidas. Además de los productos básicos relacionados con el BCC, existen otros derivados de tipos de interés, que serán abordados en el siguiente capítulo.

11.5. Ejercicios

Ejercicio 11.1 Mostrar que, para cualquier proceso estocástico $r(t)$ cuya dinámica viene dada por

$$dr(t) = \lambda(\hat{\theta}(t, T_2) - r(t))dt + \eta dW_r^{T_2}(t), \quad r(t_0) = r_0,$$

y

$$\hat{\theta}(t, T_2) = \theta(t) + \frac{\eta^2}{\lambda} \bar{B}_r(T_2 - t),$$

para cualquier tiempo t , la media y la varianza vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{T_2}[r(t)|\mathcal{F}(t_0)] &= r_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \hat{\theta}(z, T_2) e^{-\lambda(t-z)} dz, \\ \text{Var}^{T_2}[r(t)|\mathcal{F}(t_0)] &= \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}). \end{aligned}$$

Mostrar que la función generadora de momentos (la transformada de Laplace) es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{T_2}\left[e^{ur(t)}\middle|\mathcal{F}(t_0)\right] &= \exp\left[u\left(r_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \hat{\theta}(z, T_2) e^{-\lambda(t-z)} dz\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2} u^2 \frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})\right]. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.2 Proporcionar una demostración para la condición HJM de ausencia de arbitraje, presentada en el Lema 11.2.1.

Ejercicio 11.3 Proporcionar una demostración para la descomposición de Hull-White, presentada en la Proposición 11.3.1.

Ejercicio 11.4 Obtener las fórmulas para los coeficientes de la función característica descontada del modelo Hull-White en el Lema 11.3.1.

Ejercicio 11.5 Mostrar que, al integrar la función $\psi(t)$ en (11.39), se obtiene

$$\begin{aligned} \psi(t) &= r_0 e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} f^r(0, u) + f^r(0, u) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda u}) \right) e^{-\lambda(t-u)} du \\ &= e^{-\lambda t} \left[r_0 + e^{\lambda t} f^r(0, t) - f^r(0, 0) + \frac{\eta^2}{\lambda^2} (\cosh(\lambda t) - 1) \right] \end{aligned}$$

donde $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Determinar los pasos intermedios.

Ejercicio 11.6 Obtener la función característica del modelo HW directamente, es decir, sin emplear la descomposición de Hull-White.

Ejercicio 11.7 Mostrar que la opción put europea sobre el BCC se puede expresar como

$$V_p^{\text{CB}}(t_0, T) = P(t_0, T) e^{\bar{A}_r(\tau)} \left[\hat{K} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) - e^{\frac{1}{2} \bar{B}_r^2(\tau) v_r^2(T) + \bar{B}_r(\tau) \mu_r(T)} F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) \right],$$

con $\tau = T - t_0$, $d_1 = \bar{B}_r(\tau) v_r(T) - a$, $d_2 = -a$, y

$$a = \frac{\log \hat{K} - \bar{B}_r(\tau) \mu_r(T)}{\bar{B}_r(\tau) v_r(T)},$$

donde $\bar{A}_r(\tau)$ y $\bar{B}_r(\tau)$ vienen dados por (11.61), $\mu_r(T)$ y $v_r(T)$ están definidas en (11.62) y (11.62) y $\hat{K} = K e^{\bar{A}_r(\tau)}$.

Pista: Se puede obtener de manera análoga a la opción call, descrita en el Apartado 11.4.2.

Ejercicio 11.8 El modelo short-rate de Ho-Lee se define mediante la volatilidad HJM como

$$\bar{\eta}(t, T) = \eta.$$

Mostrar que

$$dr(t) = \theta(t)dt + \eta dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (11.66)$$

donde $\theta(t) = \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \eta^2 t$.

Ejercicio 11.9 Considerar el modelo short-rate de Vašiček, es decir,

$$dr(t) = \lambda(\theta - r(t))dt + \eta dW(t),$$

con los parámetros $\lambda = 0.05$, $\theta = 0.02$ y $\eta = 0.1$ y valor inicial $r(t_0) = 0$. En tiempo t_0 , se desea cubrir la posición sobre un bono cupón cero a 10 años, $P(t_0, 10)$, utilizando otros dos bonos, $P(t_0, 1)$ y $P(t_0, 20)$.

- Determinar los pesos, ω_1 y ω_2 , tal que $\omega_1 + \omega_2 = 1$ y $\omega_1 P(t_0, 1) + \omega_2 P(t_0, 20) = P(t_0, 10)$.

- Realizar una cobertura de varianza mínima y determinar los pesos ω_1 y ω_2 , tal que

$$\text{Var} \left[\int_0^{10} \omega_1 P(t, 1) + \omega_2 P(t, 20) dt \right] = \text{Var} \left[\int_0^{10} P(t, 10) dt \right],$$

mientras $\omega_1 + \omega_2 = 1$. ¿Qué se puede decir de este tipo de cobertura en comparación con la del punto anterior?

- Cambiar de medida, a la medida $T = 10$ -forward y, dados los pesos determinados anteriormente, comprobar si aumenta la varianza del estimador.

Ejercicio 11.10 Asumir que el tipo short-rate sigue un modelo CIR con parámetros constantes bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} , esto es

$$dr(t) = \lambda(\theta - r(t))dt + \gamma \sqrt{r(t)} dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Escribir un código que simule este modelo para valorar una opción call europea con vencimiento $T = 3$ sobre el bono cupón cero $P(1, 3)$, con strike $K = 0.75$. En la simulación utilizar los parámetros, $r_0 = 0.03$, $\lambda = 0.5$, $\theta = 0.1$ y $\gamma = 0.13$.

Ejercicio 11.11 Considerar el modelo Hull-White dado por

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r^{\mathbb{Q}}(t),$$

con parámetros λ y η constantes y positivos. Además, considerar el siguiente bono cupón cero de mercado

$$P_{mkt}(0, t) = e^{1-e^{at}}, \quad a = 0.4. \quad (11.67)$$

- Utilizar (11.67) para determinar $\theta(t)$.

- b. Utilizar $r_0 = f^r(0, \epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\lambda = 0.4$ y $\eta = 0.075$, y obtener el valor del bono bajo el modelo, es decir,

$$P_{model}(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} \right].$$

- c. Comparar $P_{mkt}(0, t)$ con $P_{model}(0, t)$ para $t \in [0, 10]$ y analizar las diferencias.

CAPÍTULO 12

Derivados de tipo de interés y ajustes en la valoración

En este capítulo:

Comenzaremos presentando algunos derivados de tipo de interés en los dos primeros apartados, **Apartado 12.1** y **Apartado 12.2**. Describiremos en detalle productos tales como los acuerdos de interés futuro, *caps*, *floors*, *swaps* y *swaptions*. Aunque estos productos se basan en los denominados tipos Libor, su valor se puede reescribir en términos de los precios de bonos cupón cero. Cuando se manejan productos «no demasiado complejos», los precios de los bonos se pueden modelar mediante los modelos short-rate presentados en el capítulo anterior.

A continuación, nos centraremos en un problema específico en el contexto de la gestión del riesgo. Para hacer frente a la posible quiebra de una contraparte, se añaden «ajustes» al precio justo de un derivado. De esta forma, se tiene en cuenta la probabilidad de quiebra de la contraparte, mediante un cargo adicional al precio del derivado. En el **Apartado 12.3**, se explica en detalle el ajuste del valor por riesgo de crédito, más conocido, por su nombre y siglas en inglés, como *Credit Valuation Adjustment* (CVA). En este apartado se estudia el modelado de la «exposición» a la contrapartida, lo que requiere de técnicas de modelado y valoración similares a las vistas para la valoración de opciones financieras. Por consiguiente, las técnicas y modelos se analizadas hasta ahora son de utilidad en el contexto del CVA.

Palabras clave de este capítulo: derivados de tipo de interés, modelo Hull-White, ajuste en la valoración, exposición esperada, exposición potencial futura, default de contrapartida.

12.1. Derivados básicos de tipo de interés y el tipo Libor

Cada día se comercializan muchos productos de tipo de interés en los mercado monetarios financieros. A menudo, los contratos de estos derivados de tipo de interés se basan en el bono cupón cero (BCC), $P(t, T)$. Cuando se consideran productos de tipo de interés «no demasiado complejos», los correspondientes precios de los bonos se pueden modelar mediante los modelos short-rate libres de arbitraje del capítulo anterior. Antes de estudiar algunos de los productos de tipo de interés más comunes, definiremos el tipo Libor.

12.1.1. Tipo Libor

El London-InterBank Offered Rate (Libor) es un tipo de interés que se determina o fija (ya que el procedimiento con el que se calcula el tipo se denomina «fijación¹»), cada día laborable a las 11 de la mañana, hora de Londres. La entidad jurídica que se encarga de la evaluación del tipo Libor es la Asociación de Banqueros Británicos (BBA), que es la asociación de banca comercial del Reino Unido. Esta asociación reúne aproximadamente a 250 miembros de todo el mundo, de 180 países diferentes. En el procedimiento para determinar el tipo Libor se pide a varios bancos internacionales (el pull) que envíen sus cotizaciones para el Libor a la BBA. En cada etapa de evaluación se eliminan los cuantiles superiores e inferiores de todas las propuestas y se acuerda que el promedio de las cotizaciones restantes represente la fijación de Libor. Si un banco puede pedir prestado a un tipo de interés muy bajo, esto es un indicativo del estado del sistema financiero, ya que entonces los bancos están dispuestos a prestar dinero a bajo coste. En caso de una crisis, los bancos, al igual que otras instituciones, son más reacios a prestar dinero a tipos bajos. Para que el negocio sea justo, es crucial que las cotizaciones del Libor sean justas y representen el tipo de financiación real.

Ya hemos mencionado las dos clases de cupones para bonos, los que están predefinidos y los que se reajustan periódicamente (los bonos flotantes). Habitualmente, los productos de renta variable están vinculados a un indicador de referencia, tales como los bonos del tesoro, los tipos Libor o los denominados índices de precios de consumo, IPCs, relacionados con los cambios en la inflación. Si un cupón está referenciado al tipo Libor, cotizado en puntos básicos ($100 \text{ pb} = 1\% \text{ de interés}$), el bono puede cotizar a «Libor + x pb», lo que implica que el bono cuesta el tipo Libor más $x/100$. En este caso, x representa un «diferencial», que se determina en el momento de emisión del bono y permanece fijo hasta el vencimiento del mismo.

Sean dos contrapartes, A y B , donde la contraparte A paga 1€ a la contraparte B en tiempo T_1 . En tiempo T_2 , la contraparte A recupera 1€ y además recibirá el tipo de interés K acumulado en el período $T_2 - T_1$.

¹ Del inglés *fixing*.

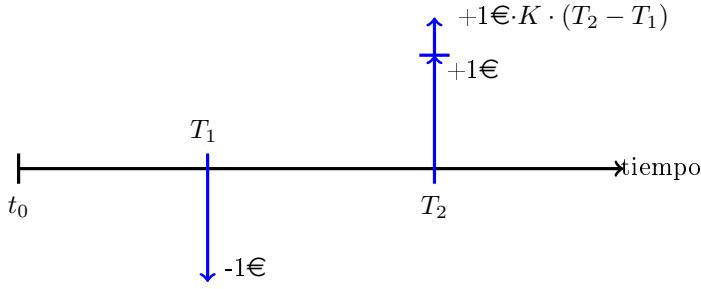


Figura 12.1: Flujos de caja entre dos contrapartes.

En la Figura 12.1, se representan los flujos de caja. El valor justo de este contrato se calcula como

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{-1}{M(T_1)} + \frac{1 + K \cdot (T_2 - T_1)}{M(T_2)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= -P(t_0, T_1) + (1 + (T_2 - T_1) \cdot K) P(t_0, T_2). \end{aligned}$$

El tipo de interés K para el cual el valor del contrato en el instante t_0 es igual a 0 (lo que significa que no hay pagos al inicio) viene dado por

$$K = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{P(t_0, T_1)}{P(t_0, T_2)} - 1 \right).$$

En general, el tipo justo K para préstamos interbancarios con fecha de operación t , comenzando en T_{i-1} y con vencimiento T_i , con período $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, denotado por $K \equiv \ell_i(t) := \ell(t; T_{i-1}, T_i)$, es igual a

$$\ell(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right).$$

Consideramos un horizonte temporal $[0, T^*]$ para la operación, fijamos un conjunto de instantes de tiempo $\{T_i, i = 1, \dots, m\}, m \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_m \leq T^*$, y definimos el denominado «período», $\tau_i := T_i - T_{i-1}$.

Definición 12.1.1 (Tipo Libor forward compuesto)

Dados un período τ_i y el BCC libre de riesgo con vencimiento en tiempo T_i y nominal de 1 (unidad de moneda), $P(t, T_i)$, el tipo Libor forward $\ell(t; T_{i-1}, T_i)$ para $[T_{i-1}, T_i]$ se define como

$$\ell_i(t) \equiv \ell(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)}.$$

(12.1) ◀

Para una mayor claridad, denotamos por $\ell_i(t) \equiv \ell(t; T_{i-1}, T_i)$, de modo que $\ell_i(T_{i-1}) = \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$.

12.1.2. Acuerdo de interés futuro

Comenzamos la revisión de productos de tipo de interés con el acuerdo de interés futuro. Este producto, también conocido por su denominación en inglés, *forward rate agreement*, por las siglas FRA, o simplemente como contrato forward, es un producto financiero mediante el cual una de las partes puede «bloquear» un tipo de interés para un período de tiempo dado. En el mercado de tipos de interés, es habitual fijar un tipo de interés para un instante futuro T_{i-1} , que luego se acumula para un intervalo de tiempo $[T_{i-1}, T_i]$. Durante este intervalo $[T_{i-1}, T_i]$, las dos partes acuerdan «intercambiar» un tipo fijo K por el tipo Libor (variable) observado en el instante T_{i-1} . A menudo, los pagos se realizan en tiempo T_i (que suele ser dos días laborables después de T_{i-1}).

El payoff del FRA en tiempo T_{i-1} viene dado por

$$V^{\text{FRA}}(T_{i-1}) = H^{\text{FRA}}(T_{i-1}) = \frac{\tau_i (\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) - K)}{1 + \tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}, \quad (12.2)$$

con el período $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, asumiendo la unidad como capital nominal, $N = 1$.

Empleando la definición del tipo Libor $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, podemos conectar directamente el denominador en (12.2) con el BCC $P(T_{i-1}, T_i)$, mediante

$$P(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{1 + \tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)},$$

de modo que la función de payoff del FRA se puede expresar como

$$V^{\text{FRA}}(T_{i-1}) = \tau_i P(T_{i-1}, T_i) (\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) - K). \quad (12.3)$$

El precio actual del contrato FRA se determina mediante

$$\begin{aligned} V^{\text{FRA}}(t_0) &= M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i-1})} \tau_i P(T_{i-1}, T_i) (\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) - K) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{M(T_{i-1})} - \tau_i K \frac{P(T_{i-1}, T_i)}{M(T_{i-1})} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

ya que $M(t_0) = 1$. Como los bonos $P(T_{i-1}, T_i)$ son activos negociables, los bonos descontados deben ser martingalas, lo que resulta en

$$\begin{aligned} V^{\text{FRA}}(t_0) &= P(t_0, T_{i-1}) - P(t_0, T_i) - \tau_i K P(t_0, T_i) \\ &= \tau_i P(t_0, T_i) (\ell(t_0; T_{i-1}, T_i) - K). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Nótese que, por definición,

$$P(t_0, T_{i-1}) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i-1})} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Como práctica habitual, los FRAs se comercializan con valor cero, lo que implica que el tipo fijo debe ser $K = \ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$.

12.1.3. Floating rate note

Otro producto muy comercializado es el denominado *floating rate note* (FRN), que se puede traducir como título de renta variable. Dado el tipo Libor variable, $\ell_i(T_i) := \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ y un capital nominal N , el FRN es un instrumento que paga cupones definido como

$$V_i^{\text{FRN}}(T_i) = \begin{cases} N\tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i), & i \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\ N\tau_m \ell(T_{m-1}; T_{m-1}, T_m) + N, & i = m. \end{cases} \quad (12.5)$$

Por tanto, el bono consiste en una suma de pagos, véase la Figura 12.2, y cada flujo de caja se puede valorar por separado, como

$$\begin{aligned} V_i^{\text{FRN}}(t_0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} V_i^{\text{FRN}}(T_i) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[V_i^{\text{FRN}}(T_i) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (12.6)$$

mediante un cambio de medida, de la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} a la medida forward T_i . Ahora, como $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ es una cantidad negociable, esta debería ser una martingala y, por tanto, tenemos que

$$\mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}(t_0)] = \ell(t_0; T_{i-1}, T_i),$$

lo que resulta en

$$\mathbb{E}^{T_i} [V_i^{\text{FRN}}(T_i) | \mathcal{F}(t_0)] = \begin{cases} N\tau_i \ell(t_0; T_{i-1}, T_i), & i \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\ N\tau_m \ell(t_0; T_{m-1}, T_m) + N, & i = m. \end{cases} \quad (12.7)$$

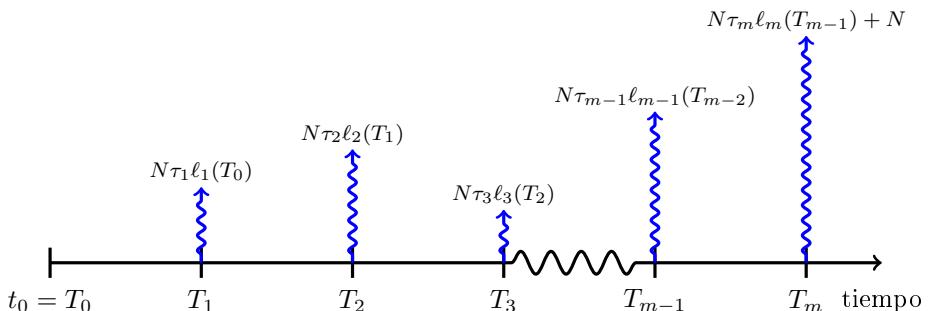


Figura 12.2: Flujos de caja para un FRN con $\ell_i(T_i) := \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ y cada cupón definido como $N\tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.

12.1.4. Swaps

Los swaps son productos financieros que permiten a sus poseedores intercambiar dos conjuntos de pagos de tipos de interés. Por ejemplo, una compañía puede tener un contrato financiero en el cual, en cada período de tiempo, recibe un tipo de interés variable, por lo que depende del tipo en ese instante. Puede resultar conveniente asegurar los flujos de caja recibiendo un tipo de interés fijo en esos mismos períodos de tiempo.

Un swap es un acuerdo entre dos partes que intercambian instrumentos financieros (habitualmente flujos de caja) en el futuro. El swap puede adquirirse para intercambiar un tipo de interés variable con un tipo fijo, o viceversa.

Los swaps son contratos OTC², que empezaron a comercializarse en los años ochenta-noventa. La variante de swap más conocida es el swap de tipos de interés, en el que una parte se compromete a pagar los flujos de caja fijos, que son iguales al interés de un tipo fijo preestablecido sobre un capital nominal, y donde la otra parte paga un interés variable sobre el mismo capital nominal. Los pagos se realizan en unas fechas futuras predefinidas durante un número de años acordado.

El swap de tipos de interés consta de dos patas, una pata fija con una serie de pagos a un tipo fijo K , en los instantes futuros T_{i+1}, \dots, T_m , y la pata variable que consiste en una serie de tipos Libor variables, véase la Figura 12.3.

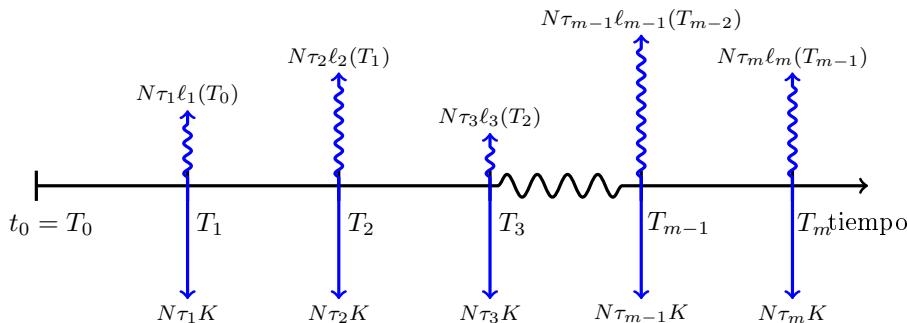


Figura 12.3: Flujos de caja para un swap con $\ell_i(T_{i-1}) := \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.

El pago de la pata fija en cada instante T_i es igual a $\tau_i NK$, siendo N el capital nominal y K el tipo de interés fijo. La pata variable es igual a $N\tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, siendo $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ el tipo Libor en el intervalo $[T_{i-1}, T_i]$, que se establece en tiempo T_{i-1} .

En la jerga financiera, se emplean a menudo dos términos relacionados con los swaps de tipos de interés: el swap de tipos de interés «pagador» y el swap de tipos de interés «receptor». Estos términos ayudan a distinguir entre la posición donde se recibe la pata variable y se paga la pata fija (swap pagador),

² Over-the-counter o extrabursátiles.

y la posición donde se paga la pata variable y se recibe la pata fija (swap receptor).

El payoff del swap de tipos de interés (para el pagador o el receptor) viene dado por

$$V^{\text{SP,SR}}(T_i, \dots, T_m) = \bar{\alpha} H^S(T_i, \dots, T_m) = \bar{\alpha} \sum_{k=i+1}^m \tau_k N(\ell_k(T_{k-1}) - K), \quad (12.8)$$

con $\bar{\alpha} = 1$ para el pagador y $\bar{\alpha} = -1$ para el receptor, y donde empleamos la notación $\ell_k(T_{k-1}) := \ell(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k)$, indicando que el tipo Libor se determina (vence) en tiempo T_{k-1} .

Debido a que el swap de tipos de interés empieza en el futuro, en tiempo T_i , en ocasiones se denomina como *swap forward*.

Para determinar el valor del swap hoy, en t_0 , evaluamos la esperanza de los flujos de caja descontados, es decir, cada pago que se realiza en los instantes de tiempo, T_{i+1}, \dots, T_m tiene que ser descontado a fecha de hoy, es decir,

$$\begin{aligned} V^{\text{SP,SR}}(t_0) &= \bar{\alpha} \cdot N \cdot M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=i+1}^m \frac{1}{M(T_k)} \tau_k (\ell_k(T_{k-1}) - K) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \bar{\alpha} \cdot N \cdot M(t_0) \sum_{k=i+1}^m \tau_k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_k)} (\ell_k(T_{k-1}) - K) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

A partir de ahora, nos centraremos en el swap pagador, $\bar{\alpha} = 1$, y utilizaremos la notación $V^{\text{SP}} = V^S$.

El cambio de medida, de la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} a la medida forward en T_k , \mathbb{Q}^{T_k} , como la vista en (11.60), resulta en

$$\begin{aligned} V^S(t_0) &= N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \left(\mathbb{E}^{T_k} [\ell_k(T_{k-1}) | \mathcal{F}(t_0)] - K \right) \\ &= N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) (\ell_k(t_0) - K), \end{aligned} \quad (12.9)$$

donde en el último paso se ha utilizado que el tipo Libor $\ell_k(t)$, bajo su propia medida natural \mathbb{Q}^{T_k} , es una martingala, esto es, $\mathbb{E}^{T_k}[\ell_k(t) | \mathcal{F}(t_0)] = \ell_k(t_0)$.

La expresión en (12.9) se puede reescribir como

$$V^S(t_0) = N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \ell_k(t_0) - NK \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k). \quad (12.10)$$

El primer sumatorio en (12.10) se puede simplificar empleando la definición del tipo Libor (12.1), esto es

$$\begin{aligned}\sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \ell_k(t_0) &= \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \left(\frac{1}{\tau_k} \frac{P(t_0, T_{k-1}) - P(t_0, T_k)}{P(t_0, T_k)} \right) \\ &= \sum_{k=i+1}^m \left(P(t_0, T_{k-1}) - P(t_0, T_k) \right) \\ &= P(t_0, T_i) - P(t_0, T_m),\end{aligned}$$

debido a las propiedades de la suma telescópica.

Entonces, el precio de un swap (pagador) viene dado por

$$V^S(t_0) = N(P(t_0, T_i) - P(t_0, T_m)) - NK \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k). \quad (12.11)$$

Definición 12.1.2 (Factor de anualidad)

El factor de anualidad se define como

$$A_{i,m}(t) := \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t, T_k). \quad (12.12)$$

Como vemos, la anualidad $A_{i,m}(t)$ no es más que una combinación lineal de bonos cupón cero. ◀

Como cada uno de estos bonos cupón cero es un activo negociable, su combinación lineal y, en consecuencia, la anualidad son también negociables. Por lo tanto, podemos considerar la función de anualidad como un numerario para valorar los correspondientes derivados.

En general, los swaps de tipos de interés se consideran productos de tipo de interés «perfectos», en los que las dos partes pueden cubrir sus exposiciones individuales. La práctica estándar para determinar el precio de strike K para los swaps de tipos de interés es que el valor del swap en el momento inicial t_0 debe ser igual a cero. Por tanto, entrar en este tipo de acuerdo financiero es «gratis». El valor del strike para el cual el swap es igual a cero se denomina «tipo swap», y se denota por $S_{i,m}(t_0)$.

Igualando (12.11) a cero, tenemos que

$$S_{i,m}(t_0) = \frac{P(t_0, T_i) - P(t_0, T_m)}{\sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k)} = \frac{P(t_0, T_i) - P(t_0, T_m)}{A_{i,m}(t_0)}, \quad (12.13)$$

que también se puede escribir como

$$S_{i,m}(t_0) = \frac{1}{A_{i,m}(t_0)} \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \ell_k(t_0) = \sum_{k=i+1}^m \omega_{i,k}(t_0) \ell_k(t_0),$$

con $\omega_{i,k}(t_0) = \tau_k \frac{P(t_0, T_k)}{A_{i,m}(t_0)}$ y $\ell_k(t_0) := \ell(t_0; T_{k-1}, T_k)$.

Empleando (12.13), el valor del swap (pagador) (12.11) es

$$V^S(t_0) = N \cdot A_{i,m}(t_0) (S_{i,m}(t_0) - K). \quad (12.14)$$

Esta representación compacta resulta bastante conveniente, ya que todos los componentes tienen un significado específico: la anualidad $A_{i,m}(t_0)$ representa el valor presente de un punto básico del swap; $S_{i,m}(t)$ es el tipo swap y K es el strike. Obviamente, con $K = S_{i,m}(t_0)$, el valor del swap hoy es igual a cero.

Observación 12.1.1

En el caso del swap de tipos de interés básico, la valoración se puede realizar sin asumir ningún modelo para el subyacente. La valoración se puede llevar a cabo utilizando simplemente los productos de tipo de interés disponibles en el mercado. Nótese que esto también se aplica a los FRAs y a los FRNs. ▲

12.1.5. Como construir una curva de rentabilidad

En el marco de los tipos de interés, en vez de tratar directamente con los precios de los bonos, es habitual utilizar el término «rentabilidad» a la que operan los bonos. Así, la rentabilidad del bono representa el tipo de interés al que se comercializa. Para distintos vencimientos se tienen diferentes rentabilidades, lo que da lugar a la existencia de una «curva de rentabilidad», que indica la rentabilidad (tipo de interés) actual para cada vencimiento dado. Un inversor que desee invertir 1 € en bonos hoy puede, con la ayuda de la curva de rentabilidad, evaluar el valor futuro esperado de mercado. Por lo general, la rentabilidad aumenta para vencimientos más largos, de modo que los inversores se ven recompensados por el riesgo adicional que supone mantener un bono durante más tiempo.

Por tanto, la curva de rentabilidad es una herramienta para determinar el valor actual de flujos de caja futuros, así como para definir los tipos forward necesarios en la valoración de derivados de tipos de interés. El objetivo de una curva de rentabilidad es la de reproducir las cotizaciones de mercado de productos basados en tipos de interés mediante una curva unificada que, por consiguiente, represente la esperanza de los tipos futuros.

Conceptualmente, el problema es similar al de la volatilidad implícita, aunque en este caso, los factores de descuento se obtienen a partir de múltiples derivados de tipo de interés, en vez de obtener volatilidades a partir de precios de opciones. Se emplean un conjunto discreto de productos π para generar un conjunto discreto de nodos para la curva de rentabilidad Ω_{cr} . Típicamente, el conjunto π constará de productos en efectivo y, dependiendo del mercado, distintos productos de tipos de interés, mientras que Ω_{cr} contendrá los factores de descuento.

De este modo, una curva de rentabilidad se representa mediante un conjunto de nodos, de la forma

$$\Omega_{cr} = \{(t_1, p(t_1)), (t_2, p(t_2)), \dots, (t_n, p(t_n))\}, \quad (12.15)$$

donde el factor de descuento $p(t_i)$ se define como

$$p_i \equiv p(t_i) := P(t_0, t_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[1 \cdot e^{- \int_{t_0}^{t_i} r(z) dz} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Como los factores de descuento, a diferencia de los short-rate $r(t)$, son deterministas, se pueden expresar mediante un interés compuesto r_i , es decir, $p(t_i) = e^{-r_i(t_i-t_0)}$. En ocasiones, el Ω_{cr} en (12.15) se conoce como el conjunto de «puntos vertebría» de la curva de rentabilidad. Los puntos vertebría se determinan directamente a partir de los productos financieros utilizados para su calibración. Empleando un número finito de puntos vertebría p_i , se define una función continua $P(t_0, t)$ que, para cada tiempo $t = t_i$, toma el valor $P(t_0, t_i) = p_i$. Los valores entre los puntos vertebría se pueden calcular mediante algún esquema de interpolación.

Una buena curva de rentabilidad es muy importante, no solo para valorar derivados de tipo de interés, sino que también con fines de cobertura. Por ejemplo, una vez que se determina el precio de un producto de tipos de interés, las sensibilidades del mismo con respecto a los productos utilizados para construir la curva de rentabilidad se emplearán para la cobertura y la gestión de riesgo.

En Hagan y West (2008), se proporcionan los siguientes criterios para la construcción de la curva y su interpolación:

- La curva de rentabilidad debe ser capaz de reproducir el precio de los productos utilizados para construirla.
- Los tipos forward obtenidos a partir de la curva deben ser continuos.
- La interpolación debe ser lo más local posible, esto es, un pequeño cambio en un nodo de la curva no debería afectar a nodos que están «lejos» del este.
- La cobertura también debe ser local, es decir, si uno de los productos en la curva se cubre, entonces la cobertura no se debería basar en muchos otros productos.

Con estos criterios se puede evaluar la idoneidad de una configuración de curva de rentabilidad en función de los productos utilizados y de la interpolación. Cada producto de estilo vanilla incluido en la calibración es una función de los puntos vertebría. El producto i -ésimo se define como $V_i(t_0) := V_i(t_0, \Omega_{cr})$ y se asume que cotiza en mercado, siendo su cotización V_i^{mkt} .

Durante el procedimiento de calibración, se busca un conjunto de factores de descuento vertebría $\mathbf{p} := [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$, tal que

$$d_i := V_i(t_0, \mathbf{p}) - V_i^{mkt} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12.16)$$

donde d_i representa el defecto, es decir, el valor actual de un derivado menos su cotización de mercado.

Como hemos dicho, el problema es parecido al de encontrar las volatilidades implícitas, pero el procedimiento es un poco más complicado, ya que la curva de rentabilidad se basa en múltiples productos, con lo que el problema de calibración es, en este caso, multidimensional. Tomamos $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ y determinamos los puntos vertebrá optimos resolviendo $\mathbf{d} = 0$ mediante una iteración de Newton, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) &= \mathbf{d}(\mathbf{p}) + \frac{\partial\mathbf{d}(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\Delta\mathbf{p} + O(\Delta\mathbf{p}^2) \\ &=: \mathbf{d}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}(\mathbf{p})\Delta\mathbf{p} + O(\Delta\mathbf{p}^2),\end{aligned}\quad (12.17)$$

con la Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{p})$. En notación matricial, esto es equivalente a

$$\begin{bmatrix} d_1(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \\ d_2(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \\ \vdots \\ d_n(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(\mathbf{p}) \\ d_2(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ d_n(\mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial d_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial d_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial d_n}{\partial p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_n \end{bmatrix} + O(\Delta\mathbf{p}^2).$$

Ignorando los términos de orden alto, teniendo como objetivo el defecto cero, esto es, $\mathbf{d}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$, y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales para $\Delta\mathbf{p}$, tenemos que

$$\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{p})\mathbf{d}(\mathbf{p}).\quad (12.18)$$

Aproximamos la solución mediante la iteración de Newton

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{p}^{(k)})\mathbf{d}(\mathbf{p}^k),\quad (12.19)$$

para $k = 1, \dots$, siendo el superíndice k el número de iteración. A continuación se presentará un ejemplo sencillo.

Ejemplo 12.1.1 (Curva de rentabilidad sin interpolación)

Utilizando alguno de los productos de tipo de interés básicos que se han definido en los apartados anteriores de este capítulo, proponemos un ejemplo de la construcción de una curva de rentabilidad. Esta curva de rentabilidad estará basada en dos productos, un FRA y un swap. Obtendremos una curva de rentabilidad relativamente trivial, pero que ayudará a comprender el procedimiento. En la práctica, el número de productos utilizados para la construcción de la curva puede variar desde unos pocos hasta diez o más, dependiendo del mercado.

El valor actual de un contrato FRA viene dado por

$$V^{FRA}(t_0) = P(t_0, T_1) \left(\frac{\tau(\ell(t_0; T_2, T_3) - K_1)}{1 + \tau\ell(t_0; T_2, T_3)} \right),\quad (12.20)$$

con $\tau = T_3 - T_2$ y con T_1, T_2, T_3 las fechas de liquidación, fijación y vencimiento, respectivamente. Para simplificar, tomamos $t_0 = T_1 = T_2$ y $T_3 = 1$, obteniendo

$$V^{FRA}(t_0) = \frac{\ell(t_0; t_0, 1) - K_1}{1 + \ell(t_0; t_0, 1)}. \quad (12.21)$$

Entonces, el elemento d_1 de (12.16) viene dado por

$$d_1 = \frac{\ell(t_0; t_0, 1) - K_1}{1 + \ell(t_0; t_0, 1)} - V_1^{mkt} = 0. \quad (12.22)$$

Aplicando la definición del tipo Libor, es decir,

$$\ell(t_0; T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t_0, T_1) - P(t_0, T_2)}{P(t_0, T_2)} \right),$$

podemos expresar d_1 en función de los factores de descuento vertebral, como

$$d_1 = \frac{\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) - K_1}{1 + \left(\frac{1}{p_1} - 1\right)} - V_1^{mkt} = 0, \quad (12.23)$$

que, simplificando, es

$$d_1 = 1 - (1 + K_1)p_1 - V_1^{mkt} = 0. \quad (12.24)$$

El swap, con un conjunto de fechas de pago, T_i, \dots, T_m , tiene el valor actual

$$V^S(t_0) = P(t_0, T_i) - P(t_0, T_m) - K_2 \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k). \quad (12.25)$$

Si tomamos $T_i = 1$ y $T_m = 2$, tenemos el siguiente valor para d_2 , en función de los factores de descuento vertebral, p_1 y p_2 , dado por

$$d_2 = p_1 - p_2 - K_2 p_2 - V_2^{mkt} = 0. \quad (12.26)$$

Con los resultados anteriores, calibraremos los factores de descuento vertebral de la curva de rentabilidad, $\mathbf{p} = [p_1, p_2]^T$, como

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (1 + K_1)p_1 - V_1^{mkt} \\ p_1 - p_2(1 + K_2) - V_2^{mkt} \end{bmatrix}, \quad (12.27)$$

y

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial p_1} & \frac{\partial d_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial d_2}{\partial p_1} & \frac{\partial d_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 + K_1) & 0 \\ 1 & -(1 + K_2) \end{bmatrix}, \quad (12.28)$$

siendo la inversa de la Jacobiana

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{(1 + K_1)(1 + K_2)} \begin{bmatrix} -(1 + K_2) & 0 \\ -1 & -(1 + K_1) \end{bmatrix}. \quad (12.29)$$

Los factores de descuento vertebría óptimos, p_1 y p_2 , se pueden obtener mediante (12.19), a partir de las cotizaciones de mercado, V_1^{mkt} , V_2^{mkt} , y de los strikes K_1 y K_2 . Lo más habitual en los mercados financieros es que los strikes K_1 y K_2 se elijan de tal manera que $V_1^{mkt} = 0$ y $V_2^{mkt} = 0$ al inicio t_0 , es decir, la mayoría de los contratos comienzan con un valor igual a cero. ♦

12.2. Otros derivados de tipos de interés

En este apartado presentamos otros derivados de tipos de interés cuya definición contractual es, de algún modo, más compleja.

12.2.1. Caps y floors

Comenzamos con los productos de tipo de interés denominados *caps* y *floors*. Estos se construyen a partir de otros productos más sencillos.

Un cap de tipo de interés se define como un seguro para el titular de un préstamo sujeto a un tipo variable, protegiéndolo contra el posible crecimiento del mismo por encima de un nivel preestablecido, denominado «el tipo cap», K . El floor de tipo de interés proporciona un seguro que protege contra una bajada del tipo variable por debajo de un nivel preestablecido, denominado, en este caso, el tipo floor, K . Los caps y los floors se pueden descomponer en una suma de contratos básicos de tipos de interés, los denominados *caplets* y *floorlets*, que se definen a continuación.

Definición 12.2.1 (Caplet/Floorlet)

Dados dos instantes de tiempo futuros, $T_{i-1} < T_i$, con $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, el caplet/floorlet para T_{i-1} con tipo K_i y capital nominal N_i es un contrato que paga, en tiempo T_i , la cantidad

$$\begin{aligned} V_i^{CPL}(T_i) &= H_i^{CPL}(T_i) = \tau_i N_i \max(\ell_i(T_{i-1}) - K_i, 0), \\ V_i^{FL}(T_i) &= H_i^{FL}(T_i) = \tau_i N_i \max(K_i - \ell_i(T_{i-1}), 0), \end{aligned}$$

con $\ell_i(T_{i-1}) := \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$.

En tiempo T_{i-1} , ya se puede «observar» el tipo Libor $\ell_i(T_{i-1})$ determinado en el mercado monetario financiero, aunque el pago tendrá lugar en tiempo T_i . Un cap (floor) consiste en m caplets (floorlets) con el mismo strike K y el mismo capital nominal N . El valor del cap (floor) en tiempo t es la suma de los valores de los caplets (floorlets) que lo forman en tiempo t . Por tanto, los caplets y los floorlets son, básicamente, opciones europeas sobre tipos de interés, que se devengan desde el instante T_{i-1} a T_i . El hecho de que el contrato pague en tiempo T_i , mientras que el tipo se ajusta en tiempo T_{i-1} , es relevante. Esto implica que, en tiempo T_{i-1} , se conoce el tipo que se utilizará para el pago en tiempo T_i . Debemos modelar el tipo Libor $\ell_i(t)$ como una cantidad estocástica que, en terminología financiera, se «reinicia» en tiempo T_{i-1} .

El precio del caplet bajo la medida forward en T_i viene dado por

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL}}(t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_i \tau_i}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K_i, 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= N_i \tau_i P(t, T_i) \mathbb{E}^{T_i} [\max(\ell_i(T_{i-1}) - K_i, 0) \middle| \mathcal{F}(t)] \end{aligned} \quad (12.30)$$

El precio del floorlet bajo la medida forward en T_i viene dado por

$$\begin{aligned} V_i^{\text{FL}}(t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_i \tau_i}{M(T_i)} \max(K_i - \ell_i(T_{i-1}), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= N_i \tau_i P(t, T_i) \mathbb{E}^{T_i} [\max(K_i - \ell_i(T_{i-1}), 0) \middle| \mathcal{F}(t)] \end{aligned} \quad (12.31)$$

Nótese que, dependiendo del modelo de tipo de interés elegido, las esperanzas en (12.30) serán distintas, véase el Capítulo 14.

Valoración de caplets/floorlets bajo el modelo Hull-White

El tipo Libor se puede escribir en términos de precios de bonos, y estos se pueden modelar mediante los modelos short-rate estudiados en el capítulo anterior. A continuación, presentamos la fórmula de valoración para un caplet bajo el modelo Hull-White. La fórmula para el floorlet se obtiene de manera similar.

Detalles del modelo Hull-White

Empezamos recordando la dinámica de Hull-White y mostramos cómo obtener la función característica sin utilizar descomposición. El modelo de Hull y White (1990) de un factor viene dado por la dinámica (véase también (11.31)) dada por

$$dr(t) = \lambda (\theta(t) - r(t)) dt + \eta dW_r^{\mathbb{Q}}(t), \quad r(t_0) = r_0, \quad (12.32)$$

donde $\theta(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, es el término de deriva (utilizado para ajustar los precios del bono a la curva de rentabilidad), η determina el nivel de volatilidad y λ es el parámetro de reversión del tipo.

El proceso HW es un proceso afín, véase el Apartado 11.3.1, por lo que su función característica descontada viene dada por

$$\phi_{r_{\text{HW}}}(u; t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(z) dz + i u r(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = e^{\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)r(t)}, \quad (12.33)$$

para $\tau = T - t$ y condición inicial

$$\phi_{r_{\text{HW}}}(u; T, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_T^T r(z) dz + i u r(T)} \middle| \mathcal{F}(T) \right] = e^{i u r(T)},$$

lo que implica que $\bar{A}(u, 0) = 0$ y $\bar{B}(u, 0) = iu$. Resolvemos el sistema de EDOs para $\bar{A}(u, \tau)$ y $\bar{B}(u, \tau)$, dado por

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{A}}{d\tau} &= \lambda\theta(T - \tau)\bar{B} + \frac{1}{2}\eta^2\bar{B}^2, \\ \frac{d\bar{B}}{d\tau} &= -1 - \lambda\bar{B}.\end{aligned}$$

Para $\bar{B}(u, \tau)$, que no depende de $\bar{A}(u, \tau)$, tenemos que

$$\frac{d}{d\tau}(\mathrm{e}^{\lambda\tau}\bar{B}) = -\mathrm{e}^{\lambda\tau},$$

cuya solución es

$$\bar{B}(u, \tau) = \bar{B}(u, 0)\mathrm{e}^{-\lambda\tau} - \frac{1}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}).$$

Empleando $\bar{B}(u, 0) = iu$, obtenemos

$$\bar{B}(u, \tau) = iu\mathrm{e}^{-\lambda\tau} - \frac{1}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}). \quad (12.34)$$

Integrando la ecuación de $\bar{A}(u, \tau)$ resulta

$$\bar{A}(u, \tau) = \bar{A}(u, 0) + \lambda \int_0^\tau \theta(T - z)\bar{B}(u, z)dz + \frac{1}{2}\eta^2 \int_0^\tau \bar{B}^2(u, z)dz.$$

Insertando $\bar{A}(u, 0) = 0$ y la solución para $\bar{B}(u, \tau)$ de (12.34), obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}(u, \tau) &= \lambda \int_0^\tau \theta(T - z)\bar{B}(u, z)dz + \frac{1}{2}\eta^2 \int_0^\tau \bar{B}^2(u, z)dz \\ &= \lambda \int_0^\tau \theta(T - z)\bar{B}(u, z)dz + \frac{\eta^2}{4\lambda^3}(iu\lambda + 1) \\ &\times (\mathrm{e}^{-2\lambda T}(4\mathrm{e}^{\lambda T} - 1 - \lambda iu) + (iu\lambda - 3)) + \frac{\eta^2\tau}{2\lambda^2}.\end{aligned}$$

Bajo el modelo Hull-White, tomando $u = 0$ y $\bar{A}_r(\tau) \equiv \bar{A}(0, \tau)$, $\bar{B}_r(\tau) \equiv \bar{B}(0, \tau)$ en la función característica (12.33), obtenemos el precio del BCC, como

$$P(t, T) := \phi_{r_{HW}}(0; t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(z)dz} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \mathrm{e}^{\bar{A}_r(\tau) + \bar{B}_r(\tau)r(t)}, \quad (12.35)$$

con

$$\begin{aligned}\bar{B}_r(\tau) &= \frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} - 1), \\ \bar{A}_r(\tau) &= \lambda \int_0^\tau \theta(T - z)\bar{B}_r(z)dz + \frac{\eta^2}{4\lambda^3}[\mathrm{e}^{-2\lambda\tau}(4\mathrm{e}^{\lambda\tau} - 1) - 3] + \frac{\eta^2\tau}{2\lambda^2}.\end{aligned}$$

Valoración del caplet

El precio de un caplet, con strike K , viene dado por

$$\begin{aligned} V^{\text{CPL}}(t_0) &= N\tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N\tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Empleando la definición del tipo Libor de (12.1), la fórmula de valoración del caplet (escalado^a) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{V^{\text{CPL}}(t_0)}{P(t_0, T_i)} &= N\tau_i \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\frac{1}{\tau_i} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \cdot \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(e^{-\bar{A}_r(\tau_i)} - 1 - \tau_i K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \cdot e^{-\bar{A}_r(\tau_i)} \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(e^{-\bar{B}_r(\tau_i)r(T_{i-1})} - \hat{K}, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (12.37)$$

con $\hat{K} = (1 + \tau_i K) e^{\bar{A}_r(\tau_i)}$ y utilizando los resultados de (12.34). Por lo tanto, el valor de un caplet bajo el modelo Hull-White se puede obtener de manera similar al valor de una opción sobre un bono cupón cero $P(T_{i-1}, T_i)$, visto en el Apartado 11.4.2.

^aUtilizamos la fórmula escalada con el único propósito de simplificar la notación.

Ley de la esperanza total y valoración de caplets

Una forma elegante de obtener el precio de un caplet es utilizando la ley de la esperanza total. El precio de un caplet con strike K se puede escribir como

$$\begin{aligned} V^{\text{CPL}}(t_0) &= N\tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(T_{i-1}) \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N\tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i-1})} \right. \\ &\quad \times \left. \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(T_{i-1})}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(T_{i-1}) \right] \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Realizando un cambio de medida, la esperanza interior se puede expresar como

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(T_{i-1})}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(T_{i-1}) \right] \\ &= P(T_{i-1}, T_i) \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, el valor del caplet resulta en

$$V^{\text{CPL}}(t_0) = N\tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i-1})} P(T_{i-1}, T_i) \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Considerando el valor del caplet (escalado), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{V^{\text{CPL}}(t_0)}{P(t_0, T_{i-1})} &= N\tau_i \\ &\times \mathbb{E}^{T_{i-1}} \left[P(T_{i-1}, T_i) \max \left(\frac{1}{\tau_i} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \hat{N} \mathbb{E}^{T_{i-1}} \left[\max \left(\frac{1}{\hat{K}} - P(T_{i-1}, T_i) \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

con $\hat{N} = N(1 + \tau_i K)$ y $\hat{K} = 1 + \tau_i K$. Nótese que, la última ecuación es el valor de una opción put sobre un BCC con fecha de emisión T_{i-1} , vencimiento T_i y strike \hat{K}^{-1} .

Ejemplo 12.2.1 (Volatilidad implícita del caplet)

En la Figura 12.4, se muestra el impacto de los parámetros del modelo Hull-White, λ y η , sobre la volatilidad implícita del caplet. El parámetro de reversión a la media λ parece tener un efecto mucho menor sobre las volatilidades implícitas que el parámetro η . Por tanto, en la práctica, λ se suele fijar mientras que η se determina en un procedimiento de calibración.

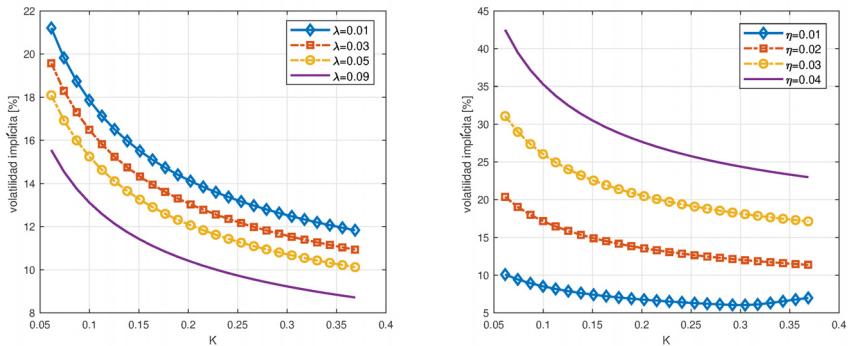


Figura 12.4: Influencia de los parámetros del modelo Hull-White sobre las volatilidades implícitas del caplet. Izquierda: impacto de λ . Derecha: impacto de η .



12.2.2. Swaptions europeos

Continuamos nuestro repaso por los productos de tipo de interés con el *swaption*. Los swaptions son opciones sobre el swap de tipos de interés. El

titular de un swaption europeo tiene el derecho, pero no la obligación, de entrar en un contrato de swap en una fecha futura y con un strike K preestablecido. Como en el caso de los swaps, los swaptions disponen de las versiones pagador y receptor, dependiendo de si se paga el tipo fijo y se recibe el variable (swaption pagador) o viceversa (swaption receptor). El strike del swaption determina el tipo fijo del swap subyacente. El tipo fijo que hace que el swap (que comienza en el futuro) esté «a la par» se denomina tipo swap forward, y los swaptions comercializados con este tipo se consideran at-the-money (ATM). Nótese que los swaptions de estilo europeo son contratos OTC y, por tanto, sus términos pueden variar para adaptarse a las necesidades específicas del inversor. Los swaptions más comercializadas son los basados en el swap con tipo fijo «a la par».

En su versión estándar, el vencimiento de un swaption coincide con la primera fecha de reinicio del swap de tipos de interés subyacente, es decir, $T_0 = T_i$. Siendo t_0 la fecha de hoy, la primera fecha de reinicio, T_i , es alguna fecha futura en la que el titular de la swaption tiene la opción de entrar en un swap. Entonces, el valor del swaption en tiempo T_i viene dado por

$$\begin{aligned} V^{\text{Swpt}}(T_i) &= H^{\text{Swpt}}(T_i) = \max(V^S(T_i), 0) \\ &= N \max \left(\sum_{k=i+1}^m \tau_k P(T_i, T_k) (\ell(T_i; T_{k-1}, T_k) - K), 0 \right), \end{aligned}$$

y su valor descontado a día de hoy es igual a

$$\begin{aligned} V^{\text{Swpt}}(t_0) &= N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T_i)} \right. \\ &\quad \times \left. \max \left(\sum_{k=i+1}^m \tau_k P(T_i, T_k) (\ell(T_i; T_{k-1}, T_k) - K), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Empleando la representación de (12.14), el valor del swaption también es igual a

$$\begin{aligned} V^{\text{Swpt}}(t_0) &= N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T_i)} \max(A_{i,m}(T_i)(S_{i,m}(T_i) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{A_{i,m}(T_i) M(t_0)}{M(T_i)} \max(S_{i,m}(T_i) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (12.39)$$

con $M(t_0) = 1$, $t_0 < T_i < T_{i+1}$, y T_{i+1} la primera fecha de pago.

Como ya hemos visto, la anualidad $A_{i,m}(T_i)$ es una combinación de BCCs negociables, por lo que puede ser considerada como un numerario. La correspondiente derivada de Radon-Nikodym para el cambio de medida, de la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} a la nueva medida de la anualidad (también conocida como la medida del swap) $\mathbb{Q}^{i,m}$, asociada con la anualidad $A_{i,m}(t)$, viene dada por

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^{i,m}(T_i) = \frac{d\mathbb{Q}^{i,m}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(T_i)} = \frac{A_{i,m}(T_i)}{A_{i,m}(t_0)} \frac{M(t_0)}{M(T_i)}.$$

Entonces, el valor de un swaption viene dado por

$$\begin{aligned} V^{\text{Swpt}}(t_0) &= N \mathbb{E}^{i,m} \left[\frac{A_{i,m}(T_i) M(t_0)}{M(T_i)} \frac{A_{i,m}(t_0)}{A_{i,m}(T_i)} \frac{M(T_i)}{M(t_0)} \right. \\ &\quad \times \left. \max(S_{i,m}(T_i) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N A_{i,m}(t_0) \mathbb{E}^{i,m} \left[\max(S_{i,m}(T_i) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Para evitar el arbitraje, el tipo swap $S_{i,m}(T_i)$, definido como

$$S_{i,m}(t) = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_m)}{A_{i,m}(t)},$$

tiene que ser una martingala bajo la medida del swap asociada con la anualidad $A_{i,m}(t)$. Esto implica que la dinámica del tipo swap $S_{i,m}(t)$ bajo la medida del swap $\mathbb{Q}^{i,m}$ no debe tener términos de derivadas.

Swaptions bajo el modelo Hull-White

En este apartado, como ejemplo ilustrativo, valoramos swaptions europeos bajo el modelo Hull-White. En este caso, la valoración del swaption se puede llevar a cabo de forma semianalítica. La expresión (12.38), después del cambio de medida, de la medida \mathbb{Q} a la medida forward en T_i , \mathbb{Q}^{T_i} , resulta en

$$\begin{aligned} V^{\text{Swpt}}(t_0) &= NP(t_0, T_i) \\ &\quad \times \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\sum_{k=i+1}^m \tau_k P(T_i, T_k) (\ell(T_i; T_{k-1}, T_k) - K), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando (12.11), encontramos la relación

$$\begin{aligned} \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(T_i, T_k) (\ell_k(T_i) - K) &= 1 - P(T_i, T_m) - K \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(T_i, T_k) \\ &= 1 - \sum_{k=i+1}^m c_k P(T_i, T_k), \end{aligned} \tag{12.40}$$

con $c_k = K\tau_k$ para $k = i+1, \dots, m-1$ y $c_m = 1 + K\tau_m$.

Así, obtenemos la expresión para el precio del swaption, dada por

$$V^{\text{Swpt}}(t_0) = N \cdot P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(1 - \sum_{k=i+1}^m c_k P(T_i, T_k), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Sabiendo que el BCC $P(T_i, T_k)$ para procesos short-rate afines $r(t)$ se puede expresar como

$$P(T_i, T_k) = \exp(\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r(T_i)),$$

con $\bar{\tau}_k := T_k - T_i$, la ecuación de valoración (escalada) es

$$\frac{V^{\text{Swpt}}(t_0)}{P(t_0, T_i)} = N \cdot \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(1 - \sum_{k=i+1}^m c_k e^{\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r(T_i)}, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (12.41)$$

Para el «máximo de la suma» de la expresión anterior se propone una expresión del tipo «suma de máximo», véase Jamshidian (1989), que presentamos en el siguiente resultado.

Resultado 12.2.1 (Máximo de una suma) *Deseamos evaluar*

$$A = \max \left(K - \sum_k \psi_k(r), 0 \right), \quad (12.42)$$

donde $\psi_k(r)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, es una secuencia monótonamente creciente o decreciente de funciones. En Jamshidian (1989), se propone la transformación del cálculo del máximo de una suma en una expresión para la suma de ciertos máximos. Como cada $\psi_k(r)$ es monótonamente creciente, $\sum_k \psi_k(r)$ también es monótonamente creciente. Esto implica que existe un valor $r = r^*$, tal que

$$K - \sum_k \psi_k(r^*) = 0, \quad (12.43)$$

donde r^* se puede determinar mediante algún algoritmo de búsqueda de raíces, como la iteración de Newton-Raphson propuesta en el Apartado 4.1.1. Empleando (12.43), la expresión en (12.42) se puede escribir como

$$\bar{M} = \max \left(\sum_{k=1}^m \psi_k(r^*) - \sum_k \psi_k(r), 0 \right) = \max \left(\sum_k (\psi_k(r^*) - \psi_k(r)), 0 \right).$$

Entonces, la expresión para el valor de \bar{M} viene dada por

$$\bar{M} = \max \left(\sum_k (\psi_k(r^*) - \psi_k(r)), 0 \right) = \sum_k (\psi_k(r^*) - \psi_k(r)) \mathbb{1}_{r > r^*},$$

que puede expresarse como

$$\bar{M} = \sum_k \max (\psi_k(r^*) - \psi_k(r), 0),$$

con lo que concluimos el resultado.

Con la ayuda del Resultado 12.2.1, la expresión en (12.41) se puede reescribir como

$$\frac{V^{\text{Swpt}}(t_0)}{P(t_0, T_i)} = N \cdot \sum_{k=i+1}^m c_k \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\hat{K}_k - e^{\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r(T_i)}, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

con $\hat{K}_k := \exp(\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r^*)$, donde el parámetro r^* se toma tal que

$$\sum_{k=i+1}^m c_k \exp(\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r^*) = 1.$$

La fórmula de valoración para el swaption aún no está completa, ya que falta por determinar la suma de las esperanzas de la ecuación anterior. Nótese que cada elemento de esta suma representa un opción put europea sobre un bono cupón cero, esto es

$$V_p^{\text{ZCB}}(t_0, T_i) = P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\hat{K}_k - e^{\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r(T_i)}, 0 \right) \right],$$

con $\bar{\tau}_k = T_k - T_i$ y strike \hat{K}_k . Utilizando la valoración de opciones de estilo europeo sobre BCC bajo el modelo Hull-White, obtenemos una solución en forma cerrada.

La fórmula de valoración para un swaption europeo es

$$V^{\text{Swpt}}(t_0) = N \cdot \sum_{k=i+1}^m c_k V_p^{\text{ZCB}}(t_0, T_i, T_k, \hat{K}_k), \quad (12.44)$$

con fecha de emisión T_i , vencimiento T_k y strike $\hat{K}_k := \exp(\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r^*)$. El valor de r^* se determina resolviendo la ecuación

$$1 - \sum_{k=i+1}^m c_k \exp(\bar{A}_r(\bar{\tau}_k) + \bar{B}_r(\bar{\tau}_k)r^*) = 0, \quad (12.45)$$

donde $c_k = K\tau_k$ para $k = i+1, \dots, m-1$ y $c_m = 1 + K\tau_m$.

12.3. Credit Valuation Adjustment y gestión de riesgo

Hasta ahora, en el libro, hemos valorado distintos derivados financieros asumiendo (implícitamente) que la contrapartida del derivado cumple con sus obligaciones de pago.

Supongamos, por ejemplo, que tenemos un swap de tipos de interés como en el Apartado 12.1.4 entre dos contrapartes A y B , y cuyo valor es $V^S(t_0)$. El contrato es, básicamente, un intercambio de pagos a tipo fijo y tipo variable, sobre un nominal N . Imaginemos una situación en la que los tipos de interés tuvieran movimientos bruscos, de modo que la parte A tendría unas obligaciones financieras importantes con su contrapartida B . Dependiendo de la situación financiera, puede ocurrir que la parte A tenga dificultades para cumplir con sus obligaciones de pago. Como consecuencia, la contraparte B puede sufrir una pérdida significativa debido al incumplimiento de la parte A . Si la contraparte quiebra, la pérdida será el coste de reposición del contrato (es decir, el valor actual de mercado).

Riesgo de contraparte

En la jerga financiera, la situación descrita anteriormente se define como «riesgo de contraparte», también conocida por sus siglas en inglés, CCR³.

Definición 12.3.1 (Riesgo de contraparte (CCR))

El riesgo de contraparte (CCR) está relacionado con la situación en la que una contraparte quiebra (hace default) antes del vencimiento de un contrato y, por tanto, no puede hacer frente a todos los pagos estipulados en dicho contrato financiero. ▶

En el año 2007 tuvo lugar una crisis financiera originada en los mercados inmobiliario y de crédito de Estados Unidos, y que se extendió a todo el mundo, desde los mercados financieros hasta la economía real. Instituciones financieras muy reputadas quebraron o fueron rescatadas, incluyendo el banco de inversión Lehman Brothers, fundado en 1850. En los peores momentos de esa crisis, la quiebra de grandes instituciones financieras desencadenó la propagación generalizada del denominado «riesgo de default» en toda la red financiera. Debido a esto, se inició una revisión exhaustiva de los estándares y las metodologías para la valoración de derivados financieros. A raíz de esa crisis, las políticas, las normas y la regulación en el mundo financiero cambiaron de manera drástica. Una de las áreas más importantes del riesgo financiero, que requirió una atención especial, fue la relativa al riesgo de contraparte (CCR). Este se define como el riesgo de que una de las partes de un contrato financiero no sea capaz de cumplir con las obligaciones de pago acordadas en el mismo (hacer default).

Desde entonces, la probabilidad de default de la contrapartida de un contrato financiero se ha incorporado a los precios de los derivados financieros, por lo que ahora desempeña un papel destacado en el contexto de valoración. Así, para tener en cuenta la probabilidad de default, se cobra una prima adicional a las contrapartes, que se añade al precio justo del derivado. De esta manera se compensa el riesgo de que la contraparte no cumpla con sus obligaciones de pago con la otra parte del contrato. A raíz de la crisis financiera, la cantidad total de operaciones de derivados financieros complejos y, por lo tanto, con riesgo alto, se ha reducido significativamente. La falta de confianza en el sistema financiero ha dado lugar a una drástica reducción de la complejidad, debido a que el riesgo de los productos financieros básicos es más fácil de estimar.

Como consecuencia del CCR y su efecto sobre el valor de un derivado financiero, se puede considerar que un contrato de derivado con una contraparte vulnerable tiene menos valor que un contrato con una contrapartida libre de riesgo; cuanto menor sea la solvencia de una contrapartida, menor será el valor de mercado del contrato del derivado.

Desde la perspectiva de la valoración de derivados, se pone de manifiesto que valorar un derivado bajo la medida de riesgo neutro no es suficiente, al menos para tener en cuenta el riesgo relacionado con la posible quiebra de la

³ Counterparty Credit Risk.

contraparte. Habitualmente, la probabilidad de default de una contrapartida se puede evaluar de una manera «implícita», esto es, extrayendo la información relevante de las cotizaciones de mercado de derivados de crédito, como los denominados swap de incumplimiento crediticio o, en inglés, *Credit Default Swaps* (CDS), que son indicativos de la solvencia crediticia de una empresa o un país, o se puede inferir a partir de calificaciones y percepciones sobre la calidad crediticia de las empresas y países, proporcionadas por, por ejemplo, las agencias de calificación o *rating*.

La valoración de un derivado bajo CCR está relacionada con la exposición futura a una contraparte, ya que esta exposición futura es un indicador de la magnitud de las pérdidas en caso de quiebra de la contrapartida.

Matemáticamente, la exposición (positiva), $E(t)$, se define como

$$E(t) := \max(V(t), 0), \quad V(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(T)} H(T, \cdot) \middle| \mathcal{F}(t) \right], \quad (12.46)$$

donde $V(t)$ representa el valor del un contrato de derivado en tiempo t y T es el vencimiento del contrato.

Ejemplo 12.3.1 (Simulación de la exposición)

Como ejemplo, consideramos un swap de tipos de interés sobre un nominal N , cuyo precio se ha definido en (12.9), esto es

$$V^S(t) = N \cdot \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t, T_k) (\ell(t; T_{k-1}, T_k) - K), \quad (12.47)$$

con $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ y T_{i+1}, \dots, T_m son las fechas de pago.

Como ya se ha dicho, el valor actual del swap (en tiempo t_0) está completamente determinado por los bonos cupón cero $P(t_0, T_k)$, para $k = i, i+1, \dots, m$. Estos bonos están disponibles en el mercado monetario, por lo que, en principio, no necesitamos un modelo estocástico de tipos de interés para la valoración del swap. Sin embargo, si queremos calcular el valor «en cualquier tiempo futuro», $t > t_0$, para evaluar la exposición, necesitamos seleccionar un modelo estocástico que modele la incertidumbre relacionada con los valores futuros del swap.

Uno de los modelos más utilizados para la simulación de la exposición es el modelo Hull-White de (12.32), con el parámetro de estructura temporal $\theta(t)$, y los BCCs $P(t, T)$ como en (12.35). Para estimar la exposición $E(t)$ en (12.46) para cualquier tiempo t hasta la última fecha de pago del swap T_m , simulamos el proceso de Hull-White (12.32) mediante el método de Monte Carlo, y obtenemos trayectorias para $r(t)$. Con las trayectorias ya simuladas, se puede valorar cualquier BCC $P(t, T_k)$, definido en (12.35).

En la Figura 12.5 se muestran simulaciones típicas para el valor del swap y el perfil de exposición. $V^S(t_0)$ es igual a 0 a tiempo inicial t_0 . Además, a medida que t se aproxima a T , siendo este el instante del último pago, el valor del swap converge a 0 (ya que después del último pago no existe exposición). ♦

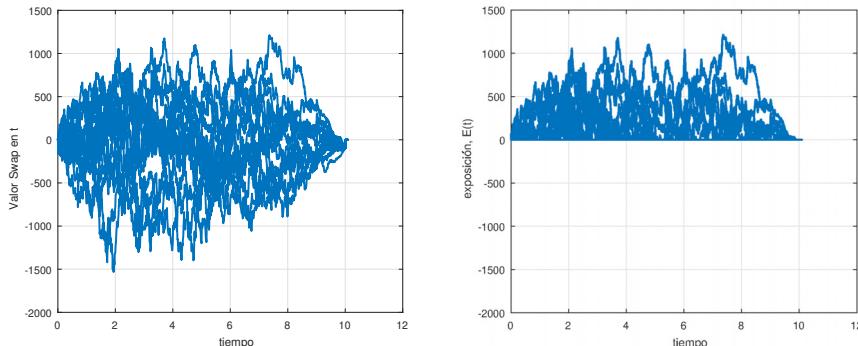


Figura 12.5: Ejemplo de exposición. Izquierda: trayectorias de Monte Carlo para un swap $V^S(t)$. Derecha: trayectorias de exposición, $E(t)$.



Dados los perfiles de exposición $E(t)$, deseamos calcular la exposición esperada (positiva), definida como

$$\text{EE}(t_0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(t)} E(t) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (12.48)$$

donde $E(T)$ es la exposición positiva en (12.46) y $M(T)$ es la cuenta de ahorros; $dM(t) = r(t)M(t)dt$, con $r(t)$ siguiendo un proceso Hull-White. El concepto de exposición esperada es particularmente importante para el cálculo del denominado *Credit Value Adjustment (CVA)*, un ajuste del valor por riesgo de crédito que también será tratado en este capítulo.

Exposición potencial futura (EPF)

Otra magnitud que contribuye a la evaluación del CCR, especialmente en el contexto de la gestión de riesgo, es la Exposición Potencial Futura (EPF). La EPF es la máxima exposición crediticia calculada con cierto nivel de confianza. En gestión de riesgo, la EPF suele considerarse como el «peor escenario de exposición», y sirve para establecer límites en las operaciones bursátiles.

La EPF, en tiempo t , es decir, $\text{EPF}(t_0, t)$, se define como un cuantil de la exposición $E(t)$, esto es

$$\text{EPF}(t_0, t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : p \leq F_{E(t)}(x)\}, \quad (12.49)$$

donde p es el nivel de confianza y $F_{E(t)}(x)$ es la FDA de la exposición en tiempo t .

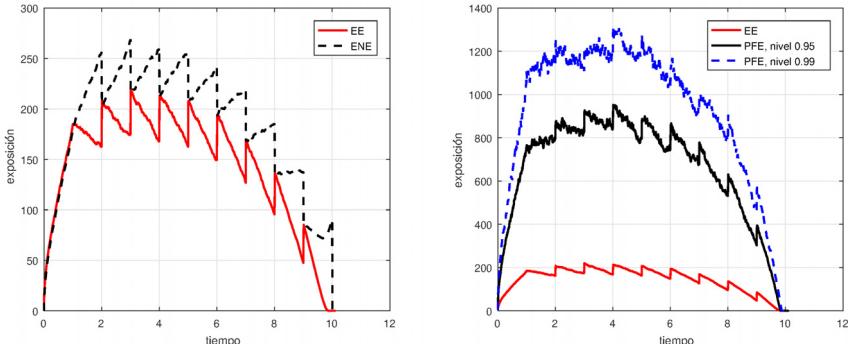


Figura 12.6: Exposición. Izquierda: exposición esperada (positiva), EE, y la exposición negativa esperada, ENE, definida como $ENE(t) = \max(-V(t), 0)$. Derecha: EE y dos curvas de EPF con niveles de confianza del 0.95 y 0.99, respectivamente.



Antes de su aparición en los acuerdos de Basilea, en Basilea II (véase Bank for International Settlements (2004)), los conceptos de EE y EPF ya se conocían y se utilizaban habitualmente como una métrica representativa de la exposición crediticia, Gregory (2010). Por tanto, la EE representa el «promedio» de pérdidas futuras esperadas, mientras que la EPF puede indicar la *peor* exposición dado un cierto nivel de confianza. Estas dos cantidades estiman las pérdidas tanto desde la perspectiva de valoración como de gestión de riesgo (véase Gregory (2010)), respectivamente. No hay consenso sobre si la EPF se debe calcular bajo la medida del mundo real o bajo la medida de riesgo neutro. En Kenyon *et al.* (2015), se argumenta que la EPF se debería calcular a partir de simulaciones bajo la medida del mundo real, reflejando así los movimientos futuros de mercado de una manera realista, desde la perspectiva de la gestión de riesgo.

En la Figura 12.6, se representan las curvas de $EE(t_0, t)$ y $EPF(t_0, t)$ en función del tiempo, para el ejemplo da la Figura 12.5. El patrón escarpado que se observa en las curvas se debe a que, cada vez que se produce un pago, tanto el valor como la exposición sufren una caída repentina en magnitud.

Tipos de exposición

En el Ejemplo 12.3.1, consideramos simplemente un derivado financiero, esto es, el swap de tipos de interés. Sin embargo, en la práctica, las carteras de derivados son mucho más grandes, pudiendo llegar a tener millones de productos. Su correspondiente exposición se puede clasificar en tres categorías principales:

1. Exposición a nivel de contrato, que es la exposición para un contrato individual, como en el ejemplo anterior. Para un derivado con valor $V_1(t)$, la exposición a nivel de contrato viene dada por

$$E(t) = \max(V_1(t), 0).$$

2. Exposición a nivel de contrapartida, donde la exposición se basa en todos los contratos de derivados que se tienen con una contrapartida específica. En el caso de tener dos derivados con una contrapartida, con valores $V_1(t)$ y $V_2(t)$, respectivamente, la exposición a nivel de contrapartida, $E_c(t)$, viene dada por

$$E_c(t) = \max(V_1(t), 0) + \max(V_2(t), 0) =: E_1(t) + E_2(t).$$

3. Exposición neta, en la que se compensan los valores de múltiples operaciones entre dos o más contrapartidas. Para dos contratos con valores $V_1(t)$ y $V_2(t)$, la exposición neta, $E_n(t)$, se define como

$$E_n(t) = \max(V_1(t) + V_2(t), 0).$$

Como $\max(x + y, 0) \leq \max(x, 0) + \max(y, 0)$, la exposición neta suele ser más baja que la exposición a nivel de contrapartida. Desde la perspectiva de la exposición, el concepto de neteo resulta conveniente para reducir el riesgo con una contrapartida. Sin embargo, no todas las operaciones se pueden netear, debido a que el neteo solo es aplicable a las denominadas «operaciones homogéneas» (especificadas en el contrato marco de la ISDA, la Asociación Internacional de Swaps y Derivados⁴, véase <https://www.isda.org/>).

Ejemplo 12.3.2 (Forma cerrada para el perfil de exposición)

Consideramos un contrato que, en tiempo T , paga el valor de la acción $S(T)$. El valor actual del contrato es

$$V(t_0) = M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = S(t_0), \quad (12.50)$$

debido a que el proceso del activo descontado es una martingala bajo la medida de riesgo neutro \mathbb{Q} . Empleando la definición, la exposición esperada en tiempo t viene dada por

$$\text{EE}(t_0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(t)} \max(V(t), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (12.51)$$

⁴International Swaps and Derivatives Association, en inglés.

Insertando (12.50) en (12.51), obtenemos

$$\begin{aligned}\text{EE}(t_0, t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(t)} \max \left(M(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right], 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(t)} \max(S(t), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = S(t_0).\end{aligned}\quad (12.52)$$

Por tanto, la exposición de un payoff que se define como el valor de la acción $S(T)$ en un tiempo futuro T , es equivalente a una opción call sobre la acción con strike cero, $K = 0$, lo que, de hecho, es equivalente a $S(t_0)$.



Ejemplo 12.3.3 (Perfil de exposición de un swap)

El perfil de exposición de un swap de tipos de interés se puede determinar en forma cerrada. Siguiendo los resultados del Apartado 12.1.4, el valor actual de un swap de tipos de interés viene dado por (12.47). Entonces, la exposición esperada en tiempo t viene dada por

$$\begin{aligned}\text{EE}(t_0, t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(t)} \max(V^S(t), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(t)} \max \left(N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t, T_k) (\ell(t; T_{k-1}, T_k) - K), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],\end{aligned}$$

para $t \geq T_i$.

Nótese que la exposición esperada $\text{EE}(t_0, t)$ es equivalente al valor de un swaption $V^{\text{Swpt}}(t)$ con strike K , tal y como se definió en el Apartado 12.2.2, esto es

$$\text{EE}(t_0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(t)} V^{\text{Swpt}}(t, K) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

ya que $M(t_0) = 1$.



12.3.1. Credit Value Adjustment unilateral

Presentamos la manera más habitual de incorporar un ajuste a la valoración riesgo neutro, lo que se conoce como ajuste del valor por riesgo de crédito o, en inglés, *Credit Value Adjustment* (CVA). Consideraremos transacciones desde el punto de vista de un inversor solvente, esto es, una empresa libre de quiebra. Denotamos por $\bar{V}^D(t, T)$ el payoff descontado a tiempo t (con tiempo final T),

que está sujeto al riesgo de default de la contrapartida, y por $\bar{V}(t, T)$ ⁵ la misma cantidad, pero donde no se considera riesgo de contrapartida (es decir, es un contrato libre de riesgo).

Entonces, denotamos por $\bar{V}^D(t, T)$ la suma de los flujos de caja futuros descontados, $C(T_i)$, que ocurren en los instantes T_i , entre los tiempos t y T , y que se descuentan a tiempo t , es decir,

$$\bar{V}^D(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{M(t)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (12.53)$$

Nótese que, con la definición anterior y para cualquier tiempo $s < T$, se verifica la relación

$$\begin{aligned} \bar{V}^D(t, T) &= \bar{V}^D(t, s) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(s)} \bar{V}^D(s, T) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \bar{V}^D(t, s) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(s)} \sum_{i=j+1}^N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(s)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(s) \right] \middle| \mathcal{F}(t) \right], \end{aligned} \quad (12.54)$$

donde j indica el índice para el cual $T_j = s$. Aplicando la ley de la esperanza total, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{V}^D(t, T) &= \bar{V}^D(t, s) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(s)} \sum_{i=j+1}^N \frac{M(s)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^j \frac{M(t)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=j+1}^N \frac{M(t)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(T_i)} C(T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right], \end{aligned} \quad (12.55)$$

lo que confirma la definición de (12.53).

Existen distintos escenarios con respecto al tiempo de default t_D de la contrapartida:

1. Si el default de una contrapartida ocurre «después» del último pago del derivado, es decir, $t_D > T$, el valor del contrato a tiempo t es simplemente $\mathbf{1}_{t_D > T} \bar{V}(t, T)$.
2. Si el default ocurre antes del tiempo de vencimiento, es decir, $t_D < T$, entonces:
 - a) Recibiremos/pagaremos todos los pagos hasta el instante de default, $\mathbf{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t, t_D)$.

⁵Utilizamos una notación diferente para estos valores de opción, con la barra y dos argumentos temporales, necesaria para tener en cuenta el instante de default t_D .

- b) Dependiendo de la contrapartida, podremos recuperar alguno de los pagos futuros y, asumiendo una fracción de recuperación R_c , su valor será igual a $\mathbb{1}_{t_D \leq T} R_c \max(\bar{V}(t_D, T), 0)$.
- c) Por otro lado, si le debemos dinero a la contrapartida quebrada, no podemos eludir las obligaciones y tenemos pagarlos completamente, esto es, $\mathbb{1}_{t_D \leq T} \min(\bar{V}(t_D, T), 0)$.

Considerando las situaciones descritas y su correspondiente valoración de los derivados, el precio de un derivado «con riesgo» $\bar{V}^D(t, T)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\bar{V}^D(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbb{1}_{t_D > T} \bar{V}(t, T) + \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t, t_D)] \\ &+ \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbb{1}_{t_D \leq T} R_c \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \\ &+ \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbb{1}_{t_D \leq T} \min(\bar{V}(t_D, T), 0) \Big| \mathcal{F}(t).\end{aligned}$$

Como $x = \max(x, 0) + \min(x, 0)$, tenemos la versión simplificada dada por

$$\begin{aligned}\bar{V}^D(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{t_D > T} \bar{V}(t, T) + \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t, t_D) + \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t_D, T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbb{1}_{t_D \leq T} (R_c - 1) \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \Big| \mathcal{F}(t) \right].\end{aligned}$$

Los tres primeros términos en el expresión del lado derecho de la ecuación anterior resultan en

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{t_D > T} \bar{V}(t, T) + \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t, t_D) + \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t_D, T) \Big| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbb{1}_{t_D > T} \bar{V}(t, T) + \mathbb{1}_{t_D \leq T} \bar{V}(t, T) \Big| \mathcal{F}(t)] \\ &= \bar{V}(t, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbb{1}_{t_D > T} + \mathbb{1}_{t_D \leq T} \Big| \mathcal{F}(t)] \\ &= \bar{V}(t, T).\end{aligned}$$

Así, hemos utilizado de nuevo el hecho de que $\bar{V}(t, T)$ representa la suma de los pagos descontados que tienen lugar entre t y T . Entonces, podemos utilizar que

$$\mathbb{E}[\bar{V}(t, s) + \frac{M(t)}{M(s)} \bar{V}(s, T)] = \mathbb{E}[\bar{V}(t, T)],$$

donde hemos sumado dos sumatorios.

Asumiendo una tasa de recuperación R_c , el valor del activo con riesgo $\bar{V}^D(t, T)$ viene dado por

$$\begin{aligned}
 \bar{V}^D(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\bar{V}(t, T) + \frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} (R_c - 1) \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
 &= \bar{V}(t, T) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} (R_c - 1) \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
 &= \bar{V}(t, T) - (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
 &=: \bar{V}(t, T) - \text{CVA}(t, T),
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\text{CVA}(t, T) = (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right].$$

En general, para el valor de la opción, tenemos que

$$\boxed{\text{derivado con riesgo} = \text{derivado libre de riesgo} - \text{CVA}.}$$

De este modo, el CVA puede ser interpretado como el precio del riesgo de contrapartida, es decir, la pérdida esperada debido a un default futuro de la contrapartida. Siendo R_c la tasa de recuperación, la cantidad $(1 - R_c)$ se llama tasa de severidad (o simplemente severidad), también conocida, por su denominación y siglas en inglés, como *loss-given-default* (LGD).

12.3.2. Aproximaciones en el cálculo del CVA

Para el cálculo del CVA, se necesita la distribución conjunta del instante de default t_D y la exposición en tiempo t . Empleando la ley de la esperanza total, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{CVA}(t, T) &= (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
 &= (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \mathbf{1}_{t_D \leq T} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t_D) \right] \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\
 &= (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{t_D \leq T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t_D) \right] \middle| \mathcal{F}(t) \right].
 \end{aligned}$$

Bajo la suposición de independencia entre el instante de default t_D y la exposición, se puede obtener la aproximación

$$\begin{aligned} \text{CVA}(t, T) &= (1 - R_c) \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| t_D = z \right] f_{t_D}(z) dz \\ &= (1 - R_c) \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(t_D)} \max(\bar{V}(t_D, T), 0) \middle| t_D = z \right] dF_{t_D}(z) \\ &\approx (1 - R_c) \sum_{k=1}^m \text{EE}(t, T_k) \bar{q}(T_{k-1}, T_k), \end{aligned} \quad (12.56)$$

con la exposición positiva esperada

$$\text{EE}(t, T_k) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(T_k)} \max(\bar{V}(T_k, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

y la probabilidad de default, en el intervalo (T_{k-1}, T_k) , dada por

$$\bar{q}(T_{k-1}, T_k) := F_{t_D}(T_k) - F_{t_D}(T_{k-1}) = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{T_{k-1} < t_D \leq T_k}]. \quad (12.57)$$

Como resultado de lo anterior, el «cargo» por CVA se puede aproximar por

$$\text{CVA} \approx \underbrace{\text{LGD}}_{\text{loss given default}} \times \underbrace{\text{PD}}_{\text{probabilidad de default}} \times \underbrace{\text{EE}}_{\text{exposición positiva esperada}}.$$

En los resultados anteriores se asume la independencia entre los factores de riesgo de las contrapartidas, que están modelados por $\mathbf{1}_{t_D \leq T}$ y el riesgo asociado con la exposición subyacente, que está gobernada por $\bar{V}(t_D, T)$. Esta suposición de independencia puede causar, bajo determinadas circunstancias, una «subestimación» del riesgo, que podría resultar en un pérdida potencialmente significativa. Este fenómeno, que además no se suele modelar, se conoce como *Wrong Way Risk* (WWR), en contraposición al denominado *Right Way Risk*. El WWR se define como el riesgo que se asume cuando la exposición a una contrapartida está inversamente correlada con la calidad crediticia de la contrapartida. Un ejemplo de WWR aparece cuando las fluctuaciones en el tipo de interés producen cambios en el valor de ciertos derivados y, al mismo tiempo, también impactan en la solvencia de la contrapartida. En esta situación, la contrapartida se ve afectada doblemente por este fenómeno específico.

Supongamos que un banco entra en un contrato swap con una compañía petrolera en el que el banco paga una cantidad fija y recibe una cantidad variable, donde la cantidad variable está vinculada al precio del petróleo. En este ejemplo, cuando el precio del petróleo sube el banco esperaría recibir dinero del productor de petróleo. Por otra parte, la calidad crediticia del productor puede que se deteriore, ya que los costes pueden aumentar debido al movimiento de los precios. En circunstancias normales, el productor de petróleo buscaría protección contra el aumento de los precios del petróleo entrando en un contrato derivado sobre el petróleo, en lugar de pagar una cantidad que está vinculada al precio del petróleo.

12.3.3. Credit Value Adjustment Bilateral (BCVA)

En el caso del CVA unilateral, abordado en el apartado anterior, hemos visto una generalización del concepto de valoración derivados libre de riesgo a una situación en la que la contrapartida puede quebrar. Sin embargo, la lógica seguida puede producir un problema de simetría. Como en cualquier transacción financiera hay (al menos) dos contrapartes, el inversor I y la contrapartida C , el cargo por CVA puede diferir, pudiendo depender de la perspectiva. Un inversor calculará el precio del derivado como

$$\bar{V}_I(t_0, T) = \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_I(t_0, T),$$

siendo $\text{CVA}_I(t_0, T)$ el cargo calculado asumiendo que la contrapartida puede quebrar. Por otro lado, la contrapartida C calcularía el precio del derivado como

$$\bar{V}_C(t_0, T) = \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_C(t_0, T).$$

En general, $\text{CVA}_I(t_0, T) \neq \text{CVA}_C(t_0, T)$, debido a que las dos contrapartidas pueden estar sujetas a distinta valoración del riesgo de crédito, por lo que el valor ajustado calculado por el inversor I no es el opuesto al valor ajustado calculado por la contrapartida C . En otras palabras, podría ocurrir que las dos partes «no se pongan de acuerdo» sobre el precio ajustado del derivado con riesgo.

El razonamiento anterior motiva el uso de una versión generalizada del caso de CVA unilateral, que se denomina CVA bilateral (BCVA). En la modelización del BCVA, se incluye la posibilidad de que las dos contrapartidas puedan quebrar. Cuando se obtiene el precio de un activo con riesgo, no solo se incluye el componente CVA, sino que también se incluye un componente que tenga en cuenta el riesgo asociado a la posibilidad de default propio (conocido como *Debt Value Adjustment*, $\text{DVA}(t_0, T)$). Dependiendo del punto de vista, el cargo por $\text{CVA}(t_0, T)$ para el inversor es equivalente al $\text{DVA}(t_0, T)$ para la contrapartida, es decir, $\text{CVA}_C(t_0, T) = \text{DVA}_I(t_0, T)$ y $\text{CVA}_I(t_0, T) = \text{DVA}_C(t_0, T)$.

Para dos contrapartidas, se tendrían las ecuaciones

$$\begin{aligned}\bar{V}_I(t_0, T) &= \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_I(t_0, T), \\ \bar{V}_C(t_0, T) &= \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_C(t_0, T).\end{aligned}$$

Como el inversor y la contraparte deben acordar el precio, se debe imponer la condición $\bar{V}_I(t_0, T) = \bar{V}_C(t_0, T)$, lo que resulta en los ajustes

$$\begin{aligned}\bar{V}_I(t_0, T) &= \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_I(t_0, T) + \text{CVA}_C(t_0, T) \\ &=: \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_I(t_0, T) + \text{DVA}_I(t_0, T),\end{aligned}$$

y, de manera equivalente, para la contrapartida, tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{V}_C(t_0, T) &= \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_C(t_0, T) + \text{CVA}_I(t_0, T) \\ &=: \bar{V}(t_0, T) - \text{CVA}_C(t_0, T) + \text{DVA}_C(t_0, T).\end{aligned}$$

Esto implica que el $DVA(t_0, T)$ viene dado por

$$DVA(t, T) = (1 - R_c) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(\hat{t}_D)} \mathbf{1}_{\hat{t}_D \leq T} \max(-\bar{V}(\hat{t}_D, T), 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

donde \hat{t}_D indica el instante de default propio del inversor.

Así, la exposición negativa es la parte negativa del valor sin riesgo del contrato.

La modelización de los CVA y DVA se conoce a menudo como CVA bilateral (BCVA), que se define como

$$BCVA(t, T) = CVA(t, T) - DVA(t, T).$$

Nótese que $DVA(t, T)$ es una cantidad positiva y que, por tanto, puede ser vista como un «beneficio hasta el default propio», lo que es un aspecto problemático.

12.3.4. Reducción de la exposición mediante neteo

En cualquier institución financiera moderna, la gestión adecuada de la exposición crediticia es un aspecto crucial. En caso de default de la contraparte, una gestión del riesgo de crédito apropiada no solo puede reducir las pérdidas potenciales, sino que incluso puede salvar de la quiebra a una institución financiera. Existen varias medidas que una institución puede adoptar para reducir el riesgo de contrapartida. Una de las más importantes es el «neteo». En caso de default de una de las contrapartidas, un acuerdo de neteo establece el marco legal para agregar todas las transacciones que se tienen con la contrapartida que ha quebrado.

Ejemplo 12.3.4 (Impacto del neteo)

Para ilustrar el principio de neteo, consideramos dos contrapartidas con solo dos transacciones. La Operación 1 tiene un valor de 100 € y la Operación 2 tiene una pérdida de -50 €. Como se mencionó anteriormente, en el caso de default de una contrapartida, la otra parte debe pagar todas las obligaciones financieras pendientes y, en el caso de un valor de operación positivo, solo recibirá un cierto porcentaje de la cantidad total adeudada. Asumimos que la tasa de recuperación es $R_c = 40\%$. En la Tabla 12.1, se presentan dos escenarios diferentes, uno considerando el neteo y otro sin él. Se puede observar que el neteo puede tener un efecto significativo en el valor de la cartera en el caso de quiebra de la contrapartida.

Aparentemente, la principal diferencia entre los dos escenarios radica en la tasa de recuperación. En el caso sin neteo, la tasa de recuperación se aplica sobre los tratos individuales. Cuando se tiene en cuenta el neteo, la recuperación se aplica a toda la cartera.

Tabla 12.1: Ganancias y pérdidas totales para el ejemplo básico, bajo un escenario sin neteo y un escenario con neteo

| | escenario sin neteo | | escenario con neteo |
|-------------|--|--|---|
| Operación 1 | $40\% \times 100 \text{ €} = 40 \text{ €}$ | | $100 \text{ €} = 100 \text{ €}$ |
| Operación 2 | $-50 \text{ €} = -50 \text{ €}$ | | $-50 \text{ €} = -50 \text{ €}$ |
| total | -10 € | | $40\% \times 50 \text{ €} = 20 \text{ €}$ |

Ejemplo 12.3.5 (Reducción de la exposición de un swap)

Este ejemplo es una extensión del Ejemplo 12.3.1, en el que se calculaba la exposición de un swap de tipos de interés, $V^S(t)$. Para ilustrar el efecto del neteo, a la cartera existente, que contenía un swap, se le añade una posición corta sobre un swap de tipos de interés con un único cupón, cuyo pago tiene lugar en tiempo T_m . Su valor viene dado por

$$V_2^S(t_0) = N\tau_m P(t_0, T_m)\ell(t_0; T_{m-1}, T_m). \quad (12.58)$$

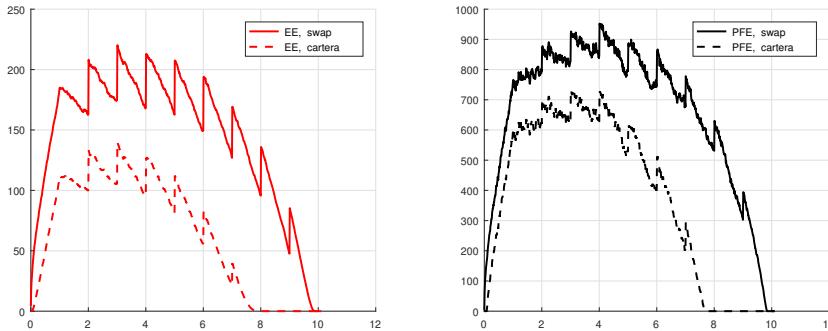


Figura 12.7: Efecto del neteo en la reducción de la exposición. Izquierda: dos perfiles de exposición (para un único swap y para una cartera). Derecha: EPFs (para un único swap y para una cartera).



Ahora, el valor de la cartera completa es $V(t_0) = V^S(t_0) - V_2^S(t_0)$, con $V^S(t_0)$ como en (12.47) y $V_2^S(t_0)$ definido en (12.58). En la Figura 12.7, se muestra el efecto (positivo) del swap añadido a la cartera sobre los perfiles de exposición. En el gráfico de la izquierda, vemos que la pérdida esperada en caso de default de la contrapartida es, aproximadamente, 200, pero, observando la EPF, esta pérdida puede ser, potencialmente, el doble de esta cantidad. La exposición se reduce para el caso con dos swaps (gráfico de la derecha), aunque el patrón es esencialmente el mismo. ♦

12.4. Ejercicios

Ejercicio 12.1 Obtener el valor de un caplet bajo el modelo Hull-White partiendo de (12.37).

Ejercicio 12.2 Considerar el problema de valoración de una opción call europea sobre el bono cupón cero $P(T_1, T_2)$, con $T_0 = 0$, $T_1 = 2$ y $T_2 = 6$ años, donde la curva inicial del bono cupón cero viene dada por $P(0, t) = e^{-0.03t^2 - 0.1t}$. Empleando el modelo Hull-White dado por

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r^{\mathbb{Q}}(t), \quad r(0) \approx f^r(0, 0),$$

con $\lambda = 0.2$, $\eta = 0.1$ y donde $\theta(t)$ se expresa en términos del tipo forward instantáneo $f^r(0, t)$, esto es

$$\theta(t) = f^r(0, t) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} \left(1 - e^{-2\lambda t}\right),$$

realizar las siguientes tareas:

- Como los tipos forward instantáneo $f^r(0, t)$ se expresan en términos de la curva del bono cupón cero mediante la relación, $f^r(0, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \log P(0, t)$, determinar analíticamente la media a largo plazo $\theta(t)$.
- Empleando 100 000 trayectorias y 300 pasos de tiempo, y la discretización de Euler

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \lambda(\theta(t) - r(t))\Delta t + \eta\sqrt{\Delta t}Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

valorar una opción sobre el bono cupón cero, dada por

$$\begin{aligned} V(0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(0)}{M(T_1)} \max(P(T_1, T_2) - K, 0) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(0)}{M(T_1)} \max \left(e^{\bar{A}_r(4) + \bar{B}_r(4)r(2)} - K, 0 \right) \right], \end{aligned}$$

para los strikes, $K = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1.3\}$ y con las funciones \bar{A}_r y \bar{B}_r definidas como en (12.35).

- Comparar los resultados obtenidos mediante la valoración por Monte Carlo con la expresión analítica. ¿Qué se puede decir de la precisión del método Monte Carlo en función del número de trayectorias y pasos de tiempo?

Ejercicio 12.3 Considerar el problema de valoración de un swaption europeo, con $T_0 = 0$, vencimiento $T_m \equiv T_3 = 3$ y período del swap $T_n \equiv T_6 = 6$ años (con frecuencia anual). La curva inicial de bono cupón cero viene dada por $P(0, t) = e^{-0.02t^2 - 0.06t}$. Empleando el modelo Hull-White, con $\lambda = 1.5$, $\eta = 0.07$ y donde $\theta(t)$ se expresa en términos del tipo forward instantáneo $f^r(0, t)$, completar la siguientes tareas:

- Con 100 000 trayectorias, 300 pasos de tiempo, y la discretización de Euler dada por

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \lambda(\theta(t) - r(t))\Delta t + \eta\sqrt{\Delta t}Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

valorar el swaption

$$V^{\text{Swpt}}(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_3)} \max \left(\sum_{k=4}^6 \tau_k P(T_3, T_k) (\ell(T_3, T_{k-1}, T_k) - K), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(0) \right],$$

con $\tau_k = 1$, para los strikes $K = \{0.01, 0.02, \dots, 0.25\}$.

Pista: Expresar el tipo Libor $\ell(T_3, T_{k-1}, T_k)$ en función de los BCCs y, para cada bono $P(T_3, T_k)$, utilizar la igualdad $P(T_3, T_k) = e^{\bar{A}(T_3, T_k) + \bar{B}(T_3, T_k)r(T_3)}$.

- b. El modelo Hull-White bajo la medida T_3 está gobernado por la EDE

$$dr(t) = \lambda (\hat{\theta}(t, T_3) - r(t)) dt + \eta W_r^{T_3}(t), \quad r(0) \approx f^r(0, 0), \quad (12.59)$$

con $\hat{\theta}(t, T_3) = \theta(t) + \frac{\eta^2}{\lambda^2} (e^{-\lambda(3-t)} - 1)$. Implementar una simulación de Monte Carlo y valorar el swaption

$$V^{\text{Swpt}}(0) = NP(0, T_3) \mathbb{E}^{T_3} \left[\max \left(1 - \sum_{k=4}^6 c_k P(T_3, T_k), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(0) \right],$$

con los coeficientes c_k apropiados.

Pista: Como la esperanza se toma bajo la medida forward T_3 , para evaluar

$$P(T_3, T_k) = e^{\bar{A}_r(T_3, T_k) + \bar{B}_r(T_3, T_k)r(T_3)},$$

se necesita simular $r(T_3)$ bajo la medida forward T_3 , utilizando la dinámica de (12.59).

- c. Implementar el algoritmo de Newton-Rapshon para determinar la r^* de (12.45) y realizar la valoración analítica de la swaption, véase Apartado 12.2.2. Comparar los resultados con la simulación de Monte Carlo.

Ejercicio 12.4 El denominado préstamo *bullet* es uno de los préstamos más básicos que un cliente puede contratar en un banco. En este tipo de contrato, el prestatario recibe N_0 en el momento de la firma, t_0 , y el nominal se devuelve entero al final del último período, en un solo pago (de ahí el nombre de bullet, que es «bala» en inglés). Al final de cada período intermedio se paga únicamente la parte de los intereses al prestamista, de modo que el nominal permanece constante hasta T_m , es decir, $N(T_i) = N_0 \mathbf{1}_{T_i < T_m}$. Así, para un tipo de interés fijado K , los pagos individuales son iguales a $C(T_i) = KN_0 \tau_i$ y la cantidad pagada total es $I = \sum_{i=1}^m C(T_i)$. Asumir un «pago anticipado» constante P (los pagos anticipados son pagos adicionales hechos por el prestatario durante la vida del préstamo, que suponen alteraciones de los pagos programados) y realizar las siguientes tareas:

- a. Mostrar que, bajo un tipo de pago anticipado constante, la cantidad pagada total es igual a

$$I = KN_0 \frac{1 - (1 - P)^m}{P}.$$

- b. Considerar un préstamo bullet con $T_m = 10$ y $K = 3\%$. Generar la dos siguientes gráficas: 1) Para $P = 0\%$ y $P = 10\%$ representar las cantidades pagadas de manera anticipada, el pago del nominal y los pagos de intereses; 2) representar el capital nominal pendiente en función del tiempo bajo tres niveles de pago anticipado, $P = 0\%$, $P = 4\%$ y $P = 12\%$.

Ejercicio 12.5 Un préstamo de anualidad es un contrato ligeramente más avanzado que el anterior, ya que, a diferencia del préstamo bullet, este también incluye «reembolsos», $Q(T_i)$, del capital nominal pendiente, es decir,

$$N(T_{i+1}) = N(T_i) - \Delta T_i Q(T_i) = N(T_i) - \Delta T_i (C(T_i) - I(T_i)),$$

con $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$ y donde $C(T_i)$ representa un pago individual (que, a su vez, consiste en dos pagos; la cantidad para amortizar el nominal inicial N_0 , $Q(T_i)$, y el pago de intereses en tiempo T_i , $I(T_i)$). Asumir una cuota constante, $C(T_i) = C$, y mostrar que, para el préstamo de anualidad descontado, se verifica que

$$V^{An}(t_0; K) = \sum_{i=1}^m \frac{C}{(1+K)^{T_i}} = \frac{C}{K} \left(1 - \frac{1}{(1+K)^{T_m}} \right).$$

Por otro lado, el préstamo de anualidad tiene que ser igual al capital inicial. Entonces, para obtener C en la ecuación anterior, se dispone de una ecuación más, esto es

$$V^{An}(t_0; K) = N_0,$$

donde N_0 es el capital inicial. Realizar las siguientes tareas:

- a. Para determinar C , los flujos de caja descontados deben ser igual al capital inicial. Mostrar que esto implica que

$$Q(T_i) = C(T_i) - I(T_i) = \frac{KN_0}{1 - (1+K)^{-T_m}} - KN(T_{i-1}).$$

- b. Como en el ejercicio del préstamo bullet, introducir el pago anticipado (una reducción adicional del nominal, además de los reembolsos), esto es

$$N(T_{i+1}) = N(T_i) - Q(T_i) - PN(T_i),$$

y mostrar que los pagos individuales deben ser igual a

$$C(T_i) = \frac{KN(T_i)}{1 - (1+K)^{-(T_m-T_i)}}.$$

- c. Para un préstamo de anualidad con $T_m = 10$ y $K = 3\%$, realizar dos gráficas bajo los siguientes escenarios. 1) la composición de las cuotas en los casos $P = 0\%$ y $P = 12\%$. 2) el nominal pendiente en función del tiempo, bajo diferentes niveles de pago anticipado, $P = 0\%$, $P = 4\%$ y $P = 12\%$.

Ejercicio 12.6 Suponiendo la notación de (12.8), se tienen tres contratos de swap de tipos de interés pagador, $V_1(T_1) := V^{SP}(T_0, T_1)$, $V_2(T_2) = V^{SP}(T_0, T_1, T_2)$, $V_3(T_3) = V^{SP}(T_0, T_1, T_2, T_3)$. Asumir un estructura temporal equiespaciada, $T_{i+1} - T_i = 1, \forall i$, tal que $[T_1, T_2, T_3] = [1, 2, 3]$. Los valores de paridad para cada contrato de swap vienen dados en la Tabla 12.2

El objetivo de este ejercicio es obtener una curva de rentabilidad que esté calibrada a los instrumentos anteriores y, consecuentemente, calcular los factores de descuento, $p_i := P(t_0, T_i)$, de modo que, en la valoración de todos los instrumentos de la Tabla 12.2, se recupera su valor de paridad. Los factores de descuento se calculan en los vencimientos de los swaps, es decir, en $[1, 2, 3]$.

Realizar las siguientes tareas:

Tabla 12.2: Swaps y sus correspondientes tipos fijos K_i . En otras palabras, para estos tipos fijos, el valor de los swaps es igual a 0.

| Swap | Tipo fijo de paridad K |
|------------|--------------------------|
| $V_1(t_0)$ | 0.01 |
| $V_2(t_0)$ | 0.0214 |
| $V_3(t_0)$ | 0.036 |

- a. Implementar, para un vector de factores de descuento y un tipo fijo K_i , una función que valore un swap de tipos de interés dado el vencimiento.
- b. Implementar una función que obtenga la matriz Jacobiana de la forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1(t_0)}{\partial p_1} & \frac{\partial V_1(t_0)}{\partial p_2} & \frac{\partial V_1(t_0)}{\partial p_3} \\ \frac{\partial V_2(t_0)}{\partial p_1} & \frac{\partial V_2(t_0)}{\partial p_2} & \frac{\partial V_2(t_0)}{\partial p_3} \\ \frac{\partial V_3(t_0)}{\partial p_1} & \frac{\partial V_3(t_0)}{\partial p_2} & \frac{\partial V_3(t_0)}{\partial p_3} \end{bmatrix} \quad (12.60)$$

Pista: Para calcular las derivadas parciales, utilizar diferencias finitas con $\Delta p_i = 10^{-5}$.

- c. Implementar el algoritmo de Newton-Raphson multidimensional presentado en el Apartado 12.1.5 para determinar los puntos vertebral óptimos.
- d. Resolver el apartado anterior sin utilizar el algoritmo de Newton-Raphson.

Ejercicio 12.7 Repetir las tareas del Ejercicio 12.6 con la siguiente modificación: asumir que $T_{i+1} - T_i = 0.5$ (de modo que tenemos dos veces más frecuencia de pagos). Esta modificación requiere la utilización de interpolación entre los puntos vertebral. Considerar la interpolación lineal basada en el «tipo efectivo», $r_i := -\frac{\log P_i(t_0, T_i)}{T_i}$.

Ejercicio 12.8 En el Ejemplo 12.3.2 se muestra que el perfil de EE es equivalente al precio de una opción europea con strike $K = 0$. Considerar el proceso MBG para un activo $S(t)$ (elegir unos parámetros del modelo cualesquiera) y comprobar numéricamente esta afirmación.

Ejercicio 12.9 Modificar los códigos que generan los resultados de la Figura 12.7 para utilizar la dinámica CIR en vez de la dinámica Hull-White. Nótese que los BCCs bajo la dinámica CIR se han estudiado en el Apartado 11.3.3.

¿Cuál es el impacto de variar los parámetros de reversión a la media y volatilidad sobre los perfiles obtenidos? ¿Para qué configuración de parámetros se esperarían resultados similares a los obtenidos con la dinámica Hull-White?

Ejercicio 12.10 Utilizar el código de la Figura 12.7, y añadir dos swaps a la cartera, donde uno de ellos tiene un vencimiento de 4 años y el otro de 12 años. Representar los perfiles EE y EPF correspondientes. Modificar los capitales nominales de estos swaps y analizar el impacto de este cambio en los resultados.

CAPÍTULO 13

Modelos híbridos y Credit Valuation Adjustment

En este capítulo:

Los contratos financieros que involucran múltiples clases de activos requieren de modelos de valoración bien definidos. En el **Apartado 13.1**, estudiaremos algunos modelos híbridos afines para activos y tipos de interés, para los que la función característica se puede determinar con relativa facilidad. Los modelos híbridos se pueden utilizar con payoffs híbridos que tengan una «sensibilidad limitada» a la sonrisa del tipo de interés. Sin embargo, estos modelos también son importantes en el contexto de la gestión de riesgo, en particular para el *Credit Valuation Adjustment (CVA)*.

Prestaremos especial atención a la «extensión híbrida» del modelo de volatilidad estocástica de Heston, denominada modelo de Heston Hull-White, presentado en el **Apartado 13.2**. Introduciremos una aproximación del modelo completo, de modo que el modelo aproximado pertenezca a la clase de procesos difusión afín. De este modo podremos valorar derivados financieros de manera similar a como lo hacemos con el modelo de Heston clásico. El capítulo concluye con el **Apartado 13.3**, donde se presenta una aplicación de gestión del riesgo con CVA bajo el modelo híbrido de Heston Hull-White.

Palabras clave de este capítulo: modelos híbridos, correlación entre clases de activos, modelo de Black-Scholes Hull-White, modelo de Schöbel-Zhu Hull-White, modelos híbridos de Heston, modelo de Heston Hull-White, función característica, gestión de riesgo con CVA.

13.1. Introducción a los modelos híbridos afines

En caso de una turbulencia financiera, con las bolsas a la baja, los inversores suelen huir del mercado bursátil para contener sus pérdidas. Cuando esto pasa, los bancos centrales pueden reducir los tipos de interés para aumentar los flujos de dinero y propiciar un incremento en los valores bursátiles (mantener el dinero en las cuentas bancarias sería menos atractivo). Así pues, los movimientos en el mercado de tipos de interés pueden influir, especialmente a largo plazo, en el comportamiento de los precios de los valores bursátiles. Este hecho se tiene en cuenta en los denominados modelos híbridos.

Presentaremos una serie de modelos híbridos que se pueden utilizar para la valoración de los correspondientes derivados híbridos, así como para la gestión del riesgo. Los modelos híbridos se pueden definir mediante un sistema de EDEs para, por ejemplo, acciones, volatilidades y tipos de interés, y una matriz de correlaciones completa. Incluso aunque cada una de las EDEs, individualmente, admita una solución en forma cerrada, una estructura de correlación no nula puede implicar la aparición de dificultades para una valoración y una calibración eficientes.

En general, los modelos híbridos no presentan una solución en forma cerrada, por lo que se tiene que emplear una aproximación numérica, mediante una simulación de Monte Carlo (MC) o una discretización de las EDPs correspondientes. La eficiencia en la valoración de productos derivados de tipo europeo es crucial, especialmente para la calibración de los propios modelos. Muchos de ellos, aunque teóricamente atractivos, no cumplen los requisitos de valoración eficiente de productos básicos, por lo que no se utilizan en la práctica debido a que el procedimiento de calibración consumiría demasiado tiempo.

Aunque los modelos híbridos se pueden definir con relativa facilidad, estos únicamente se utilizarán si proporcionan un ajuste satisfactorio a la estructura de volatilidad implícita de mercado, incorporando una estructura de correlaciones entre los procesos de las distintas clases de activos. Además, una valoración y una calibración altamente eficientes son imprescindibles.

Por esta razón, en este capítulo, mostramos cómo obtener la función característica de modelos híbridos. Con la función característica disponible, la valoración de opciones europeas se puede llevar a cabo de manera muy eficiente mediante, por ejemplo, el método COS.

13.1.1. Modelo de Black-Scholes Hull-White (BSHW)

Como punto de partida, extendemos el modelo estándar de Black y Scholes (1973), al que incorporamos el modelo short-rate de Hull y White (1990). El modelo conjunto se denomina el modelo híbrido de Black-Scholes Hull-White (BSHW), y se suele tomar como referencia para el modelado de derivados en el

mercado de divisas¹, German y Kohlhagen (1983)), de productos indexados a la inflación (basados en el índice de precios de consumo, IPC), Jarrow y Yildirim (2003), o de opciones con vencimiento a largo plazo, Brigo y Mercurio (2007).

Bajo la medida en riesgo neutro \mathbb{Q} , la dinámica del modelo BSHW, con $\mathbf{X}(t) = [S(t), r(t)]^T$, viene dada por el sistema de EDEs

$$\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= r(t)dt + \sigma dW_x(t), \quad S(t_0) = S_0 > 0, \\ dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \quad r(t_0) = r_0, \end{aligned} \quad (13.1)$$

donde $W_x(t)$ y $W_r(t)$ son dos movimientos brownianos correlados con $dW_x(t)dW_r(t) = \rho_{x,r}dt$, y $|\rho_{x,r}| < 1$ es el parámetro de correlación instantánea entre el precio del activo y el proceso short-rate. Los parámetros σ y η determinan la volatilidad del activo y del tipo de interés, respectivamente; $\theta(t)$ es una función determinista (como la definida en (11.36)) y λ determina la velocidad de reversión a la media.

Aplicando la transformación logarítmica, $X(t) = \log S(t)$, podemos observar que el modelo satisface las condiciones de afinidad de (7.50), (7.51) y (7.52), de modo que se puede obtener fácilmente la correspondiente función característica, $\phi_{BSHW}(u; t, T)$.

Sea el vector $\mathbf{X}(t) = [X(t), r(t)]^T$, la función característica descontada, con $\mathbf{u} = [u, 0]^T$ y $\tau := T - t$, es

$$\phi_{BSHW}(u; t, T) = \exp(\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(t) + \bar{C}(u, \tau)r(t)), \quad (13.2)$$

con la condición final, $\phi_{BSHW}(u; T, T) = \exp(iuX(T))$. Las funciones $\bar{A}(u, \tau)$, $\bar{B}(u, \tau)$ y $\bar{C}(u, \tau)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{B}(u, \tau) &= iu, \\ \bar{C}(u, \tau) &= \frac{1}{\lambda}(iu - 1)(1 - e^{-\lambda\tau}), \\ \bar{A}(u, \tau) &= \frac{1}{2}\sigma^2iu(iu - 1)\tau + \frac{\rho_{x,r}\sigma\eta}{\lambda}iu(iu - 1)\left(\tau + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda\tau} - 1)\right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{4\lambda^3}(i + u)^2(3 + e^{-2\lambda\tau} - 4e^{-\lambda\tau} - 2\lambda\tau) \\ &\quad + \lambda \int_0^\tau \theta(T - z)\bar{C}(u, z)dz. \end{aligned}$$

La expresión para $\bar{A}(u, \tau)$ contiene una integral sobre la función determinista $\theta(t)$, que puede calibrarse al nivel de mercado actual del tipo de interés. Así, la integral se puede determinar analíticamente.

¹Conocido también como *Forex* o FX por su término en inglés, *Foreign-Exchange*.

Por tanto, al disponer de la función característica para el modelo BSHW, se pueden utilizar técnicas de inversión de Fourier, como el método COS, para una amplia variedad de funciones de payoff. Además, la valoración de opciones vanilla sobre valores bursátiles se puede realizar analíticamente bajo la medida T -forward (véase Brigo y Mercurio (2007); Overhaus *et al.* (2007)), de la misma forma que con el modelo de Black-Scholes estándar, como mostramos en el siguiente apartado.

13.1.2. Modelo BSHW y cambio de medida

El modelo BSHW representa un ejemplo de lo beneficioso que puede resultar el cambio de medidas. El procesos, bajo la medida de riesgo neutro y en términos de movimientos brownianos independientes, se puede formular como

$$\begin{bmatrix} dr(t) \\ dS(t)/S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(\theta(t) - r(t)) \\ r(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ \sigma\rho_{x,r} & \sigma\sqrt{1-\rho_{x,r}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_r(t) \\ d\widetilde{W}_x(t) \end{bmatrix}. \quad (13.3)$$

Para determinar la distribución de $S(t)$, realizamos una transformación de la medida, esto es, intercambiamos numerarios negociables. En este caso, en vez de utilizar la cuenta de ahorros, $M(t)$, el candidato «óptimo» como numerario es el bono cupón cero $P(t, T)$, cuyo valor a vencimiento T es igual a una unidad monetaria. Así, en tiempo T , no tenemos aleatoriedad con respecto a este numerario, lo que resulta conveniente, ya que, precisamente, estamos interesados en la distribución de la acción en el instante T . El BCC $P(t, T)$ evoluciona de acuerdo con la dinámica (11.30), bajo el modelo Hull-White. Además, en la dinámica del bono cupón cero, consideramos el movimiento browniano independiente $\widetilde{W}_r(t)$, en vez de $W_r(t)$.

Empleamos la transformación de la medida y definimos la derivada de Radon-Nikodym, dada por

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t) = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T)}{P(0, T)} \frac{M(0)}{M(t)}. \quad (13.4)$$

Aplicando el lema de Itô, la dinámica de $\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)$ es

$$d\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t) = \frac{1}{M(t)} dP(t, T) - \frac{P(t, T)}{M^2(t)} dM(t).$$

Sustituyendo y simplificando, obtenemos

$$\frac{d\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)}{\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)} = \eta \bar{B}_r(t, T) d\widetilde{W}_r(t),$$

véase también (11.30).

Esta representación nos proporciona el núcleo de Girsanov, que describe la transición desde la medida en riesgo neutro, \mathbb{Q} , a la medida T -forward, \mathbb{Q}^T , es decir,

$$\begin{cases} d\widetilde{W}_r(t) = \eta \bar{B}_r(t, T) dt + d\widetilde{W}_r^T(t), \\ d\widetilde{W}_x(t) = d\widetilde{W}_x^T(t). \end{cases} \quad (13.5)$$

La transformación de la medida resulta en la dinámica para el BCC, $P(t, T)$, bajo la medida T -forward, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r(t)dt + \eta \bar{B}_r(t, T) \left(\eta \bar{B}_r(t, T)dt + d\widetilde{W}_r^T(t) \right) \\ &= \left(r(t) + \eta^2 \bar{B}_r^2(t, T) \right) dt + \eta \bar{B}_r(t, T) d\widetilde{W}_r^T(t), \end{aligned} \quad (13.6)$$

donde el proceso $r(t)$, bajo la misma medida, viene dado por (11.59).

Volvemos a la dinámica del proceso $S(t)$, en términos de los movimientos brownianos independientes (véase (13.3)), esto es

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma \left(\rho_{x,r} d\widetilde{W}_r(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2} d\widetilde{W}_x(t) \right). \quad (13.7)$$

Aplicando la transformación de la medida de (13.5), la dinámica de $S(t)$, bajo la medida T -forward, viene dada por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(r(t) + \rho_{x,r} \eta \sigma \bar{B}_r(t, T) \right) dt + \sigma \left(\rho_{x,r} d\widetilde{W}_r^T(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2} d\widetilde{W}_x^T(t) \right).$$

Por tanto, el modelo BSHW bajo la medida T -forward está gobernado por el sistema de EDEs

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = \left(r(t) + \rho_{x,r} \eta \sigma \bar{B}_r(t, T) \right) dt + \sigma dW_x^T(t), \\ dr(t) = \lambda \left(\theta(t) + \frac{\eta^2}{\lambda} \bar{B}_r(t, T) - r(t) \right) dt + \eta dW_r^T(t), \end{cases} \quad (13.8)$$

con $\bar{B}_r(t, T) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1)$ y $dW_x^T(t)dW_r^T(t) = \rho_{x,r} dt$.

Valoración de opciones bajo la medida T -forward

En realidad, el cambio de medida, de la medida riesgo neutro a la medida T -forward, no simplifica la dinámica del modelo BSHW subyacente (incluso parece que la hace más complicada). La ventaja de la transformación de la medida se observa al valorar opciones. El problema de valoración para una función de payoff de estilo europeo, $H(T, S)$, se puede expresar como

$$V(t_0, S) = M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T)} H(T, S) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = M(t_0) \int_{\Omega} \frac{1}{M(T)} H(T, S) d\mathbb{Q},$$

donde $M(t_0) = 1$. Por (13.4) sabemos que $d\mathbb{Q} = P(t_0, T)M(T)d\mathbb{Q}^T$, por lo que, como $M(t_0) = P(T, T) = 1$, la fórmula de valoración bajo la medida T -forward resulta en

$$\begin{aligned} V(t_0, S) &= \int_{\Omega} \frac{1}{M(T)} H(T, S) P(t_0, T) M(T) d\mathbb{Q}^T \\ &= P(t_0, T) \mathbb{E}^T [H(T, S) | \mathcal{F}(t_0)]. \end{aligned}$$

Como el bono cupón cero $P(t_0, T)$ es $\mathcal{F}(t_0)$ -medible (ya que su valor en tiempo t_0 es conocido) y $M(t_0) = 1$, obtenemos

$$V(t_0, S) = P(t_0, T) \mathbb{E}^T [H(T, S) | \mathcal{F}(t_0)]. \quad (13.9)$$

Bajo la medida \mathbb{Q} , el activo descontado con la cuenta de ahorros es una martingala. Sin embargo, esto no se cumple bajo la medida T -forward, \mathbb{Q}^T . En este caso, el numerario es el bono cupón cero $P(t, T)$, por lo que es el proceso $\frac{S(t)}{P(t, T)}$ el que tiene que ser una martingala. Definimos el precio forward como

$$S_F(t, T) := \frac{S(t)}{P(t, T)},$$

con $S(t)$ y $P(t, T)$ dados en (13.8) y (13.6), respectivamente. Aplicando el lema de Itô, obtenemos la dinámica

$$\begin{aligned} dS_F(t, T) &= \frac{1}{P(t, T)} dS(t) - \frac{S(t)}{P(t, T)} dP(t, T) + \frac{S(t)}{P^3(t, T)} (dP(t, T))^2 \\ &\quad - \frac{1}{P^2(t, T)} dP(t, T) dS(t), \end{aligned}$$

que se puede simplificar a

$$\frac{dS_F(t, T)}{S_F(t, T)} = \sigma dW_x^T(t) - \eta \bar{B}_r(t, T) dW_r^T(t). \quad (13.10)$$

El proceso $S_F(t, T)$ no contiene ningún término en dt , por lo que $S_F(t, T)$ es una martingala bajo la medida T -forward, \mathbb{Q}^T .

La EDE en (13.10) se puede simplificar aún más recordando que, para dos movimientos brownianos correlados, $W_1(t)$ y $W_2(t)$, con correlación $\rho_{1,2}$, y dos constantes a y b positivas, se cumple, en el sentido de las distribuciones, la igualdad

$$aW_1(t) + bW_2(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\rho_{1,2}} W_3(t),$$

donde $W_3(t)$ también es un movimiento browniano. Utilizando el resultado anterior, las EDE en (13.10) se puede reescribir como

$$\frac{dS_F(t, T)}{S_F(t, T)} = \bar{\sigma}_F(t) dW_F(t), \quad S_F(t_0, T) = \frac{S_0}{P(t_0, T)}, \quad (13.11)$$

con $\bar{\sigma}_F(t) = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 B_r^2(t, T) - 2\rho_{x,r}\sigma\eta B_r(t, T)}$.

En (13.11) se reproduce la EDE del MBG en el modelo de Black-Scholes, salvo por el hecho de que el parámetro de volatilidad $\bar{\sigma}_F(t)$ es dependiente del tiempo. Para una opción de estilo europeo, con un solo pago en tiempo T , la distribución del activo subyacente en tiempo T debería ser conocida. En el caso de una volatilidad dependiente del tiempo es posible determinar una volatilidad constante, σ_c , tal que la volatilidad media, acumulada hasta el vencimiento T sea igual a σ_c . Ya ilustramos esto en (2.25) del Apartado 2.2.3.

El método COS y el descuento estocástico

El método COS del Capítulo 6 se puede generalizar para una dinámica de activo con un proceso estocástico de tipo de interés, a partir de la fórmula de valoración en riesgo neutro, esto es

$$\begin{aligned} V(t_0, S) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{t_0}^T r(z) dz} V(T, S) | \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} V(T, e^y) f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) dy, \end{aligned} \quad (13.12)$$

donde $\mathbf{X}(t) = [X(t), r(t), \dots]^T$, $X(t_0) \equiv \log S(t_0)$, y $f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) := \int_{\mathbb{R}} e^z f_{X,z}(T, y, z; t_0, x) dz$, con $z(t) = -\int_{t_0}^T r(z) dz$.

Asumiendo que la función de densidad decae rápidamente, se tiene la aproximación

$$V(t_0, S) \approx \int_a^b V(T, e^y) f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) dy, \quad (13.13)$$

donde a y b definen un intervalo integración apropiado (cuya elección se estudia en el Apartado 6.2.4). Así, la función característica descontada viene dada por

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}; t_0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{t_0}^T r(z) dz + i\mathbf{u}^T \mathbf{X}(T)} | \mathcal{F}(t_0) \right],$$

que, para $\tau = T - t_0$, $\mathbf{u} = [u, 0, \dots, 0]^T$, es

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}}(u; t_0, T) &= \iint_{\mathbb{R}} e^{z+iy} f_{X,z}(T, y, z; t_0, x) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) dy. \end{aligned} \quad (13.14)$$

La integral de (13.14) representa la transformada de Fourier de $f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x)$. Esta se puede aproximar, en un intervalo acotado $[a, b]$, mediante

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; t, T) \approx \int_a^b e^{iuy} f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) dy =: \hat{\phi}_{\mathbf{X}}(u; t, T). \quad (13.15)$$

La función de densidad multivariante $f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x)$ se puede relacionar con su función característica mediante el siguiente resultado.

Resultado 13.1.1 Para un intervalo acotado $[a, b]$ dado, siendo N el número de términos en la expansión de Fourier en cosenos, la función de densidad de probabilidad $f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x)$ dada por (13.12) se puede aproximar mediante

$$f_{\mathbf{X}}(T, y; t_0, x) \approx \frac{2}{b-a} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \hat{\phi}_{\mathbf{X}} \left(\frac{k\pi}{b-a}; t, T \right) \exp \left(-i \frac{k\pi}{b-a} \right) \right\} \\ \times \cos \left(k\pi \frac{y-a}{b-a} \right),$$

donde $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ representa la parte real del argumento; $\hat{\phi}_{\mathbf{X}}(u; t, T)$ es la correspondiente función característica y los demás ajustes son los propios del método COS del Capítulo 6.

Volatilidad implícita y modelos con tipo de interés estocástico

Al generalizar el modelo de Black-Scholes incluyendo tipos de interés estocásticos surge, de manera natural, una pregunta: ¿cómo calcular las volatilidades implícitas a partir de la fórmula de Black-Scholes? En el procedimiento estándar para determinar la volatilidad implícita se toma un tipo de interés constante para la misma. ¿Qué valor de r se debería tomar cuando los tipos de interés están modelados por un proceso estocástico? La respuesta está relacionada con los resultados obtenidos anteriormente, cuando cambiamos de la medida riesgo neutro a la medida T -forward. En ellos, mostramos que la dinámica del activo en el modelo de Black-Scholes Hull-White se puede escribir como

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma dW_x(t),$$

con $r(t)$ gobernado por el modelo Hull-White. La transformación de la medida nos permite obtener una dinámica para el activo forward, $S_F(t, T) = S(t)/P(t, T)$, libre de términos de deriva, véase (13.11), dada por

$$\frac{dS_F(t, T)}{S_F(t, T)} = \bar{\sigma}_F(t)dW_F(t).$$

Esta es una observación importante, ya que, de esta forma, se puede obtener una fórmula alternativa para valorar opciones europeas. Entonces, la fórmula de valoración es independiente de los tipos de interés (aunque aún depende de la volatilidad), por lo que podemos emplear cualquier modelo en el que el tipo de interés no sea constante.

La igualdad en tiempo T , $S(T) = S_F(T, T)$, implica que, para la valoración de un contrato con vencimiento fijado, se puede utilizar el proceso estocástico sin deriva $S_F(t, T)$. Como el proceso $S_F(t, T)$ no contiene $r(t)$, es mucho más fácil valorar los derivados.

A partir de la fórmula de valoración (13.9) y el payoff $H(T, S) = \max(S(T) - K, 0)$, tenemos que

$$V(t_0, S) = P(t_0, T) \mathbb{E}^T [\max(S_F(T, T) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)] \quad (13.16)$$

$$= S_{F,0} P(t_0, T) F_N(d_1) - K P(t_0, T) F_N(d_2). \quad (13.17)$$

con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_{F,0}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_c^2(T - t_0)}{\sigma_c\sqrt{T - t_0}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_{F,0}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_c^2(T - t_0)}{\sigma_c\sqrt{T - t_0}}.$$

Además, $S_{F,0} := \frac{S_0}{P(t_0, T)}$, $F_N(\cdot)$ es la FDA de la normal estándar y σ_c es como en (2.25), es decir,

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \bar{\sigma}_F^2(z) dz.$$

Como ya se ha mencionado, la fórmula anterior no contiene (explícitamente) un tipo de interés r , por lo que se puede utilizar para el cálculo de volatilidades implícitas para modelos donde el tipo de interés sea estocástico².

Al prescribir una cierta función de volatilidad dependiente del tiempo en el modelo de Black-Scholes, se pueden controlar las volatilidades implícitas ATM. Estas volatilidades dependientes del tiempo se conocen como «estructura temporal de volatilidad».

Ejemplo 13.1.1 (Modelo BSHW y volatilidad implícita)

En la Figura 13.1 se representan algunas de las posibles formas para las volatilidades implícitas ATM generadas con el modelo BSHW. Claramente, una función de volatilidad dependiente del tiempo no es suficiente para generar sonrisas de volatilidad implícita, pero sí lo es para describir una estructura temporal para la volatilidad implícita, tal y como se suele observar en los mercado de tipos de interés.

El experimento numérico se ha llevado a cabo con el siguiente conjunto de parámetros para el modelo BSHW, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 0.1$, $\eta = 0.01$ y $\rho_{x,r} = 0.3$. Se varía cada parámetro individualmente, manteniendo los otros fijados. Todos los parámetros tienen un efecto importante en la volatilidad implícita ATM del modelo.

Como el modelo de Black-Scholes estándar, el modelo BSHW produce volatilidades implícitas planas. La incorporación de un tipo de interés estocástico no tiene impacto en la volatilidad implícita. Sin embargo, los parámetros del tipo de interés influyen en la estructura temporal de la volatilidad implícita.

²Por supuesto, el modelo aún depende del tipo de interés a través del bono cupón cero $P(t_0, T)$, que se tiene que calcular y utilizar en la fórmula de valoración.

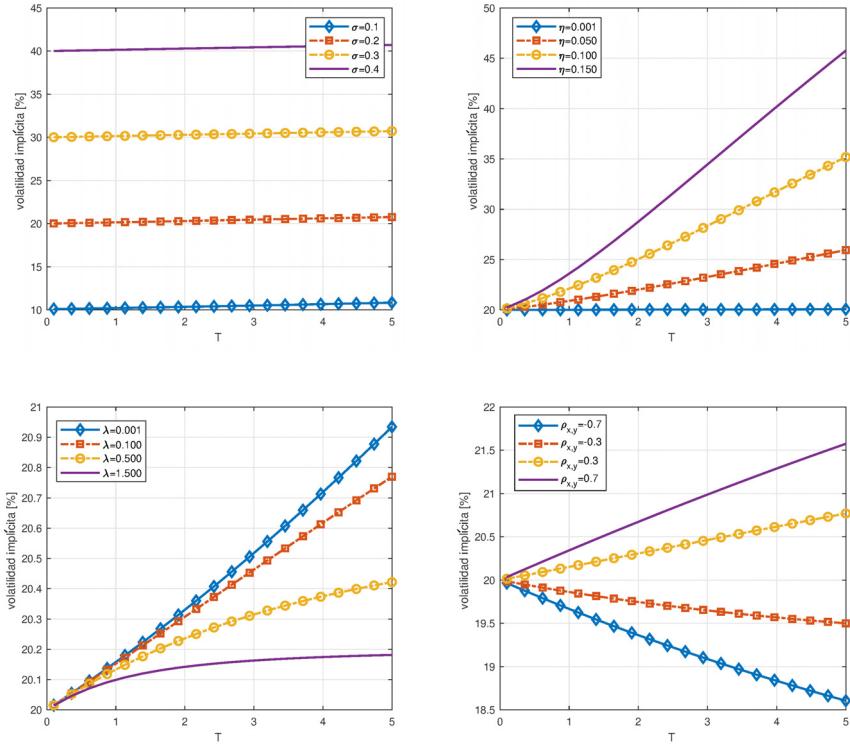


Figura 13.1: Estructura temporal de la volatilidad implícita en el modelo de Black-Scholes Hull-White. Influencia en la volatilidad implícita ATM. Arriba a la izquierda: impacto de σ . Arriba a la derecha: impacto de η . Abajo a la izquierda: impacto de λ . Abajo a la derecha: impacto de $\rho_{x,r}$.



13.1.3. Modelo de Schöbel-Zhu Hull-White (SZHW)

En este Apartado presentamos un primer modelo de volatilidad estocástica (SV) híbrido, que consta de un proceso de tipo de interés estocástico y una matriz de correlaciones completa entre los movimientos brownianos subyacentes. En particular, se añade de nuevo el proceso estocástico para tipos de interés de Hull y White (1990) a un modelo SV.

Sea el vector de estado $\mathbf{X}(t) = [S(t), r(t), \sigma(t)]^T$, fijamos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ y una filtración $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$, que verifica las condiciones habituales. Bajo la medida riesgo neutro \mathbb{Q} , consideraremos un

sistema 3D de ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma

$$\boxed{\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= r(t)dt + \sigma^p(t)dW_x(t), \\ dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \\ d\sigma(t) &= \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma\sigma^{1-p}(t)dW_\sigma(t), \end{aligned}} \quad (13.18)$$

donde p es un exponente, κ y λ controlan la velocidad de reversión a la media, η representa la volatilidad del tipo de interés y $\gamma\sigma^{1-p}(t)$ determina la volatilidad del proceso $\sigma(t)$. Dependiendo del parámetro p , $\sigma(t)$ denota la volatilidad ($p = 1$) o la varianza ($p = \frac{1}{2}$). Los parámetros $\bar{\sigma}$ y $\theta(t)$ son la media a largo plazo de los procesos de volatilidad y tipo de interés, respectivamente. Los $W_k(t)$, con $k = \{x, r, \sigma\}$, son procesos de Wiener correlados de acuerdo con la matriz de correlación instantánea

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} 1 & \rho_{x,\sigma} & \rho_{x,r} \\ \rho_{\sigma,x} & 1 & \rho_{\sigma,r} \\ \rho_{r,x} & \rho_{r,\sigma} & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.19)$$

El sistema (13.18) con $p = \frac{1}{2}$ es el modelo híbrido de Heston Hull-White, que será tratado en el siguiente apartado. Si tomamos $p = \frac{1}{2}$ y $r(t)$ constante, obtenemos el modelo estándar de Heston (1993), esto es

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = rdt + \sqrt{\sigma(t)}dW_x(t), \\ d\sigma(t) = \kappa^H (\bar{\sigma}^H - \sigma(t))dt + \gamma^H \sqrt{\sigma(t)}dW_\sigma(t), \end{cases}$$

donde $\sigma(t) \equiv v(t)$, es decir, el proceso de varianza es de tipo CIR, Cox *et al.* (1985). Para $p = 1$ y $r(t)$ constante, el modelo resultante es el modelo de Stein y Stein (1991) generalizado, que es idéntico al modelo de Schöbel y Zhu (1999), dado por

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = rdt + \sqrt{v(t)}dW_x(t), \\ dv(t) = 2\kappa \left(\frac{\bar{\sigma}}{2\kappa} \sigma(t) + \frac{\gamma^2}{2\kappa} - v(t) \right)dt + 2\gamma \sqrt{v(t)}dW_\sigma(t), \end{cases} \quad (13.20)$$

en el que la volatilidad al cuadrado, $v(t) = \sigma^2(t)$, representa la varianza del retorno instantáneo del activo.

El modelo de Schöbel-Zhu estándar es un caso particular del modelo de Heston original, como se indica en Heston (1993) y Schöbel y Zhu (1999). Tomando $\bar{\sigma} = 0$ en (13.20), el modelo de Schöbel-Zhu es igual al modelo de Heston con $\kappa^H = 2\kappa$, $\bar{\sigma}^H = \gamma^2/2\kappa$, y $\gamma^H = 2\gamma$. Esta relación nos proporciona una conexión directa entre sus funciones características descontadas (véase Lord y Kahl (2006)). Finalmente, si tomamos $r(t)$ constante y $p = 0$ en el sistema de Ecuaciones (13.18), y asumimos que no existe correlación, el modelo se reduce al modelo estándar de Black y Scholes (1973).

Afinidad del modelo SZH

En este apartado, elegimos los parámetros para las Ecuaciones (13.18) de tal modo que obtenemos el modelo de Schöbel-Zhu Hull-White (SZH). El modelo híbrido Schöbel-Zhu Hull-White se puede definir mediante el sistema 3D de EDEs

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = & r(t)dt + \sigma(t)dW_x(t), \\ dr(t) = & \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \\ d\sigma(t) = & \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma dW_\sigma(t), \end{cases} \quad (13.21)$$

con los parámetros como en las Ecuaciones (13.18), con $p = 1$ y las correlaciones $dW_x(t)dW_\sigma(t) = \rho_{x,\sigma}dt$, $dW_x(t)dW_r(t) = \rho_{x,r}dt$, $dW_r(t)dW_\sigma(t) = \rho_{r,\sigma}dt$. El sistema en (13.21), en su forma actual, no es afín. Para hacer que el sistema sea afín, se utiliza una técnica que consiste en incorporar una ecuación adicional al sistema 3D original.

Podemos incorporar otra variable estocástica latente, definida como $v(t) := \sigma^2(t)$ al vector de estado (como en Cheng y Scailliet (2007) o Pelsser (1997)), con lo que, aplicando $X(t) = \log S(t)$, obtenemos el sistema 4D de EDEs

$$\begin{cases} dX(t) = & \left(\tilde{r}(t) + \psi(t) - \frac{1}{2}v(t) \right) dt + \sqrt{v(t)}dW_x(t), \\ d\tilde{r}(t) = & -\lambda\tilde{r}(t)dt + \eta dW_r(t), \\ dv(t) = & (-2v(t)\kappa + 2\kappa\bar{\sigma}\sigma(t) + \gamma^2)dt + 2\gamma\sqrt{v(t)}dW_\sigma(t), \\ d\sigma(t) = & \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma dW_\sigma(t), \end{cases} \quad (13.22)$$

donde hemos utilizado $r(t) = \tilde{r}(t) + \psi(t)$, como en el Apartado 11.3, y donde $\theta(t)$ está incluido en $\psi(t)$. El modelo (13.22) es afín en el vector de estado extendido $\mathbf{X}(t) = [X(t), \tilde{r}(t), v(t), \sigma(t)]^\top$.

Mediante la extensión del espacio del vector, hemos obtenido un modelo afín que nos permite emplear los resultados de afinidad para obtener la correspondiente función característica. Sin embargo, esta no se abordará en este libro. El desarrollo detallado se puede encontrar en, por ejemplo, Grzelak *et al.* (2012).

13.1.4. Producto derivado híbrido

Los productos híbridos son contratos financieros que combinan mercados de distintos sectores, activos e instrumentos. Los productos híbridos surgen de la necesidad de un inversor de beneficiarse de las ganancias en mercados de diferentes sectores. Los contratos se pueden basar en, por ejemplo, el sector con mejor rendimiento, garantizando que el valor de una inversión no puede disminuir significativamente. Sin embargo, desde la crisis financiera de 2007, los contratos híbridos ya no son tan habituales en la industria financiera.

Producto de diversificación

En *trading* estratégico, los productos híbridos se denominan productos de diversificación. Estos productos se basan en conjuntos de activos con diferentes retornos esperados y niveles de riesgo. Una construcción adecuada de este tipo de productos puede proporcionar una reducción del riesgo en comparación con el activo individual, y un retorno esperado mayor al de un activo con el menor riesgo, Hunter y Picot (2006). Como ejemplo sencillo, proponemos una cartera con dos activos: una acción con riesgo y retorno alto y un bono con riesgo y retorno bajo. Si se introduce un componente bursátil en una cartera de bonos pura, el retorno esperado se incrementará. Sin embargo, como no existe una correlación perfecta entre estos dos activos, también se espera una reducción del riesgo. Si el porcentaje de acciones en la cartera aumenta, estas empezarán, eventualmente, a ser dominantes, y el riesgo podría incrementarse, con un impacto más alto cuanto más baja (o negativa) sea la correlación, Hunter y Picot (2006).

El producto financiero del ejemplo se definiría de la forma

$$V^d(t_0, S, r) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T)} \max \left(0, \omega_d \cdot \frac{S(T)}{S_0} + (1 - \omega_d) \cdot \frac{P(T, T_1)}{P(t_0, T_1)} \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],$$

donde $S(T)$ es el activo subyacente a tiempo T , $M(t_0) = 1$, $P(t, T)$ es el bono cupón cero y ω_d representa la proporción porcentual.

En la Figura 13.2 se muestran los resultados de valoración bajo el modelo SZHW. La valoración del producto se realiza para diferentes correlaciones $\rho_{x,r}$, con los restantes parámetros calibrados a datos de mercado, véase la Tabla 13.1.

Tabla 13.1: Resultados de calibración para los modelos SZHW y de Heston, definidos en (13.21). Para el modelo SZHW, se toman $\kappa = 0.5$, y distintas correlaciones $\rho_{x,r}$. En la simulación del modelo de Heston, se utiliza un tipo de interés constante $r = 0.033$.

| | | modelo | λ | η | | |
|--------|--------------|----------------|-----------|-------------------|-------------------|----------------|
| | | Hull-White | 1.12 | 0.02 | | |
| modelo | $\rho_{x,r}$ | $\bar{\sigma}$ | γ | $\rho_{x,\sigma}$ | $\rho_{r,\sigma}$ | σ_0/v_0 |
| SZHW | -70 % | 0.137 | 0.236 | -0.381 % | -0.339 % | 0.084 |
| | 0 % | 0.167 | 0.2 | -85.0 % | -0.8 % | 0.035 |
| | 70 % | 0.102 | 0.211 | -85.0 % | -34.0 % | 0.01 |
| Heston | - | 0.0770 | 0.3500 | -66.22 % | - | 0.0107 |



Para $\omega_d \in [0\%, 100\%]$ el operador máx desaparece del payoff, manteniéndose solamente un suma de esperanzas descontadas. La Figura 13.2 muestra que una correlación positiva entre los productos de la cartera incrementa

significativamente el valor del contrato, mientras que una correlación negativa tiene el efecto contrario. La diferencia absoluta entre los modelos aumenta con el porcentaje ω_d .

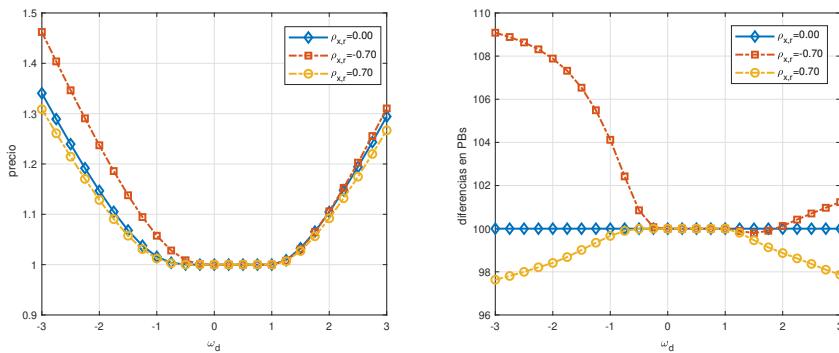


Figura 13.2: Impacto de la correlación, $\rho_{x,r}$, sobre un producto híbrido de diversificación con los parámetros de la Tabla 13.1. Izquierda: valoración para $T = 9$ y $T_1 = 10$. Derecha: diferencias en los precios con respecto al modelo con $\rho_{x,r} = 0\%$, expresadas en puntos básicos.



13.2. Modelo de Heston híbrido

El modelo de Heston con un tipo de interés determinista se ha convertido en uno de los modelos de referencia para los derivados sobre acciones. La suposición de tipos de interés deterministas en el modelo de Heston estándar es inofensiva siempre y cuando se valoren derivados sobre acciones con un vencimiento corto. Sin embargo, para productos sobre acciones a largo plazo, de cambio de divisas o combinados de acción y tipo de interés, un tipo de interés determinista puede producir inexactitudes. Por ello, en el Apartado 13.2.1, introducimos un modelo de Heston híbrido, con un proceso de tipo de interés estocástico. En el Apartado 13.2.2 se presenta una aproximación determinista del modelo híbrido de Heston Hull-White, además de su correspondiente función característica.

13.2.1. Detalles del modelo híbrido de Heston Hull-White

En el Apartado 13.1.3, estudiamos brevemente el modelo SZHWH, Grzelak *et al.* (2012); van Haastrecht *et al.* (2009). Sobre él, se impuso una matriz de correlaciones completa para los movimientos brownianos que gobiernan las EDES. El modelo pertenece a la clase de procesos DA pero, como el modelo SZHWH incluye un proceso de tipo Vašíček (1977) para la volatilidad estocástica,

las volatilidades pueden llegar a ser negativas. En este apartado, estudiamos el modelo híbrido de Heston Hull-White (HHW) y una «aproximación» de mismo, para la que se puede obtener la función característica.

Comenzamos extendiendo el vector de estado del modelo de Heston con un proceso de tipo de interés estocástico, esto es, $\mathbf{X}(t) = [S(t), v(t), r(t)]^T$. En concreto, incorporamos el proceso de tipo de interés de Hull y White (1990). El modelo HHW se define, bajo la medida \mathbb{Q} , de la forma

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = r(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_x(t), & S(0) > 0, \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t), & v(0) > 0, \\ dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), & r(0) \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (13.23)$$

En el modelo HHW, las correlaciones vienen dadas por $dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}dt$, $dW_x(t)dW_r(t) = \rho_{x,r}dt$ y $dW_v(t)dW_r(t) = \rho_{v,r}dt$, y κ , γ y \bar{v} son como en (8.18); $\lambda > 0$ determina la velocidad de reversión a la media para el proceso de tipo de interés; $\theta(t)$, como se describe en el Apartado 11.2, es la estructura temporal del tipo de interés y η controla la volatilidad del tipo de interés. El sistema en (13.23) no está en forma afín, ni siquiera para $X(t) = \log S(t)$. La matriz simétrica de covarianzas instantáneas viene dada por

$$\bar{\sigma}(\mathbf{X}(t))\bar{\sigma}(\mathbf{X}(t))^T = \begin{bmatrix} v(t) & \rho_{x,v}\gamma v(t) & \rho_{x,r}\eta\sqrt{v(t)} \\ * & \gamma^2 v(t) & \rho_{r,v}\gamma\eta\sqrt{v(t)} \\ * & * & \eta^2 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}. \quad (13.24)$$

Incluso fijando correlación $\rho_{r,v}$ a cero no obtendríamos un sistema afín. La matriz en (13.24) sería lineal con respecto al vector de estado $[X(t) = \log S(t), v(t), r(t)]^T$ si $\rho_{r,v}$ y $\rho_{x,r}$ son cero, como se indica en Muskulus *et al.* (2007).

Como para la valoración y la gestión del riesgo con CVA una correlación no nula entre el activo y el tipo de interés puede ser importante (véase Hunter y Picot (2006), por ejemplo), se necesita formular una aproximación alternativa a los modelos híbridos de Heston en la que se puedan imponer correlaciones. Como se ha mencionado, Zhu (2000) propuso un modelo híbrido que modelaba el patrón de muesca de una acción e incluía un proceso (no correlado) de tipo de interés estocástico. Se han propuesto otras generalizaciones como la de Giese (2006) y Andreasen (2006), donde el modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993) se utiliza en combinación con un proceso de tipo de interés indirectamente correlado. La correlación se modela incorporando términos adicionales a las EDEs.

Observación 13.2.1 (Modelo short-rate gaussiano multifactor)

También se puede considerar el modelo short-rate gaussiano multifactor (Gn++) de Brigo y Mercurio (2007), que se conoce como el modelo Hull-White multifactor, véase ?. Dado un vector de estado,

$\mathbf{R}(t) = [r(t), \varsigma_1(t), \dots, \varsigma_{n-1}(t)]^T$, este modelo se define mediante el sistema de EDEs

$$\begin{cases} dr(t) = \left(\theta(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \varsigma_k(t) - \beta r(t) \right) dt + \eta dW_r(t), & r(0) > 0, \\ d\varsigma_k(t) = -\lambda_k \varsigma_k(t) dt + \varsigma_k dW_{\varsigma_k}(t), & \varsigma_k(0) = 0, \end{cases} \quad (13.25)$$

con

$$\begin{aligned} dW_r(t)dW_{\varsigma_k}(t) &= \rho_{r,\varsigma_k} dt, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ dW_{\varsigma_i}(t)dW_{\varsigma_j}(t) &= \rho_{\varsigma_i,\varsigma_j} dt, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ y $\lambda_k > 0$ son los parámetros de reversión a la media, y $\eta > 0$ y los parámetros ς_k determinan la magnitud de la volatilidad del tipo de interés. En el sistema anterior, $\theta(t) > 0$ (con $t > 0$), es el tipo de interés a largo plazo (que se suele calibrar a la curva de rentabilidad).

El modelo Gn++ proporciona un ajuste satisfactorio a las estructuras de volatilidad con joroba ATM del tipo forward instantáneo. Además, la sencillez en la construcción del modelo (basado en un distribución normal multivariante) proporciona una solución en forma cerrada para caps y swaptions, permitiendo una calibración muy eficiente. Sin embargo, en este libro, emplearemos el proceso HW de un factor como tipo de interés estocástico. ▲

Para calibrar el modelo HHW, necesitamos determinar una función característica adecuada. Para obtener una función característica en forma cerrada con una correlación no nula entre el proceso $S(t)$ y el tipo de interés $r(t)$, asumiremos que los movimientos brownianos para el tipo de interés $r(t)$ y la varianza $v(t)$ no están correlados.

En lo que respecta al procedimiento de calibración de este tipo de modelos híbridos, se suele comenzar con la precalibración del modelo de tipos de interés a los derivados de tipos de interés disponibles. A continuación, los parámetros de proceso de tipo de interés se consideran como argumentos de entrada del modelo híbrido. En la segunda parte de la calibración, se estiman los parámetros de precio del activo, junto con las correlaciones entre los procesos. En un mundo ideal, los parámetros de correlación se determinarían preferentemente a partir de productos financieros de tipo correlación o productos híbridos. Sin embargo, esto resulta muy difícil (o imposible), ya que estos productos no se comercializan con suficiente frecuencia (tiemblan una liquidez de mercado muy limitada).

13.2.2. Aproximación para modelos híbridos de Heston

Como el modelo HHW no es afín, no es posible obtener una función característica directamente. Por tanto, con el objetivo de obtener aproximaciones de las expresiones en (13.24), «linealizamos» el modelo híbrido de Heston. A partir de esta aproximación, obtendremos la función característica.

El término $\eta\rho_{x,r}\sqrt{v(t)}$ de la matriz (13.24) se puede aproximar por su esperanza, esto es

$$\boxed{\eta\rho_{x,r}\sqrt{v(t)} \approx \eta\rho_{x,r}\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}].} \quad (13.26)$$

Tomando la esperanza de la variable estocástica, el modelo se convierte en afín, por lo que se dispone de la función característica correspondiente al modelo aproximado. En el Lema 13.2.1 se presentan las expresiones en forma cerrada para la esperanza y la varianza de $\sqrt{v(t)}$ (un proceso tipo CIR).

Lema 13.2.1 (Esperanza y varianza para un proceso CIR)

Para un tiempo $t > 0$ dado, la esperanza y la varianza de $\sqrt{v(t)}$, donde $v(t)$ es un proceso tipo CIR como en (8.18), vienen dadas por

$$\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}|\mathcal{F}(0)] = \sqrt{2\bar{c}(t,0)}e^{-\bar{\kappa}(t,0)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\bar{\kappa}(t,0)}{2}\right)^k \frac{\Gamma(\frac{1+\delta}{2}+k)}{\Gamma(\frac{\delta}{2}+k)}, \quad (13.27)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[\sqrt{v(t)}|\mathcal{F}(0)] &= \bar{c}(t,0)(\delta + \bar{\kappa}(t,0)) \\ &- 2\bar{c}(t,0)e^{-\bar{\kappa}(t,0)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\bar{\kappa}(t,0)}{2}\right)^k \frac{\Gamma(\frac{1+\delta}{2}+k)}{\Gamma(\frac{\delta}{2}+k)} \right)^2, \end{aligned} \quad (13.28)$$

donde

$$\bar{c}(t,0) = \frac{1}{4\kappa}\gamma^2(1-e^{-\kappa t}), \quad \delta = \frac{4\kappa\bar{v}}{\gamma^2}, \quad \bar{\kappa}(t,0) = \frac{4\kappa v(0)e^{-\kappa t}}{\gamma^2(1-e^{-\kappa t})}, \quad (13.29)$$

siendo $\Gamma(k)$ la función gamma, como en (5.49). \blacktriangleleft

Demostración. En Cox *et al.* (1985); Broadie y Kaya (2006), se muestra que, $v(t)|v(0)$, $t > 0$ se distribuye como $\bar{c}(t,0)$ por una variable aleatoria chi-cuadrado no central, $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t,0))$, con δ «grados de libertad» y parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t,0)$, es decir,

$$v(t)|v(0) \sim \bar{c}(t,0)\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t,0)), \quad t > 0. \quad (13.30)$$

Las correspondientes FDA y FDP son conocidas, dadas por (8.6) y (8.9), respectivamente. La función de densidad de $v(t)$ se puede expresar como

$$f_{v(t)}(x) := \frac{d}{dx} F_{v(t)}(x) = \frac{1}{\bar{c}(t,0)} f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t,0))}(x/\bar{c}(t,0)).$$

De acuerdo con Dufresne (2001), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}|\mathcal{F}(0)] &:= \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\bar{c}(t,0)} f_{\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t,0))}\left(\frac{x}{\bar{c}(t,0)}\right) dx \\ &= \sqrt{2\bar{c}(t,0)} \frac{\Gamma(\frac{1+\delta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta}{2})} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}, -\frac{\bar{\kappa}(t,0)}{2}\right) \end{aligned} \quad (13.31)$$

donde ${}_1F_1(a; b; z)$ es la denominada función hipergeométrica confluente, también conocida como la función de Kummer (1936) de primera especie, dada por

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (13.32)$$

donde $(a)_k$ y $(b)_k$ son símbolos de Pochhammer de la forma

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+k-1). \quad (13.33)$$

Empleando el principio de Kummer (véase Koepf (1998)), obtenemos que

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}, -\frac{\bar{\kappa}(t, 0)}{2}\right) = e^{-\bar{\kappa}(t, 0)/2} {}_1F_1\left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\bar{\kappa}(t, 0)}{2}\right). \quad (13.34)$$

Por tanto, utilizando (13.32) y (13.34), la expresión en (13.31) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sqrt{v(t)} \mid \mathcal{F}(0)\right] &= \sqrt{2\bar{c}(t, 0)} e^{-\bar{\kappa}(t, 0)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\bar{\kappa}(t, 0)}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\bar{c}(t, 0)} e^{-\bar{\kappa}(t, 0)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{\kappa}(t, 0)/2)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} + k\right)}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos la demostración para la esperanza.

Además, se conocen la media y la varianza del proceso $v(t)$, véase (8.12), ya que este sigue una distribución chi-cuadrado no central. Así, en combinación con los resultados para $\mathbb{E}\left[\sqrt{v(t)}\right]$ se finaliza la demostración. ■

La expresión analítica para la esperanza de $\sqrt{v(t)}$ en (13.27) es relativamente complicada y requiere de operaciones de alto coste computacional. A continuación, proporcionamos los detalles de una aproximación simplificada.

Aproximación de la esperanza $\mathbb{E}\left[\sqrt{v(t)}\right]$

Para obtener una aproximación de primer orden de (13.27), se puede aplicar el denominado «método delta» (véase Amstrup *et al.* (2006); Oehlert (1992), por ejemplo), con el que una función $g(X)$ se puede aproximar mediante una expansión de Taylor de primer orden en $\mathbb{E}[X]$, para una variable aleatoria X dada, con esperanza $\mathbb{E}[X]$ y varianza $\text{Var}[X]$. Asumiendo que g es una función suave y que existen los dos primeros momentos de X , la expansión de Taylor de primer orden de $g(x)$ en $\mathbb{E}[X]$ es

$$g(X) \approx g(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X]) \frac{\partial g}{\partial X}(\mathbb{E}[X]). \quad (13.35)$$

Como la varianza de $g(X)$ se puede aproximar por la varianza del lado derecho de (13.35), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[g(X)] &\approx \mathbb{V}\text{ar} \left[g(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X]) \frac{\partial g}{\partial X}(\mathbb{E}[X]) \right] \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial X}(\mathbb{E}[X]) \right)^2 \mathbb{V}\text{ar}[X].\end{aligned}\quad (13.36)$$

Empleando este resultado para la función $g(v(t)) = \sqrt{v(t)}$, tenemos que

$$\mathbb{V}\text{ar} \left[\sqrt{v(t)} \right] \approx \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}[v(t)]}} \right)^2 \mathbb{V}\text{ar}[v(t)] = \frac{1}{4} \frac{\mathbb{V}\text{ar}[v(t)]}{\mathbb{E}[v(t)]}. \quad (13.37)$$

Además, a partir de la definición de varianza, también sabemos que

$$\mathbb{V}\text{ar} \left[\sqrt{v(t)} \right] = \mathbb{E}[v(t)] - \left(\mathbb{E} \left[\sqrt{v(t)} \right] \right)^2, \quad (13.38)$$

por lo que, combinando las Ecuaciones (13.37) y (13.38) obtenemos la aproximación

$$\mathbb{E} \left[\sqrt{v(t)} \right] \approx \sqrt{\mathbb{E}[v(t)] - \frac{1}{4} \frac{\mathbb{V}\text{ar}[v(t)]}{\mathbb{E}[v(t)]}}. \quad (13.39)$$

Como $v(t)$ es un proceso raíz-cuadrada dado por

$$v(t) = v(0)e^{-\kappa t} + \bar{v}(1 - e^{-\kappa t}) + \gamma \int_0^t e^{\kappa(z-t)} \sqrt{v(z)} dW_v(z), \quad (13.40)$$

la esperanza $\mathbb{E}[v(t)|\mathcal{F}(0)] = \bar{c}(t,0)(\delta + \bar{\kappa}(t,0))$ y la varianza, $\mathbb{V}\text{ar}[v(t)|\mathcal{F}(0)] = \bar{c}^2(t,0)(2\delta + 4\bar{\kappa}(t,0))$, con $\bar{c}(t,0)$, δ , y $\bar{\kappa}(t,0)$ como en (13.29). Esto resulta en la siguiente aproximación.

Resultado 13.2.1 *La esperanza $\mathbb{E} \left[\sqrt{v(t)} \right]$, para un proceso estocástico $v(t)$ dado por (13.23), se puede aproximar mediante*

$$\mathbb{E} \left[\sqrt{v(t)} | \mathcal{F}(0) \right] \approx \sqrt{\bar{c}(t,0)(\bar{\kappa}(t,0) - 1) + \bar{c}(t,0)\delta + \frac{\bar{c}(t,0)\delta}{2(\delta + \bar{\kappa}(t,0))}} =: \mathcal{E}(t), \quad (13.41)$$

con $\bar{c}(t,0)$, δ , y $\bar{\kappa}(t,0)$ dados en el Lema 13.2.1, y donde κ , \bar{v} , γ y $v(0)$ son los parámetros dados en (13.23).

Como el Resultado 13.2.1 proporciona una aproximación explícita de $\mathbb{E} \left[\sqrt{v(t)} \right]$ en términos de una función determinista, sería posible, en principio, obtener la función característica correspondiente.

Limitaciones de la aproximación para $\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]$

Los parámetros que hacen que la expresión bajo la raíz cuadrada en la aproximación (13.41) sea no negativa resultan de resolver

$$\bar{c}(t, 0)(\bar{\kappa}(t, 0) - 1) + \bar{c}(t, 0)\delta + \frac{\bar{c}(t, 0)\delta}{2(\delta + \bar{\kappa}(t, 0))} \geq 0. \quad (13.42)$$

Dividiendo por $\bar{c}(t, 0) > 0$, tenemos que $2(\bar{\kappa}(t, 0) + \delta)^2 - 2(\bar{\kappa}(t, 0) + \delta) + \delta \geq 0$. Denotando $y = \bar{\kappa}(t, 0) + \delta$, obtenemos $2y^2 - 2y + \delta \geq 0$. La parábola es no negativa para el discriminante $4 - 4 \cdot 2 \cdot \delta \leq 0$, de modo que la expresión (13.41) es no negativa para $\delta = 4\kappa\bar{v}/\gamma^2 \geq \frac{1}{2}$.

Si se cumple la condición de Feller, la expresión bajo la raíz cuadrada está bien definida. Si $8\kappa\bar{v}/\gamma^2 \geq 1$ pero la condición de Feller no se cumple, la aproximación también es válida. Si la expresión bajo la raíz cuadrada en (13.41) es negativa, es conveniente utilizar, por razones de precisión, la aproximación introducida en el Lema 13.2.1.

La aproximación para $\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]$ en (13.41) sigue sin ser trivial, pudiendo causar problemas al obtener la función característica. Para determinar los coeficientes de la función característica, se necesita incorporar una rutina numérica para resolver las correspondientes EDOs. Sin embargo, la integración numérica ralentiza la valoración de opciones, con lo que el modelo resultaría menos atractivo. Con el objetivo de obtener una expresión en forma cerrada para la función característica, la esperanza $\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]$ en (13.41) se puede aproximar por una función de la forma

$$\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \approx a + be^{-ct} =: \tilde{\mathcal{E}}(t), \quad (13.43)$$

con a , b y c constantes obtenidas al igualar las funciones $\mathcal{E}(t)$ en (13.41) y $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ en (13.43), para $t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0$ y $t = 1$, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(t) &= \sqrt{\bar{v} - \frac{\gamma^2}{8\kappa}} = & a &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{E}}(t), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}(t) &= \sqrt{v(0)} = & a + b &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{E}}(t), \\ \lim_{t \rightarrow 1} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}(1) = a + be^{-c} = & & \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{\mathcal{E}}(t). \end{aligned} \quad (13.44)$$

Los valores de a , b y c se pueden obtener como

$$a = \sqrt{\bar{v} - \frac{\gamma^2}{8\kappa}}, \quad b = \sqrt{v(0)} - a, \quad c = -\log(b^{-1}(\mathcal{E}(1) - a)), \quad (13.45)$$

donde $\mathcal{E}(t)$ viene dado por (13.41). Los detalles sobre la validez de esta aproximación se puede encontrar en Grzelak y Oosterlee (2011).

Ejemplo 13.2.1

Realizamos un experimento numérico (véase la Figura 13.3) con el objetivo de evaluar numéricamente la calidad de la aproximación (13.45) de $\mathbb{E} [\sqrt{v(t)}]$ en (13.27).

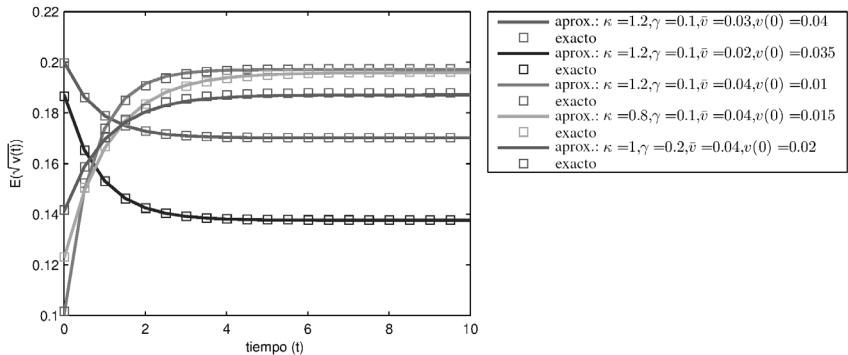


Figura 13.3: Aproximación $\mathbb{E} [\sqrt{v(t)}] \approx a + be^{-ct}$ (línea continua) y solución exacta dada por (13.27) (cuadrados) para 5 conjuntos de κ , γ , \bar{v} y $v(0)$.



Para cinco conjuntos de parámetros elegidos aleatoriamente, la aproximación (13.45) estima satisfactoriamente el valor de $\mathbb{E} [\sqrt{v(t)}]$ en (13.27). ♦

Función característica del modelo H1-HW

Denominamos el modelo aproximado resultante de (13.43), basado en (13.26), como el modelo H1-HW. Ahora, obtendremos la función característica para el mismo. El término no afín en la matriz (13.24) igual a $\eta\rho_{x,r}\sqrt{v(t)}$ se approxima mediante $\eta\rho_{x,r}\mathbb{E} [\sqrt{v(t)}]$.

Para simplificar, asumimos que la estructura temporal del tipo de interés, $\theta(t)$, es constante, $\theta(t) = \theta$, véase (11.36), siendo el modelo de Vašiček del Apartado 11.3.1. La función característica descontada del modelo H1-HW es de la forma

$$\phi_{\text{H1-HW}}(u; t, T) = \exp (\bar{A}(u, \tau) + \bar{B}(u, \tau)X(t) + \bar{C}(u, \tau)r(t) + \bar{D}(u, \tau)v(t)), \quad (13.46)$$

con las condiciones iniciales $\bar{A}(u, 0) = 0$, $\bar{B}(u, 0) = iu$, $\bar{C}(u, 0) = 0$, $\bar{D}(u, 0) = 0$. La función característica para el modelo H1-HW se puede obtener en forma cerrada, con la ayuda de los siguientes lemas.

Lema 13.2.2 (EDOs relativas al modelo H1-HW)

Las funciones $\bar{B}(u, \tau)$, $\bar{C}(u, \tau)$, $\bar{D}(u, \tau)$, y $\bar{A}(u, \tau)$ para $u \in \mathbb{C}$ y $\tau \geq 0$ de (13.46) para el modelo H1-HW verifican el sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{B}}{d\tau} &= 0, \quad \bar{B}(u, 0) = iu, \\ \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= -1 - \lambda\bar{C} + \bar{B}, \quad \bar{C}(u, 0) = 0, \\ \frac{d\bar{D}}{d\tau} &= \bar{B}(\bar{B} - 1)/2 + (\gamma\rho_{x,v}\bar{B} - \kappa)\bar{D} + \gamma^2\bar{D}^2/2, \quad \bar{D}(u, 0) = 0, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= \lambda\theta\bar{C} + \kappa\bar{v}\bar{D} + \eta^2\bar{C}^2/2 + \eta\rho_{x,r}\mathbb{E}\left[\sqrt{v(t)}\right]\bar{B}\bar{C}, \\ \bar{A}(u, 0) &= 0,\end{aligned}$$

con $\tau = T - t$, y donde $\kappa, \lambda, \theta, \eta, \rho_{x,r}$ y $\rho_{x,v}$ se corresponden con los parámetros del modelo HHW (13.23). \blacktriangleleft

Las expresiones anteriores se obtienen directamente aplicando la teoría de los procesos DA. Así, el siguiente lema proporciona la solución en forma cerrada para las funciones $\bar{B}(u, \tau)$, $\bar{C}(u, \tau)$, $\bar{D}(u, \tau)$ y $\bar{A}(u, \tau)$ de (13.46).

Lema 13.2.3 (Función característica del modelo H1-HW)

La solución del sistema de EDOs en el Lema 13.2.2 viene dada por

$$\begin{aligned}\bar{B}(u, \tau) &= iu, \\ \bar{C}(u, \tau) &= (iu - 1)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda\tau}), \\ \bar{D}(u, \tau) &= \frac{1 - e^{-D_1\tau}}{\gamma^2(1 - ge^{-D_1\tau})}(\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1), \\ \bar{A}(u, \tau) &= \lambda\theta I_1(\tau) + \kappa\bar{v}I_2(\tau) + \frac{1}{2}\eta^2I_3(\tau) + \eta\rho_{x,r}I_4(\tau),\end{aligned}$$

con $D_1 = \sqrt{(\gamma\rho_{x,v}iu - \kappa)^2 - \gamma^2iu(iu - 1)}$, y donde $g = \frac{\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1}{\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu + D_1}$.

Las integrales $I_1(\tau)$, $I_2(\tau)$ e $I_3(\tau)$ admiten una solución analítica, e $I_4(\tau)$ admite una solución semi-analítica, dadas por

$$\begin{aligned}I_1(\tau) &= \frac{1}{\lambda}(iu - 1)\left(\tau + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda\tau} - 1)\right), \\ I_2(\tau) &= \frac{\tau}{\gamma^2}(\kappa - \gamma\rho_{x,v}iu - D_1) - \frac{2}{\gamma^2}\log\left(\frac{1 - ge^{-D_1\tau}}{1 - g}\right), \\ I_3(\tau) &= \frac{1}{2\lambda^3}(i + u)^2(3 + e^{-2\lambda\tau} - 4e^{-\lambda\tau} - 2\lambda\tau), \\ I_4(\tau) &= iu \int_0^\tau \mathbb{E}\left[\sqrt{v(T-z)}\right]\bar{C}(u, z)dz \\ &= -\frac{1}{\lambda}(iu + u^2) \int_0^\tau \mathbb{E}\left[\sqrt{v(T-z)}\right](1 - e^{-\lambda z})dz.\end{aligned}$$

Demostración. De la condición inicial $\bar{B}(u, 0) = iu$, obviamente tenemos $\bar{B}(u, \tau) = iu$. Multiplicando los dos lados de la segunda EDO por $e^{\lambda\tau}$, tenemos

$$\frac{d}{d\tau} (e^{\lambda\tau} \bar{C}) = (iu - 1)e^{\lambda\tau}, \quad (13.47)$$

que, integrando ambos lados y utilizando la condición $\bar{C}(u, 0) = 0$, resulta en

$$\bar{C}(u, \tau) = (iu - 1)\lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda\tau}).$$

Empleando $\bar{a} := -\frac{1}{2}(u^2 + iu)$, $\bar{b} := \gamma\rho_{x,v}iu - \kappa$, y $\bar{c} := \frac{1}{2}\gamma^2$, las EDOs para $\bar{D}(u, \tau)$ e $I_2(\tau)$ vienen dadas por la ecuación de Riccati

$$\frac{d\bar{D}}{d\tau} = \bar{a} + \bar{b}\bar{D} + \bar{c}\bar{D}^2, \quad \bar{D}(u, 0) = 0, \quad (13.48)$$

$$I_2(\tau) = \kappa\bar{v} \int_0^\tau \bar{D}(u, z) dz. \quad (13.49)$$

Las expresiones en (13.48) y (13.49) son de la misma forma que las obtenidas para la dinámica original de Heston (1993). Entonces, sus soluciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{D}(u, \tau) &= \frac{-\bar{b} - D_1}{2c(1 - Ge^{-D_1\tau})} (1 - e^{-D_1\tau}), \\ I_2(\tau) &= \frac{1}{2\bar{c}} \left((-\bar{b} - D_1)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - Ge^{-D_1\tau}}{1 - G} \right) \right), \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$$\text{con } D_1 = \sqrt{\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c}}, \quad G = \frac{-\bar{b} - D_1}{-\bar{b} + D_1}.$$

La resolución de las integrales $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ e $I_4(\tau)$ es directa. La demostración concluye con las sustituciones correspondientes.

Nótese que, tomando $\mathbb{E} \left[\sqrt{v(T-s)} \right] \approx a + be^{-c(T-s)}$, con a , b y c dados en (13.43), se obtiene una expresión en forma cerrada para $I_4(\tau)$, dada por

$$\begin{aligned} I_4(\tau) &= -\frac{1}{\lambda}(iu + u^2) \left[\frac{b}{c} (e^{-ct} - e^{-cT}) + a\tau + \frac{a}{\lambda} (e^{-\lambda\tau} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{c - \lambda} e^{-cT} (1 - e^{-\tau(\lambda - c)}) \right]. \end{aligned} \quad (13.50)$$

El desarrollo anterior para el modelo H1-HW se basa en la suposición de correlación nula entre los procesos de varianza y tipo de interés. De manera similar, se puede obtener una generalización del modelo H1-HW para una matriz de correlaciones no nulas completa entre los procesos, utilizando aproximaciones similares de los términos no afines de la matriz de covarianzas, basadas en sus respectivas esperanzas. Sin embargo, es importante cuantificar los errores de aproximación que se comentan, así como su impacto sobre el precio de la opción.

Observación 13.2.2 (Análisis del error para el modelo H1-HW)

Empleando las EDPs de valoración se pueden comprender mejor las diferencias entre el modelo completo, *HHW*, y el modelo aproximado, *H1-HW*. En Guo et al. (2013), se ha llevado a cabo un análisis del clásico error, basado en EDPs, para examinar la calidad de la aproximación. En el caso del modelo de Heston Hull-White, la EDP de valoración es tridimensional. Mediante un cambio de medidas, de la medida spot a la medida *T-forward*, la EDP de valoración se reduce a una EDP bidimensional, lo que facilita el análisis. También se emplean otros elementos de la teoría de la probabilidad, así como de la teoría de las EDPs y el análisis numérico.



13.2.3. Simulación Monte Carlo para el modelo de Heston híbrido

Consideramos la simulación de Monte Carlo del sistema híbrido de EDEs genérico

$$\boxed{\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= r(t)dt + b_x(t, v(t))dW_x(t), \\ dv(t) &= a_v(t, v(t))dt + b_v(t, v(t))dW_v(t), \\ dr(t) &= a_r(t, r(t))dt + b_r(t, r(t))dW_r(t), \end{aligned}} \quad (13.51)$$

con $S(t_0) > 0$, $v(t_0) > 0$, $r(t_0) \in \mathbb{R}$, $dW_x(t)dW_v(t) = \rho_{x,v}dt$, $dW_x(t)dW_r(t) = \rho_{x,r}dt$, $dW_r(t)dW_v(t) = 0$, y donde las funciones $b_x(\cdot)$, $a_v(\cdot)$, $b_v(\cdot)$, $a_r(\cdot)$ y $b_r(\cdot)$ verifican las condiciones de crecimiento habituales (véase Shreve (2004), por ejemplo).

Observación 13.2.3 (Correlación)

Con un parámetro de correlación nulo, la generación de muestras de una distribución conjunta se puede realizar generando muestras de las distribuciones marginal independientemente, es decir, no se necesita simular la distribución conjunta.

En el modelo *SZHW*, la varianza y el tipo de interés están gobernados por un proceso con reversión a la media con distribución normal, por lo que la generación de muestras de su distribución conjunta es relativamente fácil, van Haastrecht et al. (2014).

Sin embargo, cuando la varianza sigue una distribución lognormal y esta correlada con un proceso de tipo de interés con distribución normal, la generación de muestras de la distribución conjunta no es en absoluto estándar. ▲

Observación 13.2.4 (Función característica)

La configuración del modelo en (13.51) es bastante genérica, permitiendo muchas alternativas para los coeficientes de volatilidad y deriva. Si, junto con la simulación de Monte Carlo, deseamos utilizar la función característica y, por tanto, técnicas de Fourier para valoración, el conjunto de parámetros del modelo válidos se restringe. Para permanecer dentro de la clase de modelos afines, se necesita que el cuadrado de los coeficientes de volatilidad y todas las posibles combinaciones, $b_i^2(t, v(t))$, $b_i(t, v(t))b_j(t, v(t))$, $i \neq j$, $i, j \in \{x, v, r\}$, sean lineales en las variables de estado. Esta es una restricción importante, ya

que solo disponemos de unos pocos modelos que la cumplan, lo que motivó el modelo H1-HW introducido en este capítulo. \blacktriangle

Comenzamos definiendo una malla de tiempo, $t_i = i \frac{T}{m}$, con $i = 0, \dots, m$, y $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. La forma más sencilla de simular el sistema (13.51) es mediante una discretización de Euler. Esto da lugar, utilizando $X(t) = \log(S(t))$, al sistema discreto

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \left[r_i - \frac{1}{2} b_x^2(t_i, v_i) \right] \Delta t_i + b_x(t_i, v_i) \sqrt{\Delta t_i} Z_x, \\ v_{i+1} &= v_i + a_v(t_i, v_i) \Delta t_i + b_v(t_i, v_i) \sqrt{\Delta t_i} Z_v, \\ r_{i+1} &= r_i + a_r(t_i, r_i) \Delta t_i + b_r(t_i, r_i) \sqrt{\Delta t_i} Z_r, \end{aligned} \quad (13.52)$$

con las $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, correladas del mismo modo que los movimientos brownianos en (13.51).

Aunque el sistema discreto de (13.52) se suele utilizar para valorar mediante simulación de Monte Carlo, este puede producir inestabilidades, ya que incorpora procesos tipo CIR, como en el modelo de Heston. El esquema de discretización de Euler puede dar lugar a valores negativos, haciendo que los resultados obtenidos por simulación de Monte Carlo sean poco realistas.

Planteamos un marco más general para la simulación de Monte Carlo del sistema (13.51), asumiendo que se conocen las distribuciones marginales de los procesos de varianza, $v(t)$, y tipo de interés, $r(t)$. Por tanto, se pueden generar muestras de estas distribuciones de una manera eficiente, utilizando los paquetes de *software* científico disponibles. En términos de movimientos brownianos independientes y aplicando la factorización de Cholesky de la matriz de correlación \mathbf{C} , es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, con

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho_{x,r} \\ 0 & 1 & \rho_{x,v} \\ \rho_{x,r} & \rho_{x,v} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \rho_{x,r} & \rho_{x,v} & \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2} \end{bmatrix}, \quad (13.53)$$

el sistema (13.51), para $X(t) = \log S(t)$, se puede reformular como

$$\begin{aligned} dr(t) &= a_r(t, r(t)) dt + b_r(t, r(t)) d\widetilde{W}_r(t), \\ dv(t) &= a_v(t, v(t)) dt + b_v(t, v(t)) d\widetilde{W}_v(t), \end{aligned}$$

y la dinámica del activo transformada logarítmicamente es

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(r(t) - \frac{1}{2} b_x^2(t, v(t)) \right) dt + \rho_{x,r} b_x(t, v(t)) d\widetilde{W}_r(t) \\ &\quad + \rho_{x,v} b_x(t, v(t)) d\widetilde{W}_v(t) + \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2} b_x(t, v(t)) d\widetilde{W}_x(t). \end{aligned}$$

Uno se puede preguntar si la expresión bajo la raíz cuadrada en (13.53) puede llegar a ser negativa. En ese caso, la matriz de correlación no sería definida positiva, por lo que no sería una matriz de correlación válida.

Integrando sobre el intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r(z) - \frac{1}{2} b_x^2(z, v(z)) \right) dz \\ &+ \rho_{x,r} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b_x(z, v(z)) d\widetilde{W}_r(z) + \rho_{x,v} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b_x(z, v(z)) d\widetilde{W}_v(z) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b_x(z, v(z)) d\widetilde{W}_x(z). \end{aligned} \quad (13.54)$$

La representación de x_{i+1} resultante forma la base para un procedimiento genérico de simulación de Monte Carlo.

El modelo de Heston Hull-White

Tomando ciertas funciones específicas en (13.51), se pueden recuperar algunos sistemas de EDEs conocidos. Seleccionando

$$\begin{aligned} b_x(t, v(t)) &= \sqrt{v(t)}, \\ a_v(t, v(t)) &= \kappa(\bar{v} - v(t)), \quad b_v(t, v(t)) = \gamma \sqrt{v(t)}, \\ a_r(t, r(t)) &= \lambda(\theta(t) - r(t)), \quad b_r(t, r(t)) = \eta, \end{aligned} \quad (13.55)$$

el sistema en (13.51) resulta en el modelo de Heston Hull-White de (13.23). La técnica de Monte Carlo para el modelo de Heston estándar presentada en (9.60) se puede emplear directamente para la discretización de x_{i+1} en (13.54), es decir,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r(z) - \frac{1}{2} v(z) \right) dz + \rho_{x,r} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_r(z) \\ &+ \frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \left(v_{i+1} - v_i - \kappa \bar{v} \Delta t_i + \kappa \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(z) dz \right) \\ &+ \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_x(z). \end{aligned}$$

Agrupando los diferentes términos de la discretización para x_i tenemos que

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + k_0 + k_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(z) dz + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(z) dz + k_2(v_{i+1} - v_i) \\ &+ \rho_{xr} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_r(z) + k_3 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(z)} d\widetilde{W}_x(z), \end{aligned} \quad (13.56)$$

con

$$k_0 = -\frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \kappa \bar{v} \Delta t_i, \quad k_1 = \kappa k_2 - \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}, \quad k_3 = \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2}.$$

Es difícil determinar analíticamente las integrales en la discretización anterior. Entonces, aplicamos el esquema de discretización de Euler a (13.56), lo que resulta en la aproximación

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + k_0 + k_1 v_i \Delta t_i + r_i \Delta t_i + k_2 (v_{i+1} - v_i) \\ &+ \rho_{x,r} \sqrt{v_i} (\widetilde{W}_r(t_i) - \widetilde{W}_r(t_i)) + k_3 \sqrt{v_i} (\widetilde{W}_x(t_{i+1}) - \widetilde{W}_x(t_i)). \end{aligned} \quad (13.57)$$

donde $\widetilde{W}_r(t_{i+1}) - \widetilde{W}_r(t_i) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t_i} \widetilde{Z}_r$ y $\widetilde{W}_x(t_{i+1}) - \widetilde{W}_x(t_i) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t_i} \widetilde{Z}_x$, con las variables \widetilde{Z}_r y \widetilde{Z}_x i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\approx x_i + k_0 + k_1 v_i \Delta t_i + r_i \Delta t_i + k_2 (v_{i+1} - v_i) \\ &+ \rho_{x,r} \sqrt{v_i \Delta t_i} \widetilde{Z}_r + k_3 \sqrt{v_i \Delta t_i} \widetilde{Z}_x. \end{aligned} \quad (13.58)$$

Para la dinámica del proceso de tipo de interés dada por

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta d\widetilde{W}_r(t),$$

la discretización de Euler da lugar a la aproximación

$$r_{i+1} \approx r_i + \lambda \theta(t_i) \Delta t_i - \lambda r_i \Delta t_i + \eta \sqrt{\Delta t_i} \widetilde{Z}_r. \quad (13.59)$$

En resumen, la simulación de Monte Carlo para el modelo HHW se puede realizar mediante el esquema de discretización

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= \bar{c}(t_{i+1}, t_i) \chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)), \\ r_{i+1} &\approx r_i + \lambda \theta(t_i) \Delta t_i - \lambda r_i \Delta t_i + \eta \sqrt{\Delta t_i} \widetilde{Z}_r, \\ x_{i+1} &\approx x_i + k_0 + (k_1 \Delta t_i + k_2) v_i + r_i \Delta t_i + k_2 v_{i+1} \\ &+ \sqrt{v_i \Delta t_i} (\rho_{x,r} \widetilde{Z}_r + k_3 \widetilde{Z}_x), \end{aligned}$$

con

$$k_0 = -\frac{\rho_{x,v}}{\gamma} \kappa \bar{v} \Delta t_i, \quad k_1 = \kappa k_2 - \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{\rho_{x,v}}{\gamma}, \quad k_3 = \sqrt{1 - \rho_{x,r}^2 - \rho_{x,v}^2},$$

y

$$\begin{aligned} \bar{c}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{\gamma^2}{4\kappa} (1 - e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}), \quad \delta = \frac{4\kappa \bar{v}}{\gamma^2}, \\ \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i) &= \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)}}{\gamma^2 (1 - e^{-\kappa(t_{i+1}-t_i)})} v_i, \end{aligned}$$

con las variables aleatorias \tilde{Z}_r y \tilde{Z}_x siendo $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes y la variable aleatoria $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i))$ siguiendo una distribución chi-cuadrado no central con δ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t_{i+1}, t_i)$.

El esquema de simulación anterior se basa en la generación de muestras de la distribución chi-cuadrado no central, que suele estar disponible en los paquetes estadísticos³. Como alternativa, se puede utilizar el esquema QE del Apartado 9.3.4.

13.2.4. Modelo HHW vs. modelo SZH W

Comparamos el modelo H1-HW de (13.26) y (13.43), con el modelo SZH W (presentado en el Apartado 13.1.3) mediante un experimento numérico. Para ambos modelos, el proceso de tipo de interés $r(t)$ está gobernado por un modelo short-rate correlado con distribución normal, por lo que solo tenemos que fijarnos en las diferencias entre los procesos de volatilidad.

La volatilidad $\sigma(t)$ en el modelo de Schöbel-Zhu evoluciona de acuerdo con un proceso con distribución normal Ornstein-Uhlenbeck, mientras que, en el modelo de Heston, la volatilidad está gobernada por $\sqrt{v(t)}$, con $v(t)$ distribuido como $\bar{c}(t, 0)$ por una variable aleatoria chi-cuadrado no central $\chi^2(\delta, \bar{\kappa}(t, 0))$.

Primero determinamos bajo qué condiciones $\sqrt{v(t)}$ sigue, aproximadamente, una distribución normal, ya que $\sigma(t)$ en el modelo de Schöbel-Zhu está normalmente distribuida. Para cualquier tiempo, $t > 0$, la raíz cuadrada del proceso de varianza $v(t)$ se puede aproximar mediante

$$\sqrt{v(t)} \approx \mathcal{N} \left(\mathcal{E}(t), \bar{c}(t, 0) - \frac{\bar{c}(t, 0)\delta}{2(\delta + \bar{\kappa}(t, 0))} \right), \quad (13.60)$$

con $\bar{c}(t, 0)$, δ y $\bar{\kappa}(t, 0)$ de (13.29) y $\mathcal{E}(t)$ de (13.41).

La aproximación normal (13.60) resulta satisfactoria para un valor alto de grados de libertad δ o para un parámetro de no centralidad $\bar{\kappa}(t, 0)$ grande. En particular, $\delta \gg 0$ implica que $4\kappa\bar{v} \gg \gamma^2$, lo que está estrechamente relacionado con la condición de Feller, $2\kappa\bar{v} > \gamma^2$. Entonces, cuando se cumple la condición de Feller, el modelo de Heston tiene una estructura de volatilidad similar al modelo de Schöbel-Zhu. En la Figura 13.4 (gráfico de la izquierda), se confirma esta observación. Sin embargo, cuando la condición de Feller no se verifica, las volatilidades de los modelos de Heston y Schöbel-Zhu difieren significativamente, ya que la volatilidad en el modelo de Heston da lugar a colas mucho más pesadas que el modelo de Schöbel-Zhu. Esto puede afectar a la calibración de los modelos a datos de mercado con una volatilidad implícita (sonrisa o mueca) muy marcada (gráfico de la derecha).

Evaluamos también el rendimiento del modelo durante el procedimiento de calibración a datos de mercado. Calibraremos los modelos SZH W y H1-HW (la versión afín del modelo de HHW) a volatilidades implícitas del índice S&P500 (27/09/2010) con precio spot 1145.88. Para ambos modelos la correlación entre el activo y el tipo de interés, $\rho_{x,r}$, es +30 %.

³ MATLAB cuenta con la función ncx2rnd().

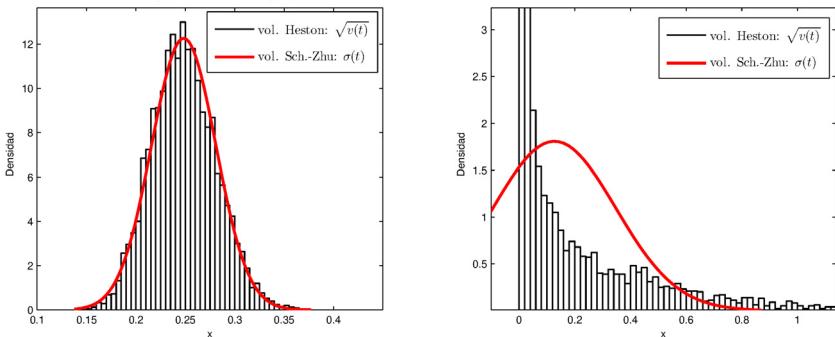


Figura 13.4: Histograma para $\sqrt{v(t)}$ (modelo de Heston) y densidad para $\sigma(t)$ (modelo de Schöbel-Zhu), con $T = 2$. Izquierda: se cumple la condición de Feller ($\kappa = 1.2$, $v(0) = \bar{v} = 0.063$, $\gamma = 0.1$). Derecha: no se cumple la condición de Feller ($\kappa = 0.25$, $v(0) = \bar{v} = 0.063$, $\gamma = 0.63$, como en Antonov (2007))).



Los resultados de calibración, en la Tabla 13.2, confirman que el modelo H1-HW es más «flexible» que el modelo Schöbel-Zhu Hull-White. Las diferencias son más pronunciadas para strikes grandes, en los que el error del modelo híbrido de Heston afín es hasta 20 veces más pequeño que el error del modelo SZH.

13.3. Perfiles de exposición, CVA y modelos híbridos

Como ya vimos en el Apartado 12.3, la exposición se define como la pérdida potencial futura sin recuperación, véase (12.46), esto es

$$E(t) := \max(V(t), 0), \quad V(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t)}{M(T)} H(T, \cdot) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

La exposición evoluciona con el tiempo a medida que el mercado se mueve con la volatilidad, por lo que a menudo no se puede expresar en forma cerrada. Para cuantificar la exposición, se necesita calcular las cantidades exposición esperada, EE, véase (12.48), y exposición potencial futura, EPF, véase (12.49), de las pérdidas futuras, para un número grande de escenarios sobre un conjunto de pasos de tiempo. Esta es una de las partes más complejas del cálculo del Credit Value Adjustment, CVA. Por consiguiente, se suelen emplear métodos numéricos (simulación de Monte Carlo) para estimar el valor, la exposición y la distribución de los contratos financieros durante su vida útil. Estos métodos numéricos consisten en tres etapas: una etapa hacia adelante en la que se generan las trayectorias de los escenarios futuros del activo, una etapa hacia atrás en la que se valoran los derivados financieros (los valores MtM del

Tabla 13.2: Resultados de calibración para los modelos híbridos de Schöbel-Zhu (SZH_W) y H1-HW.

| T | Strike | Mercado | SZH _W | H1-HW | err.(SZH _W) | err.(H1-HW) |
|-------|--------|---------|------------------|-------|-------------------------|-------------|
| T=6m | 40 % | 57.61 | 54.02 | 57.05 | 3.59 % | -0.56 % |
| | 100 % | 22.95 | 25.21 | 21.57 | -2.26 % | -1.38 % |
| | 120 % | 15.9 | 18.80 | 16.38 | -2.90 % | 0.48 % |
| T=1a | 40 % | 48.53 | 47.01 | 48.21 | 1.52 % | 0.32 % |
| | 100 % | 24.49 | 24.97 | 24.28 | -0.48 % | 0.21 % |
| | 120 % | 19.23 | 19.09 | 19.14 | 0.14 % | 0.09 % |
| T=10a | 40 % | 36.76 | 36.15 | 36.75 | 0.61 % | 0.01 % |
| | 100 % | 29.18 | 29.47 | 29.18 | -0.29 % | 0.00 % |
| | 120 % | 27.66 | 27.93 | 27.62 | -0.27 % | 0.04 % |



contrato) y una etapa hacia atrás en la que se calcula la exposición a lo largo de las trayectorias futuras del activo generadas.

Pykhtin y Zhu (2007) introdujeron un marco genérico de Monte Carlo para el cálculo de perfiles de exposición para productos derivados *over-the-counter* (OTC). Con el método Monte Carlo se generan trayectorias discretas del activo, desde el instante inicial al vencimiento. A lo largo de estas trayectorias, se determinan los valores de la opción en cada «fecha de monitorización» del CVA. El cálculo de los perfiles de exposición requiere de métodos numéricos eficientes, ya que la demanda computacional crece muy rápidamente con respecto al número de trayectorias de Monte Carlo.

El método de diferencias finitas propuesto por de Graaf *et al.* (2014), que proporciona soluciones numéricas aproximadas de la correspondiente ecuación en derivadas parciales, puede resultar adecuado, ya que suele aproximar los precios de la opción en una malla de valores del subyacente. Esta característica se puede explotar en el contexto de la EE, ya que se utilizan todos los puntos de la malla para recuperar las funciones de densidad de probabilidad de la opción. La complejidad computacional del cálculo del CVA se hace más evidente cuando se considera una cartera de productos completa, ya que tendríamos muchos derivados financieros dentro de la misma. Otros factores de mercado que afectan a la dinámica del activo, tales como una volatilidad estocástica y un tipo de interés estocástico, también incrementan el coste computacional. En la práctica, las técnicas más utilizadas para aproximar los valores esperados en los instantes futuros son las variantes de Monte Carlo basadas en regresión, véase, por ejemplo, Longstaff y Schwartz (2001); Jain y Oosterlee (2015); Feng y Oosterlee (2017); Feng *et al.* (2016); Feng (2017), debido a que pueden abordar problemas de gestión del riesgo para altas dimensiones.

13.3.1. CVA y exposición

Como vimos en el Apartado 12.3, el CVA representa el precio del riesgo de contraparte, calculado a partir de la exposición esperada, EE. Aquí, nos centraremos en el cálculo del CVA, EE y EPF bajo la medida riesgo neutro. El cálculo de la EPF bajo la medida mundo real se puede encontrar en, por ejemplo, Feng *et al.* (2016).

Los tres elementos clave en el cálculo del CVA son la tasa de severidad, la exposición descontada y la probabilidad de default/supervivencia de la contrapartida (recordamos la definición de probabilidad de supervivencia en la Definición 1.1.1). Asumiendo independencia entre ellos, la fórmula para el cálculo del CVA viene dada por (12.56), esto es

$$\text{CVA}(t, T) \approx \underbrace{(1 - R)}_{\text{LGD}} \sum_{i=1}^M \text{EE}(t, T_i) \cdot \underbrace{(F_{t_D}(T_i) - F_{t_D}(T_{i-1}))}_{\text{PD}},$$

donde el LGD se fija a partir de la información de mercado y la probabilidad de default (PD) se suele obtener a partir de la curva de probabilidad de supervivencia, en el mercado de CDS, Brigo y Mercurio (2007).

13.3.2. Ejemplo para opciones europeas y bermuda

Calculamos el CVA, la EE y la PFE para dos opciones distintas. Las opciones bermuda no han sido estudiadas en detalle en este libro. Estas opciones se pueden ejercer anticipadamente, es decir, antes del vencimiento T , en ciertas fechas futuras preestablecidas. Denotamos este conjunto de fechas de ejercicio anticipado por \mathcal{T}_E . El payoff recibido por un ejercicio «inmediato» de la opción en tiempo t_i viene dado por

$$H(t_i, S(t_i)) := \max(\bar{\alpha}(S(t_i) - K), 0), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{\alpha} = 1, & \text{para una call,} \\ \bar{\alpha} = -1, & \text{para una put,} \end{cases} \quad (13.61)$$

donde K es el strike y $S(t_i)$ es el valor del subyacente en tiempo t_i .

En tomador de la opción determina la estrategia de ejercicio con el objetivo de maximizar el beneficio. Asumimos que el tomador de la opción no está influenciado por la calidad crediticia del emisor de la opción cuando decide ejercer anticipadamente. Esto se puede generalizar, véase Feng (2017), por ejemplo.

El tiempo de espera óptimo (véase la Definición 10.2.1), denotado por t_s , es el instante óptimo para ejercer la opción. Ejercer la opción anticipadamente debería maximizar el payoff esperado en tiempo $t = 0$, es decir,

$$V^{\text{Berm}}(t_0) = \max_{t_s \in \mathcal{T}_E} \mathbb{E} \left[\frac{M(t_0)}{M(t_s)} \cdot H(t_s, S(t_s)) \mid \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (13.62)$$

Para valorar opciones bermuda mediante el método Monte Carlo se determina la estrategia de ejercicio óptima para cada trayectoria del activo generada. En cada fecha de ejercicio t_i , las trayectorias de Monte alcanzarán un valor $S(t_i)$ para el activo. El tomador de la opción compara el payoff resultante del ejercicio inmediato en t_i con el payoff futuro esperado, debido a la «continuación» de la opción. De esta manera, la estrategia de ejercicio óptima se basa en determinar, para cada t_i , un valor del activo específico, $S^*(t_i)$, que divide el espacio de posibles valores del activo en dos partes, que se corresponden las decisiones de «ejercer» o «no ejercer».

El valor de continuación de una opción en tiempo t_i , se puede expresar como la esperanza condicionada del valor descontado de la opción en un tiempo posterior t_{i+1} . Así, el valor de continuación de la opción se puede escribir como

$$c(t_i) := \mathbb{E} \left[\frac{M(t_i)}{M(t_{i+1})} V(t_{i+1}) \middle| \mathcal{F}(t_i) \right], \quad (13.63)$$

donde $V(t_{i+1})$ es el valor de la opción en el instante de tiempo t_{i+1} .

La valoración de opciones bermuda mediante la denominada programación dinámica regresiva, da lugar un algoritmo de inducción regresiva, como en Longstaff y Schwartz (2001), y se puede expresar como

$$V^{\text{Berm}}(t_i) = \begin{cases} H(t_i, S(t_m)), & \text{para } t_m = T, \\ \max \{c(t_i), H(t_i, S(t_i))\}, & \text{para } t_i \in \mathcal{T}_E, \\ c(t_i), & \text{para } t_i \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_E. \end{cases} \quad (13.64)$$

De forma similar a la valoración de opciones bermuda, se puede determinar el perfil de exposición en instantes de tiempo futuros de opciones europeas empleando simulación. El valor de la opción europea a vencimiento T es igual a la función de payoff, $V(t_m) = H(t_m, S(t_m))$. En los instantes de tiempo $t_i < T$, el valor de la opción europea es igual a payoff esperado condicionado y descontado, esto es

$$V(t_i) := \mathbb{E} \left[\frac{M(t_i)}{M(t_m)} \cdot H(t_m, S(t_m)) \middle| \mathcal{F}(t_i) \right], \quad (13.65)$$

donde $H(t_m, S(t_m))$ es el payoff en tiempo $t_m = T$.

Empleando la ley de la esperanza total, el valor futuro de la opción en $t_i < t_m$, también se puede calcular iterando hacia atrás, es decir,

$$\begin{aligned} V(t_i) &= \mathbb{E} \left[\frac{M(t_i)}{M(t_{i+1})} \cdot \mathbb{E} \left[\frac{M(t_{i+1})}{M(t_m)} \cdot H(t_m, S(t_m)) \middle| \mathcal{F}(t_{i+1}) \right] \middle| \mathcal{F}(t_i) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{M(t_i)}{M(t_{i+1})} \cdot V(t_{i+1}) \middle| \mathcal{F}(t_i) \right] = c(t_i). \end{aligned} \quad (13.66)$$

Impacto de la volatilidad y del tipo de interés estocásticos

En los últimos años se ha realizado un gran esfuerzo de investigación para desarrollar métodos Monte Carlo eficientes y precisos para la valoración de opciones bermuda como, por ejemplo, Longstaff y Schwartz (2001); Jain y Oosterlee (2015), así como métodos basados en EDPs, como Zvan *et al.* (1998); d'Halluin *et al.* (2004); Forsyth y Vetzal (2002); In 't Hout (2017).

La exposición de la trayectoria j en el instante de tiempo t_i se calcula como

$$E_i^j = \begin{cases} 0, & \text{si se ejerce la opción,} \\ c(t_i), & \text{si se continua con la opción.} \end{cases}$$

Los valores de la EE y la EPF en tiempo t_i se pueden aproximar por

$$\begin{aligned} \text{EE}(t_0, t_i) &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_i^j, \\ \text{PFE}(t_0, t_i) &\approx \inf \{x \in \mathbb{R} : 0.974 \leq F_{E(t_i)}(x)\}, \end{aligned}$$

con la EPF(t_0, t_i) como en (12.49). Para las trayectorias en la que la opción se ha ejercido en algún instante de tiempo t_i , la exposición de las mismas para $t > t_i$ es igual a cero, debido a que la opción ha terminado.

Analizamos el impacto de la volatilidad estocástica y del tipo de interés estocástico sobre los perfiles de exposición y sobre el CVA, véase también Feng y Oosterlee (2017); Feng (2017). Consideramos el efecto de incluir la volatilidad estocástica y el tipo de interés estocástico sobre los indicadores de pérdidas futuras (es decir, CVA, EE y EPF). Un proceso de volatilidad estocástica puede reproducir la superficie de volatilidad implícita observada en el mercado de derivados financieros, mientras que la aleatoriedad en el tipo de interés puede contribuir de manera destacada sobre los precios de los derivados financieros, especialmente sobre los derivados a largo plazo, Lauterbach y Schultz (1990). Se eligen los modelos clásicos de Black-Scholes (BS) y Heston, pero también los modelos Heston Hull-White (HHW), véase Grzelak y Oosterlee (2011), y Black-Scholes Hull-White (BSHW). Los dos últimos procesos han sido estudiados en este capítulo. Sea la colección de fechas de monitorización discreta equiespaciadas dada por

$$\mathcal{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T, \Delta t = t_{i+1} - t_i\}.$$

Se emplea el esquema Quadratic Exponential (QE) dentro del método MC para una simulación precisa de los modelos tipo Heston.

El CVA se calcula mediante la fórmula (12.56), con $LGD = 1$. Para determinar los perfiles de exposición, las opciones se valoran en las fechas de monitorización. La simulación se realiza con $N = 10^6$ trayectorias MC y $\Delta t = 0.1$. Empleamos un paso de tiempo pequeño para simular la dinámica del activo para mejorar la precisión del cálculo del CVA, y asumimos que la opción bermuda solo se puede ejercer en ciertas fechas, es decir, $\mathcal{T}_E \subset \mathcal{T}$. Se asume que la probabilidad de

supervivencia es independiente de la exposición con una intensidad constante, expresada como

$$F_{t_D}(t) = 1 - \exp(-0.03t),$$

para el período $t \in [0, T]$. Se utilizan los siguientes parámetros para los modelos, véase Feng y Oosterlee (2017); Feng (2017):

$$S_0 = 100, v_0 = 0.05, r_0 = 0.02, \kappa = 0.3, \gamma = 0.6,$$

$$\bar{v} = 0.05, \lambda = 0.01, \eta = 0.01, \theta = 0.02, \rho_{x,v} = -0.3, \rho_{x,r} = 0.6.$$

Se eligen los parámetros para los modelos de tal manera que las opciones put europeas con vencimiento T tienen el mismo valor bajo todos ellos. Por ejemplo, bajo el modelo de Black-Scholes se utiliza el tipo de interés «implícito», es decir, $r_T = -\log(P(0, T))/T$, además de calcular la volatilidad implícita. Bajo el modelo de Heston, se emplean los parámetros mencionados anteriormente para el proceso y se calcula en correspondiente tipo de interés. Bajo el modelo BSHW, los parámetros del proceso Hull-White son los propuestos, y se determina una volatilidad adecuada.

Como en Feng y Oosterlee (2017), utilizamos el «porcentaje» de CVA, definido por $\left(100 \cdot \frac{CVA(t_0)}{V(0)}\right) \%$. En la Tabla 13.3 se presenta el porcentaje de CVA para opciones put europeas con dos vencimientos, $T = 1$ y $T = 5$, para los strikes $K = \{80, 100, 120\}$. Se puede observar que el porcentaje de CVA apenas cambia con el strike. Sin embargo, las opciones europeas con vencimiento $T = 5$ exhiben un porcentaje de CVA más alto que aquellas con vencimiento $T = 1$. Con los parámetros elegidos, se observa un impacto pequeño de la volatilidad estocástica y del tipo de interés estocástico sobre el porcentaje de CVA.

Tabla 13.3: *CVA(%) de opciones europeas con $T = 1$, $T = 5$ y strikes $K = \{80, 100, 120\}$.*

| Opción europea, CVA (%) | | | | | |
|-------------------------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | K/S_0 | BS | Heston | BSHW | HHW |
| $T = 1$ | 80 % | 2.951 (0.010) | 2.959 (0.003) | 2.953 (0.005) | 2.949 (0.005) |
| | 100 % | 2.956 (0.011) | 2.958 (0.003) | 2.952 (0.002) | 2.952 (0.002) |
| | 120 % | 2.955 (0.002) | 2.959 (0.001) | 2.953 (0.001) | 2.952 (0.001) |
| $T = 5$ | 80 % | 13.93 (0.036) | 13.94 (0.021) | 13.88 (0.016) | 13.93 (0.027) |
| | 100 % | 13.95 (0.039) | 13.96 (0.010) | 13.90 (0.003) | 13.94 (0.018) |
| | 120 % | 13.92 (0.010) | 13.95 (0.007) | 13.90 (0.005) | 13.94 (0.010) |

En la Figura 13.5 se representan los valores de EE y EPF a lo largo del tiempo para una opción put bermuda que está at-the-money. En la Figura 13.5(b), los valores de EPF para el modelo HHW están relativamente cercanos a los del modelo de Heston, así como los valores de EPF para el modelo BSHW son muy similares a los del modelo BS. Según los parámetros del modelo elegidos, la volatilidad estocástica contribuye de manera más importante a la EPF que el tipo de interés estocástico. Por tanto, añadir una volatilidad estocástica tiene

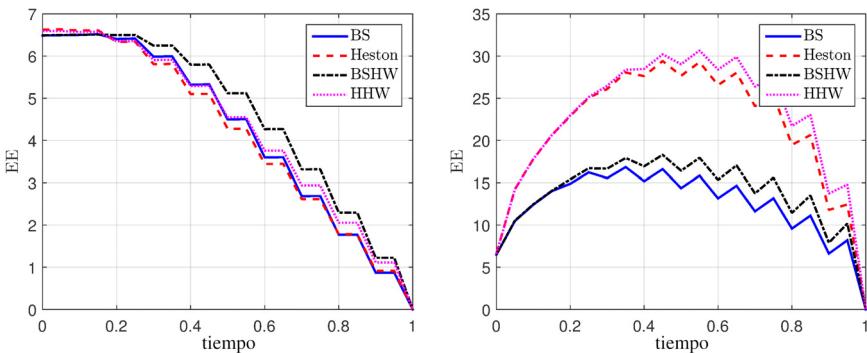


Figura 13.5: Impacto de la volatilidad y del tipo de interés estocásticos sobre la exposición con distintas dinámicas para el activo. Se toma $K = 100$ (at-the-money) y $T = 1$. Izquierda: EE. Derecha: PFE.

más impacto sobre las colas de la derecha de los perfiles de exposición que sobre la EE. Las Figuras 13.5(a) y 13.5(b) muestran que el tipo de interés estocástico incrementa los valores de la EE futura de las opciones bermuda, mientras que la volatilidad estocástica tiene el efecto contrario. El tipo de interés estocástico desempeña un papel importante en el caso de un derivado con vencimiento más largo, produciendo perfiles de EPF crecientes; la volatilidad estocástica parece tener efecto sobre los valores de EPF en los momentos iniciales del contrato.

13.4. Ejercicios

Ejercicio 13.1 En este ejercicio, se empleará el método COS para valorar una opción call vanilla bajo el modelo Black-Scholes Hull-White (BSHW). Se asume que el vector de estado $[S, r]^T$, bajo la medida riesgo neutro, verifica

$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sigma S(t)dW_x(t), \\ dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \end{aligned}$$

con los parámetros $\sigma, \lambda, \eta, dW_x(t)dW_r(t) = \rho dt$ y una función determinista $\theta(t)$ dada.

- a. Aplicar la transformación $\tilde{r}(t) = r(t) - \psi(t)$, donde

$$\psi(t) = e^{-\lambda t}r_0 + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-z)}\theta(z)dz. \quad (13.67)$$

Utilizar las siguientes variables, $X(t) = \log(S(t)), \tilde{x}(t) = X(t) - \Psi(t)$, donde $\Psi(t) = \int_0^t \psi(z)dz$, para mostrar que

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(t) &= \left(\tilde{r}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_x(t), \\ d\tilde{r}(t) &= -\lambda\tilde{r}(t)dt + \eta dW_r(t). \end{aligned}$$

- b. Deducir que la función característica descontada para $\mathbf{X}(T) = [X(T), r(T)]^T$, con estado inicial $\mathbf{X}(t) = [X(t), r(t)]^T$ en t , es de la forma

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{X}, t, T) = e^{-\int_t^T \psi(z)dz + i\mathbf{u}^T [\Psi(T), \psi(T)]^T} e^{\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{B}_x(\mathbf{u}, \tau)\tilde{x}(t) + \bar{B}_r(\mathbf{u}, \tau)\tilde{r}(t)},$$

donde $\tau = T - t$.

Tomar $\mathbf{u} = [u, 0]^T$ y mostrar que \bar{A} y $\bar{B} = [\bar{B}_x, \bar{B}_r]^T$ satisfacen un sistema de EDOs de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= -r_0 + \bar{B}^T a_0 + \frac{1}{2} \bar{B}^T c_0 \bar{B}, \\ \frac{dB}{d\tau} &= -r_1 + a_1^T \bar{B} + \frac{1}{2} \bar{B}^T c_1 \bar{B}, \end{aligned}$$

con condiciones de contorno $A(u, 0) = 0, B_x(u, 0) = iu, B_r(u, 0) = 0$. Definir todos los términos.

- c. Resolver este sistema de EDOs y obtener la función característica para $\theta(t) = \theta$ constante.
- d. Implementar el método COS para una opción call europea bajo el modelo BSHW, con payoff $\max(S(T) - K, 0)$. Representar los valores de las opciones en función del strike $K \in [S_0/2, 2S_0]$, para los siguientes parámetros: $\lambda = 1, T = 0.5, \theta = 0.1, \rho = -0.6, \eta = 0.1, \sigma = 0.3, r_0 = 0.2, S_0 = 1$.
- e. Determinar la solución analítica de la opción call europea bajo el modelo BSHW y compararla con la solución numérica obtenida en el punto anterior.

Ejercicio 13.2 Para un vector de estado $\mathbf{X}(t) = [S(t), r(t)]^T$ considerar el modelo BSHW, con correlación $dW_x(t)dW_r(t) = \rho dt$. Tomar $\rho = 0.5, \theta = 0.1, \eta = 0.3, \sigma = 0.3, S_0 = 1, r_0 = \theta, T = 1$, y dos posibles valores para lambda, $\lambda = 1.0$ o $\lambda = 0.2$.

- Mostrar que la solución de $S(t), t > 0$ se puede expresar como

$$S(t) = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(r(z) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dz + \sigma W_x(t) \right)$$

- Construir una cartera autofinanciada y obtener la EDP de valoración.

Pista: La construcción de la EDP es similar a la llevada a cabo para el modelo de Heston.

- Realizar un simulación de Monte Carlo para valorar una opción put con $K = 1.1$, empleando los esquemas de discretización de Milstein y Euler, para los dos valores de λ , e interpretar los resultados obtenidos. ¿Cómo se pueden mejorar los resultados de Monte Carlo?
- Determinar la función característica y utilizar el método COS para recuperar la función de densidad del modelo BSHW dado.
- Emplear el método COS para valorar la opción put con $K = 1.1$ y comparar los resultados con los obtenidos en el Ejercicio 13.2b.

Ejercicio 13.3 El modelo Black-Scholes Hull-White se define, bajo la medida riesgo neutro \mathbb{Q} , como

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r(t)dt + \sigma dW_x^\mathbb{Q}(t), \\ dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r^\mathbb{Q}(t), \end{aligned}$$

siendo todos los parámetros positivos y la correlación $dW_x^\mathbb{Q}(t)dW_r^\mathbb{Q}(t) = \rho_{x,r}dt$. Mostrar que, para el precio forward en T_2 , $S_F(t, T_2) := S(t)/P(t, T_2)$, se obtiene la dinámica

$$\frac{dS_F(t, T_2)}{S_F(t, T_2)} = \bar{\sigma}_F(t)dW_F(t), \quad S_F(t_0, T_2) = \frac{S_0}{P(t_0, T_2)}, \quad (13.68)$$

con $\bar{\sigma}_F(t) = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 \bar{B}_r^2(T_2 - t) - 2\rho_{x,r}\sigma\eta\bar{B}_r(T_2 - t)}$, y $\bar{B}_r(\tau) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda\tau} - 1)$.

Ejercicio 13.4 Considerar el modelo híbrido Black-Scholes Hull-White, con los parámetros λ, σ, η y coeficiente de correlación $\rho_{x,r}$. Mostrar que, para $X(t) = \log S(t)$, se verifica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{r(t)}{M(t)} \mathbb{1}_{S(t) > K} \right] &= P(0, t) \mathbb{E}^t [r(t) | X > \log(K)] (1 - F_X(\log(K))) \\ &= P(0, t) \left(\mu_r^t(t) + \sigma_r^t(t) \mathbb{E}^t [Z | X > \log(K)] \right) (1 - F_{S(t)}^t(K)), \end{aligned}$$

donde \mathbb{E}^t indica la esperanza bajo la medida t -forward (siendo el numerario el BCC con vencimiento t). Además, $r(t) \sim \mu_r^t(t) + \sigma_r^t(t)Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donde

$$\mu_r^t(t) = r(0)e^{-\lambda t} + \int_0^t \tilde{\theta}(u)e^{-\lambda(t-u)}du, \quad \tilde{\theta}(u) := \lambda\theta(u) + \frac{\eta^2}{\lambda} (e^{-\lambda(t-u)} - 1),$$

y

$$\sigma_r^t(t) = \left(\frac{\eta^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \right)^{1/2}.$$

Ejercicio 13.5 Considerar el modelo BSHW con $S(t_0) = 1$, $\sigma = 0.08$ y $\lambda = 0.5$, $\eta = 0.03$ y $P(0, t) = \exp(-0.01t)$. La correlación es $\rho_{x,r} = -0.5$. Considerar una cartera que conste de:

- 1 acción.
 - 1 swap pagador con inicio en $T_1 = 1$, vencimiento $T_2 = 10$, frecuencia de 1 año (el tipo swap K se selecciona tal que el valor del swap hoy es 0) y nominal unidad $N = 1$.
 - 1 opción call sobre la acción con strike $K = 1.2$ y vencimiento $T = 12$.
- Considerar la probabilidad de default igual a 0.2 para todos las fechas de pago del swap, T_i , y la tasa de recuperación, $R_c = 0.5$. Calcular el perfil de exposición esperada y la EPF para el cuantil 0.05.
 - Calcular, mediante simulación de Monte Carlo, el valor de la cartera y el CVA. Comentar los resultados.
 - ¿Qué derivado financiero debería añadirse a la cartera (pensando en el neteo) para que el cargo por CVA se redujese?

Ejercicio 13.6 Implementar el método Monte Carlo con los esquemas de Euler y AES para el modelo HHW, así como el método COS para el modelo aproximado H1-HW.



- Comparar los resultados obtenidos con estos códigos para el mismo conjunto de parámetros, en términos de convergencia y tiempo de ejecución, para alcanzar una precisión específica en la valoración de opciones.
- ¿Para qué configuración de parámetros se esperan diferencias entre las dos implementaciones basadas en Monte Carlo? Confirmar esta intuición mediante resultados numéricos.
- ¿Para qué configuración de parámetros se esperan diferencias entre los resultados para el HHW y el H1-HW? Mostrar los correspondientes resultados.

Ejercicio 13.7 Siguiendo un procedimiento similar al de la aproximación de los términos no afines de la matriz de covarianzas instantánea para el modelo de Heston híbrido en el Apartado 13.2.2, incluir la correlación adicional, $\rho_{r,v}$, entre el tipo de interés, $r(t)$, y la varianza estocástica, $v(t)$.

- Mostrar que, para $\mathbf{X}(t) = [x(t), v(t), r(t)]^T$, el modelo tiene la matriz de covarianzas instantánea simétrica dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} := \sigma(\mathbf{X}(t))\sigma(\mathbf{X}(t))^T = \begin{bmatrix} v(t) & \rho_{x,v}\gamma v(t) & \rho_{x,r}\eta\sqrt{v(t)} \\ * & \gamma^2 v(t) & \rho_{r,v}\gamma\eta\sqrt{v(t)} \\ * & * & \eta^2 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}. \quad (13.69)$$

- Determinar la ecuación de Kolmogorov hacia atrás para la función característica, con condición final.

- c. Se observa el problema de afinidad en dos términos de la matriz (13.69), esto es, en los elementos (1, 3) y (2, 3): $\Sigma_{(1,3)} = \rho_{x,r}\eta\sqrt{v(t)}$, $\Sigma_{(2,3)} = \rho_{r,v}\gamma\eta\sqrt{v(t)}$. Utilizar las aproximaciones deterministas $\Sigma_{(1,3)} \approx \rho_{x,r}\eta\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]$ y $\Sigma_{(2,3)} \approx \rho_{r,v}\gamma\eta\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]$.

Las representaciones del modelo Heston Hull-White y del modelo en (13.23) con $\rho_{r,v} \neq 0$ para $p = 0$ están intimamente relacionadas. Especificar esta relación en función de los coeficientes de su correspondiente FC.

Ejercicio 13.8 La dinámica del activo, $S(t)$, en el denominado modelo Heston-CIR es

$$\begin{cases} dS(t)/S(t) = r(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_x^{\mathbb{Q}}(t), & S(0) > 0 \\ dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t), & v(0) > 0, \\ dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta\sqrt{r(t)}dW_r^{\mathbb{Q}}(t), & r(0) > 0, \end{cases} \quad (13.70)$$

con $dW_x^{\mathbb{Q}}(t)dW_v^{\mathbb{Q}}(t) = \rho_{x,v}dt$, $dW_x^{\mathbb{Q}}(t)dW_r^{\mathbb{Q}}(t) = \rho_{x,r}dt$ y $dW_v^{\mathbb{Q}}(t)dW_r^{\mathbb{Q}}(t) = 0$.

Asumir que el término no afín en la EDP de valoración, $\Sigma_{(1,3)}$, se puede aproximar por

$$\Sigma_{(1,3)} \approx \eta\rho_{x,r}\mathbb{E}[\sqrt{r(t)}\sqrt{v(t)}] \stackrel{\mathbb{E}}{=} \eta\rho_{x,r}\mathbb{E}[\sqrt{r(t)}]\cdot\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]. \quad (13.71)$$

Dado que los procesos involucrados son del mismo tipo, las esperanzas en (13.71) se pueden determinar de la misma manera que en el Apartado 13.2.2.

- Obtener la función característica para el activo transformado, $X(t) = \log S(t)$, y las correspondientes EDOs de Riccati.
- Resolver las EDOs de Riccati.

Ejercicio 13.9 Obtener la EDP para el modelo HHW bajo la medida T-forward. Para reducir la complejidad, es conveniente intercambiar medidas de valoración, esto es, utilizar el precio forward, $S_F(t, T)$, definido como

$$S_F(t, T) = \frac{S(t)}{P(t, T)}, \quad (13.72)$$

con $P(t, T)$ el bono cupón cero que vence en tiempo T , que paga 1 unidad monetaria en el instante T . Cambiando de la medida riesgo neutro, \mathbb{Q} , a la medida T -forward, \mathbb{Q}^T , el descuento se «desacopla» del operador esperanza, es decir

$$V(t, S, v) = P(t, T)\mathbb{E}^T[\max(S_F(T, T) - K, 0)|\mathcal{F}(t)], \quad (13.73)$$

donde la variable independiente r ya no aparece como argumento.

Determinar la dinámica del forward $S_F(t, T)$ en (13.72) mediante la fórmula de Itô. Implementar el esquema de Euler para el modelo HHW y comparar la valoración bajo las medidas \mathbb{Q} y T -forward.

Ejercicio 13.10 Para este ejercicio consideramos el modelo SZHW.

- Implementar la simulación de Monte Carlo con Euler para el modelo SZHW.
- Comprobar la convergencia de la simulación de Monte Carlo, disminuyendo el paso de tiempo Δt e incrementando el número de trayectorias de Monte Carlo.

- c. Obtener la función característica del modelo SZH.W.
- d. Implementar el código para el método COS, basado en la función característica del modelo SZH.W. Comparar el tiempo de ejecución y la convergencia del método con el esquema de Monte Carlo.
- e. Confirmar el impacto sobre la curva de volatilidad implícita producido por los cambios en los parámetros, como se observa en la Figura 13.6.
- f. Investigar el efecto de las correlaciones entre las distintas EDEs del modelo SZH.W sobre la volatilidad implícita para vencimientos T largos.

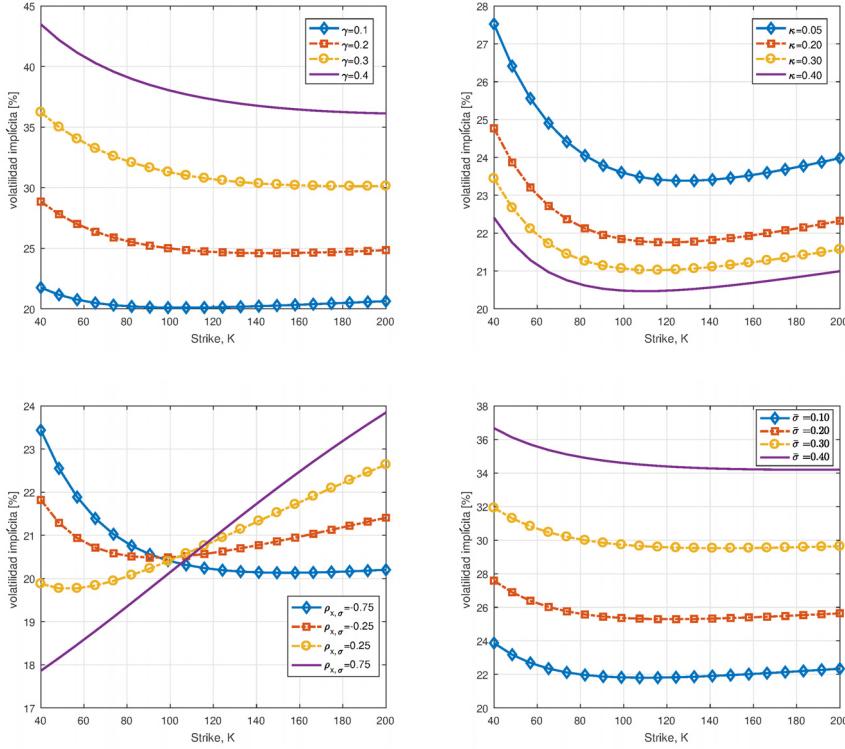


Figura 13.6: Influencia de los parámetros del modelo SZH.W sobre la volatilidad implícita. Los parámetros de referencia son $\sigma_0 = 0.1$, $\gamma = 0.11$, $\rho_{r,\sigma} = 0.32$, $\rho_{x,\sigma} = -0.42$, $\rho_{x,r} = 0.3$, $\kappa = 0.4$, $\bar{\sigma} = 0.05$, $T = 5$, $\lambda = 0.425$, $\eta = 0.1$ y $P(0, T) = e^{-0.025T}$. Arriba a la izquierda: impacto de γ . Arriba a la derecha: impacto de κ . Abajo a la izquierda: impacto de $\rho_{x,r}$. Abajo a la derecha: impacto de $\bar{\sigma}$.



CAPÍTULO 14

Modelos de tipo de interés avanzados y generalizaciones

En este capítulo:

Cuando se consideran derivados de tipos de interés «no demasiado complicados», los modelos short-rate suelen ser precisos y funcionar bien. Sin embargo, la hipótesis de tipos instantáneos es debatible por lo que, en la literatura reciente, se ha introducido una clase más genérica de modelos matemáticos que describen la dinámica de los tipos de interés *forward*. Estos modelos se denominan modelos de mercado. En el **Apartado 14.1** se estudiará el modelo de mercado Libor. El conocido (y ampliamente instaurado) modelo de mercado Libor lognormal, presentado bajo distintas medidas de valoración, se estudiará en el **Apartado 14.2**. Este modelo de mercado lognormal tiene sus limitaciones, ya que no es capaz de modelar las curvas de volatilidad implícita (sonrisa o mueca) del tipo de interés que se observan en los mercados monetarios. También explicaremos el concepto de «ajuste por convexidad», que se tiene que incorporar a los modelos de mercado en el caso de retrasos en los pagos. Introducimos los modelos CEV y Libor con difusión desplazada en el **Apartado 14.3**, donde también presentaremos la extensión con volatilidad estocástica del modelo de mercado Libor. Este capítulo finaliza con el **Apartado 14.4**, abordando algunos conceptos de la gestión del riesgo moderna, tales como el modelado de tipos de interés negativos o el entorno multicurva.

Palabras clave de este capítulo: tipos Libor, modelo de mercado Libor, sonrisa de volatilidad implícita, difusión desplazada, tipos de interés negativos.

14.1. Modelo de mercado Libor

Desde que fue introducido por Brace *et al.* (1997) y Jamshidian (1997), el modelo de mercado Libor (LMM) ha tenido mucha popularidad en la industria financiera, debido principalmente al hecho de que las primitivas del modelo se pueden relacionar directamente con los productos y cantidades observados en el mercado monetario, tales como los tipos Libor forward y las volatilidades implícitas de Black para caplets, por ejemplo. En este marco, se pueden obtener soluciones en forma cerrada para caps y swaptions europeos (aunque no con la misma formulación), ya que el LMM se basa en el supuesto de que el tipo Libor forward sigue una distribución lognormal, bajo su propio numerario. La metodología de valoración bajo la medida forward, introducida por Jamshidian (1987, 1989) y Geman *et al.* (1995), resulta muy conveniente para la valoración de varios contratos de tipos de interés. La modelización del LMM también se puede encuadrar en el marco HJM. Las técnicas fundamentales para valorar derivados de tipo de interés parten del trabajo original de Heath, Jarrow y Morton (HJM) de finales de los 1980s, adaptado para el modelado de tipo de interés.

Algunos productos complejos de renta fija, tales como ciertos tipos de swaptions, suelen incluir flujos de caja en distintos instantes de tiempo. Como la valoración de estos productos no se puede descomponer en una secuencia de pagos independientes, la tarea de desarrollar un modelo que sea matemáticamente consistente y que se ajuste a las fórmulas ya establecidas en el mercado (como las variantes del modelo de Black-Scholes para la valoración de derivados de tipos de interés) es complicada. Por ello, se presenta una dinámica genérica del LMM, que se diferenciará de la dinámica del LMM lognormal.

14.1.1. Especificaciones del modelo de mercado Libor

Un modelo de tipo de interés debería proporcionar dinámicas libres de arbitraje para todos los tipos Libor y facilitar la valoración de caplets y floorlets, de manera similar a la fórmula de Black-Scholes estándar de mercado, bajo la suposición de lognormalidad, al mismo tiempo que, por otro lado, debería ser capaz de valorar derivados de tipo de interés complejos, como los swaptions.

El modelo que cumple estos requisitos es el reconocido modelo de mercado Libor (LMM), también conocido como el modelo BGM, véase Brace *et al.* (1997); Jamshidian (1997); Miltersen *et al.* (1997). Recordamos la definición de tipo Libor de (12.1).

Definición 14.1.1 (Tipo Libor)

Para $t \leq T_{i-1}$, el tipo Libor viene dado por

$$\begin{aligned}\ell(t; T_{i-1}, T_i) &= \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)} \right) \\ &= \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right),\end{aligned}\tag{14.1}$$

con $P(t, T_i)$ el BCC que paga en tiempo T_i . Por comodidad, utilizaremos la notación corta $\ell_i(t) := \ell(t; T_{i-1}, T_i)$.

La definición del tipo Libor se puede conectar con el marco HJM. En (11.5), el tipo forward se ha definido como

$$P_f(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Además, en la Definición 11.2.1 se aplica una capitalización compuesta continua. Si se asume una capitalización simple, obtenemos

$$P_f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{1 + (T_2 - T_1)R(t, T_1, T_2)},$$

utilizando $\tau_2 = T_2 - T_1$ y $\ell(t; T_1, T_2) := R(t, T_1, T_2)$, se tiene que

$$\frac{1}{1 + \tau_2 \ell(t; T_1, T_2)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Por tanto, obtenemos (14.1), con $i = 2$.

Entonces, los tipos Libor, $\ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$, son tipos forward que se definen por tres instantes de tiempo, el tiempo presente t_0 al que se modela el tipo mediante una EDE, su «fecha de caducidad», T_{i-1} (también denominada «fecha de fijación» o «fecha de reseteo») cuando el tipo Libor se fija y es, por tanto, conocido, y su fecha de vencimiento T_i en la que finaliza el tipo Libor, con $t_0 \leq T_{i-1} \leq T_i$. Así, el tipo Libor $\ell(t; T_{i-1}, T_i)$ se determina en su fecha de reseteo T_{i-1} , después de la cual se conoce el tipo Libor, y ya no consta de ninguna volatilidad. El tipo Libor $\ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$ se puede interpretar como un tipo que se acumula durante el período $[T_{i-1}, T_i]$, pero que se observa «hoy» en t_0 .

Otro elemento de un tipo forward es el «período de acumulación», denotado por $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, que es el tiempo entre las fechas de fijación y vencimiento, véase la Figura 14.1. En la práctica, el período de acumulación no tiene por qué ser, necesariamente, el período exacto entre T_{i-1} y T_i , ya que habitualmente aparece un «retraso de reseteo» adicional. Este retraso en el reseteo suele ser de unos pocos días hábiles, y depende de la moneda para la que se calcula el tipo forward (en la zona euro, es 2 días hábiles).



Figura 14.1: Esquema de un tipo forward, $\ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$.

Otra fecha importante para la evaluación del contrato es la que considera el «retraso de pago», τ^* , $T_p := T_i + \tau^*$, como en la Figura 14.2. La fecha de pago

de un contrato es típicamente unos días después del vencimiento del mismo. Sin embargo, τ^* se suele despreciar en la evaluación, tal que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_i + \tau^*)} \right] \approx \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_i)} \right], \quad (14.2)$$

ya que, habitualmente, τ^* son solo unos pocos días hábiles.

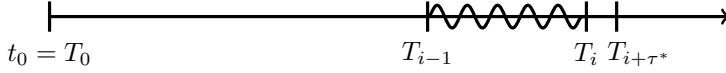


Figura 14.2: Esquema de un tipo forward, $\ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$, con retraso de pago.

En el caso de que el retraso de pago τ^* tienda a ser un período largo, se necesitaría aplicar una corrección de convexidad (que se tratará en el Apartado 14.2.4).

Para un tipo Libor $\ell_i(t)$, consideramos la dinámica

$$d\ell_i(t) = \bar{\mu}_i^{\mathbb{P}}(t)dt + \bar{\sigma}_i(t)dW_i^{\mathbb{P}}(t), \quad \text{para } i = 1 \dots m, \quad (14.3)$$

con una cierta función, potencialmente estocástica, de volatilidad $\bar{\sigma}_i(t)$ y con $W_i^{\mathbb{P}}(t)$ un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{P} , que puede estar correlado de acuerdo con

$$dW_i^{\mathbb{P}}(t)dW_j^{\mathbb{P}}(t) = \rho_{i,j}dt.$$

La correlación $\rho_{i,j}$ puede ser dependiente del tiempo. Denotamos por \mathbb{Q}^i la medida T_i -forward, asociada con el BCC $P(t, T_i)$ como numerario, y por \mathbb{E}^{T_i} el operador esperanza correspondiente a esta medida. A partir de los resultados obtenidos por Harrison y Kreps (1979) se sabe que, dado un mercado libre de arbitraje y para un numerario estrictamente positivo cuyo precio viene dado por $g_1(t)$, existe una medida para la cual $\frac{g_2(t)}{g_1(t)}$ es una martingala para todos los precios de producto $g_2(t)$. Así, se verifica la igualdad de martingala dada por

$$\boxed{\mathbb{E}^{T_i} \left[\frac{P(T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)}} \quad (14.4)$$

Empleando la igualdad en (14.1), los lados izquierdo y derecho de (14.4) se pueden reescribir tal que

$$\mathbb{E}^{T_i} \left[1 + \tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = 1 + \tau_i \ell(t; T_{i-1}, T_i),$$

o

$$\mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}(t)] = \ell(t; T_{i-1}, T_i).$$

Este resultado se explica mediante la siguiente simple analogía. Como $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ es una martingala bajo la medida \mathbb{Q}^i , también lo es para el tipo Libor

$\ell(t; T_{i-1}, T_i)$. Para ver que $\ell(t; T_{i-1}, T_i)$ es en efecto una martingala, podemos observar el lado derecho de (14.1), que representa el precio de un activo negociado (el diferencial entre dos bonos cupón cero con nominal $\frac{1}{\tau_i}$). Por tanto, el lado izquierdo de la misma ecuación también tiene que ser negociable. Si consideramos la medida \mathbb{Q}^i , la medida T_i -forward asociada al numerario $P(t, T_i)$, el tipo forward, $\ell(t; T_{i-1}, T_i)$, debería ser una martingala, por lo que debería estar libre de términos de deriva. Esto implica que debería ser posible transformar la EDE (14.3) a

$$d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i(t)dW_i^i(t), \quad \text{para } t < T_{i-1}, \quad (14.5)$$

con $\bar{\mu}_i^i(t) = 0$, y $\bar{\sigma}_i(t)$ siendo la volatilidad instantánea del tipo forward $\ell(t; T_{i-1}, T_i)$. $W_i^i(t)$ es el movimiento browniano de $\ell_i(t)$ bajo la medida T_i -forward. Así, el subíndice en W_i^i se refiere al tipo Libor específico, mientras que el superíndice se refiere a la medida.

De este modo, representamos de manera explícita que «solo» el i -ésimo tipo Libor, $\ell_i(t)$, es una martingala bajo la medida forward \mathbb{Q}^i . Si, por ejemplo, representásemos la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$ bajo la medida T_j -forward (con $i \neq j$), esta vendría dada por

$$d\ell_i(t) = \bar{\mu}_i^j(t)dt + \bar{\sigma}_i(t)dW_i^j(t),$$

con un cierto término de deriva no nulo $\bar{\mu}_i^j(t)$. La forma explícita de la deriva $\mu_i^j(t)$, que depende de la medida \mathbb{Q}^j , será estudiada en los siguientes apartados.

14.1.2. Modelo de mercado Libor en el marco HJM

En este apartado mostramos que el modelo de mercado Libor también se encuadra en la clase de los modelos HJM.

Como vimos en la Definición 11.2.1, cualquier BCC, $P(t, T)$, se puede relacionar directamente con el tipo forward instantáneo, $f^r(t, T)$, mediante la expresión

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f^r(t, z) dz \right).$$

De este modo, podemos conectar $\ell_i(t)$ con el tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$, esto es

$$\tau_i \ell_i(t) + 1 = \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} = \exp \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f^r(t, z) dz \right), \quad (14.6)$$

y, por tanto, la dinámica para (14.6) viene dada por

$$d(\tau_i \ell_i(t)) = d \left[\exp \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f^r(t, z) dz \right) \right]. \quad (14.7)$$

Empleando la notación $\xi(t) := \int_{T_{i-1}}^{T_i} f^r(t, z) dz$ y aplicando el lema de Itô, obtenemos

$$d e^{\xi(t)} = e^{\xi(t)} d\xi(t) + \frac{1}{2} e^{\xi(t)} (d\xi(t))^2. \quad (14.8)$$

Los límites de integración en (14.7) no dependen de t , por lo que la dinámica de $\xi(t)$ viene dada por

$$d\xi(t) = d \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} f^r(t, z) dz \right] = \int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz. \quad (14.9)$$

Agrupando términos en (14.8) y (14.9), y volviendo a (14.7), tenemos que

$$\begin{aligned} d(\tau_i \ell_i(t)) &= \exp \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f^r(t, z) dz \right) \\ &\times \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz + \frac{1}{2} \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz \right)^2 \right], \end{aligned}$$

que, usando (14.6), se puede simplificar como

$$\frac{d(\tau_i \ell_i(t))}{\tau_i \ell_i(t) + 1} = \int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz + \frac{1}{2} \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz \right)^2. \quad (14.10)$$

A partir de la definición de tipo forward instantáneo, $f^r(t, T)$, bajo la medida T_i -forward, obtenemos

$$df^r(t, T) = \alpha^{T_i}(t, T) dt + \bar{\eta}(t, T) dW^i(t), \quad (14.11)$$

con

$$\alpha^{T_i}(t, T) = -\bar{\eta}(t, T) \left(\int_T^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dz \right), \quad (14.12)$$

donde $\bar{\eta}(t, T)$ es la notación genérica para la volatilidad del tipo forward instantáneo $f^r(t, T)$ en el marco HJM. La integral del lado derecho de (14.10) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_{T_{i-1}}^{T_i} df^r(t, z) dz &= \int_{T_{i-1}}^{T_i} \alpha^{T_i}(t, z) dt dz + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dW^i(t) dz \quad (14.13) \\ &= \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \alpha^{T_i}(t, z) dz \right) dt + \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dz \right) dW^i(t). \end{aligned}$$

Sustituyendo (14.13) en (14.10) obtenemos la dinámica para el tipo Libor $\ell_i(t)$ dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(t)}{\ell_i(t) + \frac{1}{\tau_i}} &= \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} \alpha^{T_i}(t, z) dz + \frac{1}{2} \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dz \right)^2 \right] dt \\ &+ \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{\eta}(t, z) dz \right) dW^i(t). \end{aligned}$$

Utilizando (14.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(t)}{\ell_i(t) + \frac{1}{\tau_i}} &= \left[\frac{1}{2} E^2(t; T_{i-1}, T_i) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{\eta}(t, z) E(t; z, T_i) dz \right] dt \\ &+ E(t; T_{i-1}, T_i) dW^i(t), \end{aligned} \quad (14.14)$$

con $E(t; a, b) = \int_a^b \bar{\eta}(t, z) dz$. La función de volatilidad instantánea $\bar{\eta}(t, z)$ en (14.14) aún está por definir. Diferentes elecciones de $\bar{\eta}(t, z)$ dan lugar a distintas dinámicas del modelo de mercado Libor.

14.2. Modelo de mercado Libor lognormal

En (14.5) hemos introducido la forma genérica del tipo Libor $\ell_i(t)$ bajo la medida T_i -forward. Al mismo tiempo, en (14.14), se obtuvo la dinámica del mismo tipo Libor en el marco HJM. En el modelo de mercado Libor lognormal, la volatilidad, $\bar{\sigma}_i(t)$ en (14.1), es de la forma

$$\bar{\sigma}_i(t) = \sigma_i(t) \ell_i(t),$$

con un parámetro de volatilidad $\sigma_i(t)$ dependiente del tiempo. Entonces, la dinámica del tipo Libor lognormal, $\ell_i(t)$, es

$$\frac{d\ell_i(t)}{\ell_i(t)} = \sigma_i(t) dW^i(t), \quad \text{para } t < T_{i-1}.$$

La dinámica del LMM lognormal también se puede obtener a partir de un elección específica de la volatilidad HJM $\bar{\eta}(t, T)$, en (14.14). Tomando $\bar{\eta}(t, z) = \eta(t)$, que «no» depende de z , tenemos que

$$\bar{\eta}(t, z) = \eta(t) = \frac{\ell_i(t) \sigma_i(t)}{1 + \tau_i \ell_i(t)}, \quad (14.15)$$

lo que implica que $E(t; a, b) = \eta(t)(b - a)$. El término de deriva en (14.14) es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E^2(t; T_{i-1}, T_i) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \eta(t)E(t; z, T_i)dz &= \\ \frac{1}{2}\eta^2(t)(T_i - T_{i-1})^2 - \eta(t) \int_{T_{i-1}}^{T_i} E(t; z, T_i)dz &= \\ \frac{1}{2}\eta^2(t)(T_i - T_{i-1})^2 - \eta^2(t) \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - z)dz &= \\ 0. \end{aligned}$$

Con deriva nula, la dinámica del tipo Libor lognormal bajo el marco HJM viene dada por

$$d\ell_i(t) = \left(\ell_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \right) E(t; T_{i-1}, T_i) dW^i(t),$$

que, con $\bar{\eta}(t, z)$ como en (14.15), es igual a

$$d\ell_i(t) = \sigma_i(t)\ell_i(t)dW^i(t), \quad \text{para } t \leq T_{i-1}. \quad (14.16)$$

En este contexto, el tipo Libor $\ell_i(t)$ se escribe como

$$d\ell_i(t) = \sigma_i(t)\ell_i(t)\mathbf{L}_i(t)d\widetilde{\mathbf{W}}(t),$$

donde $\mathbf{L}_i(t)$ es la i -ésima fila de la matriz $\mathbf{L}(t)$, con el generador HJM dado por

$$\bar{\eta}(t, z) = \frac{\ell_i(t)\sigma_i(t)}{1 + \tau_i\ell_i(t)}\mathbf{L}_i(t). \quad (14.17)$$

14.2.1. Cambio de medida en el LMM

En (14.5) se describe la dinámica del tipo Libor bajo la medida T_i -forward mediante la EDE, $d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i(t)dW^i_i(t)$, para $t < T_{i-1}$, donde $\bar{\sigma}_i(t)$ es un cierto proceso dependiente del estado. En este apartado, llevamos a cabo un cambio de medidas y determinaremos la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$ bajo la medida T_{i-1} -forward. Este resultado se generalizará para la dinámica bajo cualquier medida, T_j , con $j \neq i$. Como vimos en el Capítulo 7, para realizar una transformación de la medida se requiere de la dinámica de la derivada de Radon-Nikodym $\lambda_i^{i-1}(t)$, para un cambio de la medida T_i -forward a la medida T_{i-1} -forward, esto es

$$\lambda_i^{i-1}(t) = \frac{d\mathbb{Q}^{i-1}}{d\mathbb{Q}^i} \Big|_{\mathcal{F}(t)} := \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t_0, T_{i-1})} \frac{P(t_0, T_i)}{P(t, T_i)}. \quad (14.18)$$

Utilizando la definición del tipo Libor en (14.1), la derivada de Radon-Nikodym en (14.18) se puede expresar, en términos de $\ell_i(t)$, como

$$\lambda_i^{i-1}(t) = \frac{P(t_0, T_i)}{P(t_0, T_{i-1})} (\tau_i \ell_i(t) + 1), \quad (14.19)$$

con la correspondiente dinámica dada por

$$d\lambda_i^{i-1}(t) = \frac{P(t_0, T_i)}{P(t_0, T_{i-1})} \tau_i d\ell_i(t). \quad (14.20)$$

Con $d\ell_i(t)$ como en (14.5) y empleando (14.18), la dinámica de $\lambda_i^{i-1}(t)$ viene dada por

$$d\lambda_i^{i-1}(t) = \lambda_i^{i-1}(t) \frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dW_i^i(t). \quad (14.21)$$

Aplicando el Teorema de Girsanov, véase Teorema 7.2.2, la dinámica de $\lambda_i^{i-1}(t)$ define la transformación de la medida

$$dW_i^{i-1}(t) = -\frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dt + dW_i^i(t). \quad (14.22)$$

Por tanto, la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$, bajo la medida T_{i-1} -forward es

$$\begin{aligned} d\ell_i(t) &= \bar{\sigma}_i(t) dW_i^i(t) \\ &= \bar{\sigma}_i(t) \frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dt + \bar{\sigma}_i(t) dW_i^{i-1}(t), \end{aligned}$$

para alguna función de volatilidad $\bar{\sigma}_i(t)$.

Esta fórmula también se puede utilizar para otros cambios de medida de un paso de tiempo. En concreto, cuando cambiamos de la medida T_i a la medida T_{i+1} , se requiere de la transformación de la medida dada por

$$dW_i^i(t) = -\frac{\tau_{i+1} \bar{\sigma}_{i+1}(t)}{\tau_{i+1} \ell_{i+1}(t) + 1} dt + dW_i^{i+1}(t), \quad (14.23)$$

utilizando (14.22) con i e $i+1$. La dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$ bajo la medida T_{i+1} -forward se puede determinar de la misma manera.

La función $\bar{\sigma}_i(t)$ puede contener un término de volatilidad estocástica, correlaciones o el propio tipo Libor (como en el caso lognormal). Existen dos formulaciones estándar para expresar la dinámica del modelo de mercado Libor que son particularmente útiles. Se diferencian en la medida bajo la cual se presentan los modelos. Generalmente, el LMM se obtiene bajo las medias spot o terminal. Estas variantes se estudiarán en los siguientes apartados.

14.2.2. El LMM bajo la medida terminal

En el apartado anterior, vimos cómo cambiar la dinámica de tipo Libor de la medida T_i -forward a la medida T_{i-1} -forward, y también entre las medidas T_i -forward y T_{i+1} -forward. Ahora generalizamos el concepto y mostramos cómo se define la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$ bajo la medida T_m -forward, donde $i < m$. El modelo de mercado Libor bajo la medida terminal se debería definir de tal manera que todos los tipos Libor se expresen bajo la medida T_m -forward. El término «medida terminal» representa la medida asociada con un bono cupón cero «final», basado en el último tipo Libor en el contrato. Dada una estructura temporal, $0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_m < T^*$, los correspondientes tipos Libor son $\ell_i(t)$, $i \in \{1, \dots, m-1\}$, así como $\ell_m(t)$, que indica el último tipo Libor. Empleando la transición entre las medidas forward de dos instantes de tiempo consecutivos, T_i y T_{i+1} , de (14.23), llevamos a cabo un procedimiento recursivo de un paso para obtener la relación entre T_i y T_{i+2} , es decir,

$$\begin{aligned} dW_i^i(t) &= -\frac{\tau_{i+1}\bar{\sigma}_{i+1}(t)}{\tau_{i+1}\ell_{i+1}(t)+1}dt + \left(-\frac{\tau_{i+2}\bar{\sigma}_{i+2}(t)}{\tau_{i+2}\ell_{i+2}(t)+1}dt + dW_i^{i+2}(t) \right) \\ &= -\sum_{k=i+1}^{i+2} \frac{\tau_k\bar{\sigma}_k(t)}{\tau_k\ell_k(t)+1}dt + dW_i^{i+2}(t). \end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar para la medida terminal T_m , como

$$dW_i^i(t) = -\sum_{k=i+1}^m \frac{\tau_k\bar{\sigma}_k(t)}{\tau_k\ell_k(t)+1}dt + dW_i^m(t),$$

obteniendo, bajo la medida T_m -forward para cualquier $i < m$, la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$ dada por

$$d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i(t)dW_i^i(t) = \bar{\sigma}_i(t) \left(-\sum_{k=i+1}^m \frac{\tau_k\bar{\sigma}_k(t)}{\tau_k\ell_k(t)+1}dt + dW_i^m(t) \right).$$

14.2.3. El LMM bajo la medida spot

Como se indica en Brace *et al.* (1997); Musiela y Rutkowski (1997), el principal problema con los modelos de mercado es que estos «no proporcionan» una dinámica continua en tiempo para cualquier bono en la estructura temporal. La reconocida cuenta de ahorros, que se rebalancea continuamente en términos del tipo instantáneo, viene dada por $dM(t) = r(t)M(t)dt$, con $M(t_0) = 1$. Sin embargo, la utilización de un cuenta continua como numerario no se ajusta bien a la naturaleza discreta del modelo de mercado Libor del Apartado 14.1.1.

Consideraremos una estructura temporal discreta \mathcal{T} y los tipos Libor $\ell_i(t)$. Preferentemente, un numerario para el modelo debería estar basado en un vencimiento establecido y una estructura temporal. Podemos utilizar una

cuenta de ahorros que se «rebalancee» discretamente, donde el rebalanceo tiene lugar en unas fechas de vencimiento preestablecidas, basándonos en la siguiente estrategia:

- En tiempo t_0 , comenzamos con 1 unidad de moneda y adquirimos $\frac{1}{P(0, T_1)}$ bonos a T_1 .
- En tiempo T_1 , recibimos la cantidad $\frac{1}{P(0, T_1)}$, ya que todos los bonos en propiedad pagan 1, y adquirimos la cantidad de $\frac{1}{P(0, T_1)} \cdot \frac{1}{P(T_1, T_2)}$ bonos a T_2 .
- En tiempo T_2 , recibimos la cantidad $\frac{1}{P(0, T_1)P(T_1, T_2)}$, y adquirimos ..., etc.

Esta estrategia muestra que, entre los instantes de tiempo T_0 y T_{i+1} , la cartera tipo spot-Libor contiene, en T_{i+1} , la cantidad de bonos dada por

$$\prod_{k=1}^{i+1} \frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)}.$$

Con $\bar{m}(t) := \min(i : t \leq T_i)$, siendo el siguiente momento de reseteo, el valor de la cartera en tiempo t resulta de la siguiente definición.

Definición 14.2.1 (Medida spot-Libor)

La medida spot-Libor, $\mathbb{Q}^{\bar{m}(t)}$, se asocia con una cuenta de ahorros definida como

$$M(t) := \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{\prod_{k=1}^{\bar{m}(t)} P(T_{k-1}, T_k)}, \quad (14.24)$$

con $\bar{m}(t) = \min(i : t \leq T_i)$. ◀

Esta definición muestra que, en esencia, la cuenta de ahorros bajo el modelo de mercado Libor depende del siguiente bono cupón cero, además de la cantidad de dinero acumulado hasta el momento.

Ahora podemos relacionar esta cuenta de ahorros con los tipos Libor. Para cualquier tipo Libor $\ell(t; T_i, T_j)$, con $i < j$, utilizando (14.1), con la estructura temporal establecida y $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 + \ell(t; T_i, T_j)(T_j - T_i) &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_j)} \equiv \frac{P(t, T_i)P(t, T_{i+1}) \dots P(t, T_{j-1})}{P(t, T_{i+1}) \dots P(t, T_{j-1})P(t, T_j)} \\ &= \prod_{k=i+1}^j \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} = \prod_{k=i+1}^j (1 + \ell(t; T_{k-1}, T_k)\tau_k). \end{aligned}$$

Con esto se puede determinar la evolución de todos los precios de bonos cupón cero con vencimiento T_i , y todos los tipos Libor forward para los períodos $[T_i, T_j]$, con $j > i$.

Por otro lado, para $\bar{m}(t) = \min(i : t \leq T_i)$ y empleando la definición de tipo Libor, el precio de un bono $P(t, T_j)$ viene dado por

$$P(t, T_j) = \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{1 + \ell(t; T_{\bar{m}(t)}, T_j)(T_j - T_{\bar{m}(t)})} = \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{\prod_{k=\bar{m}(t)+1}^j (1 + \ell(t; T_{k-1}, T_k)\tau_k)}. \quad (14.25)$$

Observando el ratio $P(t, T_j)/M(t)$, y utilizando (14.25) y (14.24), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{P(t, T_j)}{M(t)} &= \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{\prod_{k=\bar{m}(t)+1}^j (1 + \tau_k \ell(t; T_{k-1}, T_k))} \frac{\prod_{k=1}^{\bar{m}(t)} P(T_{k-1}, T_k)}{P(t, T_{\bar{m}(t)})} \\ &= \prod_{k=1}^{\bar{m}(t)} \left(1 + \tau_k \underbrace{\ell(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k)}_{\text{tipos Libor fwd}} \right)^{-1} \\ &\quad \times \prod_{k=\bar{m}(t)+1}^j \left(1 + \tau_k \underbrace{\ell(t; T_{k-1}, T_k)}_{\text{curva de rent. inicial}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, los precios relativos del bono con respecto a la cuenta de ahorros se determinan de manera única mediante la curva de rentabilidad inicial y una colección de tipos Libor forward. Este hecho sugiere que la cuenta de ahorros puede ser otra elección viable como numerario.

Todavía tenemos que determinar la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$, bajo la medida spot-Libor. A partir de la Definición 14.2.1, se sabe que, dado un tiempo t , la cuenta de ahorros solo depende de la volatilidad del siguiente bono cupón cero, $P(t, T_{\bar{m}(t)})$, mientras que los bonos cupón cero $P(T_{j-1}, T_j)$, para $j \in \{1, \dots, \bar{m}(t)\}$ se suponen conocidos, es decir, deterministas, no afectando a la volatilidad de $M(t)$. Esto define la derivada de Radon-Nikodym para el cambio de medidas de la $T_{\bar{n}(t)}$ -forward, con $\bar{n}(t) = \bar{m}(t) + 1$, a la spot-Libor \mathbb{Q}^M generada por la cuenta de ahorros $M(t)$ de la Definición 14.2.1, dada por

$$\lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) = \frac{d\mathbb{Q}^M}{d\mathbb{Q}^{\bar{n}(t)}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{M(t)}{M(t_0)} \frac{P(t_0, T_{\bar{n}(t)})}{P(t, T_{\bar{n}(t)})}.$$

Empleando la definición de cuenta de ahorros bajo el modelo de mercado Libor, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) &= \frac{d\mathbb{Q}^M}{d\mathbb{Q}^{\bar{n}(t)}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{P(t, T_{\bar{n}(t)})} \frac{P(t_0, T_{\bar{n}(t)})}{M(t_0)} \prod_{k=1}^{\bar{m}(t)} \frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)} \\ &= \frac{P(t, T_{\bar{m}(t)})}{P(t, T_{\bar{n}(t)})} \cdot \bar{P} \end{aligned} \quad (14.26)$$

El término denotado por \bar{P} en (14.26) contiene los bonos cupón cero «del pasado». Esto sugiere que la medida spot-Libor es una medida asociada con el bono cupón cero, $P(t, T_{\bar{m}(t)})$, escalada por un factor constante. Podemos denotar la medida spot-Libor por \mathbb{Q}^M o por $\mathbb{Q}^{\bar{m}(t)}$ siendo el bono cupón cero, $P(t, T_{\bar{m}(t)})$, su correspondiente numerario.

Empleando la definición de tipo Libor $\ell_i(t)$, obtenemos

$$\lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) = (1 + \tau_{\bar{n}(t)}\ell_{\bar{n}(t)}(t)) \cdot \bar{P},$$

con \bar{P} como en (14.26) y la dinámica dada por

$$d\lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) = \tau_{\bar{n}(t)} \cdot \bar{P} \cdot d\ell_{\bar{n}(t)}(t) = \tau_{\bar{n}(t)} \cdot \bar{P} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{n}(t)}(t) dW_{\bar{n}(t)}^{\bar{n}(t)}(t).$$

Esta se puede expresar como

$$d\lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) = \lambda_{\bar{n}(t)}^M(t) \frac{\tau_{\bar{n}(t)} \bar{\sigma}_{\bar{n}(t)}(t)}{\tau_{\bar{n}(t)} \ell_{\bar{n}(t)}(t) + 1} dW_{\bar{n}(t)}^{\bar{n}(t)}(t).$$

Aplicando el teorema de Girsanov, podemos concluir que la transformación de la medida se define por

$$dW_{\bar{n}(t)}^M(t) = -\frac{\tau_{\bar{n}(t)} \bar{\sigma}_{\bar{n}(t)}(t)}{\tau_{\bar{n}(t)} \ell_{\bar{n}(t)}(t) + 1} dt + dW_{\bar{n}(t)}^{\bar{n}(t)}(t).$$

El cambio de medida, de la medida $T_{\bar{n}(t)}$ -forward a la medida \mathbb{Q}^M , da lugar a una transformación similar a la obtenida para el cambio de medida de T_{i-1} a T_i de (14.22). Esto es consecuencia del hecho de que la medida spot-Libor es, en esencia, una medida forward asociada al bono cupón cero, $P(t, T_{\bar{m}(t)})$, con $\bar{m}(t)$ siendo la fecha de reseteo más cercana.

Entonces, la dinámica para el tipo Libor $\ell_i(t)$, $i > \bar{m}(t)$, bajo la medida spot-Libor, \mathbb{Q}^M , es

$$d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i(t) \sum_{k=\bar{m}(t)+1}^i \frac{\tau_k \bar{\sigma}_k(t)}{\tau_k \ell_k(t) + 1} dt + \bar{\sigma}_i(t) dW_i^M(t). \quad (14.27)$$

14.2.4. Corrección de convexidad

El término «convexidad» se utiliza a menudo en finanzas. Aquí, mostraremos un escenario específico para el cual se necesita incorporar una corrección de convexidad en el modelo de mercado Libor. Sin embargo, el concepto de ajuste de la convexidad se necesita aplicar para todas las clases de activos cuando existen retrasos en los pagos o cuando los instantes de pago no se corresponden con las fechas de pago del numerario. En general, si tenemos una fecha de vencimiento T pero el pago tiene lugar en un tiempo $T + \tau^*$, se debe tener en

cuenta la convexidad. Cuanto mayor sea la incertidumbre en el mercado (alta volatilidad), más pronunciado será el efecto de la convexidad.

Consideramos una función de payoff sobre un tipo de interés que paga un porcentaje de un nominal N , cuyo valor será determinado por el tipo Libor $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, en el instante T_i . El precio de este contrato viene dado por

$$\begin{aligned} V(t_0) &= N \cdot M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_i)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \cdot P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}(t_0)]. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Como $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ es una martingala bajo la medida T_i -forward, tenemos que

$$V(t_0) = N \cdot P(t_0, T_i) \ell(t_0; T_{i-1}, T_i). \quad (14.29)$$

Supongamos ahora que consideramos el mismo contrato, pero el pago tiene lugar en algún instante anterior $T_{i-1} < T_i$. Entonces, el valor actual del contrato viene dado por

$$V(t_0) = N \cdot M(t_0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_{i-1})} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (14.30)$$

Cambiando medidas, tomando la medida T_{i-1} -forward, trabajamos con la derivada de Radon-Nikodym dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_{i-1}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(T_{i-1})} = \frac{P(T_{i-1}, T_{i-1})}{P(t_0, T_{i-1})} \frac{M(t_0)}{M(T_{i-1})},$$

tal que

$$\begin{aligned} V(t_0) &= N \cdot M(t_0) \mathbb{E}^{T_{i-1}} \left[\frac{P(t_0, T_{i-1})}{P(T_{i-1}, T_{i-1})} \frac{M(T_{i-1})}{M(t_0)} \frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_{i-1})} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \cdot P(t_0, T_{i-1}) \mathbb{E}^{T_{i-1}} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}(t_0)]. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Aunque el tipo Libor $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ es una martingala bajo la medida T_i -forward, este «no» es una martingala bajo la medida T_{i-1} -forward, es decir,

$$\mathbb{E}^{T_{i-1}} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}(t_0)] \neq \mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}(t_0)] = \ell(t_0; T_{i-1}, T_i).$$

La diferencia entre estas dos esperanzas se conoce habitualmente como convexidad. Aplicando la técnica de cambio de medida, podemos simplificar, hasta cierto punto, las expresiones anteriores. Cambiando a la medida T_i -forward, tenemos que

$$\frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{Q}^{i-1}} \Big|_{\mathcal{F}(T_{i-1})} = \frac{P(T_{i-1}, T_i)}{P(t_0, T_i)} \frac{P(t_0, T_{i-1})}{P(T_{i-1}, T_{i-1})},$$

de modo que el valor del derivado es igual a

$$\begin{aligned} V(t_0) &= N \cdot P(t_0, T_{i-1}) \mathbb{E}^{T_{i-1}} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}(t_0)] \\ &= N \cdot P(t_0, T_{i-1}) \mathbb{E}^{T_i} \left[\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \frac{P(t_0, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} \frac{P(T_{i-1}, T_{i-1})}{P(t_0, T_{i-1})} | \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N \cdot \mathbb{E}^{T_i} \left[\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \frac{P(t_0, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} | \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} V(t_0) &= N \cdot \mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}(t_0)] \\ &\quad + N \cdot \mathbb{E}^{T_i} \left[\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \left(\frac{P(t_0, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) | \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple con simplemente sumar y restar $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$. Simplificando, obtenemos

$$V(t_0) = N \cdot (\ell(t_0; T_{i-1}, T_i) + cc(T_{i-1}, T_i)),$$

con la corrección de convexidad, $cc(T_{i-1}, T_i)$, dada por

$$cc(T_{i-1}, T_i) = \mathbb{E}^{T_i} \left[\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) \left(\frac{P(t_0, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) | \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (14.32)$$

La corrección de convexidad es

$$cc(T_{i-1}, T_i) = P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} | \mathcal{F}(t_0) \right] - \ell(t_0; T_{i-1}, T_i). \quad (14.33)$$

A partir de la definición de tipo Libor $\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$, sabemos que

$$P(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{1 + \tau_i \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)} =: \frac{1}{1 + \tau_i \ell_i(T_{i-1})}. \quad (14.34)$$

Empleando (14.34), la esperanza en (14.33) se puede escribir como

$$\mathbb{E}^{T_i} \left[\frac{\ell_i(T_{i-1})}{P(T_{i-1}, T_i)} | \mathcal{F}(t_0) \right] = \ell_i(t_0) + \tau_i \mathbb{E}^{T_i} [\ell_i^2(T_{i-1}) | \mathcal{F}(t_0)]. \quad (14.35)$$

Es importante señalar que, aunque $\ell_i(T_{i-1})$ es una martingala bajo la medida T_i -forward, la cantidad $\ell_i^2(T_{i-1})$ «no» es una martingala bajo la misma medida. Para ilustrar esto, consideraremos la dinámica

$$d\ell_i(t) = \sigma \ell_i(t) dW_i^i(t),$$

y aplicamos el lema de Itô a $\ell_i^2(t)$. Esto resulta en

$$d\ell_i^2(t) = \frac{1}{2} \sigma^2 \ell_i^2(t) dt + 2\sigma \ell_i^2(t) dW_i^i(t).$$

Esta EDE tiene un término de deriva, por lo que no es una martingala.

Tenemos distintas opciones para determinar la esperanza del lado derecho de la expresión anterior. Como el tipo Libor $\ell_i(t) := \ell(t; T_{i-1}, T_i)$ es un martingala bajo la medida T_i -forward, la dinámica no debería tener término de derivada. Entonces, como elección sencilla, podemos optar por un proceso lognormal para el tipo Libor, es decir,

$$d\ell_i(t) = \sigma \ell_i(t) dW_i^i(t), \quad (14.36)$$

cuya solución, con $t_0 = 0$, viene dada por

$$\ell_i(T_{i-1}) = \ell_i(t_0) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T_{i-1} + \sigma W_i^i(T_{i-1})}. \quad (14.37)$$

Tomando la esperanza del tipo Libor al cuadrado resulta que

$$\mathbb{E}^{T_i} [\ell^2(T_{i-1}) | \mathcal{F}(t_0)] = \ell^2(t_0) e^{-\sigma^2 T_{i-1}} \mathbb{E}^{T_i} [e^{2\sigma W_i^i(T_{i-1})} | \mathcal{F}(t_0)] = \ell^2(t_0) e^{\sigma^2 T_{i-1}}.$$

Entonces, la expresión de (14.33) se convierte en

$$cc(T_{i-1}, T_i) = P(t_0, T_i) \left(\ell_i(t_0) + \tau_i \ell_i^2(t_0) e^{\sigma^2 T_{i-1}} \right) - \ell_i(t_0), \quad (14.38)$$

Sin embargo, esta elección no es óptima en la práctica, ya que no está claro como especificar el parámetro σ de la dinámica de (14.36). Se podría tomar σ como la volatilidad ATM del caplet, pero esta no es la única opción. Un enfoque más fiable para el cálculo del segundo momento del tipo Libor $\ell_i(T_{i-1})$ es utilizar todos los strikes disponibles en el mercado. Se puede llevar a cabo empleando el método Breeden-Litzenberger del Apartado 4.2, esto es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{T_i} [\ell_i^2(T_{i-1}) | \mathcal{F}(t_0)] &= \ell_i^2(t_0) + 2 \int_0^{\ell_i(t_0)} V_p(t_0, \ell_i(t_0); y, T_{i-1}) dy \\ &\quad + 2 \int_{\ell_i(t_0)}^{\infty} V_c(t_0, \ell_i(t_0); y, T_{i-1}) dy, \end{aligned} \quad (14.39)$$

donde $V_p(t_0, \ell_i(t_0); y, T)$ y $V_c(t_0, \ell_i(t_0); y, T)$ son los valores (sin descontar) de opciones put y call (es decir, floorlets $V_i^{\text{FL}}(t_0)$ y caplets $V_i^{\text{CPL}}(t_0)$) sobre el tipo $\ell_i(T_{i-1})$ con strike y .

En la Figura 14.3, se muestra como afecta la volatilidad a la convexidad.

14.3. Modelos de volatilidad local paramétricos

Desde el punto de vista de un *trader* de derivados complejos, véase Rebonato (2005), un requisito importante para un modelo de tipo de interés es la capacidad de replicar los cambios en las superficies de volatilidad implícita futuras. Por ello, en este apartado introducimos la extensión a volatilidad estocástica del LMM.

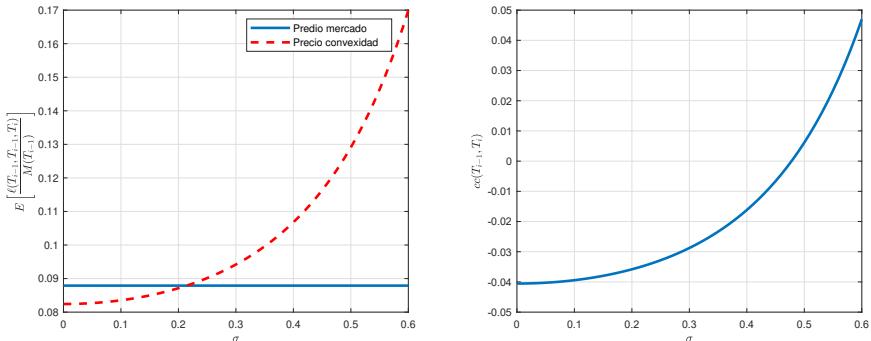


Figura 14.3: Efecto de la corrección de convexidad, $cc(T_{i-1}, T_i)$, en función de la volatilidad σ . Izquierda: impacto de la convexidad sobre el precio del derivado. Derecha: impacto de la volatilidad sobre la convexidad.



14.3.1. Antecedentes y motivación

Durante muchos años, el LMM lognormal (véase Brace *et al.* (1997); Jamshidian (1997); Miltersen *et al.* (1997)) se consideró como el modelo de referencia para los derivados de tipos de interés. Sin embargo, los modelos de mercado lognormales tienen algunas limitaciones, ya que no son capaces de modelar la forma de sonrisa/mueca en las curvas de volatilidad implícita del tipo de interés, de manera similar a lo que se observa en los mercados monetarios. Aunque una vez calibrado el modelo de mercado lognormal, el ajuste para productos financieros at-the-money (ATM) sea bueno, no siempre se podrán valorar, con la precisión requerida, las opciones sobre tipos de interés con strikes distintos del nivel ATM. Sin incorporar mejoras, este modelo no es capaz de reproducir las volatilidades dependientes del strike de derivados de renta fija, tales como caps o swaptions. La volatilidad en forma de mueca o sonrisa se ha hecho más evidente en las cotizaciones del mercado monetario, en el que se han introducido extensiones con el objetivo de modelar esta característica mediante, por ejemplo, los modelos de volatilidad estocástica.

Antes de comenzar con los modelos basados en volatilidad estocástica, estudiaremos como se puede incorporar una volatilidad implícita a un modelo. Se sabe que (véase Brigo y Mercurio (2007), por ejemplo) la inclusión de un proceso de volatilidad estocástica no correlado a los tipos forward produce una sonrisa que tiene su mínimo para opciones ATM. Sin embargo, para muchos productos de renta fija también aparece una mueca de interés, característica que un modelo de volatilidad estocástica con un movimiento browniano no correlado no es capaz de modelar. En la literatura, encontramos tres maneras principales de

generar muecas en los modelos de mercado Libor con volatilidad estocástica (SV-LMM):

- Mediante una función de volatilidad local no lineal (siendo el modelo CEV el ejemplo más destacado).
- Mediante la denominada dinámica de difusión desplazada (DD).
- Mediante la imposición de una correlación no nula entre los tipos forward y un proceso de volatilidad estocástica.

Se han presentado varias extensiones del LMM con volatilidad estocástica, véase, por ejemplo, Brigo y Mercurio (2007). Las extensiones con volatilidad local de Andersen y Andreasen (2000) y con volatilidad estocástica de Andersen y Andreasen (2000, 2002); Rebonato (2002), representaron un paso importante en el modelado, ya que permitieron la aparición de modelos capaces de ajustarse razonablemente bien a los datos de mercado, manteniendo la estabilidad del mismo.

A continuación, estudiaremos algunos modelos en detalle, comenzando por el LMM-CEV.

14.3.2. Modelo CEV

Un candidato interesante, basado en un modelo de volatilidad local paramétrico, es el modelo de Elasticidad Constante de la Varianza, conocido por sus siglas en inglés¹ como modelo CEV, y definido como

$$\boxed{d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i \ell_i^\beta(t) dW_i^i(t)}, \quad (14.40)$$

con un exponente β . Si $0 < \beta < 1$, el modelo CEV tiene las siguientes propiedades:

- Todas las soluciones son no explosivas (es decir, acotadas).
- Para $\beta > \frac{1}{2}$, existe solución y esta es única.
- Para $\beta = 1$, el proceso sigue la distribución lognormal habitual. El valor $\ell_i(t) = 0$ es un nivel inalcanzable, esto es, el proceso forward se mantiene siempre estrictamente positivo.
- Para $0 < \beta < 1$, el valor $\ell_i(t) = 0$ es un nivel alcanzable.
- Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$, la solución no es única, a menos que se prescriba una condición de contorno adicional para $\ell_i(t) = 0$.

¹Constant Elasticity of Variance.

El proceso $\ell_i(t)$, para $\beta = 1$, es un tipo Libor GBM (que ya se ha estudiado); para $\beta = 0$ está normalmente distribuido y para $\beta = 0.5$ seguiría el proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Bajo esta dinámica, el precio de un caplet/floorlet viene dado por la ecuación de valoración

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL/FL}}(t_0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T_i)} \max(\bar{\alpha} (\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\bar{\alpha} (\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

con $M(t_0) = 1$, $\bar{\alpha} = 1$ para caplets y $\bar{\alpha} = -1$ para floorlets. La solución explícita para los precios del caplet y del floorlet se proporciona en el Teorema 14.3.1.

Teorema 14.3.1 (Precios de caplet y floorlet bajo el modelo CEV)

Existe una expresión en forma cerrada para la solución de caplet/floorlet bajo el proceso CEV. Siendo el parámetro de elasticidad $\beta \in \mathbb{R}^+$, los caplets/floorlets bajo el proceso CEV en tiempo t_0 vienen dados por:

- Para $\beta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL}}(t_0) &= P(t_0, T_i) (\ell_i(t_0) (1 - F_{\chi^2(b+2,c)}(a)) - K F_{\chi^2(b,a)}(c)), \\ V_i^{\text{FL}}(t_0) &= P(t_0, T_i) (K (1 - F_{\chi^2(b,a)}(c)) - \ell_i(t_0) F_{\chi^2(b+2,c)}(a)). \end{aligned}$$

- Para $\beta > 1$,

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL}}(t_0) &= P(t_0, T_i) (\ell_i(t_0) (1 - F_{\chi^2(-b,a)}(c)) - K F_{\chi^2(2-b,c)}(a)), \\ V_i^{\text{FL}}(t_0) &= P(t_0, T_i) (K (1 - F_{\chi^2(2-b,c)}(a)) - \ell_i(t_0) F_{\chi^2(-b,a)}(c)), \end{aligned}$$

donde $F_{\chi^2(a,b)}(c) = \mathbb{P}[\chi^2(a,b) \leq c]$. Por tanto, $F_{\chi^2(a,b)}(c)$ es la función de distribución acumulada de la chi-cuadrado no central con los parámetros de grados de libertad a , y «no centralidad» b , evaluada en c . Los parámetros vienen dados por

$$a = \frac{K^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \bar{\sigma}^2 (T_i - t_0)}, \quad b = \frac{1}{1-\beta}, \quad c = \frac{(\ell_i(t_0))^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \bar{\sigma}^2 (T_i - t_0)}.$$

Se puede consultar la demostración en Schroder (1989).

Nos centramos en el parámetro β y su efecto sobre la volatilidad implícita del modelo. Se pueden obtener dos patrones distintos. Para $\beta < 1$ la volatilidad crece cuando el precio del activo decrece y para $\beta > 1$ la volatilidad crece cuando el precio del activo aumenta. Para $\beta < 1$, se espera que el modelo genere una mueca de volatilidad implícita.

Ejemplo 14.3.1 (Modelo CEV y patrón de volatilidad implícita)

Para obtener las volatilidades implícitas bajo el modelo LMM CEV, escogemos un valor de β específico y $\bar{\sigma}(t) = \sigma$ (constante), y con ellos calculamos los precios de opciones call y put para un conjunto de strikes $\{K_1, \dots, K_m\}$. Cada precio de opción obtenido se sustituye por su correspondiente volatilidad implícita, como se explica en el Apartado 4.1.1.

En la Figura 14.4 se muestra el efecto de variar los parámetros β y σ del modelo CEV sobre la volatilidad implícita. Para este experimento numérico, tomamos $\ell_i(t_0) = 1$, $r = 0$ y $T = 1$. Cuando variamos el exponente β , se fija $\sigma = 0.1$, y cuando se varía σ , se fija $\beta = 0.4$. Los resultados nos indican que, distintos valores del parámetro β , dan lugar a diferentes muecas de volatilidad implícita. Además, variando el parámetro σ , se cambia el nivel de la volatilidad ATM. Estos experimentos también indican que el modelo puede no ser capaz de generar una sonrisa de volatilidad implícita que, sin embargo, se observa con frecuencia en los datos de mercado.

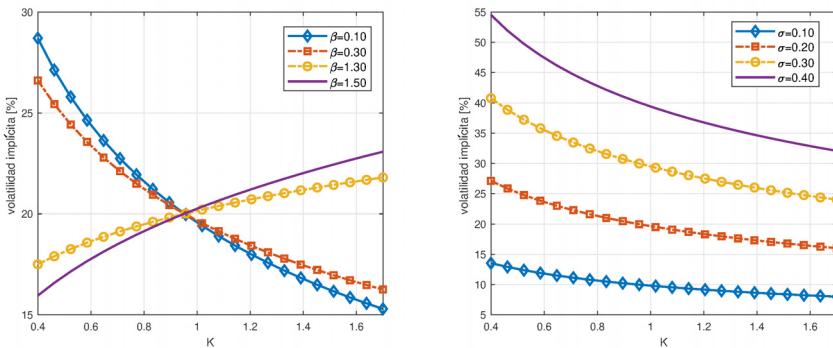


Figura 14.4: Influencia de los parámetros del modelo CEV sobre la volatilidad implícita. Izquierda: impacto de β . Derecha: impacto de σ .



En Schroder (1989), se muestra que el proceso CEV es igual a un *proceso de Bessel cuadrado* transformado (véase también el Capítulo 8). Para que el proceso de Bessel cuadrado sea un proceso martingala se debe imponer una frontera absorbente, de acuerdo con las condiciones de ausencia de arbitraje. Sin embargo, el análisis del comportamiento de la frontera absorbente no es trivial, ya que la densidad de transición del proceso absorbente no integra a la unidad y los momentos no se conocen en forma cerrada (véanse los desarrollos del Resultado 8.1.2).

Intermezzo: La distribución del proceso CEV

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado generado por un movimiento browniano unidimensional $W(t) : 0 \leq t < T$. Para todo $0 \leq t < T$, el proceso CEV se define por la EDE (14.40). Tomamos la volatilidad $\bar{\sigma}(t)$ como constante, es decir, $\bar{\sigma}(t) \equiv \sigma$. Siguiendo a Schroder (1989), consideramos una transformación invertible, $X(t) = \ell_i^{1-\beta}(t)/(1-\beta)$, para $\beta \neq 1$. Aplicando el lema de Itô, obtenemos la EDE para $X(t)$ dada por

$$\begin{aligned} dX(t) &= (1-\beta) \frac{\ell_i^{-\beta}(t)}{1-\beta} \sigma \ell_i^\beta(t) dW(t) - \frac{1}{2} \beta(1-\beta) \frac{\ell_i^{-1-\beta}(t)}{1-\beta} \sigma^2 \ell_i^{2\beta}(t) dt \\ &= \sigma dW(t) - \frac{\beta \sigma^2}{(2-2\beta)X(t)} dt, \end{aligned} \quad (14.41)$$

que es el proceso de Bessel cambiado en tiempo, véase la Observación 8.1.1.

Aplicando una segunda transformación, $\bar{X}(t) = X^2(t)$, se obtiene el proceso de Bessel cuadrado cambiado en tiempo de dimensión $\delta := (1-2\beta)/(1-\beta)$, que satisface la EDE

$$d\bar{X}(t) = 2\sqrt{|\bar{X}(t)|} \sigma dW(t) + \delta \sigma^2 dt. \quad (14.42)$$

Sea $\bar{\nu}(t)$ una función de cambio de tiempo (véase Observación 8.1.1 para más detalle sobre los cambios de tiempo), tal que $\bar{\nu}(t) = \sigma^2 t$. Entonces, $\bar{X}(t) = Y(\bar{\nu}(t))$, donde $Y(t)$ es un proceso de Bessel cuadrado δ -dimensional, siendo, a su vez, la solución fuerte de la EDE

$$dY(t) = 2\sqrt{|Y(t)|} dW(t) + \delta dt, \quad (14.43)$$

con δ grados de libertad. El proceso de Bessel cuadrado es un proceso de Markov, cuyas densidades de transición son conocidas explícitamente. Estas ya se han detallado en el contexto de proceso CIR, en el Apartado 8.1.2.

Tabla 14.1: Correspondencia entre los tres rangos de parámetros.

| Exponente CEV | Bessel cuadrado, δ |
|------------------------------|---------------------------|
| $0 < \beta < \frac{1}{2}$ | $0 < \delta < 2$ |
| $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ | $-\infty < \delta \leq 0$ |
| $\beta > 1$ | $2 < \delta < \infty$ |

Resolviendo una serie de desigualdades (véanse los resultados en la Tabla 14.1), obtenemos esencialmente tres rangos de parámetros diferentes, que determinan el comportamiento del proceso CEV en la frontera y la forma de las densidades de transición:

- Para $\beta > 1$, la EDE (14.40) tiene una solución única y la frontera en cero no es alcanzable. La función de densidad integra a uno en $\ell_i(t) \in (0, \infty)$ para todo $t \geq 0$ y el proceso $\ell_i(t)$ es, estrictamente, una *martingala local*.

2. Para $\beta < \frac{1}{2}$, la EDE (14.40) no tiene solución única, a menos que se especifique una condición de contorno adicional para el comportamiento en la frontera $\ell_i(t) = 0$:
 - La densidad integra a la unidad si la frontera es reflectante y el proceso $\ell_i(t)$ es, estrictamente, una «submartingala» (estudiada brevemente en el Apartado 2.3.2 del Capítulo 2).
 - Si la frontera en $\ell_i(t) = 0$ es absorbente² la densidad no integrará a la unidad y el proceso $\ell_i(t)$ será una «verdadera martingala».
3. Para $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, existe una solución fuerte única para la EDE (14.40), y la frontera en cero es absorbente. La función de densidad no integra a la unidad para $t > 0$ y el proceso $\ell_i(t)$ es una «verdadera martingala».

Para la mayoría de aplicaciones en finanzas, el parámetro β oscila entre 0 y 1, lo que se corresponde con los Casos 2 y 3 de la lista anterior. Por tanto, nos centramos en estos dos casos.

Basándonos en la densidad de transición de la difusión de Bessel cuadrada en el espacio, Y , presentada en el Resultado 8.1.2, obtenemos fácilmente la densidad de transición del proceso CEV (14.40). En primer lugar, nótese que

$$\ell_i(T) = \left((1 - \beta) \sqrt{|Y(\bar{\nu}(T))|} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Definimos

$$h(z) := ((1 - \beta) \sqrt{z})^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad z \geq 0,$$

cuya inversa es

$$h^{-1}(y) = \frac{y^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2}, \quad y \geq 0.$$

Así, $\ell_i(T) = h(Y(\bar{\nu}(T)))$ y el valor inicial $Y_0 = h^{-1}(\ell_i(t_0)) = \ell_i(t_0)^{2(1-\beta)} / (1 - \beta)^2$. $Y(\bar{\nu}(T))$ tiene como función de densidad $f_B(\bar{\nu}(T), y)$ por lo que la densidad de transición para $\ell_i(T)$ viene dada por

$$f_{CEV}(T, \ell_i(T); t_0, \ell_i(t_0)) = f_B(\bar{\nu}(T); h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy},$$

donde utilizamos $f_{CEV}(T, \ell_i(T); t_0, \ell_i(t_0))$ para denotar la densidad de transición condicionada para el proceso LMM-CEV. Combinando los dos casos considerados, las correspondientes densidades de transición para el proceso CEV $\ell_i(t)$ de (14.40) son de la forma:

²Hay una parte degenerada con un átomo en la frontera y una parte absolutamente continua en $(0, \infty)$.

1. Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$ con absorción en cero y para $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$,

$$\begin{aligned} f_{CEV}(T, \ell_i(T); t_0, \ell_i(t_0)) &= \frac{1}{\bar{\nu}(T)} \left(\frac{\ell_i(T)}{\ell_i(t_0)} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left(-\frac{\ell_i(T)^{2(1-\beta)} + \ell_i(t_0)^{2(1-\beta)}}{2(1-\beta)^2 \bar{\nu}(T)} \right) \\ &\times I_{|\frac{\beta-2}{2}|} \left[\frac{(\ell_i(t_0) \ell_i(T))^{1-\beta}}{\bar{\nu}(T)(1-\beta)^2} \right] \frac{\ell_i^{1-2\beta}(T)}{1-\beta}, \end{aligned} \quad (14.44)$$

donde $\bar{\nu}(T) = \sigma^2 T$ y $\bar{\beta} = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$.

2. Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$ con frontera reflectante en $\ell_i(t) = 0$,

$$\begin{aligned} f_{CEV}(T, \ell_i(T); t_0, \ell_i(t_0)) &= \frac{1}{\bar{\nu}(T)} \left(\frac{\ell_i(T)}{\ell_i(t_0)} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left(-\frac{\ell_i^{2(1-\beta)}(T) + \ell_i(t_0)^{2(1-\beta)}}{2(1-\beta)^2 \bar{\nu}(T)} \right) \\ &\times I_{\frac{\bar{\beta}-2}{2}} \left[\frac{(\ell_i(t_0) \ell_i(T))^{1-\beta}}{\bar{\nu}(T)(1-\beta)^2} \right] \frac{\ell_i^{1-2\beta}(T)}{1-\beta}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Integrando las ingualdades anteriores obtenemos las siguientes FDAs.

Resultado 14.3.1 *Las FDAs del proceso LMM-CEV, como en (14.40), vienen dadas por:*

1. Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$ con absorción en cero y para $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$,

$$\mathbb{P}[\ell_i(T) \leq x | \ell_i(t_0)] = 1 - F_{\chi^2}(a; b, c(x)). \quad (14.46)$$

2. Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$ con frontera reflectante en $\ell_i(t_0) = 0$,

$$\mathbb{P}[\ell_i(T) \leq x | \ell_i(t_0)] = F_{\chi^2}(c(x); 2 - b, a), \quad (14.47)$$

con los parámetros dados por

$$a = \frac{\ell_i(t_0)^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \bar{\nu}(T)}, \quad b = \frac{1}{1-\beta}, \quad c(x) = \frac{x^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \bar{\nu}(T)}, \quad \bar{\nu}(T) = \sigma^2 T,$$

y donde $F_{\chi^2}(x; \delta, \lambda)$ es la función de distribución acumulada de la chi-cuadrado no central con parámetro de no centralidad λ y δ grados de libertad.

Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en Schroder (1989), donde se utilizan resultados clásicos de los procesos de Bessel. Se puede consultar una demostración alternativa, basada en la teoría de la función de Green, en Lesniewski (2009).

Como ya se ha mencionado en el Resultado 8.1.1, cuando la frontera es absorbente, la función de densidad de probabilidad no integra a uno. La reducción en la masa total de probabilidad es la probabilidad absorbida en $\ell_i(t) = 0$. A partir del Resultado 14.3.1, se puede obtener una fórmula para la probabilidad de absorción.

Corolario 14.3.2 *Para $0 < \beta < 1$, la probabilidad de $\ell_i(T) = 0$, con $\ell_i(t)$ gobernado por la EDE (14.40), condicionado a $\ell_i(t_0)$, es*

$$\mathbb{P}[\ell_i(T) = 0 | \ell_i(t_0)] = 1 - \gamma \left(\frac{1}{2(1-\beta)}, \frac{\ell_i(t_0)^{2(1-\beta)}}{2(1-\beta)^2 \bar{\nu}(T)} \right) \Bigg/ \Gamma \left(\frac{1}{2(1-\beta)} \right), \quad (14.48)$$

donde $\gamma(a, z)$ es la función gamma incompleta inferior y $\Gamma(z)$ es la función gamma.

Andersen y Andreasen (2010) y Rebonato (2009) argumentaron que, si el tipo Libor sigue un proceso LMM-CEV bajo una cierta medida, existe una única condición de frontera en cero aceptable que verifique las condiciones de ausencia de arbitraje, y esta es la «condición de absorción». Teniendo una frontera reflectante en cero, un inversor esperaría hasta que se alcanzase el valor cero (lo que ocurriría con una probabilidad estrictamente positiva). Cuando el precio es cero, el inversor tomaría una posición larga y la vendería inmediatamente en el momento en el que el valor de frontera haya reflejado el proceso, obteniendo así un beneficio sin riesgo.

14.3.3. Modelo de difusión desplazada

Aunque el modelo CEV es interesante desde el punto de vista teórico, presenta algunos inconvenientes para la fase de calibración. En el contexto del modelo LMM-CEV, la valoración rápida y precisa de opciones vanilla no es trivial.

Una de las alternativas es «reemplazar» el modelo anterior por el denominado modelo de difusión desplazada (DD). Los procesos DD fueron introducidos por Rubinstein (1983). Aquí seguiremos la definición de proceso DD de Rebonato (2002).

Consideramos la siguiente función determinista, $g(\ell_i(t)) = \ell_i^\beta(t)$. La expansión de Taylor de primer orden de $g(\ell_i(t))$ alrededor de $\ell_i(t_0)$, mediante el método delta, véase (13.35), viene dada por

$$\begin{aligned} g(\ell_i(t)) &= g(\ell_i(t_0)) + \frac{dg(\ell_i(t))}{d\ell_i(t)} \Big|_{\ell_i(t)=\ell_i(t_0)} (\ell_i(t) - \ell_i(t_0)) \\ &\quad + \mathcal{O}((\ell_i(t) - \ell_i(t_0))^2), \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \ell_i^\beta(t) &\approx \ell_i^\beta(t_0) + \beta \ell_i^{\beta-1}(t_0) (\ell_i(t) - \ell_i(t_0)) \\ &= \vartheta((1-\beta)\ell_i(t_0) + \beta\ell_i(t)), \end{aligned}$$

con $\vartheta := \ell_i^{\beta-1}(t_0)$. Sustituyendo en el modelo LMM-CEV (14.40), tenemos que

$$d\ell_i(t) = \bar{\sigma}_i \vartheta ((1-\beta)\ell_i(t_0) + \beta\ell_i(t)) dW_i^i(t). \quad (14.49)$$

Por tanto, el modelo de difusión desplazada se define mediante la EDE

$$d\ell_i(t) = \sigma_i (\beta\ell_i(t) + (1-\beta)\ell_i(t_0)) dW_i^i(t), \quad \ell_i(t_0) > 0, \quad (14.50)$$

con volatilidad, $\sigma_i = \vartheta\bar{\sigma}_i$ y el denominado parámetro de desplazamiento β .

Definición 14.3.1 (Formulación alternativa)

Otra formulación del proceso DD, distinta de la anterior, fue introducida por Marris (1999). La expresión en (14.50) se puede escribir como

$$d\ell_i(t) = \left(\ell_i(t) + \frac{1}{\beta} (1-\beta)\ell_i(t_0) \right) \beta \sigma_i dW_i^i(t),$$

de modo que obtenemos

$$\frac{d(\ell_i(t) + a)}{\ell_i(t) + a} = \tilde{\sigma}_i dW_i^i(t), \quad (14.51)$$

con $a := \frac{1}{\beta}(1-\beta)\ell_i(t_0)$ y $\tilde{\sigma}_i := \beta\sigma_i$. ◀

El proceso estocástico en (14.49) es un proceso lognormal desplazado, con parámetro de desplazamiento a . Por tanto, un proceso lognormal desplazado se puede considerar como una aproximación de primer orden de la dinámica CEV.

Los precios de opciones europeas sobre el tipo Libor se pueden calcular de manera eficiente empleando la conocida fórmula de valoración Black-76, con un valor ajustado para el strike.

Teorema 14.3.2 (Opciones europeas bajo el modelo DD)

Bajo el modelo DD, con el parámetro β y la volatilidad σ_i constantes, podemos valorar opciones call europeas mediante la expresión

$$V_c(t_0) = P(t_0, T_i) \left[\frac{\ell_i(t_0)}{\beta} \cdot F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - \left(K + \frac{1-\beta}{\beta} \ell_i(t_0) \right) \cdot F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \right],$$

con

$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{\ell_i(t_0)}{\beta K + (1-\beta)\ell_i(t_0)} \right) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\beta^2(T-t_0)}{\sigma_i\beta\sqrt{T-t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i\beta\sqrt{T-t_0}.$$

Demostración. El proceso de (14.51) se puede reformular como

$$\frac{d \left(\ell_i(t) + \frac{1-\beta}{\beta} \ell_i(t_0) \right)}{\ell_i(t) + \frac{1-\beta}{\beta} \ell_i(t_0)} = \sigma_i \beta dW_i^i(t). \quad (14.52)$$

Definimos un proceso $\hat{\ell}_i(t)$ dado por

$$\hat{\ell}_i(t) = \ell_i(t) + \frac{(1-\beta)}{\beta} \ell_i(t_0). \quad (14.53)$$

Como el desplazamiento en el proceso $\ell_i(t)$ es constante, tenemos que $d\hat{\ell}_i(t) = d\ell_i(t)$, con valor inicial $\hat{\ell}_i(t_0) = \frac{1}{\beta}\ell_i(t_0)$. Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned} d\hat{\ell}_i(t) &= d\ell_i(t) \\ &= \sigma_i [\beta\ell_i(t) + (1-\beta)\ell_i(t_0)] dW_i^i(t) = \sigma_i \beta \hat{\ell}_i(t) dW_i^i(t). \end{aligned}$$

A partir de este resultado, se puede concluir que $\hat{\ell}_i(t)$ está gobernado por el modelo de Black original con volatilidad $\hat{\sigma}_i = \beta\sigma_i$, de modo que se puede utilizar la fórmula de valoración estándar.

Para valorar una opción call europea sobre el tipo Libor $\ell_i(T_i) \equiv \ell(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)$ con pago en tiempo T_i , se necesita determinar la esperanza

$$\begin{aligned} V_c(t_0) &= \mathbb{E}^Q \left[\frac{M(t_0)}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_i) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\hat{\ell}_i(T_i) - \frac{(1-\beta)}{\beta} \ell_i(t_0) - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\hat{\ell}_i(T_i) - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

con $K^* = \frac{(1-\beta)}{\beta} \ell_i(t_0) + K$.

Esto implica que se puede valorar una opción call europea bajo el modelo DD empleando el modelo de Black-Scholes con tipo de interés $r = 0$, habitualmente conocido como el modelo Black-76, con volatilidad $\hat{\sigma}_i := \beta\sigma_i$, strike $K^* := \frac{(1-\beta)}{\beta} \ell_i(t_0) + K$, y valor inicial $\hat{\ell}_i(t_0) = \ell_i(t_0)/\beta$, y multiplicando el resultado por $P(t_0, T_i)$. Aplicando el modelo de Black-Scholes, la esperanza resulta en

$$\mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\hat{\ell}_i(T_i) - K^*, 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \hat{\ell}_i(t_0) F_{N(0,1)}(d_1) - K^* F_{N(0,1)}(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{\hat{\ell}_i(t_0)}{K^*} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_i (T_i - t_0)}{\hat{\sigma}_i \sqrt{T_i - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}_i \sqrt{T_i - t_0}.$$

La demostración concluye al multiplicar el resultado por $P(t_0, T_i)$ y sustituir. ■

El concepto de desplazamiento de una distribución es habitual en el manejo de tipos de interés, cuando se incorpora a un modelo la posibilidad de que estos sean negativos. Abordaremos esta cuestión en el Apartado 14.4.1.

Ejemplo 14.3.2 (Modelo DD: volatilidad implícita)

Mediante el modelo de difusión desplazada también se pueden modelar la mueca y la sonrisa de volatilidad implícita. En la Figura 14.5, se presentan

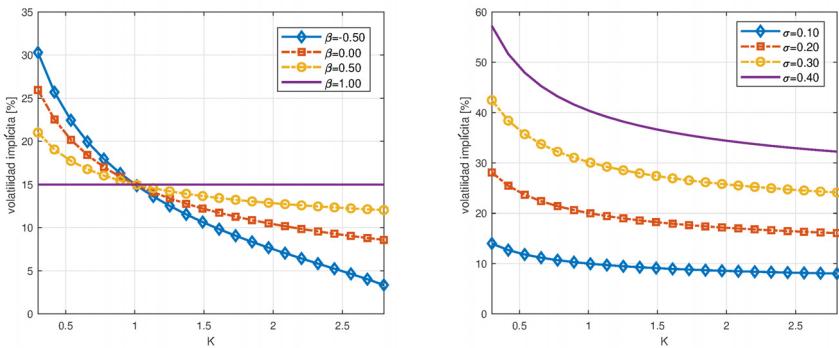


Figura 14.5: Influencia de los parámetros del modelo DD sobre las volatilidades implícitas, con $\ell_i(t_0) = 1$, $T = 2$. Izquierda: impacto de β con $\sigma = 0.15$. Derecha: impacto de σ con $\beta = 0.5$.



algunos ejemplos de volatilidades implícitas para diferentes valores de β y σ . Observamos un efecto muy similar con respecto a β y σ al producido por el modelo CEV en la Figura 14.4.

Por tanto, los procesos DD son de interés, ya que se pueden utilizar como un modelo simplificado de aproximación del modelo CEV. Sin embargo, los modelos DD también tienen algunos inconvenientes, como el requisito de que $\ell_i(t) + a$ en la Definición 14.3.1 tiene que ser positivo, lo que implica que $\ell_i(t)$ solo puede tomar valores en el intervalo $(-a, +\infty)$.

Un modelo más avanzado es el modelo de difusión desplazada con volatilidad estocástica (DD-SV), desarrollado por Andersen y Andreasen (2002). En Peterberg (2005b) se relacionan las volatilidades dependientes del tiempo de este modelo para tipos Libor y tipos swap con las cantidades implícitas de mercado.

14.3.4. LMM con volatilidad estocástica

La crisis bancaria de 2007/2008 también trajo consigo cambios esenciales en las volatilidades de las swaption de tipos de interés, para las que un marco de modelización altamente flexible parece ser favorable. Los modelos más flexibles suelen estar compuestos por múltiples factores. Algunos ejemplos notables son los modelos short-rate multifactor, los modelos Quasi-Gaussianos multifactor o las extensiones del modelo de mercado Libor. El proceso CEV, introducido por Cox (1975), es un elemento importante del modelo de mercado CEV Libor (LMM-CEV) de Andersen y Andreasen (2010).

Alternativamente, se puede considerar una dinámica de tipo Heston para cada tipo Libor con correlación no nula entre los tipos forward y la volatilidad estocástica. El problema radica en que este modelo no es adecuado para modelar la dinámica del tipo Libor de una forma precisa y eficiente, como veremos a continuación. Para ello, primero consideramos el tipo Libor $\ell_i(t)$ que, bajo su propia medida, está gobernado por la dinámica

$$\begin{cases} d\ell_i(t) &= \sigma_i \ell_i(t) \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t), \\ d\nu(t) &= \lambda(\nu_0 - \nu(t)) dt + \eta \sqrt{\nu(t)} dW_\nu^i(t), \end{cases} \quad (14.54)$$

con la estructura de correlación dada por

$$dW_i^i(t) dW_l^i(t) = \rho_{i,l} dt, \quad dW_i^i(t) dW_\nu^i(t) = \rho_{i,\nu} dt.$$

El proceso de volatilidad $\nu(t)$ se modela con reversión a la media, con media a largo plazo ν_0 , y la volatilidad del proceso de varianza denotada por η . Para dos tipos Libor, $\ell_i(t)$ y $\ell_l(t)$, cualesquiera, la correlación viene dada por $\rho_{i,l}$ y cada tipo Libor $\ell_i(t)$ está correlado con el proceso de volatilidad $\nu(t)$ con $\rho_{i,\nu}$. Realizamos un cambio de medida para $\ell_i(t)$. En primer lugar, el sistema en (14.54) se puede reescribir, en términos de movimientos brownianos independientes, como

$$\begin{cases} d\ell_i(t) = \sigma_i \ell_i(t) \sqrt{\nu(t)} d\widetilde{W}_i^i(t), \\ d\nu(t) = \lambda(\nu_0 - \nu(t)) dt + \eta \sqrt{\nu(t)} \left(\rho_{i,\nu} d\widetilde{W}_i^i(t) + \sqrt{1 - \rho_{i,\nu}^2} d\widetilde{W}_\nu^i(t) \right). \end{cases}$$

A partir de los resultados de (14.22), el cambio de medida de la medida T_i -forward a la medida T_{i-1} -forward resulta en el ajuste del movimiento browniano dado por

$$d\widetilde{W}_i^i(t) = \frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t, \ell)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dt + d\widetilde{W}_i^{i-1}(t),$$

con $\bar{\sigma}_i(t, \ell) = \sigma_i \ell_i(t) \sqrt{\nu(t)}$. El movimiento browniano $\widetilde{W}_\nu^i(t)$ del proceso de varianza $\nu(t)$ se asume independiente de los tipos Libor, lo que implica que este movimiento browniano permanece invariante bajo los cambios de medida, es decir, $d\widetilde{W}_\nu^i(t) = d\widetilde{W}_\nu^{i-1}(t)$.

Entonces, la dinámica del tipo Libor $\ell_i(t)$, bajo la medida \mathbb{Q}^{i-1} -forward es

$$d\ell_i(t) = \sigma_i \ell_i(t) \sqrt{\nu(t)} \left(\frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t, \ell)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dt + d\widetilde{W}_i^{i-1}(t) \right),$$

y la dinámica del proceso de varianza viene dada por

$$\begin{aligned} d\nu(t) &= \lambda(\nu_0 - \nu(t)) dt \\ &+ \eta \sqrt{\nu(t)} \left[\rho_{i,\nu} \left(\frac{\tau_i \bar{\sigma}_i(t, \ell)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} dt + d\widetilde{W}_i^{i-1}(t) \right) + \sqrt{1 - \rho_{i,\nu}^2} d\widetilde{W}_\nu^{i-1}(t) \right]. \end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} d\nu(t) &= \lambda \left(\nu_0 - \nu(t) + \rho_{i,\nu} \frac{\eta}{\lambda} \frac{\tau_i \sigma_i \ell_i(t)}{\tau_i \ell_i(t) + 1} \nu(t) \right) dt \\ &\quad + \eta \sqrt{\nu(t)} \left[\rho_{i,\nu} d\widetilde{W}_i^{i-1}(t) + \sqrt{1 - \rho_{i,\nu}^2} d\widetilde{W}_\nu^{i-1}(t) \right]. \end{aligned}$$

El desarrollo anterior muestra que un cambio de medida aplicado al modelo Libor de tipo Heston afectará al término de derivación del tipo Libor ℓ_i , así como al proceso de varianza $\nu(t)$. Los tipos Libor y la volatilidad estocástica están correlados, lo que tiene un impacto significativo sobre la dinámica de los procesos bajo un cambio de medida. En Wu y Zhang (2008), los autores mostraron que el proceso de volatilidad estocástica $\nu(t)$ evoluciona como un proceso raíz-cuadrada solo bajo una medida de referencia y que la propiedad de reversión a la media desaparece al cambiar los numerarios. Además, si se cambia la definición original del proceso de volatilidad, no se pueden emplear fácilmente los métodos basados en inversión de Fourier para la valoración eficiente de caplets y swaptions. Se puede obtener un modelo aproximado mediante «técnica de congelación» de parámetros, véase Wu y Zhang (2008). Asumimos que el parámetro de correlación entre el tipo Libor y la volatilidad es «igual a cero». Debido a que ahora el proceso de varianza no está correlado con los tipos Libor, un cambio de medida no afectará a la forma de la dinámica. Así, obtenemos la versión alternativa de difusión desplazada dada por

$$\begin{cases} d\ell_i(t) &= \sigma_i (\beta \ell_i(t) + (1 - \beta) \ell_i(t_0)) \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t), \\ d\nu(t) &= \lambda(\nu_0 - \nu(t)) dt + \eta \sqrt{\nu(t)} dW_\nu(t), \end{cases} \quad (14.55)$$

con correlaciones

$$dW_i^i(t) dW_l^i(t) = \rho_{il} dt, \quad dW_i^i dW_\nu(t) = 0.$$

En general, un modelo con correlación nula es capaz de generar distintos patrones de sonrisa de volatilidad, pero no puede representar volatilidades implícitas en forma de mueca. Sin embargo, este modelo también es capaz de generar una forma de mueca para la volatilidad implícita, gracias al parámetro de desplazamiento β , véase la Figura 14.5, y al procesos de volatilidad estocástica. El modelo se denomina modelo de mercado Libor de difusión desplazada con volatilidad estocástica o, abreviado SV-LMM. A continuación se presenta la relación con el modelo de Heston estándar.

Observación 14.3.1 (Generalizaciones en la industria)

Otro modelo de difusión desplazada bajo la medida T_i -forward, con parámetros dependientes del tiempo, que también se extiende mediante un proceso de volatilidad estocástica, viene dado por

$$\begin{cases} d\ell_i(t) = \sigma_i(t) (\beta_i(t) \ell_i(t) + (1 - \beta_i(t)) \ell_i(t_0)) \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t), \\ d\nu(t) = \lambda(\nu(t_0) - \nu(t)) dt + \eta \sqrt{\nu(t)} dW_\nu^i(t), \quad \nu(t_0) = 1, \end{cases}$$

donde $\beta_i(t)$ son los coeficientes de desplazamiento dependientes del tiempo, $\sigma_i(t)$ son las funciones de volatilidad dependientes del tiempo, $\nu(t)$ es el proceso de varianza con parámetros λ , η y movimiento browniano independiente $W_v^i(t)$. Con esta configuración, tenemos un único proceso de varianza, $\nu(t)$, para todos los tipos Libor.

Empleando este modelo, obtenemos la volatilidad HJM instantánea dada por

$$\bar{\eta}(t, z) = \frac{\sigma_i(t) \left(\beta_i(t) \ell_i(t) + (1 - \beta_i(t)) \ell_i(t_0) \right)}{1 + \tau_i \ell_i(t)} \sqrt{\nu(t)}. \quad (14.56)$$

Los conceptos de «muestra efectiva» y «volatilidad efectiva» introducidos en Piterbarg (2005b) permiten la calibración de las sonrisas de volatilidad a un conjunto entero de swaptions. Mediante un cambio de medida, de la medida riesgo neutro a la medida forward asociada con el bono cupón cero como numerario, se reduce la dimensión de la función característica aproximada. Esto, junto con la «congelación» de los tipos Libor (manteniéndolos en valores específicos) y la «linealización» de los términos no afines que aparecen en la correspondiente matriz de covarianzas instantáneas, son algunos aspectos clave para una evaluación eficiente mediante modelos aproximados. Véase Andersen y Piterbarg (2010) para más detalles. ▲

Relación con el modelo de Heston

Presentamos la relación entre el modelo SV-LMM de (14.55) y el modelo de Heston original. La dinámica del tipo Libor en (14.55) se puede escribir como

$$d\ell_i(t) = \beta \sigma_i \left(\ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta} \right) \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t),$$

que es equivalente a

$$\frac{d\ell_i(t)}{\ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta}} = \beta \sigma_i \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t). \quad (14.57)$$

Como $d(\ell_i(t) + a) = d\ell_i(t)$ para valores constantes de a , el proceso en (14.57) es igual a

$$\frac{d \left(\ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta} \right)}{\ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta}} = \beta \sigma_i \sqrt{\nu(t)} dW_i^i(t).$$

Incorporando otro proceso, $\gamma_i(t)$, definido como

$$\gamma_i(t) := \ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta}, \quad (14.58)$$

con $\gamma_i(t_0) = \ell_i(t_0)/\beta$, se puede deducir fácilmente que, para β y $\ell_i(t_0)$ constantes, obtenemos

$$d\gamma_i(t) = d\ell_i(t).$$

Entonces, la dinámica para $\gamma_i(t)$ viene dada por

$$\frac{d\gamma_i(t)}{\gamma_i(t)} = \beta\sigma_i\sqrt{\nu(t)}dW_i^i(t) = \sqrt{\beta^2\sigma_i^2\nu(t)}dW_i^i(t).$$

Definiendo $\hat{\nu}(t) := \beta^2\sigma_i^2\nu(t)$, el proceso para $\gamma_i(t)$ se puede escribir como

$$\frac{d\gamma_i(t)}{\gamma_i(t)} = \sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_i^i(t).$$

El último paso consiste en obtener la dinámica de $\hat{\nu}(t)$. Aplicando el lema de Itô, tenemos que

$$\begin{aligned} d\hat{\nu}(t) &= \beta^2\sigma_i^2d\nu(t) \\ &= \beta^2\sigma_i^2\lambda(\nu_0 - \nu(t))dt + \beta^2\sigma_i^2\eta\sqrt{\nu(t)}dW_\nu(t) \\ &= \lambda(\beta^2\sigma_i^2\nu_0 - \beta^2\sigma_i^2\nu(t))dt + \beta\sigma_i\eta\sqrt{\beta^2\sigma_i^2\nu(t)}dW_\nu(t), \end{aligned}$$

lo que resulta en

$$d\hat{\nu}(t) = \lambda(\hat{\nu}_0 - \hat{\nu}(t))dt + \hat{\eta}\sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_\nu(t),$$

con $\hat{\nu}_0 = \beta^2\sigma_i^2\nu_0$ y $\hat{\eta} = \beta\sigma_i\eta$. Entonces, la dinámica para $\gamma_i(t)$ es

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_i(t)}{\gamma_i(t)} = \sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_i^i(t), \\ d\hat{\nu}(t) = \lambda(\hat{\nu}_0 - \hat{\nu}(t))dt + \hat{\eta}\sqrt{\hat{\nu}(t)}dW_\nu(t), \end{cases} \quad (14.59)$$

que se asemeja a la dinámica del modelo de Heston estándar, con los parámetros apropiadamente desplazados. Esto implica que este modelo se puede calibrar del mismo modo que el modelo de Heston estándar.

Valoración de caplets bajo el modelo SV-LMM

Dado un tipo Libor, con la cuenta de ahorros $M(t)$ como numerario, el precio de una opción caplet o floorlet, para $t \leq T_{i-1} \leq T_i$, viene dado por

$$\frac{V_i^{\text{CPL/FL}}(t_0)}{M(t_0)} = N_i\tau_i\mathbb{E}^\mathbb{Q}\left[\frac{1}{M(T_i)} \max(\bar{\alpha}(\ell_i(T_{i-1}) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0)\right], \quad (14.60)$$

con $\bar{\alpha} = 1$ para un caplet y $\bar{\alpha} = -1$ para un floorlet, y $M(t_0) = 1$.

Mediante un cambio de medida, de la medida riesgo neutro \mathbb{Q} asociada con la cuenta de ahorros $M(t)$ a la medida T_i -forward \mathbb{Q}^{T_i} , donde el numerario es el BCC $P(t, T_i)$, obtenemos

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_i}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T_i)}{P(t_0, T_i)} \frac{M(t_0)}{M(t)}, \quad (14.61)$$

con lo que el precio en (14.60) se puede relacionar con los resultados utilizados para obtener (12.30). Así, el precio es igual a

$$V_i^{\text{CPL/FL}}(t_0) = N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\bar{\alpha}(\ell_i(T_{i-1}) - K), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \quad (14.62)$$

Recordamos que el tipo Libor, $\ell_i(t)$, es una martingala bajo su medida natural, es decir, bajo la medida T_i -forward.

Bajo el modelo SV-LMM, los caplets y los floorlets se valoran empleando la relación entre las dinámicas del modelo de difusión desplazada y del modelo de Heston. Para ello, hay que tener en cuenta ciertas modificaciones en los parámetros. En concreto, el modelo SV-LMM se relaciona con el modelo de Heston a través de (14.58), es decir,

$$\jmath_i(t) = \ell_i(t) + (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta}.$$

Entonces, la ecuación de valoración viene dada por

$$\begin{aligned} V(t_0) &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max \left(\bar{\alpha} \left(\jmath_i(T_{i-1}) - (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta} - K \right), 0 \right) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \\ &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\bar{\alpha}(\jmath_i(t) - K^*), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

con $K^* = (1 - \beta) \frac{\ell_i(t_0)}{\beta} + K$, y el proceso $\jmath_i(t)$ dado por (14.59) con valor inicial $\jmath_i(t_0) = \ell_i(t_0)/\beta$.

14.4. Gestión del riesgo: impacto de la crisis financiera

El mercado monetario vivió una situación difícil en la segunda década del siglo XXI, especialmente en Europa, producida por una crisis financiera. Las instituciones financieras se mostraron reacias a invertir y prestar dinero, por la falta de confianza en la credibilidad de los países y las empresas. Con el fin de recuperar la confianza en el sistema financiero, los bancos centrales europeos decidieron intervenir y estimular la oferta y la demanda monetaria. Una de las medidas excepcionales fue la de rebajar los tipos de interés. Se esperaba que esas medidas alentaran a los inversores a pedir dinero a interés bajo e invertirlo en la economía que, en consecuencia, se vería nuevamente estimulada.

Tras la crisis financiera se han producido importantes cambios en la modelización de los derivados de tipos de interés en el contexto de la gestión del riesgo financiero. En este apartado destacaremos dos de estos cambios: el hecho de que se cotizan tipos de interés negativos en el mercado financiero y el hecho de que la frecuencia de pagos tiene impacto en el precio de un derivado de tipo de interés. Comenzamos con los tipos de interés negativos.

14.4.1. Valoración en un entorno de tipos de interés negativos

Durante varios años de la década de los 2010s se han rebajado los tipos de interés, de tal forma que en 2014, por primera vez en la historia de la zona euro,

los tipos de interés pasaron a tener un valor negativo (concretamente, menos 10 puntos básicos). Mantener el dinero en una cuenta bancaria produciría una pérdida y no una ganancia, debido a los tipos de interés. En la Figura 14.6 se muestra una comparativa de los tipos de interés (la curva de rentabilidad) en los años 2008 y 2017. La curva de rentabilidad de los gráficos se basa en los factores de descuento $P(0, t)$, $t > 0$, es decir,

$$P(0, t) = e^{-r(t)t}, \quad r(t) = -\frac{1}{t} \log P(0, t). \quad (14.63)$$

Así, $r(t)$ se denomina el «tipo cero».

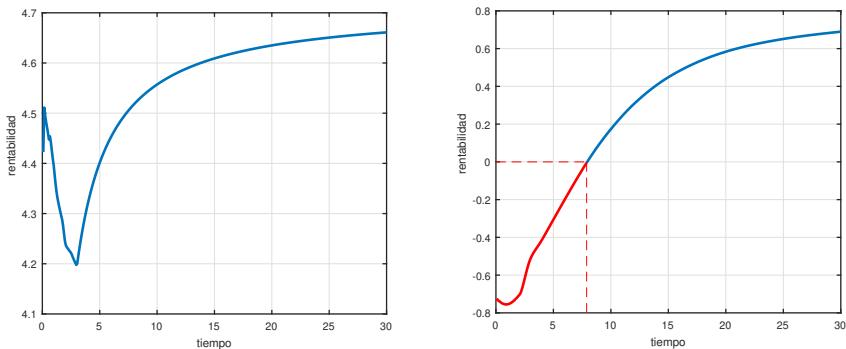


Figura 14.6: Curva de rentabilidad obtenida a partir de la curva 1M EUR. Izquierda: precrisis. Derecha: postcrisis.



Como se puede observar en la Figura 14.6 (derecha), la rentabilidad esperada se mantendrá negativa hasta 7 años. Esto significa que las inversiones con plazos de vencimiento inferiores a 7 años repercutirán en costes en lugar de ingresos. En la industria se han propuesto distintas modificaciones de los modelos para hacer frente a la potencial negatividad de los tipos. Además, durante muchos años se consideró que, en determinadas contextos, los modelos de tipo de interés que daban lugar a tipos de interés negativos no eran suficientemente realistas. Un ejemplo es el modelo Hull-White (HW), estudiado en detalle en el Apartado 11.3. Debido a que, bajo este modelo, se dispone de soluciones en forma cerrada para varios productos de tipos de interés, el modelo HW se ha convertido en el modelo estándar para los mismos.

En la Figura 14.7, se representan algunas trayectorias del tipo de interés bajo el modelo Hull-White, calibrado a datos de mercado en tiempos precrisis y poscrisis. Claramente, empleando datos de mercado poscrisis, un número importante de trayectorias de Monte Carlo alcanzan valores negativos.

Los tipos de interés negativos se han convertido en un fenómeno real y observable en los mercados de tipo de interés aunque, históricamente, esto

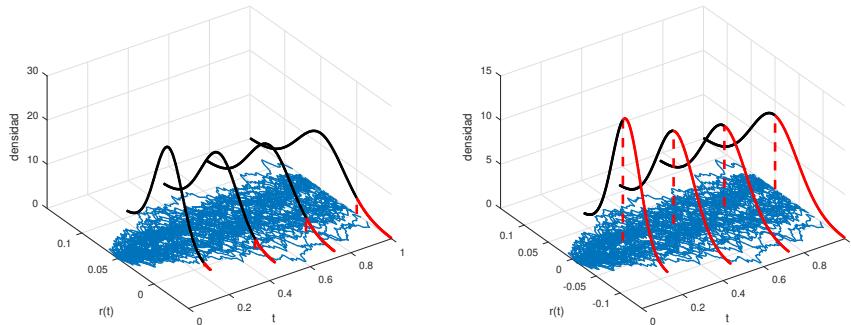


Figura 14.7: Trayectorias de Monte Carlo bajo el modelo Hull-White. Izquierda: entorno de tipos de interés positivos. Derecha: entorno de tipos de interés negativos.



no fuese así. Por tanto, la negatividad debe considerarse como una propiedad deseable para un modelo de tipo de interés en momentos poscrisis. Sin embargo, la valoración de opciones de tipos de interés en este contexto requiere de un análisis pormenorizado, debido a que, ahora, los tipos forward pueden llegar a ser negativos, hecho que también necesita ser modelado con cuidado.

La valoración de caplets presentada en el Apartado 12.1 representa un ejemplo de por qué se necesita adaptar la valoración bajo tipos negativos. Suponiendo tipos Libor lognormales, $\ell_i(t) := \ell(t; T_{i-1}, T_i)$, cuya dinámica es

$$d\ell_i(t) = \sigma_i \ell_i(t) dW_i^i(t), \quad (14.64)$$

la ecuación de valoración de un caplet viene dada por

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL}}(t_0) &= N_i \tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M(t_0)}{M(T_i)} \max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned}$$

véase (12.30), cuya solución es

$$V_i^{\text{CPL}}(t_0) = N_i \tau_i P(t_0, T_i) [\ell_i(t_0) N(d_1) - K_i N(d_2)], \quad (14.65)$$

con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\ell_i(t_0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(T_i - t_0)}{\sigma_i \sqrt{T_i - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{T_i - t_0},$$

y $\ell_i(t_0) = \ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$.

En un entorno de tipos de interés negativos, los BCCs $P(t_0, T_i)$ pueden alcanzar valores superiores a una unidad de moneda. Esto implicaría que el tipo Libor $\ell(t_0; T_{i-1}, T_i)$ sería negativo. Si el tipo Libor es negativo, la ecuación de valoración anterior no sería válida, ya que el logaritmo de un valor negativo no está definido.

Para valorar caplets en un entorno de tipos de interés negativos se puede utilizar una «adaptación» de la dinámica subyacente del tipo Libor en (14.64). Por ejemplo, en lugar de la dinámica MBG se podría emplear la dinámica del movimiento browniano aritmético (MBA), que da lugar a realizaciones negativas. Sin embargo, esta solución, aunque sencilla, tiene una desventaja importante, ya que la distribución normal tiene colas mucho más planas que la correspondiente a un proceso lognormal. En vez de cambiar la dinámica completamente, se propone «trasladar» el proceso original, lo que se ha convertido en estándar en la industria para tratar con tipos negativos.

El proceso trasladado se define como

$$\hat{\ell}_i(t) = \ell_i(t) + \theta_i, \quad (14.66)$$

donde el proceso $\hat{\ell}_i(t)$ evoluciona de acuerdo con un proceso lognormal, con la dinámica

$$d\hat{\ell}_i(t) = \hat{\sigma}_i \hat{\ell}_i(t) dW_i^i(t). \quad (14.67)$$

El concepto de trasladar una distribución es muy similar a la idea de «desplazamiento» introducida en el Apartado 14.3.3.

El tipo Libor $\ell_i(t)$ observado en mercado viene dado por $\ell_i(t) := \hat{\ell}_i(t) - \theta_i$. Trasladar el proceso es equivalente a «mover» la densidad de probabilidad en la dirección del eje x . Como se observa en la Figura 14.8, distintos parámetros de tralado θ_i tienen un efecto similar sobre $\hat{\ell}_i(t)$.

Ahora, la valoración de caplets viene dada por

$$\begin{aligned} V_i^{\text{CPL}}(t_0) &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\ell_i(T_{i-1}) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\hat{\ell}_i(T_{i-1}) - \theta_i - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N_i \tau_i P(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} \left[\max(\hat{\ell}_i(T_{i-1}) - \hat{K}, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \end{aligned} \quad (14.68)$$

con $\hat{K} = K + \theta_i$.

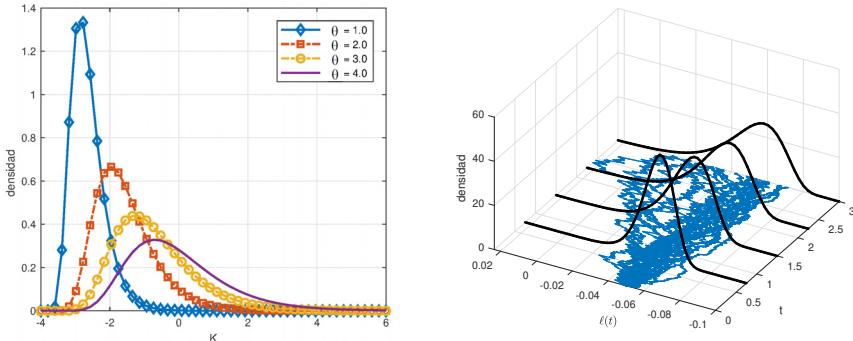


Figura 14.8: Distribuciones lognormales trasladadas utilizadas para la valoración en un entorno de tipos de interés negativos.



La valoración de opciones bajo distribuciones trasladadas resulta muy conveniente. La solución se obtiene de forma análoga a la versión sin trasladar, esto es

$$V_i^{\text{CPL}}(t_0) = N_i \tau_i P(t_0, T_i) \left[\hat{\ell}_i(t_0) N(d_1) - \hat{K}_i N(d_2) \right], \quad (14.69)$$

donde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\hat{\ell}_i(t_0)}{\hat{K}_i}\right) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(T_i - t_0)}{\sigma_i \sqrt{T_i - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{T_i - t_0},$$

con $\hat{K} = K + \theta_i$ y $\hat{\ell}_i(t_0) = \ell_i(t_0) + \theta_i$.

14.4.2. Entorno multicurva y tipo Libor

En el mercado pos-crisis se utilizan múltiples curvas para la valoración de productos, cuya motivación explicará a continuación.

Emplearemos una estructura temporal equiespaciada, $0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_{m-1} < T_m$, donde el período entre las fechas T_{i-1} y T_i está relacionado con la estructura de pagos del producto, períodos de 3 o 6 meses, dependiendo de la moneda. Consideramos una inversión durante el período $[T_{i-1}, T_{i+1}]$ con dos estructuras temporales distintas, es decir, con $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ y $\hat{\tau}_i = \tau_i + \tau_{i-1} \equiv T_i - T_{i-2}$. Entonces, tenemos, básicamente, dos estrategias posibles. Bajo la primera estructura temporal, podemos invertir para $[T_{i-1}, T_i]$ y reinvertir para $[T_i, T_{i+1}]$, mientras que, bajo la segunda estructura temporal, invertimos para todo el período $[T_{i-1}, T_{i+1}]$, véase Figura 14.9.

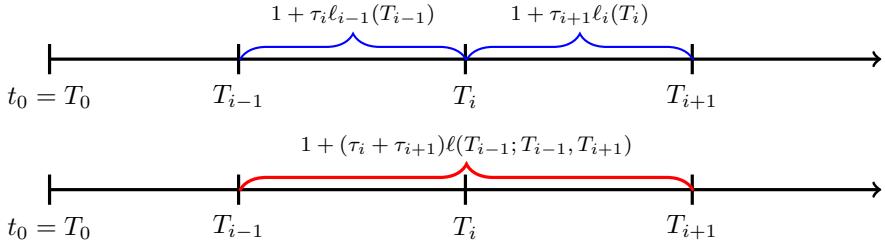


Figura 14.9: Estrategia de inversión desde T_{i-1} hasta T_{i+1} , empleando los tipos Libor bajo distintas estructuras temporales. Arriba: estructura temporal $T_i - T_{i-1}$; abajo: estructura temporal $T_{i+1} - T_{i-1}$.

Empleando argumentos de arbitraje, la estrategia que opta por la reinversión debería proporcionar exactamente el mismo resultado que la estrategia de inversión para todo el período, de modo que se verifique la igualdad

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i+1})} (1 + \tau_i \ell_i(T_{i-1})) (1 + \tau_{i+1} \ell_{i+1}(T_i)) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i+1})} (1 + \hat{\tau}_{i+1} \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_{i+1})) \right], \end{aligned} \quad (14.70)$$

con $\hat{\tau}_{i+1} = \tau_i + \tau_{i+1} = T_{i+1} - T_{i-1}$. El lado derecho de la igualdad se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i+1})} (1 + \hat{\tau}_{i+1} \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_{i+1})) \right] \\ &= P(t_0, T_{i+1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(1 + \hat{\tau}_{i+1} \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_{i+1}))]. \end{aligned}$$

Empleando la definición de tipo Libor, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i+1})} (1 + \hat{\tau}_{i+1} \ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_{i+1})) \right] \\ &= P(t_0, T_{i+1}) + \hat{\tau}_{i+1} P(t_0, T_{i+1}) \ell(t_0; T_{i-1}, T_{i+1}) = P(t_0, T_{i-1}). \end{aligned}$$

Así mismo, el lado izquierdo de (14.70) es igual a $P(t_0, T_{i-1})$. La igualdad en (14.70) implica que, si negociamos un swap con dos patas variables con distinta frecuencia de pagos, el valor de este derivado debería ser igual a cero, esto es

$$\begin{aligned} V^S(t_0) &= NM(t_0) \\ &\times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k_1=i+1}^{m_1} \frac{1}{M(T_{k_1})} \tau_{k_1} \ell_{k_1}(T_{k_1-1}) - \sum_{k_2=i+1}^{m_2} \frac{1}{M(T_{k_2})} \tau_{k_2} \ell_{k_2}(T_{k_2-1}) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (14.71)$$

con el índice k_1 representando los pagos en $\{T_1, T_2, \dots, T_{m-1}, T_m\}$ y el índice k_2 representando los pagos, menos frecuentes, en $\{T_2, T_4, \dots, T_m\}$, como en la Figura 14.10. Este derivado financiero se conoce como *basis swap*, siendo un swap de tipos de interés cuyas patas son ambas variables. En el caso de un basis swap de Euribor, podríamos tener intercambios de flujos de caja indexados al Euribor a 3 meses y al Euribor a 12 meses.

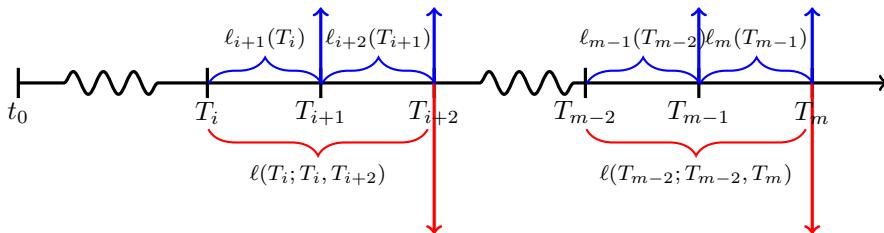


Figura 14.10: Posibles flujos de caja para un swap de tipos de interés variables.

Multicurva y probabilidades de default

Sin embargo, desde una perspectiva de gestión de riesgos, es más seguro recibir pagos frecuentes, ya que la contrapartida «puede quebrar» entre las fechas de pago y, si el default ocurre, se perdería menos dinero que en el caso de menor frecuencia.

Hasta la crisis financiera de 2007/2008, los diferenciales para distintos períodos, como en (14.71), eran despreciables³. Sin embargo, hoy en día, los instrumentos de tipo de interés con estructuras temporales diferentes se caracterizan por tener distintas primas por liquidez y riesgo de crédito, lo que se refleja en los valores no nulos en el diferencial, véase la Figura 14.11 como ilustración de los diferenciales actuales.

Antes de la crisis hipotecaria, el descuento se basaba en una única curva que se utilizaba para todos los períodos. La existencia de diferenciales no nulos en el mercado implica que, al modelar los tipos de interés forward, necesitamos distinguir los tipos con una estructura temporal diferente (con distintas frecuencias).

Por lo tanto, es práctica habitual en mercado construir una curva forward diferente para cada período, véase el lado izquierdo de la Figura 14.11. Cada curva se basa en una selección específica de derivados de tipo de interés, homogéneos en su estructura temporal (típicamente 1 mes, 3 meses, 6 meses, 12 meses). Por otro lado, los derivados financieros con distinta estructura temporal deberían descontarse con una curva de descuento única. Una alternativa óptima para el descuento es una curva que conlleve el menor riesgo crediticio posible, lo que sugiere que la curva de descuento se debería corresponder con la curva

³Entre 2004 y 2007, se reportaron diferencias de un máximo de 0.01 % entre los basis swaps a 3 meses y a 6 meses.

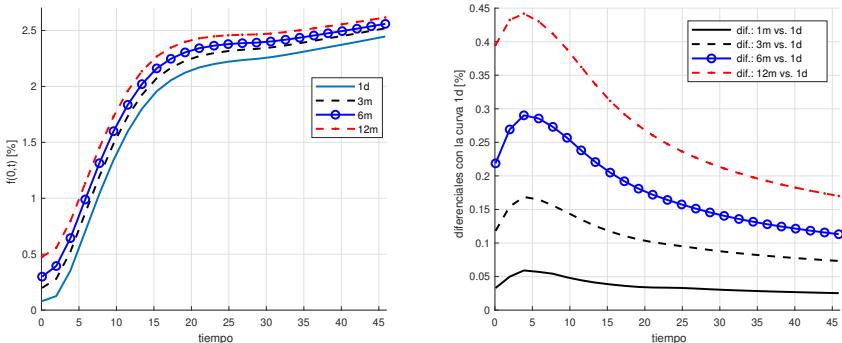


Figura 14.11: Entorno multicurva. Izquierda: tipos forward correspondientes a distintas curvas, 1 día, 3 meses, 6 meses y 12 meses. Derecha: diferenciales entre curvas con respecto a la curva a 1 día.

con el período más corto disponible en el mercado (que suele ser a 1 día). En la zona euro, esta curva es la denominada EONIA (por sus siglas en inglés, *EURO OverNight Index Average*), mientras que en Estados Unidos es el fondo Fed (*US Federal Reserve overnight rate*).

Nótese que, bajo el entorno multicurva, las relaciones de ausencia de arbitraje establecidas para una curva única ya no son válidas.

Si denotamos mediante el subíndice «dc» el descuento y mediante «pd» la predicción, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{M(T_i)} \right] &= P_{\text{pd}}(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)] \\ &\neq P_{\text{dc}}(t_0, T_i) \mathbb{E}^{T_i} [\ell(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)] \end{aligned} \quad (14.72)$$

En otras palabras, al separar del descuento y la predicción, la metodología de cambio de medida para ir de la medida spot a la medida forward no es válida. Por tanto, para manejar la separación de curvas, se necesitan versiones extendidas del tipo Libor y de la técnica de cambio de medida.

Además, introducimos el riesgo de default en las transacciones de préstamo. Sea t_D^B una variable aleatoria que indica la probabilidad de default de la contrapartida B . En la Figura 14.12 se muestra una generalización de la Figura 12.1, en la que los pagos tienen lugar «solo» si la contrapartida B no quiebra antes del momento de la transacción. Así, en el instante t_0 , las dos contrapartes acuerdan una transacción en la que, si la contrapartida B no quiebra antes del tiempo T_1 , la contrapartida A le prestará en T_1 la cantidad de 1 € a B y, si no hay default en T_2 , la contrapartida B devolverá 1 € en T_2 con el interés acumulado proporcional al período $T_2 - T_1$, es decir, $1 e \cdot K \cdot (T_2 - T_1)$. Dado que los pagos en los instantes T_1 y T_2 son inciertos, necesitamos incorporar esta información para calcular el valor justo de la operación. Asumiendo

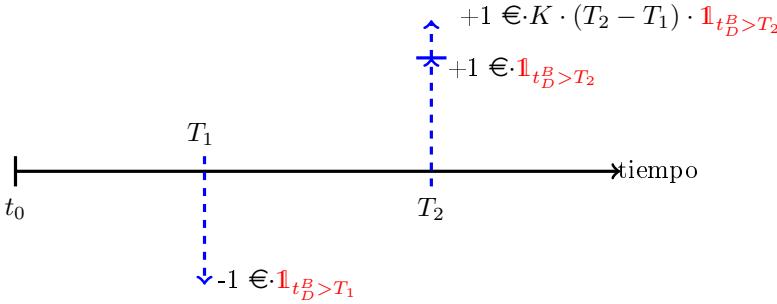


Figura 14.12: *Flujos de caja entre dos contrapartidas incluyendo la probabilidad de default.*

independencia entre el momento de default, t_D^B , y el tipo de interés, tenemos que

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{-1}{M(T_1)} \mathbb{1}_{t_D^B > T_1} + \frac{1}{M(T_2)} (1 + K \cdot (T_2 - T_1)) \mathbb{1}_{t_D^B > T_2} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= P(t_0, T_2) (1 + K \cdot (T_2 - T_1)) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{t_D^B > T_2} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &\quad - P(t_0, T_1) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{t_D^B > T_1} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Las esperanzas anteriores se asocian con una probabilidad de supervivencia, esto es, para $i = 1, 2$, tenemos que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{t_D^B > T_i} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \mathbb{Q} [t_D^B > T_i] = 1 - F_{t_D^B}(T_i) =: e^{-\int_{t_0}^{T_i} h(s) ds}, \quad (14.73)$$

donde $h(s)$ representa el «tipo de riesgo» determinista. Normalmente, el tipo de riesgo para una contrapartida se puede determinar a partir de derivados de crédito, como los *Credit Default Swaps (CDS)*.

El valor de la opción $V(t_0)$ se puede escribir como

$$V(t_0) = P(t_0, T_2) (1 + K \cdot (T_2 - T_1)) D(t_0, T_2) - P(t_0, T_1) D(t_0, T_1), \quad (14.74)$$

con $D(t_0, T_i) = e^{-\int_{t_0}^{T_i} h(s) ds}$. El precio K para el cual el contrato en (14.74) es igual a 0 en tiempo inicial t_0 , es decir, $V(t_0) = 0$, viene dado por

$$K = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{P(t_0, T_1)}{P(t_0, T_2)} \frac{D(t_0, T_1)}{D(t_0, T_2)} - 1 \right). \quad (14.75)$$

En el entorno de curva única, el valor de strike «justo» al que dos contrapartidas intercambian fondos se denomina el tipo Libor y se denota por $\hat{\ell}_i(t) := \hat{\ell}(t; T_{i-1}, T_i)$. Sin embargo, en este contexto, el tipo $\hat{\ell}_i(t)$ depende de la solvencia de la contrapartida y del período $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, es decir,

$$\hat{\ell}(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t_0, T_{i-1})}{P(t_0, T_i)} \frac{D(t_0, T_{i-1})}{D(t_0, T_i)} - 1 \right), \quad (14.76)$$

En el mercado, el tipo riesgo $h(s)$ de la definición de $D(t_0, T_i)$ se ve como un «diferencial» entre un tipo libre de riesgo y un tipo sin garantía, para diferentes períodos. Esto implica que $D(t_0, T_i)$ se puede interpretar como un factor de descuento. La expresión en (14.76) muestra que, para determinar el precio justo del tipo Libor «sin garantía» $\hat{\ell}_i(t)$, se requiere de un curva libre de riesgo, es decir, «garantizada», a partir de la cual se debería calcular el BCC $P(t_0, T_i)$. Dado que, para cada estructura temporal, $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, existe un diferencial $D_{\tau_i}(t_0, T_i)$ (donde el índice τ_i resalta que $D_{\tau_i}(t_0, T_i)$ se corresponde con un período en concreto), definimos un nuevo BCC no garantizado, $P_{\tau_i}(t_0, T_i)$, como

$$P_{\tau_i}(t_0, T_i) := P(t_0, T_i) \cdot D_{\tau_i}(t_0, T_i). \quad (14.77)$$

Así mismo, la expresión en (14.77) nos da una idea de como construir una curva asociada con un período τ_i en particular, esto es, comenzamos con la estimación de la curva libre de riesgo (la curva con el período más corto, habitualmente 1 día) y, una vez que tenemos esta «curva base», se determina una función $D_{\tau_i}(t_0, T_i)$ correspondiente con un estructura temporal concreta utilizando instrumentos de mercado.

Empleando (14.77), reescribimos el tipo Libor con riesgo como

$$\hat{\ell}(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P_{\tau_i}(t, T_{i-1})}{P_{\tau_i}(t, T_i)} - 1 \right). \quad (14.78)$$

Con la descripción anterior, se puede definir la valoración de un producto de tipos de interés, dadas una curva libre de riesgo $P(t_0, T_i)$ y una curva con riesgo $P_{\tau_i}(t_0, T_i)$.

14.4.3. Valoración en un entorno multicurva

En la valoración de derivados de tipos de interés, el riesgo de default se debe tener en cuenta de una manera apropiada. Cuando se determina un tipo Libor con riesgo $\hat{\ell}(t; T_{i-1}, T_i)$, es importante descontar los flujos de caja futuros que dependen de este tipo Libor. Por lo general, el descuento se hace empleando el denominado tipo libre de riesgo pero, como se ha mencionado, un tipo relacionado con un bono con riesgo no es representativo para el tipo libre de riesgo. Después de la crisis, se ha llegado al consenso de que la mejor aproximación para el tipo libre de riesgo es el tipo swap a un día, conocido como *Overnight Index Swap rate* (OIS), véase Hull y White (2012). Los acuerdos contractuales sobre el OIS establecen que una contraparte paga un tipo fijo y recibe el interés a un día (capitalizado).

Combinando los conceptos de tipo Libor con riesgo y el descuento mediante el OIS, tenemos que la valoración de un derivado de tipo de interés básico, como un swap de tipos de interés (pagador/receptor), véase (12.9), bajo la medida T_k -forward, \mathbb{Q}^{T_k} , como en (11.60), se realiza mediante la expresión

$$V^{\text{SP,SR}}(t_0) = \bar{\alpha} \cdot N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) \left(\mathbb{E}^{T_k} [\hat{\ell}_k(T_{k-1}) | \mathcal{F}(t_0)] - K \right),$$

donde $P(t_0, T_k)$ es el bono libre de riesgo correspondiente con el tipo a un día. Como se ilustra en Bianchetti (2010), el consenso actual de mercado es el de aproximar la esperanza anterior mediante el tipo forward $\hat{\ell}_k(t_0)$, es decir,

$$V^{\text{SP,SR}}(t_0) \approx \bar{\alpha} \cdot N \sum_{k=i+1}^m \tau_k P(t_0, T_k) (\hat{\ell}_k(t_0) - K), \quad (14.79)$$

donde se ha utilizado la siguiente aproximación, $\mathbb{E}^{T_k}[\hat{\ell}_k(t)|\mathcal{F}(t_0)] \approx \hat{\ell}_k(t_0)$. Claramente, esto es simplemente una aproximación, que no está basada en una transformación de la medida apropiada. Para conseguir una valoración de derivados consistente, bien se puede seguir la analogía en el contexto del cambio de divisas descrito en Bianchetti (2010), donde la relación entre los tipos libre de riesgo y con riesgo se establece mediante el denominado «ajuste *quanto*», o bien se puede seguir la metodología presentada en Mercurio (2010), donde se utiliza un proceso para $\bar{\psi}_k(t) = \mathbb{E}^{T_k} [\hat{\ell}_k(T_{k-1})|\mathcal{F}(t)]$.

14.5. Ejercicios

Ejercicio 14.1 Mostrar que la igualdad en (14.70) es válida, partiendo del lado izquierdo de la expresión.

Ejercicio 14.2 Considerar dos EDEs, una con función de volatilidad dependiente del tiempo y otra con volatilidad constante, esto es

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sigma(t)(\beta S(t) + (1 - \beta)S_0)\sqrt{v(t)}dW_x(t), \\ d\hat{S}(t) &= \sigma(\beta\hat{S}(t) + (1 - \beta)\hat{S}_0)\sqrt{v(t)}dW_x(t), \end{aligned}$$

con $t_0 = 0$ y $\hat{S}(0) = \hat{S}_0 = S_0$, compartiendo ambos procesos el mismo proceso de varianza dado por

$$dv(t) = \kappa(v_0 - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t),$$

donde $dW_x(t)dW_v(t) = 0$.

- a. Mostrar que se verifica la igualdad

$$\mathbb{E}\left[g\left(\int_0^T \sigma^2(t)v(t)dt\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(\sigma^2 \int_0^T v(t)dt\right)\right],$$

con

$$g(x) = \frac{S_0}{\beta} \left(2\phi\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{x}\right) - 1\right),$$

donde $\phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una normal.

- b. Comprobar esta igualdad numéricamente (elegir unos parámetros cualesquiera).

Ejercicio 14.3 Considerar la dinámica para el proceso del activo bajo la medida \mathbb{Q} dada por

$$dS(t) = \sigma(\beta S(t) + (1 - \beta)S_0)dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

con $r = 0$, $S_0 > 0$ y $\beta \in [0, 1]$. Realizar las siguientes tareas:

- a. Hallar la solución para $S(t)$ (analíticamente y numéricamente).
- b. Tomar $\beta = 0.5$, $\sigma = 0.15$, $T = 2$ y $S_0 = 1$, y calcular los precios de las opciones europeas para strikes K que van de 0.5 a 2, con paso 0.1.
- c. Calcular las correspondientes volatilidades implícitas de Black-Scholes (utilizando $T = 3$) para los precios de opciones europeas del punto anterior. Representar los resultados y analizar la forma de la volatilidad implícita con respecto a los parámetros β y σ (probar con valores de β negativos).

Ejercicio 14.4 «OIS» es una abreviatura que viene de *overnight index swaps*, swaps sobre el índice a un día. En su configuración estándar, este índice a un día se basa en un índice publicado específico de los tipos a un día diarios. Los momentos de pagos de cupón del OIS pueden variar entre 1 semana y 2 años. Denotamos el tipo diario por $\ell(t, T_{i-1}, T_i)$, con $\tau_i = T_i - T_{i-1} = 1d$ (la letra «d» indica «día»). Mostrar que la media geométrica diaria (a menudo denominada «capitalización geométrica») del tipo en algún período $[T_0, T_m]$ es igual al tipo forward en el mismo período, es decir, mostrar que

$$\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i \ell(t, T_{i-1}, T_i)) - 1 = (T_m - T_0) \ell(t, T_0, T_m).$$

Ejercicio 14.5 Sea $\ell_i(t) := \ell(t, T_{i-1}, T_i)$ y $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Mostrar que se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} P(t_0, T_{i-1}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_{i+1})} (1 + \tau_i \ell_i(T_{i-1})) (1 + \tau_{i+1} \ell_{i+1}(T_i)) \mid \mathcal{F}(t_0) \right], \\ P(t_0, T_{i-1}) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M(T_i)} (1 + \tau_i \ell_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Ejercicio 14.6 Considerar el problema de valoración de un caplet, véase la Definición 12.2.1, en un entorno de tipos de interés negativos. Se observan los siguientes precios, véase la Tabla 14.2, para un caplet en tiempo t_0 , $V_0^{\text{CPL}}(t_0)$, con nominal $N = 1$, período $\tau_i = 1$, vencimiento $T = 5$, tipo forward $\ell_i(t_0) = 4\%$, BCC $P(t_0, T_i) = 0.85$ y $\theta_i = 4\%$. Calcular las volatilidades implícitas «trasladadas» y llenar los huecos que faltan en la tabla.

Tabla 14.2: Precios de un caplet.

| K | -2 % | -1.5 % | -0.5 % | 0 % | 1 % | 3 % |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| precio caplet | 0.0522 | 0.0468 | 0.0383 | 0.0344 | 0.0302 | 0.0247 |
| vol. implícita [%] | | | | | | |

Ejercicio 14.7 Considerar el denominado modelo de Heston «doble» para el tipo forward $\ell_i(t) := \ell(t, T_{i-1}, T_i)$, definido mediante las dinámicas

$$\begin{aligned} d\ell_i(t)/\ell_i(t) &= \sqrt{v_1(t)} dW_{i,1}^i(t) + \sqrt{v_2(t)} dW_{i,2}^i(t), \\ dv_1(t) &= (\bar{v}_1 - v_1(t)) dt + \sqrt{v_1(t)} dW_{v,1}(t), \\ dv_2(t) &= (\bar{v}_2 - v_2(t)) dt + \sqrt{v_2(t)} dW_{v,2}(t), \end{aligned}$$

con todos los parámetros de correlación iguales a 0.

Hallar los parámetros del proceso $\xi(t)$, tal que el modelo se puede reformular como

$$\begin{aligned} d\ell_i(t)/\ell_i(t) &= \sqrt{\xi(t)} dW_*^i(t), \\ d\xi(t) &= (\bar{\xi} - \xi(t)) dt + \sqrt{\xi(t)} dW_\#(t). \end{aligned}$$

Ejercicio 14.8 Considerar el modelo de Heston para el tipo Libor $\ell_i(t) := \ell(t, T_{i-1}, T_i)$, dado por

$$\begin{aligned} d\ell_i(t)/\ell_i(t) &= \sqrt{v(t)} dW_i^{T_i}(t), \\ dv(t) &= \kappa(\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v(t), \end{aligned}$$

con algunos parámetros básicos del modelo. Considerando el proceso $\sigma(t) = \sqrt{v(t)}$:

- Aplicar el lema de Itô y mostrar que el proceso $\sigma(t)$ es un proceso Ornstein-Uhlenbeck con media a largo plazo dependiente del estado y no estacionaria. ¿Qué problema aparece al aplicar el lema de Itô?
- Estudiar la condición de Feller para el nuevo proceso $\sigma(t)$.

Ejercicio 14.9 Considerar las fechas $T_{i-1} = 5$, $T_i = 6$, el tipo forward $\ell_i(t_0) = 0.13$ y asumir el modelo de Black-Scholes para la dinámica de $\ell_i(t)$, es decir,

$$d\ell_i(t) = \sigma \ell_i(t) dW_i^i(t).$$

Calcular $\mathbb{E}^{T_i} [\ell_i^2(T_{i-1})]$ utilizando el método Breeden-Litzenberger dado en (14.39). Variar el parámetro de volatilidad σ y comparar los resultados obtenidos con los generados mediante una simulación de Monte Carlo.

CAPÍTULO 15

Modelos Cross-Currency

En este capítulo:

En este capítulo introducimos la clase de activos asociados al mercado de divisas, más conocido, por su denominación y siglas en inglés, como FX o Forex (*foreign-exchange*). En el **Apartado 15.1** se describe brevemente el mercado FX. Generalizaremos algunas de las estrategias de modelización y las técnicas numéricas utilizadas en los capítulos anteriores para obtener modelos FX. En este apartado se presenta el modelo de Black-Scholes para el tipo FX. A continuación, se propondrán otros sistemas de EDEs alternativos. En el **Apartado 15.2** se obtiene el modelo de Heston FX, en el que los tipos de interés se modelan como procesos short-rate correlados con el proceso FX. En la práctica, resulta muy deseable una evaluación rápida del modelo para opciones FX, especialmente durante la calibración del mismo. Esta es la principal motivación para considerar la generalización de las técnicas de linealización, presentadas en el Capítulo 13, en el contexto de los tipos FX. También se analizará el *Credit Valuation Adjustment* para el swap FX.

El modelo de tipo de interés anterior «no es capaz» de generar sonrisas/muecas de volatilidad implícita, como las que se suelen observar en el mercado de tipos de interés. Por ello, en el **Apartado 15.3** se presenta un modelo híbrido FX-tipo de interés, donde el FX se modela mediante un modelo de Heston con tipos de interés gobernados por el modelo de mercado Libor.

Palabras clave de este capítulo: foreign-exchange (FX), correlación entre clases de activos, función característica, modelo de Heston FX, tipo de interés Libor de mercado, medida forward, CVA con FX.

15.1. Introducción al contexto FX

Comenzamos esta introducción con una breve reseña histórica.

15.1.1. Mercados FX

Los mercados de divisas han tenido un crecimiento continuo durante varias décadas. Como es bien sabido, antes de la Primera Guerra Mundial, el papel de los tipos de cambio lo ejercía una materia prima, el oro. Cada país bajo el «patrón oro» expresaba su moneda en términos del precio del oro, es decir, dos países A y B cotizaban sus precios para el oro en su moneda local con valor x e y , respectivamente. Entonces, el tipo de cambio era x/y o y/x , dependiendo del país. El patrón oro como referencia para el valor de las divisas llegó a su fin en 1933, cuando la administración del presidente Franklin D. Roosevelt restringió la propiedad privada de oro a los joyeros. Cuando se abandonó el patrón oro, muchos países fijaron sus tipos de cambio al dólar estadounidense, y este, a su vez, estaba directamente conectado con el precio del oro. Desde 1971, el dólar estadounidense no se ajusta al precio del oro, por lo que las divisas ya no están vinculadas a ninguna materia prima que pueda ser comprada, vendida o almacenada. Por consiguiente, el valor de una moneda se determina principalmente mediante la oferta y la demanda, así como por los productos que se negocian en los mercados locales.

Inicialmente, los gobiernos trataron de fijar los tipos de cambio localmente para mejorar la posición comercial del país. Por ejemplo, un país concreto puede fijar un tipo de cambio más bajo que los tipos de cambio de otros países, mejorando así su exportación, ya que esta sería más asequible, mientras que importar sería relativamente más caro. Sin embargo, esta estrategia ha producido guerras comerciales en muchas ocasiones. Por otro lado, en países que dependen de deuda externa, un tipo de cambio bajo implica el pago de cuotas más altas, especialmente cuando los préstamos se contratan en la moneda extranjera. Actualmente, los principales tipos de cambio de divisas se determinan mediante la oferta y la demanda (es decir, los tipos de cambio son «variables»). Todavía es práctica común que los países y sus bancos centrales «afinen» los tipos de cambio manteniendo reservas de oro o de divisas extranjeras, que se conocen como reservas de divisas. Cuando lo necesitan, los países compran y venden estas divisas para estabilizar su propia moneda.

Consideraremos el euro (€) como la divisa local y el dólar (\$) como la divisa extranjera. Fijamos el tipo FX a $y_{\$}^{\text{€}}(t_0) =: y(t_0)$, expresado en unidades de la moneda local por unidad de la moneda extranjera. Si el tipo de cambio es $y_{\$}^{\text{€}}(t_0) = 0.85$ y deseamos cambiar \$100 a euros, el cálculo que se realiza es

$$\$100 \cdot y_{\$}^{\text{€}}(t_0) = \$100 \cdot 0.85 \frac{\text{€}}{\$} = 85 \text{ €}.$$

En este ejemplo, la cantidad de \$100 se denomina como el nominal en divisa extranjera, que se denota por N_f . De este modo, el nominal en divisa extranjera $\$N_f$ es igual a $\$N_f \cdot y(t)$ en la divisa local (ϵ).

En general, en este capítulo emplearemos la notación

$$y(t) := y_f^d(t).$$

Cambiamos una cantidad en divisa extranjera a nuestra divisa base local. Los sub- o super- índices «f» y «d» representan a las divisas extranjera (del inglés *foreign*) o local (del inglés *domestic*).

15.1.2. Contrato FX forward

Uno de los productos FX más líquidos es el denominado FX forward. Este contrato establece la obligación de un intercambio físico de fondos en una fecha futura a un tipo acordado, para el que no existe un pago por adelantado. Este tipo de contrato forward suele ser adecuado para cubrir el riesgo de cambio de divisas en una fecha de pago única (el llamado «pago bullet»), en contraposición a una secuencia de pagos por FX. Habitualmente, una secuencia de pagos por FX se cubre mediante un contrato conocido como swap FX. Sin embargo, en la práctica, los contratos forward se ven favorecidos por el hecho de ser instrumentos de cobertura más asequibles (aunque menos eficaces) que los swaps.

Un contrato forward es equivalente a pedir prestado y prestar la misma cantidad en dos monedas diferentes, y convertir las ganancias a la divisa local. Como se pide y se presta la misma cantidad, el valor inicial tiene que ser cero, como es habitual en un contrato forward, donde el precio forward es igual al tipo de cambio forward bajo la suposición de ausencia de arbitraje.

Consideramos una estrategia de replicación estática para un contrato FX forward. Consideramos dos divisas, ϵ y $\$$, con sus correspondientes tipos de interés en sus mercados, denotados por r_ϵ y $r_\$$, respectivamente. En la Tabla 15.1, se presenta un ejemplo de cómo se puede replicar un contrato FX forward. En tiempo t_0 , se realiza el préstamo en dólares, cuyo tipo de interés es $r_\$$. A continuación, ese dinero se cambia a euros, al tipo FX spot. Después de que el dinero se ha cambiado, se presta en el mercado del euro, donde crecerá con un tipo de interés r_ϵ . Al vencimiento del contrato T , se revierten las transacciones anteriores.

El tipo forward $y_F(t_0, T)$ se define tal que el valor del contrato es igual a cero, es decir,

$$\$1 \cdot e^{r\$T} [y_F(t_0, T)] = \$1 \cdot y(t_0) \cdot e^{r\epsilon T}, \quad (15.1)$$

Tabla 15.1: Estrategia de replicación para un FX forward

| tiempo t_0 | tiempo T |
|-------------------------------|---|
| pedir \$: \$1 | devolver: $\$1 \cdot e^{r\$T}$ |
| prestar €: $\$1 \cdot y(t_0)$ | obtener: $\$1 \cdot y(t_0) \cdot e^{r€T}$ |

y, por tanto, tenemos que

$$y_F(t_0, T) = y(t_0) \frac{e^{r€T}}{e^{r\$T}} =: y(t_0) \frac{P_{\$}(t_0, T)}{P_{\text{€}}(t_0, T)}, \quad (15.2)$$

donde los bonos cupón cero extranjero y local se definen como $P_{\$}(t, T) = e^{-r\$T}$ y $P_{\text{€}}(t, T) = e^{-r€T}$, respectivamente.

Otra manera de definir el tipo FX forward es relacionarlo con un tipo FX futuro visto desde hoy. Supongamos que, en un tiempo futuro T , podemos obtener una cantidad $N_f(T)$ en una divisa extranjera. Tenemos dos alternativas para calcular su valor a día de hoy en la divisa local d . Por un lado, el capital nominal $N_f(T)$ se descuenta a hoy en la divisa extranjera, obteniendo $N_f(T)/M_f(T)$. A continuación, esta cantidad se cambia a la divisa local con el tipo de cambio de hoy (spot), resultando

$$V^{\text{FX}}(t_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[y(t_0) \frac{N_f(T)}{M_f(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = y(t_0) \frac{N_f(T)}{M_f(T)}, \quad (15.3)$$

donde \mathbb{Q}^f denota la medida riesgo neutro de la divisa extranjera.

Por otro lado, se puede cambiar $N_f(T)$ a la divisa local en tiempo T al tipo de cambio $y(T)$ y, posteriormente, la cantidad $N_f(T)y(T)$ se expresa en la divisa local. Esta cantidad necesita ser descontada a tiempo t_0 con un tipo de interés local, esto es

$$V^{\text{FX}}(t_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{y(T)N_f(T)}{M_d(T)} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] = \frac{N_f(T)}{M_d(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[y(T) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right], \quad (15.4)$$

donde $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^d$ denota la medida riesgo neutro en divisa local que se utiliza habitualmente (ya que se suele cambiar la divisa local por la divisa extranjera). El numerario se puede sacar de la esperanza, debido a que, en este apartado, consideramos un tipo de interés determinista.

Estas dos maneras de calcular el valor actual del contrato deberían resultar en el mismo valor (véase la Figura 15.1), ya que, de lo contrario, se produciría una oportunidad de arbitraje. Igualando (15.3) y (15.4), es decir,

$$y(t_0) \frac{N_f(T)}{M_f(T)} = \frac{N_f(T)}{M_d(T)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [y(T) | \mathcal{F}(t_0)], \quad (15.5)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y_F(t_0, T) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[y(T)|\mathcal{F}(t_0)] = y(t_0) \frac{N_f(T)}{M_f(T)} \frac{M_d(T)}{N_f(T)} \\ &= y(t_0) \frac{M_d(T)}{M_f(T)} = y(t_0) \frac{P_f(t_0, T)}{P_d(t_0, T)}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

En otras palabras, el tipo de cambio forward $y_F(t_0, T)$ se define como la esperanza del tipo de cambio spot futuro $y(T)$.

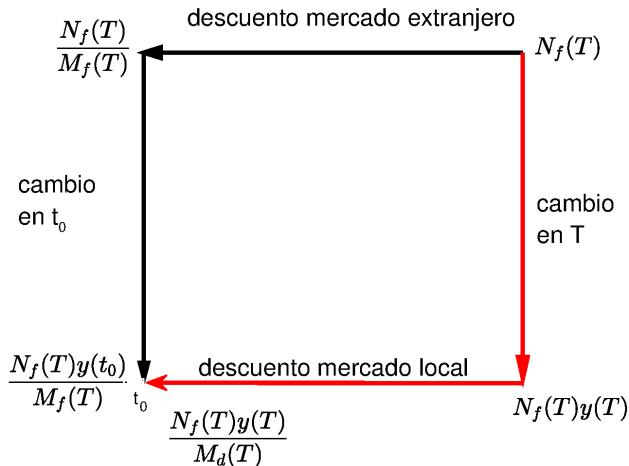


Figura 15.1: Representación esquemática del descuento de una cantidad en divisa extranjera a divisa local.

15.1.3. Valoración de opciones FX: el caso de Black-Scholes

Consideramos el problema de valoración de opciones de tipo europeo sobre el tipo FX, $y(T)$, con payoff $\max(y(T) - K, 0)$. Para simplificar, asumimos los tipos de interés extranjero y local, r_f y r_d , respectivamente, como constantes. Definimos el proceso estocástico para el tipo FX $y(t)$ como

$$dy(t) = \mu y(t)dt + \sigma y(t)dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (15.7)$$

Esta dinámica evoluciona bajo la medida mundo real, \mathbb{P} . Para determinar la dinámica bajo la medida riesgo neutro local, se emplea el principio de ausencia de arbitraje. Una cuenta de ahorros en un mercado extranjero, $M_f(t)$, se puede expresar en la divisa local mediante el tipo de cambio. Por lo tanto, en el mercado local, la cuenta de ahorros extranjera vale $y(t)M_f(t)$.

Todo activo descontado en el mercado local tiene que ser una martingala, por lo que $\chi(t) := y(t) \frac{M_f(t)}{M_d(t)}$ tiene que ser una martingala bajo la medida riesgo neutro local \mathbb{Q}^d . Aplicando el lema de Itô, tenemos que

$$\begin{aligned} d\chi(t) &= (r_f - r_d) \frac{M_f(t)}{M_d(t)} y(t) dt + \frac{M_f(t)}{M_d(t)} dy(t) \\ &= (r_f - r_d) \frac{M_f(t)}{M_d(t)} y(t) dt + \mu y(t) \frac{M_f(t)}{M_d(t)} dt + \sigma \frac{M_f(t)}{M_d(t)} y(t) dW^{\mathbb{P}}(t), \end{aligned}$$

y, por tanto, obtenemos

$$d\chi(t)/\chi(t) = (r_f - r_d) dt + \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (15.8)$$

El proceso $\chi(t)$ será una martingala si la dinámica subyacente está libre de términos de deriva. Este hecho implica el cambio de medida dado por

$$dW_d^{\mathbb{Q}}(t) = \frac{r_f - r_d + \mu}{\sigma} dt + dW^{\mathbb{P}}(t). \quad (15.9)$$

Volviendo a (15.7), se obtiene la dinámica del proceso FX, $y(t)$, bajo la medida riesgo neutro local, \mathbb{Q}^d , dada por

$$\begin{aligned} dy(t) &= \mu y(t) dt + \sigma y(t) dW^{\mathbb{P}}(t) \\ &= \mu y(t) dt + \sigma y(t) dW_d^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma y(t) \frac{r_f - r_d + \mu}{\sigma} dt. \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene la dinámica para el proceso $y(t)$, es decir,

$$dy(t) = (r_d - r_f) y(t) dt + \sigma y(t) dW_d^{\mathbb{Q}}(t).$$

Nótese que $y(t)$ es una variable aleatoria con distribución lognormal, cuya densidad viene dada por

$$\begin{aligned} f_y(T, y; t_0, y(t_0)) &= \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(T-t_0)}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\left(\log \frac{y}{y(t_0)} - (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t_0)\right)^2}{2\sigma^2(T-t_0)}\right). \end{aligned}$$

Así, dado el proceso FX definido bajo la medida riesgo neutro local, el valor de una opción call FX con tipos de interés deterministas, viene dado por

$$\begin{aligned} V_c^{\text{FX}}(t_0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M_d(t_0)}{M_d(T)} \max(y(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-r_d(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\max(y(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= e^{-r_d(T-t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[y(T) 1_{y(T) > K} \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] - e^{-r_d(T-t_0)} K \mathbb{Q}[y(T) > K], \end{aligned}$$

de modo que la solución es

$$V_c^{\text{FX}}(t_0) = e^{-r_f(T-t_0)}y(t_0)F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - Ke^{-r_d(T-t_0)}F_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{y(t_0)}{K} + (r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{T - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t_0}.$$

Observación 15.1.1 (Modelos FX avanzados)

La literatura sobre el modelado de tipos FX es muy vasta, por lo que se disponen de muchos modelos estocásticos alternativos. Uno de los estándar en la industria es el modelo de Sippel y Ohkoshi (2002), en el que se propone una dinámica FX lognormalmente distribuida, junto con tipos de interés gaussianos de un factor. Este modelo da lugar a expresiones analíticas para los precios at-the-money de opciones FX básicas.

Un modelo FX híbrido basado en la dinámica de Heston para el proceso FX, en combinación con tipos de interés estocásticos correlados, resulta en un modelo interesante. En el Apartado 13.2, ya hemos introducido esta extensión del modelo de Heston con tipos de interés estocásticos, donde el proceso de tipo de interés era un proceso short-rate, como el modelo Hull-White.

En Piterbarg (2006), también se utiliza un modelo de tipo de interés gaussiano en el que, además, se emplea un modelo de volatilidad local para generar la muestra de volatilidad implícita presente en el mercado FX. Los modelos FX con volatilidad estocástica se han abordado en, por ejemplo, van Haastrecht y Pelsser (2010), donde el modelo Schöbel-Zhu se utiliza para la valoración de tipos FX en combinación con procesos short-rate.

*En Andreasen (2006) y Giese (2006), se propone una estructura de correlación (impuesta indirectamente) entre los procesos short-rate gaussianos y el proceso FX. Aunque el modelo es intuitivamente atractivo, puede involucrar muchos parámetros, Antonov *et al.* (2008). Como alternativa, en Antonov *et al.* (2008); Antonov y Misirpashaev (2006), se propone un modelo en el que las fórmulas para calibración se obtienen mediante técnicas de proyección de Markov.* ▲

15.2. Modelo FX multidivisa con tipos de interés short-rate

Estudiaremos los modelos FX de tipo Heston, para los cuales los tipos de interés son procesos estocásticos correlados con el proceso FX. Primero abordaremos el modelo de Heston FX con procesos short-rate gaussianos, como el proceso de Hull y White (1990). Para este modelo se asume una matriz de correlaciones completa. Los modelos short-rate de tipo de interés son capaces de proporcionar una ajuste satisfactorio a los productos de tipos de interés en el entorno del nivel at-the-money.

En la práctica, la calibración del modelo FX se lleva a cabo utilizando un modelo de tipo de interés precalibrado. Se requiere de una evaluación del modelo

altamente eficiente y rápida. Nos centraremos en la valoración eficiente de opciones FX vanilla bajo el proceso FX híbrido, asumiendo que los parámetros para el modelo short-rate ya han sido determinados.

El modelo híbrido aproximado presentado este apartado se puede evaluar en milisegundos, para un rango de strikes completo. El modelo describe el tipo FX spot, $y(t)$, expresado en unidades de divisa local por unidad de divisa extranjera. El análisis comienza especificando los procesos short-rate subyacentes, $r_d(t)$ y $r_f(t)$, bajo sus medidas spot, es decir, las medidas local \mathbb{Q} y extranjera \mathbb{Q}^f . Estos evolucionan de acuerdo con el modelo de Hull y White (1990) de un factor, es decir,

$$\begin{cases} dr_d(t) = \lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t))dt + \eta_d dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ dr_f(t) = \lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t))dt + \eta_f dW_f^{\mathbb{Q}^f}(t), \end{cases} \quad (15.10)$$

donde $W_d^{\mathbb{Q}}(t)$ y $W_f^{\mathbb{Q}^f}(t)$ son movimientos brownianos bajo \mathbb{Q} y \mathbb{Q}^f , respectivamente. Los parámetros λ_d y λ_f determinan la velocidad de reversión a la media, representada por las funciones dependientes del tiempo $\theta_d(t)$ y $\theta_f(t)$, y los parámetros η_d y η_f son los respectivos coeficientes de volatilidad.

Estos procesos, bajo las medidas apropiadas, son lineales en sus variables de estado, de modo que, para un vencimiento T , con $0 \leq t \leq T$, los BCCs son de la forma

$$\begin{cases} P_d(t, T) = \exp(\bar{A}_d(t, T) + \bar{B}_d(t, T)r_d(t)), \\ P_f(t, T) = \exp(\bar{A}_f(t, T) + \bar{B}_f(t, T)r_f(t)), \end{cases} \quad (15.11)$$

donde $\bar{A}_d(t, T)$, $\bar{A}_f(t, T)$, $\bar{B}_d(t, T)$ y $\bar{B}_f(t, T)$ son funciones conocidas analíticamente.

En este modelo, las cuentas del mercado monetario vienen dadas por

$$dM_d(t) = r_d(t)M_d(t)dt, \quad dM_f(t) = r_f(t)M_f(t)dt, \quad (15.12)$$

respectivamente. Utilizando el argumento de ausencia de arbitraje de Heath *et al.* (1992) (de la misma manera que en el Capítulo 11), las dinámicas para los BCCs, bajo sus propias medidas generadas por las respectivas cuentas de ahorros, son conocidas y vienen dadas por el siguiente resultado.

Resultado 15.2.1 (Dinámica del BCC bajo la medida riesgo neutro)
Las dinámicas libres de riesgo de los BCCs $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$, con vencimiento T vienen dadas por

$$\begin{cases} \frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} = r_d(t)dt - \left(\int_t^T \bar{\sigma}_d(t, z)dz \right) dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ \frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} = r_f(t)dt - \left(\int_t^T \bar{\sigma}_f(t, z)dz \right) dW_f^{\mathbb{Q}^f}(t), \end{cases}$$

donde $\bar{\sigma}_d(t, T)$ y $\bar{\sigma}_f(t, T)$ son las funciones de volatilidad de los tipos forward instantáneos $f_d^r(t, T)$ y $f_f^r(t, T)$, respectivamente, que vienen dados por

$$\begin{cases} df_d^r(t, T) = \bar{\sigma}_d(t, T) \int_t^T \bar{\sigma}_d(t, z) dz dt + \bar{\sigma}_d(t, T) dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ df_f^r(t, T) = \bar{\sigma}_f(t, T) \int_t^T \bar{\sigma}_f(t, z) dz dt + \bar{\sigma}_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}^f}(t). \end{cases}$$

Los tipos spot en tiempo t se definen como $r_d(t) \equiv f_d^r(t, t)$, $r_f(t) \equiv f_f^r(t, t)$. Empleando las estructuras de volatilidad, $\bar{\sigma}_d(t, T)$ y $\bar{\sigma}_f(t, T)$, se pueden definir distintos procesos short-rate. Aquí, las funciones de volatilidad se toman como $\bar{\sigma}_d(t, T) = \eta_d \exp(-\lambda_d(T-t))$ y $\bar{\sigma}_f(t, T) = \eta_f \exp(-\lambda_f(T-t))$. Entonces, se obtienen los procesos short-rate Hull-White $r_d(t)$ y $r_f(t)$ de (15.10), así como las funciones $\theta_d(t)$ y $\theta_f(t)$, que se expresan en términos de los tipos forward instantáneos. La elección de volatilidades específicas determina las dinámicas de los BCCs

$$\begin{cases} \frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} = r_d(t) dt + \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ \frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} = r_f(t) dt + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}^f}(t), \end{cases} \quad (15.13)$$

con $\bar{B}_d(t, T)$ y $\bar{B}_f(t, T)$ en (15.11) dados por

$$\bar{B}_d(t, T) = \frac{1}{\lambda_d} \left(e^{-\lambda_d(T-t)} - 1 \right), \quad \bar{B}_f(t, T) = \frac{1}{\lambda_f} \left(e^{-\lambda_f(T-t)} - 1 \right). \quad (15.14)$$

15.2.1. Modelo con tipos de interés gaussianos correlados

El modelo FX-HHW, con todos los procesos definidos bajo la medida riesgo neutro local, \mathbb{Q} , viene dado por

$$\begin{cases} dy(t)/y(t) = & (r_d(t) - r_f(t)) dt + \sqrt{v(t)} dW_y^{\mathbb{Q}}(t), \\ dv(t) = & \kappa(\bar{v} - v(t)) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v^{\mathbb{Q}}(t), \\ dr_d(t) = & \lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t)) dt + \eta_d dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ dr_f(t) = & (\lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t)) - \eta_f \rho_{y,f} \sqrt{v(t)}) dt + \eta_f dW_f^{\mathbb{Q}}(t), \end{cases} \quad (15.15)$$

con $y(t_0) > 0$, $v(t_0) > 0$, $r_d(t_0) > 0$ y $r_f(t_0)$. Los parámetros κ , λ_d y λ_f determinan la velocidad de reversión a la media de los tres últimos procesos, cuya media a largo plazo viene dada por \bar{v} , $\theta_d(t)$ y $\theta_f(t)$, respectivamente. Los coeficientes de volatilidad para los procesos $r_d(t)$ y $r_f(t)$ vienen dados por η_d y η_f , y el parámetro de volatilidad de la varianza del proceso $v(t)$ es γ . Para este modelo se considera una matriz de correlaciones completa entre los movimientos

brownianos $\mathbf{W}(t) = [W_y^{\mathbb{Q}}(t), W_v^{\mathbb{Q}}(t), W_d^{\mathbb{Q}}(t), W_f^{\mathbb{Q}}(t)]^T$, dada por

$$d\mathbf{W}(t)(d\mathbf{W}(t))^T = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{y,v} & \rho_{y,d} & \rho_{y,f} \\ \rho_{y,v} & 1 & \rho_{v,d} & \rho_{v,f} \\ \rho_{y,d} & \rho_{v,d} & 1 & \rho_{d,f} \\ \rho_{y,f} & \rho_{v,f} & \rho_{d,f} & 1 \end{pmatrix} dt. \quad (15.16)$$

Bajo la medida spot local, la deriva en el proceso short-rate $r_f(t)$ da lugar a un término adicional, es decir, $-\eta_f \rho_{y,f} \sqrt{v(t)}$, conocido comúnmente como el término de corrección quanto. Entonces, el proceso r_f bajo esta medida ya no es un proceso HW. Si la volatilidad del modelo FX se asume determinista, entonces r_f sigue un proceso HW. Se puede considerar otra simplificación asumiendo $\rho_{y,f} = 0$, pero esto no es realista en práctica.

El término adicional en el proceso r_f asegura la existencia de martingalas bajo la medida spot local, para los precios (véase Shreve (2004), para más detalles)

$$\chi_1(t) := y(t) \frac{M_f(t)}{M_d(t)} \quad \text{y} \quad \chi_2(t) := y(t) \frac{P_f(t, T)}{M_d(t)},$$

donde $P_f(t, T)$ es el bono cupón cero extranjero (15.13) y las cuentas de ahorros $M_d(t)$ y $M_f(t)$ son como en (15.12). Para confirmar que los procesos $\chi_1(t)$ y $\chi_2(t)$ son martingalas, se puede aplicar la regla del producto de Itô, lo que resulta en

$$\begin{aligned} d\chi_1(t)/\chi_1(t) &= \sqrt{v(t)} dW_y^{\mathbb{Q}}(t), \\ d\chi_2(t)/\chi_2(t) &= \sqrt{v(t)} dW_y^{\mathbb{Q}}(t) + \eta_f B_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

El cambio de dinámicas de los procesos subyacentes, de la medida spot extranjera a la medida spot local, también influye en las dinámicas de los bonos asociados que, bajo la medida riesgo neutro local \mathbb{Q} y con la cuenta de ahorros como numerario, tienen la representación

$$\begin{cases} \frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} = r_d(t)dt + \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ \frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} = \left(r_f(t) - \rho_{y,f} \eta_f \bar{B}_f(t, T) \sqrt{v(t)} \right) dt + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}}(t), \end{cases} \quad (15.17)$$

con $\bar{B}_d(t, T)$ y $\bar{B}_f(t, T)$ como en (15.14).

15.2.2. Valoración de opciones FX

Para calibrar el modelo necesitamos valorar opciones básicas sobre el tipo FX, denotadas por $V_c^{FX}(t)$, de una manera altamente eficiente y para un vector de estados $\mathbf{X}(t) = [y(t), v(t), r_d(t), r_f(t)]^T$ dado, de la forma

$$V_c^{FX}(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M_d(t)}{M_d(T)} \max(y(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

con

$$M_d(t) = \exp \left(\int_0^t r_d(z) dz \right).$$

Para ello, consideramos el precio forward, $\frac{V_c^{FX}(t)}{M_d(t)}$, tal que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{M_d(T)} \max(y(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{V_c^{FX}(t)}{M_d(t)}.$$

Aplicando el lema de Itô, tenemos que

$$d \left(\frac{V_c^{FX}(t)}{M_d(t)} \right) = \frac{1}{M_d(t)} dV^{FX}(t) - r_d(t) \frac{V^{FX}(t)}{M_d(t)} dt. \quad (15.18)$$

El precio forward es una martingala, por lo que su dinámica debería estar libre de términos de deriva. Teniendo esto en cuenta para (15.18), se obtiene la ecuación de Fokker-Planck forward para $V_c = V_c^{FX}(t)$, dada por

$$\begin{aligned} r_d V_c &= \frac{1}{2} \eta_f^2 \frac{\partial^2 V_c}{\partial r_f^2} + \rho_{d,f} \eta_d \eta_f \frac{\partial^2 V_c}{\partial r_d \partial r_f} + \frac{1}{2} \eta_d^2 \frac{\partial^2 V_c}{\partial r_d^2} + \rho_{v,f} \gamma \eta_f \sqrt{v} \frac{\partial^2 V_c}{\partial v \partial r_f} \\ &\quad + \rho_{v,d} \gamma \eta_d \sqrt{v} \frac{\partial^2 V_c}{\partial v \partial r_d} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 V_c}{\partial v^2} + \rho_{y,f} \eta_f y \sqrt{v} \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial r_f} + \rho_{y,d} \eta_d y \sqrt{v} \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial r_d} \\ &\quad + \rho_{y,v} \gamma y v \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial v} + \frac{1}{2} y^2 v \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} + (\lambda_f(\theta_f(t) - r_f) - \rho_{y,f} \eta_f \sqrt{v}) \frac{\partial V_c}{\partial r_f} \\ &\quad + \lambda_d(\theta_d(t) - r_d) \frac{\partial V_c}{\partial r_d} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V_c}{\partial v} + (r_d - r_f)y \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{\partial V_c}{\partial t}. \end{aligned}$$

Esta EDP 4D consta de términos no afines, como raíces cuadradas. Las solución numérica de la EDP anterior es, en términos computacionales, bastante costosa, por lo que esta formulación se suele utilizar para la calibración del modelo. En el siguiente apartado propondremos una aproximación del modelo, más adecuada para propósitos de calibración.

El modelo FX bajo la medida forward local

Para reducir la complejidad del problema de valoración, se realiza una transformación, de la medida spot local, generada por la cuenta de ahorros en el mercado local $M_d(t)$, a la medida FX forward local, en la que el numerario es el bono cupón cero local $P_d(t, T)$. El tipo forward viene dado por (véase Musiela y Rutkowski (1997); Piterbarg (2006))

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)}, \quad (15.19)$$

donde $y_F(t, T)$ representa el tipo de cambio forward bajo la medida T -forward local, y $y(t)$ representa el tipo de cambio extranjero bajo la medida spot local.

Cambiando de la medida riesgo neutro local, \mathbb{Q} , a la medida T -forward local, \mathbb{Q}^T , el proceso de descuento se desacopla de la esperanza, esto es

$$V_c^{\text{FX}}(t) = P_d(t, T) \mathbb{E}^T [\max(y_F(T, T) - K, 0) | \mathcal{F}(t)].$$

Aplicando la fórmula de Itô, la dinámica para $y_F(t, T)$ en (15.19) es

$$\begin{aligned} dy_F(t, T) &= \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)} dy(t) + \frac{y(t)}{P_d(t, T)} dP_f(t, T) - y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d^2(t, T)} dP_d(t, T) \\ &\quad + y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d^3(t, T)} (dP_d(t, T))^2 + \frac{1}{P_d(t, T)} (dy(t) dP_f(t, T)) \\ &\quad - \frac{P_f(t, T)}{P_d^2(t, T)} (dP_d(t, T) dy(t)) - \frac{y(t)}{P_d^2(t, T)} dP_d(t, T) dP_f(t, T). \end{aligned} \tag{15.20}$$

Sustituyendo las EDEs (15.15) y (15.17) en (15.20), obtenemos la dinámica FX forward

$$\begin{aligned} \frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} &= \eta_d \bar{B}_d(t, T) \left(\eta_d \bar{B}_d(t, T) - \rho_{y,d} \sqrt{v(t)} - \rho_{d,f} \eta_f \bar{B}_f(t, T) \right) dt \\ &\quad + \sqrt{v(t)} dW_y^{\mathbb{Q}}(t) - \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^{\mathbb{Q}}(t) + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned}$$

Sabemos que $y_F(t, T)$ es una martingala bajo la medida T -forward local, lo que significa que

$$P_d(t, T) \mathbb{E}^T [y_F(T, T) | \mathcal{F}(t)] = P_d(t, T) y_F(t, T) =: P_f(t, T) y(t).$$

Sin embargo, los movimientos brownianos bajo la medida T -forward local, $dW_y^T(t)$, $dW_v^T(t)$, $dW_d^T(t)$ y $dW_f^T(t)$, aún deben ser determinados. Un cambio de medida, de la medida spot local a la medida T -forward local, requiere de un cambio de numerario, de la cuenta de ahorros $M_d(t)$ al bono cupón cero $P_d(t, T)$. Si consideramos una matriz de correlaciones completa implicaría que, al cambiar de la medida spot a la medida forward, todos los procesos cambiarían sus dinámicas. El siguiente Lema 15.2.1 proporciona la dinámica del modelo bajo la medida T -forward local \mathbb{Q}^T .

Lema 15.2.1 (Dinámica de modelo FX-HHW bajo la medida \mathbb{Q}^T)

Bajo la medida T -forward local, el modelo de (15.15) y (15.19) está gobernado por la dinámica

$$\frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} = \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) - \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^T(t) + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^T(t), \tag{15.21}$$

donde

$$\begin{aligned} dv(t) &= \left(\kappa(\bar{v} - v(t)) + \gamma \rho_{v,d} \eta_d \bar{B}_d(t, T) \sqrt{v(t)} \right) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v^T(t), \\ dr_d(t) &= (\lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t)) + \eta_d^2 \bar{B}_d(t, T)) dt + \eta_d dW_d^T(t), \\ dr_f(t) &= \left(\lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t)) - \eta_f \rho_{y,f} \sqrt{v(t)} + \eta_d \eta_f \rho_{d,f} \bar{B}_d(t, T) \right) dt \\ &\quad + \eta_f dW_f^T(t), \end{aligned}$$

con una matriz de correlaciones completa como en (15.16), y $\bar{B}_d(t, T)$ y $\bar{B}_f(t, T)$ dados en (15.14). \blacktriangleleft

Demostración. Como el proceso short-rate local, $r_d(t)$, está gobernado por una fuente de incertidumbre, conviene cambiar el orden de las variables de estado a $\mathbf{X}^*(t) = [r_d(t), r_f(t), v(t), y_F(t, T)]^T$ y expresar el modelo en términos de los movimientos brownianos independientes $d\widetilde{\mathbf{W}}^Q(t) = [d\widetilde{W}_d(t), d\widetilde{W}_f(t), d\widetilde{W}_v(t), d\widetilde{W}_y(t)]^T$, como

$$\begin{bmatrix} dr_d \\ dr_f \\ dv \\ dy_F \\ y_F \end{bmatrix} = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}^*(t))dt + \begin{bmatrix} \eta_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\sqrt{v} & 0 \\ -\eta_d\bar{B}_d & \eta_f\bar{B}_f & 0 & \sqrt{v} \end{bmatrix} \mathbf{L} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_d^Q \\ d\widetilde{W}_f^Q \\ d\widetilde{W}_v^Q \\ d\widetilde{W}_y^Q \end{bmatrix},$$

que, de manera equivalente, se puede escribir como

$$d\mathbf{X}^*(t) = \bar{\mu}(t, \mathbf{X}^*(t))dt + \bar{\Sigma} \mathbf{L} d\widetilde{\mathbf{W}}^Q(t), \quad (15.22)$$

donde $\bar{\mu}(t, \mathbf{X}^*(t))$ representa la deriva de la dinámica de $\mathbf{X}^*(t)$ y \mathbf{L} es la matriz triangular inferior de Cholesky de la forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{2,1} & \mathbf{L}_{2,2} & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{3,1} & \mathbf{L}_{3,2} & \mathbf{L}_{3,3} & 0 \\ \mathbf{L}_{4,1} & \mathbf{L}_{4,2} & \mathbf{L}_{4,3} & \mathbf{L}_{4,4} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{f,d} & \mathbf{L}_{2,2} & 0 & 0 \\ \rho_{v,d} & \mathbf{L}_{3,2} & \mathbf{L}_{3,3} & 0 \\ \rho_{y,d} & \mathbf{L}_{4,2} & \mathbf{L}_{4,3} & \mathbf{L}_{4,4} \end{bmatrix}. \quad (15.23)$$

La representación anterior es más conveniente, ya que el proceso short-rate $r_d(t)$ se puede tratar independientemente de los otros procesos.

La representación matricial en términos de movimientos brownianos independientes resulta en las siguientes dinámicas bajo la medida Q , dadas por

$$dr_d(t) = \lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t))dt + \varsigma_1(t)d\widetilde{\mathbf{W}}^Q(t),$$

para el tipo local $r_d(t)$, y

$$\frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} = r_d(t)dt + \bar{B}_d(t, T)\varsigma_1(t)d\widetilde{\mathbf{W}}^Q(t),$$

para el BCC local, siendo $\varsigma_k(t)$ el k -ésimo vector fila que resulta de la multiplicación de las matrices $\bar{\Sigma}$ y \mathbf{L} . Para los procesos Hull-White, tenemos que $\varsigma_1(t) := [\eta_d, 0, 0, 0]$.

La correspondiente derivada de Radon-Nikodym, esto es

$$\lambda_Q^T(t) = \frac{dQ^T}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P_d(t, T)}{P_d(0, T)M_d(t)}. \quad (15.24)$$

se obtiene con la ayuda de la derivada de Itô de $\lambda_Q^T(t)$ de (15.24), como

$$\frac{d\lambda_Q^T(t)}{\lambda_Q^T(t)} = \bar{B}_d(t, T)\varsigma_1(t)d\widetilde{\mathbf{W}}^Q(t).$$

Esto implica que el núcleo de Girsanov para la transición de \mathbb{Q} a \mathbb{Q}^T viene dado por $\bar{B}_d(t, T)\varsigma_1(t)$, esto es, la volatilidad del bono con vencimiento T viene dada por $\eta_d \bar{B}_d(t, T)$, es decir,

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \bar{B}_d^2(z, T) \varsigma_1^2(z) dz + \int_0^t \bar{B}_d(z, T) \varsigma_1(z) d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}}(z) \right).$$

Así, tenemos que

$$d\widetilde{\mathbf{W}}^T(t) = -\bar{B}_d(t, T)\varsigma_1^T(t)dt + d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}}(t).$$

Como el vector $\varsigma_1^T(t)$ es en realidad un escalar, los movimientos brownianos bajo la medida T -forward vienen dados por

$$d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}}(t) = \left[d\widetilde{W}_d^T(t) + \eta_d \bar{B}_d(t, T)dt, d\widetilde{W}_f^T(t), d\widetilde{W}_v^T(t), d\widetilde{W}_y^T(t) \right]^T.$$

A partir de la representación vectorial (15.22), se obtiene que

$$\mathbf{L}d\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \eta_d \bar{B}_d dt + & d\widetilde{W}_d^T \\ \rho_{d,f} \eta_d \bar{B}_d dt + & \rho_{d,f} d\widetilde{W}_d^T + \mathbf{L}_{2,2} d\widetilde{W}_f^T \\ \rho_{v,d} \eta_d \bar{B}_d dt + & \rho_{v,d} d\widetilde{W}_d^T + \mathbf{L}_{3,2} d\widetilde{W}_f^T + \mathbf{L}_{3,3} d\widetilde{W}_y^T \\ \rho_{y,d} \eta_d \bar{B}_d dt + & \rho_{y,d} d\widetilde{W}_d^T + \mathbf{L}_{4,2} d\widetilde{W}_f^T + \mathbf{L}_{4,3} d\widetilde{W}_y^T + \mathbf{L}_{4,4} d\widetilde{W}_v^T \end{bmatrix}.$$

Volviendo a los movimientos brownianos dependientes, bajo la medida T -forward, tenemos que

$$\begin{cases} \frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} = \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) - \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^T(t) + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^T(t), \\ dv(t) = (\kappa(\bar{v} - v(t)) + \gamma \rho_{v,d} \eta_d \bar{B}_d(t, T) \sqrt{v(t)}) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v^T(t), \\ dr_d(t) = (\lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t)) + \eta_d^2 \bar{B}_d(t, T)) dt + \eta_d dW_d^T(t), \\ dr_f(t) = (\lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t)) - \eta_f \rho_{y,f} \sqrt{v(t)} + \eta_d \eta_f \rho_{d,f} \bar{B}_d(t, T)) dt + \eta_f dW_f^T(t), \end{cases}$$

con una matriz de correlaciones completa, dada por (15.16). ■

El sistema del Lema 15.2.1 nos indica que, después de un cambio de medida, de la spot local, \mathbb{Q} , a la T -forward local, \mathbb{Q}^T , el tipo de cambio forward $y_F(t, T)$ «no depende explícitamente» de los procesos short-rate $r_d(t)$ y $r_f(t)$. Este no contiene término de deriva y solo depende de $W_d^T(t)$ y $W_f^T(t)$, véase (15.21).

Observación 15.2.1

Como la suma de tres variables aleatorias normales correladas, $Q = X + Y + Z$, aún sigue una distribución normal, con la media igual a la suma de las medias individuales y la varianza igual a

$$v_Q^2 = v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2 + 2\rho_{X,Y}v_Xv_Y + 2\rho_{X,Z}v_Xv_Z + 2\rho_{Y,Z}v_Yv_Z,$$

el forward (15.21) se puede representar mediante

$$\begin{aligned} dy_F/y_F &= (v + \eta_d^2 \bar{B}_d^2 + \eta_f^2 \bar{B}_f^2 - 2\rho_{y,d}\eta_d\bar{B}_d\sqrt{v} \\ &\quad + 2\rho_{y,f}\eta_f\bar{B}_f\sqrt{v} - 2\rho_{d,f}\eta_d\eta_f\bar{B}_d\bar{B}_f)^{\frac{1}{2}} dW_F^T. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Aunque la representación en (15.25) reduce el número de movimientos brownianos en la dinámica de y_F , aún necesitamos encontrar los términos cruzados apropiados, como $dW_F^T(t)dW_v^T(t)$, para determinar los términos de covarianza. Por tanto, es preferible continuar con la formulación estándar. \blacktriangle

Aproximaciones y función característica forward

Como la dinámica del tipo de cambio forward $y_F(t, T)$, bajo la medida forward local, consta únicamente de los movimientos brownianos $W_d^T(t)$ y $W_f^T(t)$ de los procesos short-rate, ya se ha conseguido una reducción significativa en la complejidad del problema de valoración.

Para obtener la función característica forward se considera, como es habitual, la transformación logarítmica del tipo forward $y_F(t, T)$, $X(t) := \log y_F(t, T)$, gobernada por la dinámica

$$dX(t) = \left(\varsigma \left(t, \sqrt{v(t)} \right) - \frac{1}{2} v(t) \right) dt + \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) - \eta_d \bar{B}_d dW_d^T(t) + \eta_f \bar{B}_f dW_f^T(t), \quad (15.26)$$

con el proceso de varianza $v(t)$ dado por

$$dv(t) = \left(\kappa(\bar{v} - v(t)) + \gamma \rho_{v,d} \eta_d \bar{B}_d \sqrt{v(t)} \right) dt + \gamma \sqrt{v(t)} dW_v^T(t).$$

Aquí, $\bar{B}_d := \bar{B}_d(t, T)$, $\bar{B}_f := \bar{B}_f(t, T)$ y

$$\varsigma \left(t, \sqrt{v(t)} \right) = (\rho_{y,d}\eta_d\bar{B}_d - \rho_{y,f}\eta_f\bar{B}_f) \sqrt{v(t)} + \rho_{d,f}\eta_d\eta_f\bar{B}_d\bar{B}_f - \frac{1}{2} (\eta_d^2 \bar{B}_d^2 + \eta_f^2 \bar{B}_f^2).$$

Empleando el enfoque de martingala y el teorema de Feynman-Kac, se obtiene la EDP para la función característica forward, dada por

$$\phi_{\mathbf{x}} := \phi_{\mathbf{x}}(u; t, T) = \mathbb{E}^T \left(e^{iuX(T)} | \mathcal{F}(t) \right),$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial t} &= (\kappa(\bar{v} - v) + \rho_{v,d}\gamma\eta_d\sqrt{v}\bar{B}_d) \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial v} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}v - \varsigma(t, \sqrt{v}) \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X^2} - \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X} \right) \\ &\quad + (\rho_{y,v}\gamma v - \rho_{v,d}\gamma\eta_d\sqrt{v}\bar{B}_d + \rho_{v,f}\gamma\eta_f\sqrt{v}\bar{B}_f) \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X \partial v} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma^2 v \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Esta EDP consta de términos \sqrt{v} no afines, por lo que su resolución analítica o mediante métodos de Fourier no es trivial. En el Apartado 13.2.1 presentamos un método para la linealización de las raíces cuadradas del proceso raíz cuadrada. El método consiste en «proyectar» los términos de raíz cuadrada no afines sobre sus momentos de primer orden. Entonces, la aproximación de los términos no afines de la EDP se lleva a cabo mediante

$$\boxed{\sqrt{v(t)} \approx \mathbb{E} [\sqrt{v(t)}] =: G(t),} \quad (15.27)$$

donde la esperanza de la raíz cuadrada de $v(t)$ se determina¹ como en el Apartado 13.2.1.

La proyección de los términos no afines sobre sus momentos de orden 1 nos permite obtener la correspondiente función característica forward, $\phi_{\mathbf{X}}$, que, entonces, es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(u; t, T) = \exp (\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{B}(\mathbf{u}, \tau)X(t) + \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)v(t)),$$

donde $\tau = T - t$, con

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{B}}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= -\kappa\bar{C} + (\bar{B}^2 - \bar{B})/2 + \rho_{y,v}\gamma\bar{B}\bar{C} + \gamma^2\bar{C}^2/2, \\ \frac{d\bar{A}}{d\tau} &= \kappa\bar{v}\bar{C} + \rho_{v,d}\gamma\eta_dG(T-\tau)\bar{B}_d(\tau)\bar{C} - \varsigma(\tau, G(T-\tau))(\bar{B}^2 - \bar{B}) \\ &\quad + (-\rho_{v,d}\eta_d\gamma G(T-\tau)\bar{B}_d(\tau) + \rho_{v,f}\gamma\eta_fG(T-\tau)\bar{B}_f(\tau))\bar{B}\bar{C}, \end{aligned}$$

siendo $G(t) = \mathbb{E} [\sqrt{v(t)}]$ y $\bar{B}_j(\tau) = \lambda_j^{-1} (e^{-\lambda_j\tau} - 1)$ para $j \in \{d, f\}$. Las condiciones iniciales son $\bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu$, $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$. Con $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau) = iu$, la función compleja $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ es de tipo Heston (1993), por lo que su solución es

$$\bar{C}(\mathbf{u}, \tau) = \frac{1 - e^{-d\tau}}{\gamma^2(1 - ge^{-d\tau})} (\kappa - \rho_{y,v}\gamma iu - d), \quad (15.28)$$

donde $d = \sqrt{(\rho_{y,v}\gamma iu - \kappa)^2 - \gamma^2 iu(iu - 1)}$, $g = \frac{\kappa - \gamma\rho_{y,v}iu - d}{\kappa - \gamma\rho_{y,v}iu + d}$. Los parámetros κ , γ y $\rho_{y,v}$ son como en (15.15). La función $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \bar{A}(\mathbf{u}, \tau) &= \int_0^\tau \left(\kappa\bar{v} + \rho_{v,d}\gamma\eta_dG(T-z)\bar{B}_d(z) - \rho_{v,d}\eta_d\gamma G(T-z)\bar{B}_d(z)iu \right. \\ &\quad \left. + \rho_{v,f}\gamma\eta_fG(T-z)\bar{B}_f(z)iu \right) \bar{C}(z)dz + (u^2 + iu) \int_0^\tau \varsigma(z, G(T-z))dz, \end{aligned}$$

¹En esta aproximación asumimos que $\mathbb{E}^Q [\sqrt{v(t)}] \approx \mathbb{E}^T [\sqrt{v(t)}]$.

con $\bar{C}(\mathbf{u}, s)$ en (15.28). Es más conveniente resolver $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ numéricamente con, por ejemplo, una regla de cuadratura de Simpson. Igualando las correlaciones $\rho_{v,d}$ y $\rho_{v,f}$ a cero, se dispondría de una expresión en forma cerrada para $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ (véase el Apartado 13.2.1).

Denotamos esta aproximación, obtenida mediante la linealización del modelo FX-HHW, por FX-HHW1. Claramente, con el modelo FX-HHW1, se puede realizar una valoración eficiente empleando métodos de inversión de Fourier, lo que no ocurre con el modelo FX-HHW.

Empleando la proyección de $\sqrt{v(t)}$ sobre su momento de orden 1 de (15.27), la EDP con coeficientes afines es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial t} &= (\kappa(\bar{v} - v) + \Psi_1) \frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial v} + \left(\frac{1}{2}v - \varsigma(t, G(t)) \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X^2} - \frac{\partial \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X} \right) \\ &+ (\rho_{y,v}\gamma v - \Psi_2) \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial X \partial v} + \frac{1}{2}\gamma^2 v \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{X}}}{\partial v^2}, \end{aligned} \quad (15.29)$$

con $\phi_{\mathbf{X}} \equiv \phi_{\mathbf{X}}(u; T, T) = \mathbb{E}^T [e^{iuX(T)} | \mathcal{F}(T)] = e^{iuX(T)}$, y

$$\varsigma(t, G(t)) = \Psi_3 + \rho_{d,f}\eta_d\eta_f\bar{B}_d(t, T)\bar{B}_f(t, T) - \frac{1}{2}(\eta_d^2\bar{B}_d^2(t, T) + \eta_f^2\bar{B}_f^2(t, T)).$$

Los tres términos, Ψ_1 , Ψ_2 y Ψ_3 en la EDP (15.29) dependen de la función $G(t)$, es decir,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &:= \rho_{v,d}\gamma\eta_d\bar{B}_d(t, T)G(t), \\ \Psi_2 &:= (\rho_{v,d}\gamma\eta_d\bar{B}_d(t, T) - \rho_{v,f}\gamma\eta_f\bar{B}_f(t, T))G(t), \\ \Psi_3 &:= (\rho_{y,d}\eta_d\bar{B}_d(t, T) - \rho_{y,f}\eta_f\bar{B}_f(t, T))G(t). \end{aligned}$$

Al resolver la EDP de valoración para $t \rightarrow T$, los términos $\bar{B}_d(t, T)$ y $\bar{B}_f(t, T)$ tienden a cero, por lo que todos los términos que contienen la aproximación tienden a desaparecer. Además, el caso $t \rightarrow 0$ es trivial, ya que $\sqrt{v(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathbb{E}[\sqrt{v(t_0)}]$.

Bajo la medida T -forward local, se espera que la proyección de los términos no afines sobre sus momentos de primer orden proporcione una gran precisión. En el Apartado 15.2.3, se realiza un experimento numérico con el objetivo de confirmar esta intuición.

15.2.3. Experimento numérico con el modelo FX-HHW

En este apartado analizamos los errores numéricos que se producen como resultado de las distintas aproximaciones en el modelo FX-HHW1. Siguiendo la configuración de Piterbarg (2006), las curvas de tipos de interés se modelan mediante BCCs, utilizando $t_0 = 0$, $P_d(0, T) = \exp(-0.02T)$ y $P_f(0, T) = \exp(-0.05T)$. Además,

$$\eta_d = 0.7\%, \quad \eta_f = 1.2\%, \quad \lambda_d = 1\%, \quad \lambda_f = 5\%.$$

Se toman parámetros del modelo que no satisfacen la condición de Feller, esto es

$$\kappa = 0.5, \quad \gamma = 0.3, \quad \bar{v} = 0.1, \quad v(0) = 0.1.$$

La estructura de correlación, definida en (15.16), viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{y,v} & \rho_{y,d} & \rho_{y,f} \\ \rho_{y,v} & 1 & \rho_{v,d} & \rho_{v,f} \\ \rho_{y,d} & \rho_{v,d} & 1 & \rho_{d,f} \\ \rho_{y,f} & \rho_{v,f} & \rho_{d,f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\% & -40\% & -15\% & -15\% \\ -40\% & 100\% & 30\% & 30\% \\ -15\% & 30\% & 100\% & 25\% \\ -15\% & 30\% & 25\% & 100\% \end{pmatrix}. \quad (15.30)$$

Se valoran varias opciones FX para muchos vencimientos y strikes, empleando dos métodos de valoración diferentes bajo el modelo FX-HHW. El primer método es la simulación de Monte Carlo, con 50 000 trayectorias y $20 \cdot T_i$ pasos de tiempo, para el modelo FX-HHW original, sin aproximaciones. Para el segundo método de valoración, se utiliza la función característica asociada al modelo aproximado FX-HHW1 del Apartado 15.2.2. Con ella, se lleva a cabo una valoración eficiente de productos vanilla mediante el método COS, basado en la expansión en series de Fourier de senos de la función de densidad de probabilidad, que se recupera a partir de la función característica empleando 500 términos en la expansión.

Para este experimento se consideran los vencimientos T_1, \dots, T_{10} , mientras que los strikes se calculan mediante la fórmula

$$\begin{aligned} K_n(T_i) &= y_F^{T_i}(0, T) \exp\left(0.1c_n \sqrt{T_i}\right), \quad \text{con} \\ c_n &= \{-1.5, -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0, 1.5\}, \end{aligned} \quad (15.31)$$

y $y_F^{T_i}(0, T)$ como en (15.19) con $y(0) = 1.35$. El tipo FX spot inicial (en dólares \\$ por euro €) es también 1.35. La Fórmula (15.31) para los strikes resulta muy conveniente debido a que, para $n = 4$, los strikes $K_4(T_i)$, con $i = 1, \dots, 10$, son iguales a los tipos FX forward para tiempo T_i . En la Tabla 15.2 presentamos los strikes y los vencimientos.

Tabla 15.2: Vencimientos y strikes para opciones FX. Los strikes $K_n(T_i)$ se calculan mediante (15.31) con $y(0) = 1.35$.

| T_i | $K_1(T_i)$ | $K_2(T_i)$ | $K_3(T_i)$ | $K_4(T_i)$ | $K_5(T_i)$ | $K_6(T_i)$ | $K_7(T_i)$ |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 6m | 1.1961 | 1.2391 | 1.2837 | 1.3299 | 1.3778 | 1.4273 | 1.4787 |
| 1a | 1.1276 | 1.1854 | 1.2462 | 1.3101 | 1.3773 | 1.4479 | 1.5221 |
| 5a | 0.8309 | 0.9291 | 1.0390 | 1.1620 | 1.2994 | 1.4531 | 1.6250 |
| 10a | 0.6224 | 0.7290 | 0.8538 | 1.0001 | 1.1714 | 1.3721 | 1.6071 |
| 20a | 0.3788 | 0.4737 | 0.5924 | 0.7409 | 0.9265 | 1.1587 | 1.4491 |
| 30a | 0.2414 | 0.3174 | 0.4174 | 0.5489 | 0.7218 | 0.9492 | 1.2482 |



Los precios de opción obtenidos para ambos modelos se expresan en términos de las volatilidades implícitas de Black. En la Tabla 15.3, se muestran los precios de la opciones FX y las desviaciones estándar (d.e.). El strike $K_4(T_i)$ es el strike at-the-money. Se confirma que el modelo aproximado FX-HHW1 es altamente preciso para los parámetros considerados. Se observa un error máximo de alrededor de 0.1% en la volatilidad para opciones at-the-money con vencimiento a 30 años (no incluido), y un error menor que 0.07% para las demás opciones.

Tabla 15.3: Precios de opciones call FX obtenidos para el modelo FX-HHW como promedio de 20 simulaciones de Monte Carlo con 50 000 trayectorias y $20 \times T_i$ pasos de tiempo; «MC» representa a Monte Carlo y «COS» representa la técnica basada en una expansión de Fourier en cosenos empleada en combinación con el modelo FX-HHW1, utilizando 500 términos en la expansión. Los strikes $K_n(T_i)$ se presentan en la Tabla 15.2.

| T_i | método | $K_1(T_i)$ | $K_2(T_i)$ | $K_3(T_i)$ | $K_4(T_i)$ | $K_5(T_i)$ | $K_6(T_i)$ | $K_7(T_i)$ |
|-------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 6m | MC | 0.1907 | 0.1636 | 0.1382 | 0.1148 | 0.0935 | 0.0748 | 0.0585 |
| | d.e. | 0.0004 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 |
| | COS | 0.1908 | 0.1637 | 0.1382 | 0.1147 | 0.0934 | 0.0746 | 0.0583 |
| 1a | MC | 0.2566 | 0.2209 | 0.1870 | 0.1553 | 0.1264 | 0.1008 | 0.0785 |
| | d.e. | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 |
| | COS | 0.2567 | 0.2210 | 0.1870 | 0.1554 | 0.1265 | 0.1008 | 0.0786 |
| 5a | MC | 0.4216 | 0.3709 | 0.3205 | 0.2713 | 0.2246 | 0.1816 | 0.1432 |
| | d.e. | 0.0021 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 |
| | COS | 0.4212 | 0.3706 | 0.3203 | 0.2713 | 0.2249 | 0.1822 | 0.1441 |
| 10a | MC | 0.4310 | 0.3871 | 0.3420 | 0.2967 | 0.2521 | 0.2096 | 0.1702 |
| | d.e. | 0.0033 | 0.0033 | 0.0033 | 0.0033 | 0.0033 | 0.0031 | 0.0030 |
| | COS | 0.4311 | 0.3873 | 0.3423 | 0.2971 | 0.2528 | 0.2106 | 0.1714 |
| 20a | MC | 0.3362 | 0.3109 | 0.2838 | 0.2553 | 0.2260 | 0.1966 | 0.1677 |
| | d.e. | 0.0037 | 0.0037 | 0.0037 | 0.0037 | 0.0037 | 0.0036 | 0.0036 |
| | COS | 0.3358 | 0.3104 | 0.2833 | 0.2548 | 0.2254 | 0.1960 | 0.1672 |
| 30a | MC | 0.2322 | 0.2191 | 0.2046 | 0.1888 | 0.1720 | 0.1545 | 0.1367 |
| | d.e. | 0.0050 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0050 | 0.0049 | 0.0048 | 0.0048 |
| | COS | 0.2319 | 0.2188 | 0.2042 | 0.1883 | 0.1714 | 0.1539 | 0.1359 |



En el siguiente apartado, se mostrarán los resultados de calibración a datos FX de mercado.

Calibración a datos de mercado

Abordamos la calibración del modelo FX-HHW a datos FX de mercado. En esta simulación, las volatilidades implícitas de mercado se extraen de Piterbarg (2006), presentadas en la Tabla 15.4.

Tabla 15.4: Volatilidades implícitas (de Black) de mercado para opciones FX extraídas de Piterbarg (2006). Los strikes $K_n(T_i)$ se presentan en la Tabla 15.2.

| T_i | $K_1(T_i)$ | $K_2(T_i)$ | $K_3(T_i)$ | $K_4(T_i)$ | $K_5(T_i)$ | $K_6(T_i)$ | $K_7(T_i)$ |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 6m | 11.41 % | 10.49 % | 9.66 % | 9.02 % | 8.72 % | 8.66 % | 8.68 % |
| 1a | 12.23 % | 10.98 % | 9.82 % | 8.95 % | 8.59 % | 8.59 % | 8.65 % |
| 5a | 13.44 % | 11.84 % | 10.38 % | 9.27 % | 8.76 % | 8.71 % | 8.83 % |
| 10a | 16.43 % | 14.79 % | 13.34 % | 12.18 % | 11.43 % | 11.07 % | 10.99 % |
| 20a | 22.96 % | 21.19 % | 19.68 % | 18.44 % | 17.50 % | 16.84 % | 16.46 % |
| 30a | 25.09 % | 23.48 % | 22.17 % | 21.13 % | 20.35 % | 19.81 % | 19.48 % |



Para la calibración se utiliza el modelo aproximado FX-HHW1. La estructura de correlación es como en (15.30). En la Figura 15.2 se muestran algunos resultados de calibración.

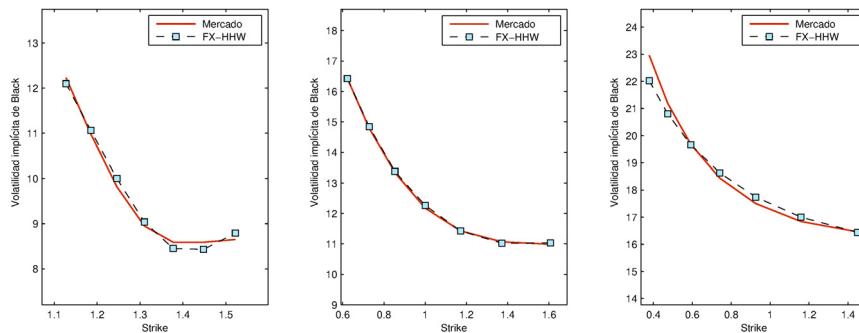


Figura 15.2: Comparación entre las volatilidades implícitas de mercado y las del modelo FX-HHW1 para opciones call FX europeas. Los strikes se presentan en la Tabla 15.2 e $y(0) = 1.35$. Izquierda: $T = 1$. Centro: $T = 10$. Derecha: $T = 20$.



Los experimentos anteriores demuestran que el modelo se puede calibrar de manera satisfactoria a datos de mercado. Para vencimientos largos y opciones muy in-the money se observan algunas discrepancias entre los precios de

mercado y modelo. Sin embargo, este es un efecto habitual cuando se considera el modelo de Heston (no está relacionado con la aproximación), ya que el patrón de mueca/sonrisa para el tipo FX no se aplana para vencimientos largos. Esto se puede mejorar añadiendo saltos al modelo (como el modelo de Bates, visto en el Apartado 8.4.3).

15.2.4. CVA para swaps FX

Un swap FX es un derivado financiero en el que dos partes intercambian tipos FX fijo y variable. Una de las partes paga un tipo FX variable, $y(T)$, mientras que al otra parte paga el tipo FX fijo, K . La cantidad a pagar depende de algún capital nominal en divisa extranjera N_f .

El valor del contrato swap FX a vencimiento T , en la divisa local, viene dado por

$$V^d(T) = N_f(y(T) - K), \quad (15.32)$$

(recordando que $y(t) := y_f^d(t)$) y el valor del swap FX en tiempo t es igual a

$$V^d(t) = M_d(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}, d} \left[\frac{N_f}{M_d(T)} (y(T) - K) \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (15.33)$$

A partir de la definición de tipo FX forward, tenemos que

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)},$$

y, aplicando un cambio de medida, de la medida riesgo neutro \mathbb{Q}^d a la medida forward $\mathbb{Q}^{T,d}$, resulta que

$$\begin{aligned} V^d(t) &= M_d(t) \mathbb{E}^{T,d} \left[\frac{N_f}{M_d(T)} \frac{M_d(T)}{M_d(t)} \frac{P_d(t, T)}{P_d(T, T)} (y(T) - K) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= P_d(t, T) N_f \mathbb{E}^{T,d} \left[(y(T) - K) \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \end{aligned}$$

Empleando (15.6), se verifica que

$$\mathbb{E}^{T,d} \left[y(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right] = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)} =: y_F(t, T),$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} V^d(t) &= P_d(t, T) N_f \mathbb{E}^{T,d} \left[(y(T) - K) \middle| \mathcal{F}(t) \right] \\ &= P_d(t, T) N_f (y_F(t, T) - K). \end{aligned}$$

Nótese que el Lema 15.2.1 establece que, después de un cambio de medida, de la medida spot local a la medida T -forward local, el tipo de cambio forward, $y_F(t, T)$, no contiene término de deriva, por lo que es una martingala.

La exposición esperada, necesaria para el cálculo del CVA, véase (12.48), en divisa local, viene dada por

$$\begin{aligned}\text{EE}^d(t_0, t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}, d} \left[\frac{M_d(t_0)}{M_d(t)} \max(V^d(t), 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N_f \mathbb{E}^{\mathbb{Q}, d} \left[\frac{M_d(t_0)}{M_d(t)} P_d(t, T) \max(y_F(t, T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].\end{aligned}$$

Insertando la definición de BCC, $P_d(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[M(t)/M(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right]$, se tiene que

$$\text{EE}^d(t_0, t) = N_f \mathbb{E}^{\mathbb{Q}, d} \left[\frac{M_d(t_0)}{M_d(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{M_d(t)}{M_d(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] \max(y_F(t, T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right].$$

Empleando la ley de la esperanza total, $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(t_0)] = \mathbb{E}[X \cdot Y|\mathcal{F}(t_0)]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{EE}^d(t_0, t) &= N_f \mathbb{E}^{\mathbb{Q}, d} \left[\frac{M_d(t_0)}{M_d(T)} \max(y_F(t, T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right] \\ &= N_f P_d(t_0, T) \mathbb{E}^{T, d} \left[\max(y_F(t, T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t_0) \right],\end{aligned}\quad (15.34)$$

debido a que $y_F(t, T)$ es una martingala bajo la medida T -forward local.

Asumiendo ahora que el tipo forward $y_F(t, T)$, bajo la medida T -forward local, sigue un proceso lognormal, esto es

$$dy_F(t, T) = \bar{\sigma} y_F(t, T) dW^{T, d}(t),$$

el precio de una opción europea es igual a la exposición esperada, que viene dada por

$$\text{EE}^d(t_0, t) := V(t_0) = P_d(t_0, T) N_f (y_F(t_0, T) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)),$$

con

$$d_1 = \frac{\log \left(\frac{y_F(t_0, T)}{K} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0)}{\sigma \sqrt{t - t_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t - t_0},$$

siendo muy similar a la valoración de caplets del Apartado 12.2.1. Por tanto, la exposición esperada para un swap FX se puede interpretar como una opción europea sobre un tipo FX forward.

15.3. Modelo FX multidivisa con sonrisa de tipo de interés

En este apartado, se presenta una extensión del modelo multidivisa en la que se incorpora una sonrisa de tipo de interés. Este modelo híbrido, que denominaremos FX-HLMM, modela dos clases de sonrisa de volatilidad

implícita de mercado, la sonrisa para el tipo FX y las sonrisas para los mercados de renta fija local y extranjero. Esto resulta especialmente interesante para productos FX expuestos a sonrisas de tipo de interés. En Hunter y Picot (2006), se puede encontrar una descripción detallada de este tipo de productos FX.

Schlögl (2002b) y Mikkelsen (2001) han propuesto extensiones del modelo FX del apartado anterior para el tipo de interés, donde el modelo short-rate se reemplaza por un modelo de mercado Libor. En Takahashi y Takehara (2008), se propone un modelo para el tipo FX con volatilidad estocástica y tipos de interés Libor, asumiendo independencia entre los tipos Libor lognormales y la variable FX. En Kawai y Jäckel (2007), se combina un modelo de difusión desplazada para el tipo FX con los tipos Libor.

Como en el Apartado 15.2, la volatilidad estocástica FX es de estilo Heston que, bajo la medida riesgo neutro local, \mathbb{Q} , tiene la dinámica

$$\begin{aligned} dy(t)/y(t) &= (\dots)dt + \sqrt{v(t)}dW_y^{\mathbb{Q}}(t), \quad y(t_0) > 0, \\ dv(t) &= \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t), \quad v(t_0) > 0, \end{aligned} \quad (15.35)$$

con los parámetros de (15.15). Dado que el modelo se transformará a la medida forward, no necesitamos especificar la derivada de la primera EDE (la dinámica de FX forward local, $y(t)P_f(t, T)/P_d(t, T)$, no contiene término de derivada).

Suponemos que las divisas local y extranjera se pueden calibrar de manera independiente a productos de tipo de interés disponibles en sus propios mercados. Para simplificar, asumimos que la estructura temporal de ambas divisas es la misma, es decir, $\mathcal{T}_d \equiv \mathcal{T}_f = \{T_0, T_1, \dots, T_m \equiv T\}$ y $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ para $i = 1 \dots m$. Con $t < T_{i-1}$ los tipos Libor $\ell_{d,i}(t) := \ell_d(t, T_{i-1}, T_i)$ (local) y $\ell_{f,i}(t) := \ell_f(t, T_{i-1}, T_i)$ (extranjeros), se definen como

$$\boxed{\ell_{d,i}(t) := \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P_d(t, T_{i-1})}{P_d(t, T_i)} - 1 \right) \quad y \quad \ell_{f,i}(t) := \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P_f(t, T_{i-1})}{P_f(t, T_i)} - 1 \right)}. \quad (15.36)$$

Para cada divisa, se emplea el modelo de mercado DD-SV Libor para los tipos de interés, bajo la medida T -forward generada por los numerarios $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$, esto es

$$\boxed{\begin{cases} d\ell_{d,i}(t) = \nu_{d,i}\xi_{d,i}(t)\sqrt{\nu_d(t)} \left(\mu_d(t)\sqrt{\nu_d(t)}dt + dW_i^{d,T}(t) \right), \\ d\nu_d(t) = \lambda_d(\nu_d(t_0) - \nu_d(t))dt + \eta_d\sqrt{\nu_d(t)}dW_v^{d,T}(t), \end{cases}} \quad (15.37)$$

y

$$\boxed{\begin{cases} d\ell_{f,i}(t) = \nu_{f,i}\xi_{f,i}(t)\sqrt{\nu_f(t)} \left(\mu_f(t)\sqrt{\nu_f(t)}dt + d\widehat{W}_i^{f,T}(t) \right), \\ d\nu_f(t) = \lambda_f(\nu_f(t_0) - \nu_f(t))dt + \eta_f\sqrt{\nu_f(t)}d\widehat{W}_v^{f,T}(t), \end{cases}} \quad (15.38)$$

con

$$\mu_d(t) = - \sum_{k=i+1}^m \frac{\tau_k \xi_{d,k}(t) \nu_{d,k}}{1 + \tau_k \ell_{d,k}(t)} \rho_{i,k}^d, \quad \mu_f(t) = - \sum_{k=i+1}^m \frac{\tau_k \xi_{f,k}(t) \nu_{f,k}}{1 + \tau_k \ell_{f,k}(t)} \rho_{i,k}^f,$$

y donde

$$\begin{cases} \xi_{d,i} = \vartheta_{d,i}^* \ell_{d,i}(t) + (1 - \vartheta_{d,i}^*) \ell_{d,i}(t_0), \\ \xi_{f,i} = \vartheta_{f,i}^* \ell_{f,i}(t) + (1 - \vartheta_{f,i}^*) \ell_{f,i}(t_0). \end{cases}$$

El movimiento browniano $W_i^{d,T}(t)$ se corresponde con el i -ésimo tipo Libor local, $\ell_{d,i}(t)$, bajo la medida T -forward local, y el movimiento browniano $\widehat{W}_i^{f,T}(t)$ se corresponde con el i -ésimo tipo Libor del mercado extranjero $\ell_{f,i}(t)$, bajo la medida terminal T extranjera.

En este modelo, los parámetros $\nu_{d,i}(t)$ y $\nu_{f,i}(t)$ determinan nivel de la sonrisa de volatilidad implícita del tipo de interés, los parámetros $\vartheta_{d,i}^*$ y $\vartheta_{f,i}^*$ controlan la pendiente de la sonrisa y λ_d y λ_f determinan la velocidad de reversión a la media de la varianza e influyen en la velocidad a la que la sonrisa de volatilidad implícita del tipo de interés se aplana a medida que el vencimiento del swaption aumenta, Piterbarg (2005b). Los parámetros η_d y η_f determinan la curvatura de la sonrisa del tipo de interés.

Se impone la estructura de correlación

$$\begin{aligned} dW_y^T(t)dW_v^T(t) &= \rho_{y,v}dt, \\ dW_y^T(t)dW_i^{d,T}(t) &= \rho_{y,i}^d dt, \\ dW_y^T(t)d\widehat{W}_i^{f,T}(t) &= \rho_{y,i}^f dt, \\ dW_i^{d,T}(t)dW_i^{d,T}(t) &= \rho_{i,j}^d dt, \\ d\widehat{W}_i^{f,T}(t)d\widehat{W}_j^{f,T}(t) &= \rho_{i,j}^f dt, \\ dW_i^{d,T}(t)d\widehat{W}_j^{f,T}(t) &= \rho_{i,j}^{d,f} dt, \end{aligned} \tag{15.39}$$

entre el FX y su proceso de varianza $v(t)$, entre el FX y los tipos Libor locales $\ell_{d,i}(t)$, entre el FX y los tipos Libor extranjeros $\ell_{f,i}(t)$, entre tipos Libor de mercado local, entre tipos Libor de mercado extranjero y entre tipos Libor de mercado local y extranjero, respectivamente.

Entre los demás procesos se asume una correlación nula, es decir:

- Entre los tipos Libor y sus procesos de varianza,

$$dW_i^{d,T}(t)dW_\nu^{d,T}(t) = 0, \quad d\widehat{W}_i^{f,T}(t)d\widehat{W}_\nu^{f,T}(t) = 0.$$

- Entre los tipos Libor y el proceso de varianza del FX,

$$dW_i^{d,T}(t)dW_v^T(t) = 0, \quad d\widehat{W}_i^{f,T}(t)dW_v^T(t) = 0.$$

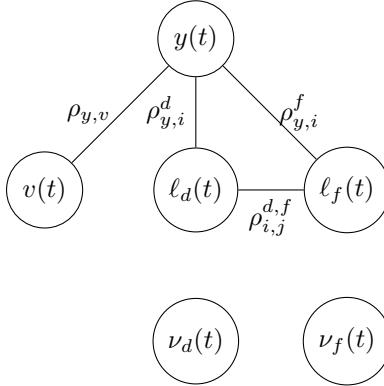


Figura 15.3: Estructura de correlación para el modelo FX-HLMM. Las conexiones representan las correlaciones no nulas.

- Entre todos los procesos de varianza,

$$dW_v^T(t)dW_\nu^{d,T}(t) = 0, \quad dW_v^T(t)d\widehat{W}_\nu^{f,T}(t) = 0, \quad dW_\nu^{d,T}(t)d\widehat{W}_\nu^{f,T}(t) = 0.$$

- Entre el FX y los procesos de varianza de los tipos Libor,

$$dW_y^T(t)dW_\nu^{d,T}(t) = 0, \quad dW_y^T(t)d\widehat{W}_\nu^{f,T}(t) = 0.$$

En la Figura 15.3 se representa gráficamente la estructura de correlación.

Además, asumimos que el modelo DD-SV en (15.37) y (15.38) se encuentra en el marco de los «parámetros efectivos», desarrollado en Piterbarg (2005b). Esto significa que se utilizan parámetros aproximados homogéneos en tiempo, en vez de parámetros dependientes del tiempo, es decir, $\vartheta_i(t) \equiv \vartheta_i^*$ y $\nu_i(t) \equiv \nu_i^*$.

Teniendo en cuenta la estructura de correlación descrita obtenemos la dinámica para el FX forward, dada por

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)}, \quad (15.40)$$

véase (15.19), siendo $y(t)$ el tipo de cambio spot y $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$ bonos cupón cero.

Para obtener la dinámica de (15.40), se necesitan expresiones para los BCCs, $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$. A partir de (15.36), se puede obtener la expresión para los bonos dada por

$$\frac{1}{P_j(t, T)} = \frac{1}{P_j(t, T_{\bar{m}(t)})} \prod_{k=\bar{m}(t)+1}^m (1 + \tau_k \ell_{j,k}(t)), \quad \text{para } j = \{\text{d, f}\}, \quad (15.41)$$

con $T = T_m$ y $\bar{m}(t) = \min(k : t \leq T_k)$ (los productos vacíos en (15.41) se toman iguales a 1). El bono $P_j(t, T_m)$ en (15.41) está completamente determinado por

los tipos Libor $\ell_{j,k}(t)$, $k = 1, \dots, m$ y por el bono $P_j(t, T_{\bar{m}(t)})$. Mientras que los tipos Libor $\ell_{j,k}(t)$ se definen mediante los sistemas (15.37) y (15.38), el bono $P_j(t, T_{\bar{m}(t)})$ aún no se ha definido en este contexto.

Para definir la dinámica continua en tiempo de un bono cupón cero, se emplea un esquema de interpolación lineal, como el propuesto en Schrögl (2002a), dado por

$$\frac{1}{P_j(t, T_{\bar{m}(t)})} = 1 + (T_{\bar{m}(t)} - t)\ell_{j,\bar{m}(t)}(T_{\bar{m}(t)-1}), \text{ para } T_{\bar{m}(t)-1} < t < T_{\bar{m}(t)}. \quad (15.42)$$

Esta técnica de interpolación funciona aceptablemente bien en calibración. Combinando (15.42) con (15.41), los bonos local y extranjero son

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_d(t, T)} &= (1 + (T_{\bar{m}(t)} - t)\ell_{d,\bar{m}(t)}(T_{\bar{m}(t)-1})) \prod_{k=\bar{m}(t)+1}^m (1 + \tau_k \ell_{d,k}(t)), \\ \frac{1}{P_f(t, T)} &= (1 + (T_{\bar{m}(t)} - t)\ell_{f,\bar{m}(t)}(T_{\bar{m}(t)-1})) \prod_{k=\bar{m}(t)+1}^m (1 + \tau_k \ell_{f,k}(t)). \end{aligned}$$

Al obtener la dinámica para $y_F(t, T)$ en (15.40), los términos dt deberían ser cero, ya que $y_F(t, T)$ es una martingala bajo el numerario $P_d(t, T)$.

Para cada bono cupón cero, $P_d(t, T)$ o $P_f(t, T)$, la dinámica se determina bajo las medidas T -forward adecuadas. Para $P_d(t, T)$, la medida T -forward local y, para $P_f(t, T)$, la medida T -forward extranjera. Así, las dinámicas de los bonos cupón cero, gobernados por las dinámicas de los tipos Libor en (15.37) y (15.38), vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dP_d(t, T)}{P_d(t, T)} &= (\dots)dt - \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{k=\bar{m}(t)+1}^m \frac{\tau_k \nu_{d,k} \xi_{d,k}(t)}{1 + \tau_k \ell_{d,k}(t)} dW_k^{d,T}(t), \\ \frac{dP_f(t, T)}{P_f(t, T)} &= (\dots)dt - \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k=\bar{m}(t)+1}^m \frac{\tau_k \nu_{f,k} \xi_{f,k}(t)}{1 + \tau_k \ell_{f,k}(t)} d\widehat{W}_k^{f,T}(t), \end{aligned}$$

con los coeficientes definidos en (15.37) y (15.38).

Aplicando un cambio de numerario, de $P_f(t, T)$ a $P_d(t, T)$, para el bono extranjero, solo cambian los términos de deriva. Como $y_F(t, T)$ en (15.40) es una martingala bajo la medida $P_d(t, T)$, «no» es necesario determinar una corrección de la deriva.

Partiendo de (15.20) para la dinámica genérica de (15.40) y despreciando todos los términos en dt , obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} &= \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) + \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{k=\bar{m}(t)+1}^m \frac{\tau_k \nu_{d,k} \xi_{d,k}(t)}{1 + \tau_k \ell_{d,k}(t)} dW_k^{d,T}(t) \\ &\quad - \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k=\bar{m}(t)+1}^m \frac{\tau_k \nu_{f,k} \xi_{f,k}(t)}{1 + \tau_k \ell_{f,k}(t)} dW_k^{f,T}(t).\end{aligned}} \quad (15.43)$$

Nótese que el «sombrero» de \widehat{W} , ha desaparecido del movimiento browniano $W_k^{f,T}(t)$ en (15.43), indicando el cambio de medida, de la extranjera a la local, para los tipos Libor extranjeros.

Dado que el proceso de volatilidad estocástica $v(t)$ para el FX es independiente de los tipos Libor local y extranjero, $\ell_{d,k}(t)$ y $\ell_{f,k}(t)$, la dinámica bajo la medida $P_d(t, T)$ no cambia y viene dada por

$$dv(t) = \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^T(t). \quad (15.44)$$

De nuevo, el modelo en (15.43), con la varianza estocástica (15.44) y correlaciones entre los principales procesos subyacentes, no es afín.

15.3.1. Linealización y función característica forward

El modelo en (15.43) no está en forma afín, ya que contiene términos como $\xi_{j,k}(t)/(1 + \tau_{j,k} \ell_{j,k}(t))$ con $\xi_{j,k} = \vartheta_{j,k}^* \ell_{j,k}(t) + (1 - \vartheta_{j,k}^*) \ell_{j,k}(t_0)$, para $j \in \{d, f\}$. Para obtener la función característica de un modelo aproximado se suelen *congelar* los tipos Libor (véase Glasserman y Zhao (1999); Hull y White (2000); Jäckel y Rebonato (2000), por ejemplo), es decir,

$$\begin{aligned}\ell_{d,k}(t) &\approx \ell_{d,k}(t_0) \Rightarrow \xi_{d,k} \equiv \ell_{d,k}(t_0), \\ \ell_{f,k}(t) &\approx \ell_{f,k}(t_0) \Rightarrow \xi_{f,k} \equiv \ell_{f,k}(t_0).\end{aligned} \quad (15.45)$$

Esta aproximación resulta en la dinámica para $y_F(t, T)$ dada por

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} &\approx \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) \\ &\quad + \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{d,k} dW_k^{d,T}(t) - \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{f,k} dW_k^{f,T}(t), \\ dv(t) &= \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^T(t), \\ d\nu_j(t) &= \lambda_j(\nu_j(t_0) - \nu_j(t))dt + \eta_j \sqrt{\nu_j(t)} dW_v^{j,T}(t),\end{aligned}} \quad (15.46)$$

con $j \in \{d, f\}$, $\mathcal{A} = \{\bar{m}(t) + 1, \dots, m\}$, las correlaciones dadas en (15.39) y

$$\psi_{d,k} := \frac{\tau_k \nu_{d,k} \ell_{d,k}(t_0)}{1 + \tau_k \ell_{d,k}(t_0)} \quad \text{y} \quad \psi_{f,k} := \frac{\tau_k \nu_{f,k} \ell_{f,k}(t_0)}{1 + \tau_k \ell_{f,k}(t_0)}. \quad (15.47)$$

Se puede obtener la dinámica de la transformación logarítmica, $X(t) = \log y_F(t, T)$, para la cual necesitamos calcular el cuadrado de los coeficientes de difusión². Empleando la notación

$$\begin{aligned} a &:= \sqrt{v(t)} dW_y^T(t), \\ b &:= \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{d,k} dW_k^{d,T}(t), \\ c &:= \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{f,k} dW_k^{f,T}(t), \end{aligned} \tag{15.48}$$

tenemos que el cuadrado del coeficiente de difusión es $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. De este modo, la dinámica para $X(t) = \log y_F(t, T)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} dX(t) &\approx -\frac{1}{2}(a + b - c)^2 + \sqrt{v(t)} dW_y^T(t) + \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{\mathcal{A}} \psi_{d,k} dW_k^{d,T}(t) \\ &\quad - \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{\mathcal{A}} \psi_{f,k} dW_k^{f,T}(t), \end{aligned} \tag{15.49}$$

con los coeficientes a , b y c dados en (15.48). Como

$$\left(\sum_{j=1}^m x_j \right)^2 = \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m \\ i \neq j}} x_i x_j, \text{ para } m > 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 &= v(t) dt, \\ b^2 &= \nu_d(t) \left(\sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{d,k}^2 + \sum_{\substack{j,k \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \psi_{d,j} \psi_{d,k} \rho_{j,k}^d \right) dt =: \nu_d(t) A_d(t) dt, \end{aligned} \tag{15.50}$$

$$c^2 = \nu_f(t) \left(\sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{f,k}^2 + \sum_{\substack{j,k \in \mathcal{A} \\ j \neq k}} \psi_{f,j} \psi_{f,k} \rho_{j,k}^f \right) dt =: \nu_f(t) A_f(t) dt, \tag{15.51}$$

$$ab = \sqrt{v(t)} \sqrt{\nu_d(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{d,k} \rho_{k,x}^d dt,$$

$$ac = \sqrt{v(t)} \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{f,k} \rho_{k,x}^f dt,$$

$$bc = \sqrt{\nu_d(t)} \sqrt{\nu_f(t)} \sum_{k \in \mathcal{A}} \psi_{d,k} \sum_{j \in \mathcal{A}} \psi_{f,j} \rho_{j,k}^{d,f} dt,$$

²Como en el análisis estándar de Black-Scholes para $dS(t) = \sigma_1 S(t) dW(t)$, la transformación logarítmica proporciona $d \log S(t) = -\frac{1}{2} \sigma_1^2 dt + \sigma_1 dW(t)$.

donde $\rho_{k,x}^d$ y $\rho_{k,x}^f$ son las correlaciones entre el tipo FX y los k -ésimos tipos Libor local y extranjero, respectivamente. La correlación entre el j -ésimo tipo Libor local y el k -ésimo tipo Libor extranjero es $\rho_{j,k}^{d,f}$. Tomando $\varsigma(t, \sqrt{v(t)}, \sqrt{\nu_d(t)}, \sqrt{\nu_f(t)}) := (2ab - 2ac - 2bc)/dt$, la dinámica de $X(t)$ en (15.49) se puede expresar como

$$\begin{aligned} dX(t) &\approx -\frac{1}{2} \left(v(t) + A_d(t)\nu_d(t) + A_f(t)\nu_f(t) + \varsigma(t, \sqrt{v(t)}, \sqrt{\nu_d(t)}, \sqrt{\nu_f(t)}) \right) dt \\ &\quad + \sqrt{v(t)}dW_y^T(t) + \sqrt{\nu_d(t)} \sum_A \psi_{d,k} dW_k^{d,T}(t) - \sqrt{\nu_f(t)} \sum_A \psi_{f,k} dW_k^{f,T}(t). \end{aligned}$$

Los coeficientes $\psi_{d,k}$, $\psi_{f,k}$, A_d y A_f en (15.47), (15.50), y (15.51) son deterministas y constantes a trozos.

Para convertir el modelo en afín, los términos no afines de la deriva en $\varsigma(t, \sqrt{v(t)}, \sqrt{\nu_d(t)}, \sqrt{\nu_f(t)})$ se «linealizan» mediante la proyección sobre sus momentos de orden uno, es decir,

$$\varsigma(t, \sqrt{v(t)}, \sqrt{\nu_d(t)}, \sqrt{\nu_f(t)}) \approx \underbrace{\varsigma(t, \mathbb{E}(\sqrt{v(t)}), \mathbb{E}(\sqrt{\nu_d(t)}), \mathbb{E}(\sqrt{\nu_f(t)}))}_{G(t)}. \quad (15.52)$$

Los procesos de varianza $v(t)$, $\nu_d(t)$ y $\nu_f(t)$ son procesos estilo CIR independientes, por lo que la esperanza de su producto es igual al producto de las esperanzas. Entonces, se puede determinar la función $G(t)$ con la ayuda de las fórmulas del Lema 13.2.1 en el Apartado 13.2.1.

La aproximación en (15.52) linealiza todos los términos no afines de la EDP correspondiente. Como ya hemos visto, la función característica forward, $\phi_{\mathbf{x}} := \phi_{\mathbf{x}}(u; t, T)$, se define como la solución de la EDP hacia atrás dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial t} + \frac{1}{2} (v + A_d(t)\nu_d + A_f(t)\nu_f + G(t)) \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X^2} - \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X} \right) \\ &\quad + \lambda_d(\nu_d(t_0) - \nu_d) \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial \nu_d} + \lambda_f(\nu_f(t_0) - \nu_f) \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial \nu_f} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}}{\partial v} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta_d^2 \nu_d \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial \nu_d^2} + \frac{1}{2} \eta_f^2 \nu_f \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial \nu_f^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 v \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial v^2} + \rho_{y,v} \gamma v \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}}{\partial X \partial v}, \end{aligned} \quad (15.53)$$

con la condición final $\phi_{\mathbf{x}} \equiv \phi_{\mathbf{x}}(u; T, T) = e^{iuX(T)}$. Dado que todos los coeficientes en esta EDP son lineales, la solución es de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{x}}(u; t, T) &= \exp(\bar{A}(\mathbf{u}, \tau) + \bar{B}(\mathbf{u}, \tau)X(t) + \bar{C}(\mathbf{u}, \tau)v(t) \\ &\quad + \bar{D}_d(\tau)\nu_d(t) + \bar{D}_f(\tau)\nu_f(t)), \end{aligned} \quad (15.54)$$

con $\tau := T - t$. Sustituyendo (15.54) en (15.53) obtenemos el sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{A}}{d\tau} &= G(t)\frac{\bar{B}^2 - \bar{B}}{2} + \lambda_d\nu_d(t_0)D_d(\tau) + \lambda_f\nu_f(t_0)D_f(\tau) + \kappa\bar{v}\bar{C}, \\ \frac{d\bar{B}}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d\bar{C}}{d\tau} &= \frac{\bar{B}^2 - \bar{B}}{2} + (\rho_{y,v}\gamma\bar{B} - \kappa)\bar{C} + \gamma^2\bar{C}^2/2, \\ \frac{d\bar{D}_d(\tau)}{d\tau} &= A_d(t)\frac{\bar{B}^2 - \bar{B}}{2} - \lambda_d\bar{D}_d(\tau) + \eta_d^2\bar{D}_d^2(\tau)/2, \\ \frac{d\bar{D}_f(\tau)}{d\tau} &= A_f(t)\frac{\bar{B}^2 - \bar{B}}{2} - \lambda_f\bar{D}_f(\tau) + \eta_f^2\bar{D}_f^2(\tau)/2,\end{aligned}$$

cuyas condiciones iniciales son $\bar{A}(\mathbf{u}, 0) = 0$, $\bar{B}(\mathbf{u}, 0) = iu$, $\bar{C}(\mathbf{u}, 0) = 0$, $\bar{D}_d(0) = 0$ y $\bar{D}_f(0) = 0$ con $A_d(t)$ y $A_f(t)$ como en (15.50) y (15.51), respectivamente, y $G(t)$ como en (15.52). Tomando $\bar{B}(\mathbf{u}, \tau) = iu$, la solución para $\bar{C}(\mathbf{u}, \tau)$ se obtiene de manera análoga a la solución de la EDO para el modelo FX-HHWI de (15.28). Como las restantes EDOs dependen de las funciones constantes a trozos $A_d(t)$ y $A_f(t)$, la solución se debe determinar de forma interativa, como para el modelo de Heston puro con parámetros constantes a trozos de Andersen y Andreasen (2000), véase también el Apartado 8.4.2. Para una malla de tiempo dada, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = \tau$, las funciones $\bar{D}_d(\tau)$, $\bar{D}_f(\tau)$ y $\bar{A}(\mathbf{u}, \tau)$ se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\bar{D}_d(\tau_k) &= \bar{D}_d(u, \tau_{k-1}) + \chi_d(u, \tau_k), \\ \bar{D}_f(\tau_k) &= \bar{D}_f(u, \tau_{k-1}) + \chi_f(u, \tau_k),\end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, m$, y

$$\bar{A}(\mathbf{u}, \tau_k) = \bar{A}(\mathbf{u}, \tau_{k-1}) + \chi_A(u, \tau_k) - \frac{1}{2}(u^2 + u) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G(z)dz,$$

con $G(z)$ como en (15.52) y las funciones $\chi_j(u, \tau_k)$, para $j \in \{d, f\}$ y $\chi_A(u, \tau_k)$, disponibles analíticamente

$$\chi_j(u, \tau_k) := (\lambda_j - \delta_{j,k} - \eta_j^2 D_j(u, \tau_{k-1})) \frac{1 - e^{-\delta_{j,k}\Delta\tau_k}}{\eta_j^2(1 - \ell_{k,j}e^{-\delta_{j,k}\Delta\tau_k})},$$

y

$$\begin{aligned}\chi_A(u, \tau_k) &= \frac{\kappa\bar{v}}{\gamma^2} \left((\kappa - \rho_{y,v}\gamma iu - d_k)\Delta\tau_k - 2\log\left(\frac{1 - g_k e^{-d_k\Delta\tau_k}}{1 - g_k}\right) \right) \\ &+ \nu_d(t_0) \frac{\lambda_d}{\eta_d^2} \left((\lambda_d - \delta_{d,k})\Delta\tau_k - 2\log\left(\frac{1 - \ell_{d,k} e^{-\delta_{d,k}\Delta\tau_k}}{1 - \ell_{d,k}}\right) \right) \\ &+ \nu_f(t_0) \frac{\lambda_f}{\eta_f^2} \left((\lambda_f - \delta_{f,k})\Delta\tau_k - 2\log\left(\frac{1 - \ell_{f,k} e^{-\delta_{f,k}\Delta\tau_k}}{1 - \ell_{f,k}}\right) \right),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_k &= \sqrt{(\rho_{y,v}\gamma iu - \kappa)^2 + \gamma^2(iu + u^2)}, \\ g_k &= \frac{(\kappa - \rho_{y,v}\gamma iu) - d_k - \gamma^2 C(u, \tau_{k-1})}{(\kappa - \rho_{y,v}\gamma iu) + d_k - \gamma^2 C(u, \tau_{k-1})}, \\ \delta_{j,k} &= \sqrt{\lambda_j^2 + \eta_j^2 A_j(t)(u^2 + iu)}, \\ \ell_{j,k} &= \frac{\lambda_j - \delta_{j,k} - \eta_j^2 D_j(u, \tau_{k-1})}{\lambda_j + \delta_{j,k} - \eta_j^2 D_j(u, \tau_{k-1})}, \end{aligned}$$

con $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k = 1, \dots, m$, y $A_d(t)$ y $A_f(t)$ dadas en (15.50) y (15.51). La aproximación obtenida para el modelo FX-HLMM completo se denominará FX-LMM1.

15.3.2. Experimentos con el modelo FX-HLMM

Consideramos el modelo FX-HLMM y comprobamos los errores cometidos por las diversas aproximaciones que condujeron al modelo FX-HLMM1 mediante algunos experimentos numéricos. Para definir el modelo FX-HLMM1 se han realizado, básicamente, dos etapas de linealización: los tipos Libor se congelan a sus valores iniciales y los términos de covarianza no afines se proyectan sobre una función determinista.

Se consideran las siguientes curvas de tipos de interés, con $t_0 = 0$, $P_d(0, T) = \exp(-0.02T)$ y $P_f(0, T) = \exp(-0.05T)$, y, como anteriormente, los parámetros del modelo FX con volatilidad estocástica:

$$\kappa = 0.5, \quad \gamma = 0.3, \quad \bar{v} = 0.1, \quad v(0) = 0.1.$$

Para la simulación, se seleccionan los siguientes parámetros para los mercados local y extranjero:

$$\begin{aligned} \vartheta_{d,k}^* &= 95\%, \quad \nu_{d,k} = 15\%, \quad \lambda_d = 100\%, \quad \eta_d = 10\%, \\ \vartheta_{f,k}^* &= 50\%, \quad \nu_{f,k} = 25\%, \quad \lambda_f = 70\%, \quad \eta_f = 20\%. \end{aligned}$$

Finalmente, necesitamos especificar la matriz de correlación. Para las correlaciones entre los tipos Libor en cada mercado se toman valores positivos grandes, observados con frecuencia en los mercados de renta fija (véase Brigo y Mercurio (2007), por ejemplo), $\rho_{i,j}^d = 90\%$, $\rho_{i,j}^f = 70\%$, para $i, j = 1, \dots, m$ ($i \neq j$). Con el objetivo de generar una muestra de volatilidad implícita en el tipo FX, consideramos un coeficiente de correlación negativo entre $y_F(t, T)$ y su proceso de volatilidad estocástica $v(t)$, esto es, $\rho_{y,v} = -40\%$. Los coeficientes de correlación entre el tipo FX y los tipos Libor locales se fijan a $\rho_{y,k}^d = -15\%$, para $k = 1, \dots, m$, y la correlación entre el tipo FX y los tipos Libor extranjeros es $\rho_{y,k}^f = -15\%$. La correlación entre los tipos Libor locales y extranjeros es $\rho_{i,k}^{d,f} = 25\%$ para $i, k = 1, \dots, m$ ($i \neq k$). La matriz de correlaciones resultante

es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & \mathbf{C}_{d,f} & \mathbf{C}_{y,d} \\ \mathbf{C}_{d,f}^T & \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{y,f} \\ \mathbf{C}_{y,d}^T & \mathbf{C}_{y,f}^T & 1 \end{bmatrix},$$

con las correlaciones de los tipos Libor locales dadas por

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^d & \dots & \rho_{1,m}^d \\ \rho_{1,2}^d & 1 & \dots & \rho_{2,m}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,m}^d & \rho_{2,m}^d & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 90\% & \dots & 90\% \\ 90\% & 1 & \dots & 90\% \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 90\% & 90\% & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

la correlaciones de los tipos Libor extranjeros dadas por

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^f & \dots & \rho_{1,m}^f \\ \rho_{1,2}^f & 1 & \dots & \rho_{2,m}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,m}^f & \rho_{2,m}^f & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 70\% & \dots & 70\% \\ 70\% & 1 & \dots & 70\% \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 70\% & 70\% & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

las correlación entre los tipos Libor para los mercados local y extranjero dada por

$$\mathbf{C}_{df} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^{d,f} & \dots & \rho_{1,m}^{d,f} \\ \rho_{1,2}^{d,f} & 1 & \dots & \rho_{2,m}^{d,f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,m}^{d,f} & \rho_{2,m}^{d,f} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 25\% & \dots & 25\% \\ 25\% & 1 & \dots & 25\% \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 25\% & 25\% & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

y los vectores $\mathbf{C}_{y,d}$ y $\mathbf{C}_{y,f}$, dados por

$$\mathbf{C}_{y,d} = \begin{bmatrix} \rho_{y,1}^d \\ \rho_{y,2}^d \\ \vdots \\ \rho_{y,m}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15\% \\ -15\% \\ \vdots \\ -15\% \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \mathbf{C}_{y,f} = \begin{bmatrix} \rho_{y,1}^f \\ \rho_{y,2}^f \\ \vdots \\ \rho_{y,m}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15\% \\ -15\% \\ \vdots \\ -15\% \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

Como en ambos mercados se asume que los tipos Libor son independientes de sus procesos de varianza, no se consideran sus correlaciones.

Calculamos precios de opciones europeas vanilla sobre el tipo FX en (15.40). La simulación se lleva a cabo de la misma manera que en el Apartado 15.2.3, donde considerábamos el modelo FX-HHW. Mientras que los precios para el FX-HLMM se obtienen mediante una simulación de Monte Carlo (20 000 trayectorias y 20 pasos de tiempo intermedios entre las fechas T_{i-1} y T_i para $i = 1, \dots, m$), los precios para el modelo FX-HLMM1 se obtienen mediante el método COS, con 500 términos en la expansión de cosenos. Los strikes, $K_1(T_i), \dots, K_7(T_i)$, se presentan en la Tabla 15.2. En la Tabla 15.5 se muestran los precios obtenidos, además de las desviaciones estándar (d.e.) de Monte Carlo.

Se observa que el modelo FX-HLMM1 produce muy buenas estimaciones, ya que, para este conjunto de parámetros representativo, el error máximo en las volatilidades implícitas está entre 0.2% – 0.5%.

Tabla 15.5: Precios promedio para opciones call sobre FX obtenidos mediante el modelo FX-HLMM con 20 simulaciones de Monte Carlo (50 000 trayectorias y $20 \times T_i$ pasos de tiempo); «MC» representa Monte Carlo y «COS» representa la técnica basada en una expansión de Fourier en cosenos empleada en combinación con el modelo FX-HLMM1, utilizando 500 términos en la expansión. Los valores de los strikes $K_n(T_i)$ se presentan en la Tabla 15.2.

| T_i | método | $K_1(T_i)$ | $K_2(T_i)$ | $K_3(T_i)$ | $K_4(T_i)$ | $K_5(T_i)$ | $K_6(T_i)$ | $K_7(T_i)$ |
|-------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 2a | MC | 0.3336 | 0.2889 | 0.2456 | 0.2046 | 0.1667 | 0.1327 | 0.1030 |
| | d.e. | 0.0008 | 0.0009 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0012 |
| | COS | 0.3326 | 0.2880 | 0.2450 | 0.2043 | 0.1667 | 0.1330 | 0.1037 |
| 5a | MC | 0.4243 | 0.3738 | 0.3234 | 0.2743 | 0.2274 | 0.1843 | 0.1457 |
| | d.e. | 0.0012 | 0.0013 | 0.0014 | 0.0015 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0016 |
| | COS | 0.4222 | 0.3717 | 0.3215 | 0.2727 | 0.2265 | 0.1838 | 0.1457 |
| 10a | MC | 0.4363 | 0.3928 | 0.3482 | 0.3031 | 0.2587 | 0.2162 | 0.1764 |
| | d.e. | 0.0012 | 0.0016 | 0.0019 | 0.0023 | 0.0026 | 0.0027 | 0.0028 |
| | COS | 0.4338 | 0.3905 | 0.3461 | 0.3014 | 0.2576 | 0.2157 | 0.1767 |
| 20a | MC | 0.3417 | 0.3171 | 0.2907 | 0.2629 | 0.2342 | 0.2052 | 0.1768 |
| | d.e. | 0.0010 | 0.0013 | 0.0015 | 0.0018 | 0.0021 | 0.0025 | 0.0030 |
| | COS | 0.3416 | 0.3176 | 0.2918 | 0.2647 | 0.2367 | 0.2085 | 0.1806 |
| 30a | MC | 0.2396 | 0.2281 | 0.2152 | 0.2011 | 0.1858 | 0.1699 | 0.1534 |
| | d.e. | 0.0012 | 0.0015 | 0.0018 | 0.0021 | 0.0024 | 0.0029 | 0.0035 |
| | COS | 0.2393 | 0.2279 | 0.2152 | 0.2014 | 0.1866 | 0.1710 | 0.1548 |

Sensibilidad a la mueca de tipo de interés

La aproximación FX-HLMM1 se basa en la «congelación» de los tipos Libor. Congelando los tipos Libor, es decir, $\ell_{d,i}(t) \equiv \ell_{d,i}(t_0)$ y $\ell_{f,i}(t) \equiv \ell_{f,i}(t_0)$, empleamos

$$\begin{cases} \xi_{d,i}(t) = \vartheta_{d,i}^* \ell_{d,i}(t) + (1 - \vartheta_{d,i}^*) \ell_{d,i}(t_0) = \ell_{d,i}(t_0), \\ \xi_{f,i}(t) = \vartheta_{f,i}^* \ell_{f,i}(t) + (1 - \vartheta_{f,i}^*) \ell_{f,i}(t_0) = \ell_{f,i}(t_0). \end{cases} \quad (15.55)$$

En el modelo DD-SV para los tipos Libor $\ell_{d,i}(t)$ y $\ell_{f,i}(t)$, para cualquier i , los parámetros $\vartheta_{d,i}^*$ y $\vartheta_{f,i}^*$ «controlan» la pendiente de las sonrisas de volatilidad del tipo de interés. Congelar los tipos Libor a $\ell_{d,i}(t_0)$ y $\ell_{f,i}(t_0)$ es equivalente a fijar $\vartheta_{d,i}^* = 0$ y $\vartheta_{f,i}^* = 0$ en (15.55) para la aproximación FX-HLMM1.

Mediante simulación de Monte Carlo obtenemos las volatilidades implícitas FX del modelo FX-HLMM completo para distintos valores de ϑ^* . Comparándolas con las obtenidas con el modelo FX-HLMM1 con $\vartheta^* = 0$, podemos analizar la influencia de los parámetros $\vartheta_{d,i}^*$ y $\vartheta_{f,i}^*$ sobre el FX. En la Tabla 15.6 se muestran las volatilidades implícitas para opciones call europeas sobre FX obtenidas mediante los modelos FX-HLMM y FX-HLMM1. Los experimentos se realizan para distintas combinaciones de los parámetros ϑ_d^* y ϑ_f^* .

Tabla 15.6: Volatilidades implícitas para opciones FX obtenidas mediante los modelos FX-HLMM y FX-HLMM1, con $T = 10$ y los parámetros del Apartado 15.3.2. Los valores entre paréntesis son las desviaciones estándar (el experimento se realiza 20 veces con $20 \cdot T$ pasos de tiempo).

| strike (15.31) | FX-HLMM (Monte Carlo) | | | | | | FX-HLMM1 (COS) | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|--|----------------|--|
| | $\vartheta_f^* = 0.5$ | | | $\vartheta_d^* = 0.5$ | | | | |
| | $\vartheta_d^* = 0$ | $\vartheta_d^* = 0.5$ | $\vartheta_d^* = 1$ | $\vartheta_f^* = 0$ | $\vartheta_f^* = 1$ | | | |
| 0.6224 | 31.98 % (0.20) | 31.91 % (0.17) | 31.98 % (0.17) | 31.99 % (0.15) | 31.96 % (0.18) | | 31.56 % | |
| 0.7290 | 31.49 % (0.21) | 31.43 % (0.16) | 31.48 % (0.19) | 31.51 % (0.15) | 31.46 % (0.18) | | 31.12 % | |
| 0.8538 | 31.02 % (0.21) | 30.96 % (0.17) | 31.01 % (0.20) | 31.04 % (0.15) | 30.97 % (0.18) | | 30.69 % | |
| 1.0001 | 30.58 % (0.21) | 30.53 % (0.17) | 30.56 % (0.22) | 30.61 % (0.15) | 30.52 % (0.17) | | 30.30 % | |
| 1.1714 | 30.16 % (0.20) | 30.11 % (0.17) | 30.15 % (0.24) | 30.20 % (0.15) | 30.08 % (0.16) | | 29.93 % | |
| 1.3721 | 29.77 % (0.22) | 29.73 % (0.16) | 29.77 % (0.26) | 29.82 % (0.16) | 29.68 % (0.17) | | 29.60 % | |
| 1.6071 | 29.41 % (0.24) | 29.38 % (0.17) | 29.43 % (0.28) | 29.48 % (0.17) | 29.31 % (0.18) | | 29.30 % | |

El experimento muestra que, al variar los valores de $\vartheta_{d,i}^*$ y $\vartheta_{f,i}^*$, existe un impacto muy pequeño sobre las volatilidades implícitas FX, lo que implica que el modelo aproximado FX-HLMM1 con $\vartheta_{d,i}^* = \vartheta_{f,i}^* = 0$ resulta de utilidad para el modelado de tipos de interés (con los parámetros analizados). Para $\vartheta_{d,i}^* \neq 0$ y $\vartheta_{f,i}^* \neq 0$, parece que las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo FX-HLMM tienden a ser más altas que las obtenidas con el modelo FX-HLMM1, una diferencia de aproximadamente 0.1% – 0.15%, lo que se considera altamente satisfactorio.

Este último capítulo contiene la mayoría de componentes que deseábamos presentar en este libro. Un sistema de EDEs complejo, para el que se necesita un cambio de medida no trivial, se ha linealizado con el objetivo de obtener la función característica del modelo aproximado. Entonces, se puede emplear el método COS para valorar contratos básicos de una manera altamente eficiente. Además, se comparan los resultados con las soluciones proporcionadas por el método Monte Carlo para un modelo completo.

15.4. Ejercicios

Ejercicio 15.1 Proporcionar una demostración para la dinámica del bono cupón cero del Resultado 15.2.1.

Ejercicio 15.2 Se denotan por r_d y r_f los tipos de interés local y extranjero deterministas, respectivamente, y por $M_d(t)$ y $M_f(t)$ sus correspondientes cuentas de ahorros, dadas por

$$dM_d(t) = r_d M_d(t) dt, \quad dM_f(t) = r_f M_f(t) dt.$$

Sea $y(t)$ el FX spot expresado en unidades de la divisa local por unidad de la divisa extranjera. Además,

$$P_d(t, T) := e^{-r_d(T-t)} \quad \text{y} \quad P_f(t, T) := e^{-r_f(T-t)},$$

son los bonos cupón cero local y extranjero y T es el vencimiento.

El denominado modelo FX-SABR dependiente del tiempo se define mediante la dinámica bajo la medida riesgo neutro \mathbb{Q} local dada por

$$\begin{aligned} dy(t) &= (r_d - r_f) y(t) dt + \omega(t) \sigma(t) \left(\frac{P_d(t, T)}{P_f(t, T)} \right)^{1-\beta} y^\beta(t) dW_y^{\mathbb{Q}}(t), \quad y(0) = y_0, \\ d\sigma(t) &= \gamma(t) \sigma(t) dW_\sigma^{\mathbb{Q}}(t), \quad \sigma(0) = 1, \end{aligned}$$

con $dW_y^{\mathbb{Q}}(t) dW_\sigma^{\mathbb{Q}}(t) = \rho_{y,\sigma} dt$ y donde $\rho_{y,\sigma}$, $\gamma(t)$ y β denotan la correlación, el parámetro de volatilidad de la volatilidad y el parámetro de mueca, respectivamente. El parámetro de mueca se fija a $\beta = 0.5$. La volatilidad está escalada, lo que da lugar a un parámetro de estructura temporal $\omega(t)$.

Mostrar que el FX forward, $y_F(t, T_i) := y(t) \frac{P_f(t, T_i)}{P_d(t, T_i)}$, se define mediante la dinámica bajo la medida T_i -forward dada por

$$dy_F(t, T_i) = \left(\frac{P_f(t, T_i)}{P_d(t, T_i)} \right)^\beta \left(\frac{P_f(t, T_i)}{P_d(t, T_i)} \right)^{1-\beta} \omega(t) \sigma(t) \left(\frac{P_d(t, T_i)}{P_f(t, T_i)} \right) y^\beta(t) dW_y^{T_i}(t),$$

que, aplicando la definición del BCC para tipos de interés deterministas, $P(T_i, T_N) = \frac{P(t, T_N)}{P(t, T_i)}$, resulta en

$$dy_F(t, T_i) = \omega(t) \sigma(t) \left(\frac{P_d(T_i, T_N)}{P_f(T_i, T_N)} \right)^{1-\beta} (y_F(t, T_i))^\beta dW_y^{T_i}(t).$$

Mostrar que, para el proceso escalado tal que $y(0, T_i) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} dy_F(t, T_i) &= \omega_1(t) \sigma(t) (y_F(t, T_i))^\beta dW_y^{T_i}(t), \quad y_F(0, T_i) =: \bar{y}_0^{T_i} = 1, \\ d\sigma(t) &= \gamma(t) \sigma(t) dW_\sigma^{T_i}, \quad \sigma(0) = 1, \end{aligned}$$

con $dW_y^{T_i}(t) dW_\sigma^{T_i}(t) = \rho_{y,\sigma} dt$ y

$$\omega_1(t) := \omega(t) \left(\frac{P_d(T_i, T_N)}{y_F(0, T_i) P_f(T_i, T_N)} \right)^{1-\beta}.$$

Ejercicio 15.3 Considerar, bajo la medida T_i -forward local, la dinámica lognormal para el FX, $y_F(t, T_i)$, dada por

$$dy_F(t, T_i) = \sigma(t)y_F(t, T_i)dW_y^F(t, T_i), \quad y_F(0, T_i) = 1.$$

Mostrar que, para el payoff ATM esperado en tiempo T_i tal que

$$\mathbb{E}[(y_F(T_i, T_i) - 1)^+] = \mathbb{E}[g(x)],$$

la función $g(x)$ viene dada por

$$g(x) := 2F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) - 1, \quad x := \int_0^{T_i} \sigma^2(t)dt,$$

donde, como siempre, $F_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ es la función de distribución acumulada de la normal estándar.

Implementar un método Monte Carlo y comparar los resultados numéricos con la solución analítica obtenida.

Ejercicio 15.4 Mostrar que la aproximación de la función $g(\cdot)$ del Ejercicio 15.3 por su correspondiente serie de Taylor resulta en

$$\mathbb{E}[(y_F(T_i, T_i) - 1)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}[\sqrt{x}] + \epsilon_T^{(\ell)},$$

con

$$\epsilon_T^{(\ell)} := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{3}\mathbb{E}[z^3] + \frac{1}{10}\mathbb{E}[z^5] - \dots \right), \quad z := \frac{1}{2}\sqrt{x/2}, \quad x := \int_0^{T_i} \sigma^2(t)dt.$$

Realizar una simulación de Monte Carlo y comparar los resultados numéricos obtenidos con los resultados del Ejercicio 15.3.

Ejercicio 15.5 Considerando el modelo Black-Scholes Hull-White, el sistema de EDEs para el FX bajo la medida riesgo neutro local es similar al Sistema (15.15), es decir,

$$\begin{aligned} dy(t)/y(t) &= (r_d(t) - r_f(t))dt + \sigma_y dW_y^{\mathbb{Q}}(t), \\ dr_d(t) &= \lambda_d (\theta_d(t) - r_d(t)) dt + \eta_d dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \\ dr_f(t) &= \lambda_f (\theta_f(t) - r_f(t) - \eta_f \rho_{y,f} \sigma_y) dt + \eta_f dW_f^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned}$$

con los parámetros de correlación $dW_y(t)dW_d(t) = \rho_{y,d}dt$, $dW_y(t)dW_f(t) = \rho_{y,f}dt$ y $dW_d(t)dW_f(t) = \rho_{d,f}dt$.

Mostrar que el tipo FX forward, bajo la medida T -forward local, definido como

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)},$$

con $y_F(t, T)$ el tipo de cambio forward bajo la medida T -forward, $y(t)$ el tipo de cambio bajo la medida spot local y $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$ representando los bonos cupón cero local y extranjero, respectivamente, da lugar a la dinámica

$$\begin{aligned} dy_F(t, T)/y_F(t, T) &= \eta_d \bar{B}_d(t, T) (\eta_d \bar{B}_d(t, T) - \rho_{y,d} \sigma_y - \rho_{d,f} \eta_f \bar{B}_f(t, T)) dt \\ &\quad + \sigma_y dW_y^{\mathbb{Q}}(t) - \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^{\mathbb{Q}}(t) + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \tag{15.56}$$

Ejercicio 15.6 Un cambio de medida, de la medida spot local a la medida T -forward local, requiere de un cambio de numerario, de la cuenta de ahorros $M_d(t)$ al bono cupón cero $P_d(t, T)$.

Mostrar que, bajo la medida T -forward local, el proceso en (15.56) es

$$dy_F(t, T)/y_F(t, T) = \sigma_y dW_y^T(t) - \eta_d \bar{B}_d(t, T) dW_d^T(t) + \eta_f \bar{B}_f(t, T) dW_f^T(t). \quad (15.57)$$

con $\bar{B}_d(t, T)$, $\bar{B}_f(t, T)$ y los restantes parámetros definidos como en el Apartado 15.2.2.

Ejercicio 15.7 Determinar el valor de $\hat{\sigma}_y(t, T)$ para el cual el proceso FX forward, $y_F(t, T)$ en (15.57), es igual en distribución a $\hat{y}_F(t, T)$, definido como

$$d\hat{y}_F(t, T)/\hat{y}_F(t, T) = \hat{\sigma}_y(t, T) dW_*^T(t), \quad (15.58)$$

donde $W_*^T(t)$ es independiente de los otros procesos estocásticos.

Ejercicio 15.8 Determinar el parámetro σ_* (constante) para el cual el proceso gobernado por

$$d\xi_F(t) = \sigma_* \xi_F(t) dW_*^T(t),$$

con $\xi_F(0) = \hat{y}_F(0, T)$ es igual en distribución a $\hat{y}_F(t, T)$ en (15.58) para un tiempo t^* .

Ejercicio 15.9 Comprobar las respuestas de los Ejercicios 15.7 y 15.8 mediante la implementación de una simulación de Monte Carlo apropiada, donde se simulan los procesos original y alternativo, y se comparan los resultados obtenidos.

Ejercicio 15.10 Asumiendo tipos de interés r_d y r_f constantes, considerar el modelo de volatilidad local para el FX dado por

$$\begin{aligned} dy(t) &= (r_d - r_f) y(t) dt + \sigma_{LV}(t, y(t)) y(t) dW_d^{\mathbb{Q}}(t) \\ &=: a(y(t), t) dt + b(y(t), t) dW_d^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned} \quad (15.59)$$

con

$$\sigma_{LV}^2(t, x) = \frac{\partial V_c^{FX}(t_0, y_0; x, T)}{\partial T} + (r_d - r_f)x \frac{\partial V_c^{FX}(t_0, y_0; x, T)}{\partial x} + r_f V_c^{FX}(t_0, y_0; x, T) \frac{\frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 V_c^{FX}(t_0, y_0; x, T)}{\partial x^2}}{\frac{1}{2}x^2} \quad (15.60)$$

donde $V_c^{FX}(t_0, y_0; K, T)$ es el precio de una opción call sobre el tipo FX, con strike K y vencimiento T . Mostrar que (15.60) y (15.59) verifican la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_{y(T)}(x)}{\partial T} + \frac{\partial(a(x, T)f_{y(T)}(x))}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b^2(x, T)f_{y(T)}(x))}{\partial x^2} = 0.$$

Ejercicio 15.11 Considerar una volatilidad constante $\sigma = 0.15$. Fijado el parámetro de volatilidad, se puede calcular el valor de una opción call sobre FX, $V_c^{FX}(t_0)$, para distintos strikes K . Utilizando esto, simular el proceso en (15.59) mediante el método Monte Carlo. Comparar los precios de opciones obtenidos mediante el modelo de Black-Scholes con $\sigma = 0.15$, con los obtenidos mediante la simulación de (15.59).

Bibliografía

- M. Abramowitz y I.A. Stegun. *Modified Bessel functions I and K.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical Tables, 9th edition, 1972.
- A. Almendral y C.W. Oosterlee. On American options under the variance gamma process. *Applied Mathematical Finance*, 14:131–152, 2007.
- S. Amstrup, L. MacDonald, y B. Manly. *Handbook of capture-recapture analysis.* Princeton University Press, 2006.
- L.B.G. Andersen. Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11:1–48, 2008.
- L.B.G. Andersen y J. Andreasen. Volatility skews and extensions of the Libor Market Model. *Applied Mathematical Finance*, 1(7):1–32, 2000.
- L.B.G. Andersen y J. Andreasen. Volatile volatilities. *Risk Magazine*, 15(12):163–168, 2002.
- L.B.G. Andersen y J. Andreasen. Volatility skews and extensions of the Libor market model. *Applied Mathematical Finance*, 7:1:1–32, 2010. doi: <https://doi.org/10.1080/135048600450275>.
- L.B.G. Andersen y V.V. Piterbarg. Moment explosions in stochastic volatility models. *Finance and Stochastics*, 11(1):29–50, Jan 2007. ISSN 1432-1122. doi: 10.1007/s00780-006-0011-7.
- L.B.G. Andersen y V.V. Piterbarg. Interest rate modeling. *Atlantic Financial Press*, I-III:416, 2010.
- J. Andreasen. Closed form pricing of FX options under stochastic rates and volatility. Presentation at Global Derivatives Conference, Paris, 9-11 May, 2006.
- J. Andreasen y B. Huge. Volatility interpolation. *Risk Magazine*, 3:86–89, 2011.

- A. Antonov. Effective approximation of FX/EQ options for the hybrid models: Heston and correlated Gaussian interest rates. Presentation at MathFinance Conference, Derivatives and Risk Management in Theory and Practice, Frankfurt, 26-27 May, 2007.
- A. Antonov y T. Misirpashaev. Efficient calibration to FX options by Markovian projection in cross-currency Libor Market Models. SSRN working paper, 2006.
- A. Antonov, M. Arneguy, y N. Audet. Markovian projection to a displaced volatility Heston model. SSRN working paper, 2008.
- L. Arnold. *Stochastic differential equations, theory and applications*. Wiley, New York, 1973.
- L. Bachelier. The theory of speculation. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 3(17):21–86, 1900.
- Bank for International Settlements. Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. Technical report, 2004.
- O.E. Barndorff. Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2:41–68, 1998.
- O. Barndorff-Nielsen, S. Graversen, J. Jacod, M. Podolskij, y N. Shephard. *A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- O.E. Barndorff-Nielsen. Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian Journal of Statistics*, 5:151–157, 1978.
- O.E. Barndorff-Nielsen. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Actuarial Journal*, 24:1–13, 1997.
- D. Bates. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, 9(1):69–107, 1996.
- T. Bayes. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions*, (53):370–418, 1763.
- A. Bermúdez, M.R. Nogueiras, y C. Vázquez. Numerical solution of variational inequalities for pricing Asian options by higher order Lagrange–Galerkin methods. *Applied Numerical Mathematics*, 56(10-11):1256–1270, 2006.
- J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. ISBN 0-521-56243-0.
- M. Bianchetti. Two curves, one price. *Risk*, 23:66, 2010.
- F. Black y M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- S. Borodin. *Handbook of Brownian motion*. Birkhäuser, second edition, 2002.

- J.P. Boyd. *Chebyshev & Fourier spectral methods*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- P. P. Boyle. Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4 (3):323–338, 1977.
- P.P. Boyle, M. Broadie, y P. Glasserman. Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1267–1321, 1997.
- A. Brace, D. Gatarek, y M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2):127–155, 1997.
- D. Breeden y R. Litzenberger. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, (51):621–651, 1978.
- R.P. Brent. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. *The Computer Journal*, 14(4):422–425, 1971.
- R.P. Brent. *Algorithms for minimization without derivatives*. Courier Corporation, 2013.
- D. Brigo y F. Mercurio. *Interest rate models – theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.
- M. Broadie y Ö. Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, 54:2:217 – 231, 2006.
- M. Broadie y Y. Yamamoto. Application of the fast Gauss transform to option pricing. *Management Science*, 49:1071–1008, 2003.
- P.P. Carr y D.B. Madan. Towards a theory of volatility trading, volatility: new estimation techniques for pricing derivatives. pages 417–427, 1998.
- P.P. Carr y D.B. Madan. Option valuation using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2:61–73, 1999.
- P.P. Carr, D.B. Madan, y E.C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2:79–105, 1998.
- P.P. Carr, H. Geman, D.B. Madan, y M. Yor. The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75:305–332, 2002.
- C. Cattani. Shannon wavelets theory. *Mathematical problems in Engineering*, 2008: 164808, 2008.
- Chicago Board Option Exchange CBOE White Paper. The CBOE volatility index - VIX. 2014.
- B. Chen, C.W. Oosterlee, y J.A.M. van der Weide. A low-bias simulation scheme for the SABR stochastic volatility model. *International journal Theoretical Applied Finance*, 15(2), 2012.
- P. Cheng y O. Scaillet. Linear-quadratic jump-diffusion modelling. *Mathematical Finance*, 17(4):575–598, 2007.

- I. J. Clark. *Foreign exchange option pricing: a practitioners guide*. Wiley, Chichester UK, 2011.
- T.F. Coleman, Y. Li, y A. Verma. Reconstructing the unknown local volatility function. *Journal of Computational Finance*, 2(3):77–102, 1999.
- R. Cont y P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- J.C. Cox. Note on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. *Stanford University Working Paper*, pages 229 – 263, 1975.
- J.C. Cox, J.E. Ingersoll, y S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- S.R. Das y S. Foresi. Exact solutions for bond and option prices with systematic jump risk. *Review of Derivatives Research*, 1:7–24, 1996.
- C.S.L. de Graaf, Q. Feng, D.B. Kandhai, y C.W. Oosterlee. Efficient computation of exposure profiles for counterparty credit Risk. *International journal Theoretical Applied Finance*, 17(04):1450024, 2014. doi: 10.1142/S0219024914500241.
- S. De Marco, P. Friz, y S. Gerhold. Rational shapes of local volatility. *Risk Magazine*, 2:82–87, 2013.
- G. Deelstra y G. Rayée. Local Volatility Pricing Models for Long-dated FX Derivatives. *Applied Mathematical Finance*, pages 1–23, 2012.
- T.J. Dekker. Finding a zero by means of successive linear interpolation. *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra*, pages 37–51, 1969.
- F. Delbaen y W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994. ISSN 0025-5831.
- E. Derman y I. Kani. Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. *International Journal Theoretical Applied Finance*, 1(1):61–110, 1998.
- S. Desmettre. Change of measure in the Heston model given a violated Feller condition. arXiv Preprint in Quantitative Finance, <https://arxiv.org/abs/1809.10955>, 2018.
- Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, y G. Labahn. A penalty method for American options with jump diffusion processes. *Numerische Mathematik*, 97(2):321–352, 2004.
- D. Duffie, J. Pan, y K. Singleton. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68:1343–1376, 2000.
- D. Duffie, D. Filipovic, y W. Schachermayer. Affine processes and applications in finance. *Annals of Applied Probability*, 13(3):984–1053, 2003.
- D. Dufresne. The integrated square-root process. Working paper, University of Montreal, 2001.

- B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7:18–20, 1994.
- E. Eberlein. Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance. In *Lévy processes*, pages 319–336. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- B. Engelmann, F. Koster, y D. Oeltz. Calibration of the Heston stochastic local volatility model: a finite volume scheme. Available at SSRN 1823769, 2011.
- F. Fang. *The COS method: An efficient Fourier method for pricing financial derivatives*. PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands., 2010.
- F. Fang y C.W. Oosterlee. Pricing early-exercise and discrete barrier options by fourier-cosine series expansions. *Numerische Mathematik*, 114:27–62, 2009.
- F. Fang y C.W. Oosterlee. A novel option pricing method based on Fourier-cosine series expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2):826–848, 2008.
- F. Fang y C.W. Oosterlee. A fourier-based valuation method for bermudan and barrier options under heston’s model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2:439–463, 2011.
- W. Feller. Two singular diffusion problems. *The Annals of Mathematics*, 54:173 – 182, 1951.
- Q. Feng. *Advanced estimation of credit valuation adjustment*. PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands., 2017.
- Q. Feng y C.W. Oosterlee. Monte Carlo calculation of exposure profiles and greeks for Bermudan and barrier options under the Heston Hull-White model. In J. Belair R. Melnik, R. Makarov, editor, *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Springer Fields Inst. Comm.*, pages 265–301. Springer Verlag, 2017.
- Q. Feng, S. Jain, P. Karlsson, D.B. Kandhai, y C.W. Oosterlee. Efficient computation of exposure profiles on real-world and risk-neutral scenarios for Bermudan swaptions. *Journal of Computational Finance*, 20(1):139–172, 2016.
- P.A. Forsyth y K.R. Vetzal. Quadratic convergence for valuing American options using a penalty method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(6):2095–2122, 2002.
- J-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar, y K. Solna. Maturity cycles in implied volatility. *Finance and Stochastics*, 8:451–477, 2004. doi: <https://doi.org/10.1007/s00780-004-0126-7>.
- H. Geman, N. El Karoui, y J.C. Rochet. Changes of numéraire, changes of probability measures and pricing of options. *Journal of Applied Probability*, 32:443–458, 1995.
- H.U. Gerber y E.S.W. Shiu. Option pricing by Esscher transforms (Disc: p141-191). *Transactions of the Society of Actuaries*, 46:99–140, 1995.
- M.B. German y S.W. Kohlhagen. Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 3:231–237, 1983.

- A. Giese. On the pricing of auto-callable equity securities in the presence of stochastic volatility and stochastic interest rates. Presentation at MathFinanceWorkshop: Derivatives and Risk Management in Theory and Practice, Frankfurt, 2006.
- M.B. Giles. Improved multilevel Monte Carlo convergence using the milstein scheme. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, page 343, 2007.
- M.B. Giles. Multilevel monte carlo path simulation. *Operations Research*, 56(3): 607–617, 2008.
- M.B. Giles y C. Reisinger. Stochastic finite differences and multilevel Monte Carlo for a class of SPDEs in finance. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3(1): 572–592, 2012.
- I.V. Girsanov. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and its Applications*, 3 (5):285–301, 1960.
- P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2003.
- P. Glasserman y X. Zhao. Fast greeks by simulation in forward Libor models. *Journal of Computational Finance*, 3(1):5–39, 1999.
- I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press San Diego, 5th edition, 1996.
- J. Gregory. *Counterparty credit risk: the new challenge for global financial markets*. Wiley, Chichester UK. Wiley, Chichester UK, 2010. ISBN 9780470685761.
- L. A. Grzelak, J. A. S. Witteveen, M. Suárez-Taboada, y C. W. Oosterlee. The Stochastic Collocation Monte Carlo sampler: Highly efficient sampling from “expensive” distributions. *Quantitative Finance*, 0(0):1–18, 2018. doi: 10.1080/14697688.2018.1459807.
- L.A. Grzelak y C.W. Oosterlee. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 1(2):255–286, 2011.
- L.A. Grzelak y C.W. Oosterlee. From arbitrage to arbitrage-free implied volatilities. *Journal of Computational Finance*, 20(3):31–49, 2016.
- L.A. Grzelak, C.W. Oosterlee, y S. van Weeren. Extension of stochastic volatility equity models with Hull-White interest rate process. *Quantitative Finance*, 12: 89–105, 2012.
- S. Guo, L.A. Grzelak, y C.W. Oosterlee. Analysis of an affine version of the Heston Hull-White option pricing partial differential equation. *Applied Numerical Mathematics*, 72:141–159, 2013.
- J. Guyon y P. Henry-Labordère. Being particular about calibration. *Risk Magazine*, 25(1):88, 2012.

- T. Haentjens y K.J. In't Hout. Alternating direction implicit finite difference schemes for the Heston-Hull-White partial differential equation. *Journal of Computational Finance*, 16(1):83, 2012.
- P.S. Hagan y G. West. Methods for constructing a yield curve. *Wilmott Magazine*, pages 70–81, 2008.
- P.S. Hagan, D. Kumar, A.S. Lesniewski, y D.E. Woodward. Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, 3:84–108, 2002.
- J.W. Harris y H. Stocker. *Maximum likelihood method*. New York- Verlag, 1998.
- J.M. Harrison y D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3):381–408, 1979. ISSN 0022-0531.
- J.M. Harrison y S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3):215–260, 1981. ISSN 0304-4149.
- C. He, J.S. Kennedy, T. Coleman, P.A. Forsyth, Y. Li, y K. Vetzal. Calibration and hedging under jump diffusion. *Review of Derivatives Research*, 9:1–35, 2006.
- D. Heath y M. Schweizer. Martingales versus PDEs in Finance: An equivalence results with examples. *Journal of Applied Probability*, 37:947–957, 2000.
- D. Heath, R.A. Jarrow, y A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 1(60): 77–105, 1992.
- P. Henry-Labordère. Calibration of Local Stochastic Volatility Models to Market Smiles: a Monte-Carlo Approach. *Risk Magazine*, pages 112–117, 2009.
- S.L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6:327–343, 1993.
- D.J. Higham. *An introduction to financial option valuation: mathematics, stochastics and computation*, volume 13. Cambridge University Press, 2004.
- A. Hirsa y D.B. Madan. Pricing American options under Variance Gamma. *Journal of Computational Finance*, 7(2):63–80, 2004.
- J. Hull. *Options, futures and other derivatives. 8th edition*. Prentice Hall, 2012.
- J. Hull y A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2):281–300, 1987.
- J. Hull y A. White. Pricing interest-rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- J. Hull y A. White. Forward rate volatilities, swap rate volatilities and the implementation of the Libor Market Model. *Journal of Fixed Income*, 10(2):46–62, 2000.

- J. Hull y A. White. The FVA debate continued. *Risk*, 10:52, 2012.
- C. Hunter y G. Picot. Hybrid derivatives- financial engines of the future. The Euromoney- Derivatives and Risk Management Handbook, BNP Paribas, 2006.
- K.J. In 't Hout. *Numerical partial differential equations in finance explained: an introduction to computational finance*. Palgrave McMillan, 2017.
- K.J. In't Hout y S. Foulon. Adi finite difference schemes for option pricing in the Heston model with correlation. *International Journal of Numerical Analysis & Modeling.*, 7(2):303–320, 2010.
- P. Jäckel. *Monte Carlo methods in finance*. Wiley, Chichester UK, 2002.
- P. Jäckel y R. Rebonato. Linking caplet and swaption volatilities in a BGM framework: Approximate solutions. *Journal of Computational Finance*, 6(4):41–60, 2000.
- S. Jain y C.W. Oosterlee. The Stochastic Grid Bundling Method: Efficient pricing of Bermudan options and their Greeks. *Applied Mathematics and Computation*, 269: 412 – 431, 2015. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.07.085>.
- F. Jamshidian. Pricing of contingent claims in the one-factor term structure model. *Journal of Finance*, pages 111–122, 1987.
- F. Jamshidian. An exact bond option formula. *Journal of Finance*, 44:205–209, 1989.
- F. Jamshidian. Libor and swap market models and measures. *Financ. Stoch.*, 1(4): 293–330, 1997.
- R. Jarrow y Y. Yildirim. Pricing treasury inflation protected securities and related derivatives using an HJM model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(2):409–430, 2003.
- M. Jex, R. Henderson, y D. Wang. Pricing exotics under the smile. *Risk Magazine*, 12(11):72–75, 1999.
- N.L. Johnson y S. Kotz. *Distributions in statistics: continuous univariate distributions* 2. Boston: Houghton Mifflin Company, first edition, 1970.
- B. Jourdain y M. Sbai. Coupling index and stocks. *Quantitative Finance*, 12(5): 805–818, 2012.
- I. Karatzas y S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Verlag, 1991.
- I. Karatzas y S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1998. ISBN 0-387-94839-2.
- A. Kawai y P. Jäckel. An asymptotic FX option formula in the cross currency Libor Market Model. *Wilmott Magazine*, pages 74–84, 2007.
- J.S. Kennedy, P.A. Forsyth, y K.R. Vetzal. Dynamic hedging under jump diffusion with transaction costs. *Operations Research*, 57(3):541–559, 2009.

- Ch. Kenyon, A.D. Green, y M. Berrahoui. Which measure for PFE? the risk appetite measure A. *SSRN Electronic Journal*, 12 2015. doi: 10.2139/ssrn.2703965.
- J.L. Kirkby. Efficient option pricing by frame duality with the fast Fourier transform. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 6(1):713–747, 2016.
- P.E. Kloeden y E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer Verlag, 1992, 1995, 1999.
- W. Koepf. *Hypergeometric summation: an algorithmic approach to summation and special function identities*. Braunschweig, Germany: Vieweg, 1998.
- S.G. Kou. A jump diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48: 1086–1101, 2002.
- S.G. Kou y H. Wang. Option pricing under a double exponential jump-diffusion model. *Management Science*, 50:1178–1192, 2004.
- E.E. Kummer. Über die hypergeometrische Reihe $F(a; b; x)$. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 15:39–83, 1936.
- Y.-K. Kwok. *Mathematical models of financial derivatives*. Springer Verlag, 2008.
- B. Lauterbach y P. Schultz. Pricing warrants: An empirical study of the Black-Scholes model and its alternatives. *Journal of Finance*, 45(4):1181–1209, 1990.
- R.W. Lee. Option pricing by transform methods: extensions, unification, and error control. *Journal of Computational Finance*, 7:51–86, 2004.
- Á. Leitao, L.A. Grzelak, y C.W. Oosterlee. On an efficient multiple time step Monte Carlo simulation of the SABR model. *Quantitative Finance*, 17(10):1549–1565, 2017a.
- Á. Leitao, L.A. Grzelak, y C.W. Oosterlee. On a one time-step Monte Carlo simulation approach of the SABR model: Application to European options. *Applied Mathematics and Computation*, 293:461–479, 2017b.
- A. Lesniewski. Notes on the CEV model. NYU working paper, 2009.
- A.E. Lindsay y D.R. Brecher. Simulation of the CEV process and the local martingale property. *Mathematics and Computers in Simulation*, (82):868–878, 2012.
- A. Lipton. The vol smile problem. *Risk Magazine*, 15(2):61–66, 2002.
- A. Lipton y W. McGhee. Universal barriers. *Risk Magazine*, 15(5):81–85, 2002.
- A. Lipton, A. Gal, y A. Lasis. Pricing of vanilla and first-generation exotic options in the local stochastic volatility framework: survey and new results. *Quantitative Finance*, 14(11):1899–1922, 2014.
- F.A. Longstaff y E.S. Schwartz. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001. doi: 10.1093/rfs/14.1.113.

- R. Lord y C. Kahl. Why the rotation count algorithm works. Tinbergen Institute Discussion Paper No. 2006-065/2, 2006.
- R. Lord y C. Kahl. Complex logarithms in Heston-like models. *Mathematical Finance*, 20(4):671–694, 2010.
- R. Lord, R. Koekkoek, y D.Dijk. A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 10(2):177–194, 2010.
- M. Lorig, S. Pagliarani, y Pascucci A. Explicit implied volatilities for multifactor local-stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 27:926–960, 2015.
- D.B Madan y E. Seneta. The variance gamma (VG) model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4):511–524, 1990.
- D.B. Madan, P.R. Carr, y E.C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2:79–105, 1998.
- W. Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33(1):177–186, 1978.
- D. Marris. Financial option pricing and skewed volatility. *Unpublished master's thesis, University of Cambridge*, 1999.
- A.-M. Matache, T. Von Petersdorff, y C. Schwab. Fast deterministic pricing of options on Lévy driven assets. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(1):37–71, 2004.
- F. Mercurio. Interest rates and the credit crunch: new formulas and market models. *SSRN,id 3225872*, 2010.
- R.C. Merton. Option pricing when the underlying stocks are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 5:125–144, 1976.
- P.A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. *Sem. Probab. 10, Lecture Notes in Math.*, 511:245–400, 1976.
- P. Mikkelsen. Cross-currency Libor Market Models. Center for Analytica Finance Aarhus School of Business working paper no.85, 2001.
- G.N. Milstein, J.G.M. Schoenmakers, y V. Spokoiny. Transition density estimation for stochastic differential equations via forward-reverse representations. *Bernoulli*, 10:281–312, 2004.
- K.R. Miltersen, K. Sandmann, y D. Sondermann. Closed form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates. *Journal of Finance*, 52(1):409–430, 1997.
- M. Mori y M. Sugihara. The double-exponential transformation in numerical analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127:287–296, 2001.
- S.M. Moser. Some expectations of a non-central chi-square distribution with an even number of degrees of freedom. TENCON 2007 - 2007 IEEE Region 10 Conference, 2007.

- M. Musiela y M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*. Springer Finance, 1997.
- M. Muskulus, K. in't Hout, J. Bierkens, A.P.C. van der Ploeg, J. in't Panhuis, F. Fang, B. Janssens, y C.W. Oosterlee. The ING problem- a problem from financial industry; three papers on the Heston-Hull-White model. Proc. Math. with Industry, Utrecht, Netherlands, 2007.
- V. Naik y M. Lee. General equilibrium pricing of options on the market portfolio with discontinuous returns. *Review of Financial Studies*, 3(4):493–521, 1990.
- G.W. Oehlert. A note on the delta method. *American Statistician*, 46:27–29, 1992.
- B. Øksendal. *Stochastic differential equations; An introduction with applications*. Springer Verlag, New York, 5th edition, 2000.
- L. Ortiz-Gracia y C.W. Oosterlee. Robust pricing of European options with wavelets and the characteristic function. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(5):B1055–B1084, 2013.
- L. Ortiz-Gracia y C.W. Oosterlee. A highly efficient Shannon wavelet inverse Fourier technique for pricing European options. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(1):B118–B143, 2016.
- C. O'Sullivan. Path dependent option pricing under Lévy processes. EFA 2005 Moscow Meetings Paper, <http://ssrn.com/abstract=673424>, 2005.
- M. Overhaus, A. Bermudez, H. Buehler, A. Ferraris, C. Jordinson, y A. Lamnouar. *Equity Hybrid Derivatives*. Wiley, Chichester UK, 2007.
- A. Papapantoleon. An introduction to Lévy processes with applications to finance. *Lecture notes, University of Leipzig*, 2005.
- A. Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing*. Springer Science & Business Media, 2011.
- A. Pascucci y A. Mazzon. The forward smile in local-stochastic volatility models. *Journal of Computational Finance*, 20(3):1–29, 2017.
- A. Pascucci, M. Suárez-Taboada, y C. Vazquez. Mathematical analysis and numerical methods for a PDE model of a stock loan pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403(1):38–53, 2013.
- P.B. Patnaik. The non-central χ^2 and F-distributions and their applications. *Biometrika*, 36:202–232, 1949.
- A. Pelsser. A tractable interest rate model that guarantees positive interest rates. *Review of Derivatives Research*, 1:269–284, 1997.
- A. Pelsser. *Efficient methods for valuing interest rate derivatives*. Springer Verlag London, 2000.
- V.V. Piterbarg. Stochastic volatility model with time dependent skew. *Applied Mathematical Finance*, 12(2):147–185, 2005a.

- V.V. Piterbarg. Time to smile. *Risk Magazine*, 18(5):71–75, 2005b.
- V.V. Piterbarg. Smiling hybrids. *Risk Magazine*, 19:66–71, 2006.
- V.V. Piterbarg. Markovian Projection Method for Volatility Calibration. *Risk Magazine*, April 2007.
- J. Pitman y M. Yor. A Decomposition of Bessel Bridges. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 59:425–457, 1982.
- J. Poirot y P. Tankov. Monte Carlo option pricing for tempered stable (CGMY) processes. *Asia-Pacific Financial Markets*, 13(4):327–344, 2006.
- N. Privault. An extension of the quantum Itô table and its matrix representation. *Quantum Probability Communications*, 10:311–320, 1998.
- P.E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer Verlag, 2005.
- M. Pykhtin y S. Zhu. A guide to modelling counterparty credit risk. *GARP Risk Review*, pages 16–22, July/August 2007.
- S. Raible. *Lévy processes in finance: theory, numerics and empirical facts*. PhD Thesis, Inst. für Math. Stochastik, Albert-Ludwigs-Univ. Freiburg, 2000.
- R. Rebonato. *Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX, and Interest-rate Options*. Wiley, Chichester UK, 1999.
- R. Rebonato. *Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond*. Princeton University Press, 2002.
- R. Rebonato. *Volatility and correlation: the perfect hedger and the fox*. Wiley, Chichester UK, 2005.
- R. Rebonato. *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. Wiley, Chichester UK, first edition, 2009.
- C. Reisinger. Analysis of linear difference schemes in the sparse grid combination technique. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(2):544–581, 2012.
- C. Reisinger y G. Wittum. On multigrid for anisotropic equations and variational inequalities “pricing multi-dimensional european and American options”. *Computing and Visualization in Science*, 7(3-4):189–197, 2004.
- C. Reisinger y G. Wittum. Efficient hierarchical approximation of high-dimensional option pricing problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(1):440–458, 2007.
- Y. Ren, D.B. Madan, y M.Q. Qian. Calibrating and Pricing with Embedded Local Volatility Models. *Risk Magazine*, 20(9):138–143, 2007.
- M. Rubinstein. Displaced diffusion option pricing. *Journal of Finance*, 38(1):213–217, 1983.
- M. Rubinstein. Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49:771–818, 1994.

- M.J. Ruijter y C.W. Oosterlee. Two-dimensional Fourier cosine series expansion method for pricing financial options. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(5):B642–B671, 2012.
- P.A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13–31, 1965.
- K. Sato. Basic results on Lévy processes. In *Lévy processes*, pages 3–37. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- E. Schrögl. *Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann*, chapter Arbitrage-free interpolation in models of market observable interest rates, pages 197–218. Springer Verlag, Heidelberg, 2002a.
- E. Schrögl. A multicurrency extension of the lognormal interest rate market models. *Finance and Stochastics*, 6(2):171–196, 2002b.
- R. Schöbel y J. Zhu. Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension. *European Finance Review*, 3:23–46, 1999.
- W. Schoutens. *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. Wiley, Chichester UK, March 2003.
- M. Schroder. Computing the constant elasticity of variance option pricing formula. *Journal of Finance*, 1:44:211 – 218, 1989.
- K. Sennewald y K. Wälde. “Itô’s lemma” and the Bellman equation for Poisson processes: An applied view. *Journal of Economics*, 89(1):1–36, 2006.
- A. Sepp y I. Skachkov. Option pricing with jumps. *Wilmott Magazine*, pages 50–58, 2003.
- R.U. Seydel. *Tools for computational finance. 4th edition*. Springer Verlag, 2017.
- S.E. Shreve. *Stochastic calculus for finance II: continuous-time models*. New York: Springer, 2004.
- J. Sippel y S. Ohkoshi. All power to PRDC notes. *Risk Magazine*, 15(11):531–533, 2002.
- J.C. Stein y E.M. Stein. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4:727–752, 1991.
- M. Suárez-Taboada y C. Vázquez. Numerical solution of a PDE model for a ratchet-cap pricing with BGM interest rate dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9):5217–5230, 2012.
- A. Takahashi y K. Takehara. Fourier transform method with an asymptotic expansion approach: an application to currency options. *International Journal Theoretical Applied Finance*, 11(4):381–401, 2008.
- H. Tanaka. Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional brownian path. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 1:251–257, 1963.

- U. Ushakov. *Selected topics in characteristic functions*. De Gruyter, 1999.
- A.W. van der Stoep, L.A. Grzelak, y C.W. Oosterlee. The Heston stochastic-local volatility model: Efficient Monte Carlo simulation. *International Journal Theoretical Applied Finance*, 17(7):1450045, 2014.
- A. van Haastrecht y A. Pelsser. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*, pages 655–691, 2010. doi: <https://doi.org/10.1080/14697688.2010.504734>.
- A. van Haastrecht, R. Lord, A. Pelsser, y D. Schrager. Pricing long-maturity equity and FX derivatives with stochastic interest and stochastic volatility. *Insurance: Mathematics & Economics*, 45(3):436–448, 2009.
- A. van Haastrecht, R. Lord, y A. Pelsser. Monte Carlo pricing in the Schöbel-Zhu model and its extensions. *Journal of Computational Finance*, 17(3):57, 2014.
- O.A. Vašiček. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.
- C. Vázquez. An upwind numerical approach for an American and European option pricing model. *Applied Mathematics and Computation*, 97(2-3):273–286, 1998.
- L. von Sydow, J. Höök, E. Larsson, E. Lindström, S. Milovanović, J. Persson, V. Shcherbakov, Y. Shpolyanskiy, S. Sirén, J. Toivanen, et al. BENCHOP–The BENCHmarking project in Option pricing. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(12):2361–2379, 2015.
- A. T. Wang. Generalized Itô's formula and additive functionals of Brownian motion. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 41:153–159, 1977.
- I. Wang, J.W. Wan, y P.A. Forsyth. Robust numerical robust numerical valuation of European and American options under the CGMY process. *Journal of Computational Finance*, 10(4):31–70, 2007.
- D. Williams. *Probability with martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- P. Wilmott. *Derivatives: The theory and practice of financial engineering*. Wiley Frontiers in Finance Series, 1998.
- P. Wilmott, J. Dewynne, y S. Howison. *Option pricing: mathematical models and computation*. Oxford Financial Press, Oxford, 1995.
- J.H. Witte y C. Reisinger. A penalty method for the numerical solution of Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equations in finance. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(1):213–231, 2011.
- B. Wong y C.C. Heyde. On changes of measure in stochastic volatility models. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006:1–13, 2006.
- L. Wu y F. Zhang. Fast swaption pricing under the market model with a square-root volatility process. *Quantitative Finance*, 8(2):163–180, 2008.

- Y. Yamamoto. Double-exponential fast Gauss transform algorithms for pricing discrete lookback options. *Publications of Research Institute of Mathematical Sciences*, 41:989–1006, 2005.
- J. Zhu. *Modular pricing of options*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- R. Zvan, P.A. Forsyth, y K.R. Vetzal. Penalty methods for American options with stochastic volatility. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 91(2):199–218, 1998.
- R. Zvan, P.A. Forsyth, y K.R. Vetzal. A finite volume approach for contingent claims valuation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21(3):703–731, 2001.

Índice alfabético

T_{i-1} -forward, 472
 \mathbb{Q} -martingala, 212
acciones correladas, 211
acción con dividendos, 60
acción forward, 430
acción sin dividendos, 89
actividad infinita, 150, 324
activo, 55–57, 60, 328, 337, 390, 431, 437
 saltos, 168
activo con riesgo, 416
activo cotizado, 132, 214
activo cotizado descontado, 44
activo descontado, 516
activo negociable, 223, 363, 394
activo único, 199
acuerdo de interés futuro, 390
afín, 257, 258, 372
 proceso, 263
agudeza, 156
ajuste, 413
ajuste de la deriva, 132
alcanzable, 214
algoritmo de búsqueda de raíces, 88, 406
algoritmo de Monte Carlo, 273
análisis del error, 180, 184, 354, 448
aplanar la volatilidad, 336
aproximación de Euler, 282
arbitraje, 41, 44, 60, 106, 115, 117, 248, 405, 501, 513
 condiciones, 87
 interpolación, 122
 oportunidad, 117, 514
 spread, 118
 spread de calendario, 117
 spread mariposa, 117, 121

Arrow-Debreu, 74, 75, 96
asimetría, 167
at the money, ATM, 95, 100
at-the-money, ATM, 59, 252, 481
ausencia de arbitraje, 65, 113, 362, 363, 503
 condición de deriva, 364
 modelo de curva
de rentabilidad, 370
 suposición, 109, 153, 154, 158, 167
Bachelier, 48
backtesting, 51
basis swap, 502
basis swap de Euribor, 502
BCCs negociables, 404
BCVA, 419
beneficio, 57, 60, 74, 79, 83, 337
beneficio hasta el default propio, 419
bilateral credit value adjustment, BCVA, 418
Black-Scholes, 60, 63, 88, 167, 188, 218, 281, 330, 466, 490
 cobertura, 80
 deducción, 64
 delta, 147, 312, 319
 dependiente del tiempo, 253
 dinámica, 71, 94, 145, 198, 329, 355
dividendo, 64
ecuación, 63
EDP, 226
estocástico IR, 432
forward start, 329
fórmula, 70, 286, 466

- inversión, 113
 modelo FX, 515
 mundo, 153
 operador, 74
 precios, 141
 riesgo neutro, 220
 solución, 67, 68, 77, 88, 92, 97
 teoría, 93
 transformada logarítmicamente, 226
 vega, 319
 vola. implícita, 88, 119, 249, 356,
 507
 volatilidad, 76
 Black-Scholes Hull-White, 426, 432, 457,
 460, 461, 546
 bono, 358, 361, 390, 437, 475
 cartera, 437
 cupón cero, 377, 379–381, 388
 descontado, 390
 extranjero, 536
 flotante, 388
 libre de riesgo, 506
 mercado, 358
 modelo, 385
 precio, 395, 400
 precio numérico, 370
 precio relativo, 476
 productos, 388
 rentabilidad, 395
 tipo fijo, 360
 bono cupón cero a 10 años, 384
 bono cupón cero, BCC, 363, 364, 388,
 394, 402, 407, 409, 428, 467, 469, 474
 modelo Hull-White, 369
 definición, 359
 derivación, 374
 descontado, 364
 dinámica, 367, 376, 378, 429, 518,
 536
 EDE, 376
 entorno FX, 518
 extranjero, 514
 IR negativo, 499
 libre de riesgo, 389
 local, 514, 521, 523
 numerario, 494, 495
 opción put, 403
 precio, 359, 376, 401
 producto IR, 382
 sin garantía, 505
 solución alternativa, 375
 tipo forward, 363, 366
 bono cupón cero, BCC
 fórmula, 373
 bono de tipo fijo, 359, 360
 bono descontado, 390
 bono libre de riesgo, 506
 bonos corporativos, 358
 bonos flotantes, 388
 cádlág, 12
 calibración, 94, 198, 368, 396, 403, 426
 EDES, 426
 fórmulas, 517
 Heston, 248, 250, 337
 histórico, 48
 modelo de mercado, 481
 modelo híbrido, 440
 problema, 397
 procedimiento, 112, 339
 producto, 396
 resultados, 453
 vola. sonrisa, 494
 calibración FX, 517, 530
 calibration
 model, 521
 calificación de calidad crediticia, 409
 cambio de divisas, FX, 511
 cambio de medida, 216, 219, 221, 301,
 363, 377, 379, 381, 391, 393, 402,
 428, 429, 432, 472, 474, 492, 520,
 522, 524
 cambio de numerario, 222
 cantidad de dinero, 79
 cap, 399
 cap de tipo de interés, 399
 capital nominal, 31, 359, 360, 390, 392,
 399, 407, 422, 478, 514
 capitalización geométrica, 507
 caplet, 399, 400, 402, 466, 483, 499,
 532
 modelo SV-LMM, 495
 solución, 483
 valoración, 493
 cartera de cobertura, 64, 147
 Heston, 247
 cartera dinámica, 61
 cartera estática, 61
 cartera libre de riesgo, 248
 cartera replicante, 61, 62, 236, 245,
 247
 casi seguro, 11, 17, 148
 Cauchy-Schwartz, 16
 Chebyshev
 aproximación, 187
 polinomio, 186, 187
 serie, 186, 187
 Chicago Board of Exchange,
 CBOE, 109
 clase de activo, 118, 426
 clase FX de activos, 511
 cobertura delta, 61, 78–80, 93, 145

cobertura delta dinámica, 61, 80
 cobertura dinámica, 79
 saltos, 145
 cobertura FX, 513
 coeficiente de correlación, 9, 261
 coeficientes de Fourier del coseno, 181, 187
 cola izquierda, 240
 colas pesadas, 157, 170, 189
 compensador, 353
 componente de volatilidad local, 338
 componente de volatilidad local del SLV, 345
 comportamiento de la cobertura, 327
 comportamiento porcentual, 328
 comportamiento quasi-singular, 238
 comportamiento quasisingular, 238, 240
 condiciones de Lipschitz, 32, 35, 215
 condiciones libre de arbitraje
 HJM, 364
 condición de absorción, 488
 condición de Feller, 238, 239, 289, 292, 294, 353, 375, 444
 condición HJM, 363
 condición HJM de la deriva, 367
 condición mariposa, 116
 congelación del tipo Libor, 494, 537, 543
 Constant Elasticity of Variance, CEV, 339, 340, 482, 483
 distribución, 485
 proceso, 119, 485
 contexto FX, 512
 continuidad estocástica, 148
 contrapartida, 387, 388, 407, 455
 default, 387, 409, 419
 exposición, 387, 417
 contrapartida libre de riesgo, 408
 contrapartida vulnerable, 408
 contrapartidas, 418
 contrato de opción, 56
 contrato FX forward, 513
 convergencia
 sentido débil, 280
 sentido fuerte, 280
 convergencia algebraica, 185, 198
 convergencia cuadrática, 90
 convergencia de Monte Carlo, 277, 306
 convergencia dominada, 15
 convergencia débil, 280, 281, 283
 orden, 286
 convergencia exponencial, 177–179, 185
 convergencia fuerte, 280, 283
 convexidad, 477, 478
 convolución, 14, 73
 corrección de convexidad, 468, 477, 479
 corrección de la deriva, 134, 159, 162, 166, 190, 191, 536
 correlación, 216, 237, 244, 473
 estocástica, 290
 negativa, 206, 308, 437
 no nula, 439
 positiva, 206, 437
 correlación negativa, 541
 correlaciones
 HHW, 439
 Cox-Ingersoll-Ross
 modelo, 238
 Cox-Ingersoll-Ross, CIR, 238, 289, 332, 375, 441, 539
 crecimiento exponencial, 32, 273
 Credit Default Swap, CDS, 409, 504
 credit value adjustment, CVA, 387, 407, 410, 413, 453, 455
 cuadratura de Gauss, 106
 cubatura, 272
 cuenta bancaria, 60, 62, 147, 157, 426, 497
 cuenta de ahorros, 31
 cuenta de ahorros libre de riesgo, 62
 cuenta de resultados, 79
 cumulante, 6, 188, 189
 resumen, 190
 cumulantes, 5, 188, 201, 262
 cupón, 358
 cupón variable, 359
 curtosis, 167
 curva base, 505
 curva de descuento única, 502
 curva de rentabilidad, 363, 366, 370, 395, 400, 440, 497
 configuración, 396
 construcción, 395, 397
 factores vertebral, 398
 curva de rentabilidad inicial, 476
 curva única, 503, 504
 curvatura, 145
 parámetro, 252
 sonrisa, 120, 534
 vola. implícita, 249, 266
 CVA, 410, 416, 419, 455, 457
 aproximación, 416
 cargo, 416, 417
 cálculo, 439, 454, 455
 exposición, 453, 455
 fecha de monitorización, 454
 FX, 531
 porcentaje, 458
 unilateral, 418
 CVA bilateral, 419
 CVA bilateral, BCVA, 418
 cálculo de Itô, 36

- DAS, 265
 Debt Value Adjustment, DVA, 418
 debt value adjustment, DVA, 418
 decaimiento, 176, 186, 202, 240
 densidad, 111, 431
 decaimiento de la densidad, 180
 decaimiento exponencial, 160
 default, 358, 408
 default propio, 418
 default, contrapartida, 502
 definición de opción, 56
 delta de una opción, 64
 densidad bivariante, 9
 densidad condicionada, 13, 486
 densidad conjunta, 348
 densidad de Lévy, 159
 CGMY, 160
 derivada de Itô, 132, 367
 derivada de Radon-Nikodym, 213, 214,
 217, 301, 308, 378, 379, 404, 428, 472, 476
 derivado con riesgo, 415
 derivado europeo no estándar, 119
 derivados de tipo de interés, 388
 desdoblamiento de acciones, 166
 desviación típica, 34, 114, 137, 168,
 188, 273, 529, 544
 diferencial, 388, 505
 diferencias centrales, 311, 312
 diferencias finitas, 112, 311, 335, 352
 difusión afín, 225, 227
 clase, 205, 223, 225, 237, 246, 425
 con saltos, 228
 condiciones, 224
 modelo, 229
 proceso, 223, 227, 254
 difusión con saltos, 135
 Difusión con saltos de Merton, 144
 difusión desplazada, 493
 difusión desplazada
 con volatilidad estocástica, DD-SV, 491
 difusión desplazada, DD, 482, 488
 modelo, 232, 488–490
 opción europea, 489
 sonrisa y mueca, 490
 dinero efectivo, 59, 93, 153
 dinámica BCC libre de riesgo, 367
 dinámica con saltos, 145, 166
 dinámica de $P(t, T)$, 366
 dinámica de difusión con saltos, 287
 dinámica de Heston
 clase DA, 257
 dinámica del activo, 42, 327, 457
 dinámica del tipo Libor, 474
 dinámica discreta, 285
 dinámica FX forward, 522
 dinámica FX lognormal, 517
 dinámica libre de arbitraje, 466
 dinámica logarítmica, 225
 dinámica riesgo neutro, 159
 dinámica short-rate, 365
 dinámica VG exponencial, 157
 discretización basada en Taylor, 306
 discretización de Euler, 123, 280,
 283, 284, 289, 346, 351, 352, 449, 451
 saltos, 288
 distribución condicionada, 30, 49
 distribución conjunta, 8, 345, 416, 448
 distribución de MB en tiempo, 38
 distribución de Poisson, 130, 141, 288,
 334
 distribución desplazada, 277
 distribución implícita, 107
 distribución no central, 238, 239, 277,
 293–295, 333, 350, 441, 442, 452, 483,
 487
 distribución normal estándar, 275, 280
 dividendo, 41, 60, 64
 pago, 42, 64
 proporcional, 41
 doble exponencial no simétrica, 137
 Duffie-Pan-Singleton, 225, 229
 Dupire, 94
 ecuación de Fokker-Planck
 forward, 521
 ecuación de Kolmogorov, 109, 345
 ecuación de segundo grado, 295
 ecuación de Wald, 139
 ecuación en derivadas parciales,
 EDP, 60, 63, 66
 ecuación integro-diferencial, EID, 135,
 136, 138, 152
 EDEs correladas, 209
 EDEs multidimensionales, 283, 377
 EDOs, 224, 229, 376, 401
 FX, 540
 H1-HW, 446
 Heston, 257
 solución analítica, 225
 EDOs de Riccati, 224, 229, 234, 257,
 264, 376, 447, 463
 EDP de Fokker-Planck, 109, 110, 547
 EDP de Kolmogorov, 109, 345
 ejercicio anticipado, 59
 ejercicio inmediato, 455
 el método de Brent, 91, 125
 emisor de la opción, 167, 455
 enfoque de cobertura, 247
 enfoque de martingala
 Heston, 245
 saltos, 135
 SV, 246

- entorno multicurva, 503, 505
 error estándar, 273, 274
 error estándar de Monte Carlo, 273
 escenario del activo, 51
 espacio de Hilbert, 13
 espacio de probabilidad, 12, 13, 213, 223, 340
 espacio de probabilidad filtrado, 31, 485
 esperanza condicionada, 9, 12, 14, 48, 138, 154, 345, 347, 348, 456
 esperanzas iteradas, 13, 77
 esquema AES de Monte Carlo, 348
 esquema de discretización estándar, 289
 esquema de Euler, 280, 285
 - proceso MBG, 281
 - reflectante, 292
 - truncado, 292
 esquema de Euler estocástico, 280
 esquema de Euler reflectante, 292
 esquema de Euler truncado, 292, 293
 esquema de Euler-Maruyama, 280
 esquema de Milstein, 280, 282, 283
 esquema Exponencial Cuadrático, QE, 294, 297, 348, 452, 457
 estimación de Monte Carlo, 273
 estimación de parámetros, 47
 estimación por máxima verosimilitud, EMV, 48
 estrategia de cobertura, 81
 estrategia de replicación, 513
 Estructura 2D, 120
 estructura de correlación, 206, 517, 528, 530, 534
 estructura temporal, 474, 475, 500, 505, 533
 estructura temporal de volatilidad, 433
 estructura temporal discreta, 474
 estándar en la industria, 517
 exceso de curtosis, 93, 156, 167
 expansión asintótica, 119, 198, 345
 expansión de Fourier, 175, 348
 expansión de Fourier en cosenos, 175, 176, 179, 432, 528
 expansión de Itô-Taylor, 282
 Expansión de MacLaurin, 6
 expansión de Taylor, 31, 32, 108, 143, 210, 282, 312, 442, 488
 expansión en series de Taylor 2D, 33
 experimento 2D, 287
 explosión de momentos, 260
 Exponente de Lévy-Khinchine, 152
 exposición, 387, 394, 409–411, 417, 453
 - forma cerrada, 412
 - negativa, 419
 positiva, 409
 reducción, 419, 420
 simulación, 409
 exposición a nivel de contrapartida, 412
 exposición a nivel de contrato, 412
 exposición esperada (positiva), 410, 417
 exposición esperada en FX, 532
 exposición esperada, EE, 410–412, 453, 532
 exposición negativa, 419
 exposición neta, 412
 exposición positiva, 409
 exposición potencial futura, EPF, 410, 420, 453, 457
 expresión analítica, 194, 312
 esperanza, 442
 expresión cuadrática, 159
 extrapolación plana, 127

 factor de anualidad, 394
 factorización de Cholesky, 206, 211, 244, 449
 factorización única, 206
 FC forward
 - FX, 525
 FC FX forward, 525
 FC y FDP, 175
 FC y teorema de Feynman-Kac, 71, 73
 FDA, 2
 - acción, 101, 117
 - CIR, 238, 375, 441
 - conjunta, 8
 - esquema QE, 297
 - exposición, 410
 - LMM-CEV, 487
 - lognormal, 221
 - normal, 5, 78, 331, 433
 - saltos, 143
 FDA conjunta, 8
 FDA de la normal estándar, 433
 FDP
 - $S(t)$, 39
 - $X(t)$, 39
 - absorbente, 484
 - acción, 96, 110
 - Bessel cuadrado, 242, 486
 - bivariante, 9
 - CEV, 486
 - CGMY, 160
 - chi-cuadrado no central, 239, 333
 - colas pesadas, 157
 - condicionada, 13
 - definición, 2
 - derivación, 318
 - ejemplo, 5
 - evolución en tiempo, 39, 109

- gamma, 156
 Heston, 238, 246
 implícita, 74, 97
 Kou, 137
 Lévy, 151, 159
 lognormal, 178, 516
 LV, 124
 mercado implícito, 338
 Merton, 137
 multivariante, 431
 NIG, 165
 normal, 3, 74, 178
 recuperación, 178
 transición, 76, 337
 varianza, 239, 294, 441
 VG, 160
 FDP condicionada, 8
 FDP conjunta, 8, 348
 FDP normal estándar, 89, 178
 FDP y FC, 175
 fecha de ejercicio, 56
 fechas de monitorización discreta, 457
 fenómeno de Gibbs, 185, 186
 Feynman-Kac multidimensional, 211
 fijación de Libor, 388
 filtración, 10–12, 148, 157, 215, 329, 340, 434
 floor, 337, 399
 floor de tipo de interés, 399
 floorlet, 399, 400, 466, 480, 483, 495, 496
 flujo de caja, 360, 389, 391, 392, 395, 502, 505
 flujo de caja descontado, 393
 flujo de dinero efectivo, 61
 Fondo de inversión, 51, 52
 forma afín, 224, 229, 439, 537
 forma de la densidad, 197, 240
 forma de la implícita vol., 144
 forma de la sonrisa, 337
 forma de la vol. implícita, 248, 507
 forma no paramétrica, 338
 forward, 361
 frecuencia de cobertura, 82, 145
 frontera absorbente, 484, 486
 frontera reflectante, 242, 486–488
 función 2D, 123
 función base, 186, 321
 función característica 2D, 228
 función característica condicionada, 299
 función característica descontada, 72, 224, 230, 372, 427, 445
 función característica, FC, 3, 4
 BS forward, 330
 BSHW, 428
 CGMY, 161
 CIR, 375
 definición, 3
 descontada, 224, 329
 difusión afín, 224
 difusión con saltos, 145
 forward, 329, 330
 FX forward, 526
 FX-HHW1, 528
 gamma, 156
 Heston, 254
 Heston forward, 332
 HHW, 441, 445
 HW, 371, 400
 Lévy-Khinchine, 155
 lognormal, 178
 Merton, 141
 modelos, 190
 NIG, 165
 normal, 178
 proceso FX forward, 525
 Vašíček, 373
 función característica, FD
 Kou, 143
 función convexa, 58, 117
 función de anualidad, 394
 función de Bessel, 242
 función de Bessel modificada, 165, 239
 función de cambio de tiempo, 485
 función de densidad de probabilidad, FDP, 2
 función de densidad del activo, 73
 función de densidad implícita, 74, 87, 96, 97
 función de distribución acumulada, FDA, 2
 función de generación de cumulantes, 5–7
 Función de Green, 71, 73, 74, 174
 función delta de Dirac, 7, 73, 76, 102, 109, 342
 función escalonada aleatoria, 16
 función exponencial, 143, 296, 381
 función gamma, 156, 161, 239, 242, 441, 488
 función gamma incompleta
 inferior, 239, 488
 función generadora de momentos, FGM, 3, 4, 332, 333
 chi-cuadrado, 333
 CIR, 332
 función hipergeométrica
 confluente, 442
 función score, 309, 318
 fundamentos de Monte Carlo, 272
 FX foreign exchange, 512
 fórmula de Bayes, 301

fórmula de Euler, 176
 fórmula de la volatilidad asintótica, 122
 fórmula de Margrabe, 234
 fórmula de Tanaka-Meyer, 339
 fórmula del precio, 66

 gamma de una opción, 64
 gaussiana inversa, 165
 gaussiano inversa, 165
 gestión del riesgo, 52, 198, 199, 310, 321, 387, 396, 410, 411, 425, 439, 465, 496, 502
 grados de libertad parámetro, 350
 grandes saltos, 150
 griega delta, 64
 griega gamma, 64
 griega vega, 89
 griegas, 63, 69, 184
 griegas de Monte Carlo, 309
 diferencias finitas, 312
 en la trayectoria, 313
 razón de verosimilitud, 317
 griegas método COS, 184

 Heath-Jarrow-Morton, HJM, 360, 361, 466, 518
 histograma, 272, 277, 341
 Hull-White, HW, 428
 modelo, 370
 descomposición, 371, 373, 374
 dinámica, 368, 379
 EDE, 370
 función característica, 371
 modelo, 357, 369, 370, 400, 402, 405
 proceso de tipo de interés, 434
 proceso short-rate, 369, 371

 igualdad de martingala, 468
 igualdad de momentos, 43, 295
 igualdad en distribución, 43, 76, 243
 impacto del neteo, 419
 importance sampling, 308, 309
 in the money, ITM, 58, 88, 90, 91, 97, 118, 305
 incremento de Wiener, 32, 38, 237, 275
 incrementos estacionarios, 130, 148
 incrementos independientes, 11, 19, 20, 48, 148, 210
 incrementos independientes y estacionarios, 157
 independencia, 417
 independiente del modelo, 107
 inducción regresiva, 456
 Información implícita del activo, 52
 instante de default, 417

 integración de Monte Carlo, 274–276
 Integración estocástica, 14
 integración numérica, 174, 199, 279, 280, 444
 integral de Itô, 14, 15, 19, 275
 existencia, 19
 martingala, 20, 219
 propiedades, 25, 67, 213
 solución, 21, 36
 versión discreta, 17
 integral truncada, 176
 intensidad, 458
 intensidad del salto, 134, 160, 229
 interpolación cuadrática inversa, 91
 interpolación estándar, 122
 interpolación lineal, 122
 interpolación por splines, 122
 intervalo de integración, 176, 180, 184, 185, 262
 intervalo de integración infinito, 180
 intervalo de reinicio, 337
 interés, 31
 interés compuesto, 31
 introducción FX, 512
 Inversión de Fourier, 428
 inversión de Fourier, 193
 inversor solvente, 413
 isometría de Itô, 17–19, 25, 43
 Itô multidimensional, 211
 iteración de Newton, 397
 iteración de Newton-Raphson, 88, 249

 Kou
 modelo, 94

 lapso de tiempo, 224
 lema de Itô, 32, 35, 38, 62, 109, 135, 210, 246, 247, 339, 370, 376, 378, 428, 470, 495, 516
 Poisson, 132
 lema de Itô 2D, 212
 ley de la esperanza total, 13, 19, 77, 138, 141, 142, 402, 414, 416, 456, 532
 ley de las esperanzas iteradas, 13
 ley de los grandes números, 272, 274, 275
 LGD, loss given default, 416
 LGD, tasa de severidad, 455
 Libor sin garantía, 505
 libre de arbitraje, 153, 154, 379, 515
 condiciones, 115, 123, 488
 HJM, 378, 518
 Interpolación, 87
 interpolación, 115
 mercado, 468
 modelo, 119, 122

- modelo de precios de activos, 122
- restricción, 484
- short rate, 388
- liquidez, 97
- LMM
 - cambio de medida, 472
 - definición, 466
 - lognormal, 471
 - medida terminal, 474
- LMM con difusión desplazada, 465, 493
- LMM con volatilidad estocástica, 482
- LMM lognormal, 471
- LMM-CEV, 484
 - densidad, 486
 - FDA, 487
 - modelo, 489
 - vola. implícita, 484
- logaritmo de la función de verosimilitud, 49, 50
- lognormal, 330
- lognormal desplazada, 489
- límite asintótico, 33
- límite izquierdo, 280
- magnitud del salto, 130, 133, 136, 140, 144, 288
- maldición de la dimensión, 273
- marco de Lévy, 154
- marco de SIV, 338, 345
- marco HJM, 362, 365, 368, 375, 467, 469, 471
- mariposa spread, 74–76
- martingala, 10, 12
 - definición, 12
 - integral de Itô, 20
 - opción, 64
 - precio del activo, 44
- martingala local, 340, 342
- matriz de Cholesky, 217, 523
- matriz de covarianzas simétrica, 462
- matriz de correlación, 206, 217, 434, 519
- matriz de covarianzas, 439
- matriz simétrica y definida positiva, 206
- MBG logarítmicamente transformado, 43
- media aritmética, 26, 169
- media geométrica, 507
- media spot-Libor, 475, 477
- medible, 20, 48, 215
- medida T_i -forward, 468
- medida de Lévy, 149, 150, 160
 - VG, 164
- medida de la anualidad, 404
- medida de Lebesgue, 149, 150
- medida de martingala, 152
- Medida de martingala equivalente, 153, 154, 158, 247
- medida de martingala única, 153
- medida de probabilidad, 12, 44–46, 154, 213, 215
- medida de riesgo neutro, 46, 158
- medida del swap, 404, 405
- medida finita, 151
- medida forward, 466
- medida FX forward, 521
- medida no única, 154
- medida numerable, 150
- medida riesgo neutro local, 515, 519
- medida spot-Libor, 475
- medida terminal, 474
- mercado completo, 153, 158, 362
- mercado de CDS, 455
- mercado FX, 512
- mercado incompleto, 153
- mercado incompleto de Lévy, 153
- modelo 3/2, 42
- modelo alternativo, 87, 93, 94, 129, 155, 327, 328
- modelo BGM, 466
- modelo CGMYB, 161
- Modelo cross-currency, 511
- modelo cuadrático, 42
- modelo DD-SV LMM, 493, 533, 535, 543
- modelo de Bates, 235, 264, 265, 531
 - dinámica, 266
 - EDOs, 265
 - parámetros, 266
 - saltos, 266
- modelo de Black-Scholes, 60
- modelo de Heston, 77, 235, 238, 435
 - calibración, 250, 254
 - delta, 314
 - densidad condicionada, 246
 - dinámica, 248, 257
 - EDOs, 258
 - EDP, 245, 246
 - experimento, 262
 - forward start, 332
 - función característica, 254,
- 257, 258, 260, 334
- fórmula COS, 261
- kappa, 250
- Monte Carlo, 298
- mueca sonrisa, 248
- mundo real, 244
- método COS, 261
- opción call, 251
- parámetros, 248, 253
- parámetros a trozos, 263
- precio de la opción, 249
- proceso, 254
- riesgo neutro, 245

- simulación, 293, 304
- solución EDP, 261
- superficie de volatilidad, 254
- valoración forward, 332
- vola. implícita forward, 334
- volatilidad implícita, 251
- modelo de Heston aproximado, 448
- modelo de Heston doble, 508
- modelo de Heston FX, 517
- modelo de Heston Hull-White, 435, 438, 450
- modelo de Heston híbrido, 438
 - aproximación, 440
 - simulación, 448
- modelo de Kou, 136, 137, 143, 188, 190
 - densidad, 137
 - función característica, 143
- modelo de Lévy, 129
 - actividad infinita, 155
 - método COS, 191
 - procesos, 147
- modelo de mercado Libor, LMM, 377, 465, 466
- modelo de mercado SV Libor, 482
- modelo de Merton, 136, 137, 188, 190
 - función característica, 141
- modelo de precios alternativo, 236
- modelo de Samuelson, 30, 151, 155
- modelo de Schöbel-Zhu, 77, 237, 338, 435, 452, 517
- modelo de Vašiček, 371, 373
- modelo de volatilidad estocástica, 235
- modelo de volatilidad
- local estocástica, 337, 338
- modelo de volatilidad local, LV, 87
- modelo discreto, 313
- modelo en tiempo discreto, 41
- modelo FX, 511
 - avanzado, 517
 - híbrido, 517
 - medida forward, 521
 - multidivisa, 517
 - SV, 517
- modelo FX con volatilidad local, 517
- modelo FX multidivisa, 532
- modelo FX-HHW, 519
 - experimento, 527
- modelo FX-HHW forward, 522
- modelo FX-HHW1, 527
- modelo FX-HLMM, 532, 541
- modelo FX-LMM
 - experimento, 541
- modelo FX-LMM1, 541
- modelo FX-SABR, 545
- modelo H-SLV, 327
- modelo H1-HW, 445
- modelo Heston generalizado, 264
- modelo HJM, 377
- modelo Hull-White FX
 - proceso short-rate, 519
- modelo híbrido, 426
- modelo híbrido de Heston afín, 452, 453
- modelo Libor
 - Heston, 493
 - numerario, 474
- modelo Libor de tipo Heston, 493
- modelo libre de arbitraje, 363
- modelo LV no paramétrico, 109
- modelo LV paramétrico, 482
- modelo MBG, 65, 144, 161, 190
- modelo multidivisa, 532
- modelo NIG, 190
- modelo raíz-cuadrada, 493
- modelo SABR, 119
 - fórmula, 126
 - parametrización, 122
 - simulación, 306
 - volatilidad implícita, 119
- modelo Schöbel-Zhu Hull-White, 436, 453
- modelo short-rate, 368
 - afín, 372
- modelo SLV, 338
- modelo SLV de Heston, 327, 350
- modelo SV, 235
- modelo SV de Heston, 243
 - estándar, 495
 - proceso de la varianza, 238, 294
- modelo VS
 - introducción, 236
- modelos de activos, 42
- modelos de Lévy, 94
- modelos de saltos de actividad infinita, 94
- modelos de saltos de actividad finita, 94
- modelos de tipo de interés, 465
- momento finito, 162
- momentos, 5, 6
- momentos respecto al origen, 6
- Monte Carlo multinivel, 308
- Monte Carlo simulation
 - HHW, 451
- movimiento browniano
 - definición, 223
 - deriva, 145, 148
 - desplazado, 155
- movimiento browniano aritmético, MBA, 30, 48, 49, 83, 499
- movimiento browniano correlado, 206, 207, 245, 427, 430

- movimiento browniano dependiente, 524
 movimiento browniano geométrico 2D, 211, 227
 movimiento browniano geométrico, MBG, 30, 61
 movimiento browniano independiente, 161, 206, 207, 211, 222, 244, 254, 269, 286, 303, 350, 428, 429, 449, 492, 494, 523
 movimiento browniano no correlado, 481
 movimiento browniano transformado en tiempo, 242
 mueca efectiva, 494
 mueca y sonrisa, 481
 muestra condicionada, 298–300, 302, 306
 muestras bivariales, 286
 muestras multidimensionales, 286
 multi-D Itô's lemma, 210
 método bin
 Monte Carlo, 327
 método Breeden-Litzenberger, 96, 102, 107, 109, 119, 126, 127, 480, 509
 método COS, 178, 179
 2D, 348
 análisis del error, 184
 descuento, 431
 Heston, 261
 intervalo de integración, 188
 resultados, 193, 262, 542
 método de búsqueda de raíces combinado, 90, 91, 125
 método de la razón de verosimilitud, 311, 317, 319
 método de Longstaff-Schwartz, 321
 método de martingala, 64
 método de Monte Carlo, 199, 272
 exposición, 409
 por lotes, 345, 347
 método de perturbar y revaluar, 311
 método de Runge-Kutta, 225, 264
 método de sensibilidad en la trayectoria, 313
 método delta, 442, 488
 método Monte Carlo
 SLV, 346
 método no paramétrico, 346
 método por lotes, 348
 métodos de Fourier
 clase, 198
 múltiples clases de activos, 425

 neteo, 419
 nivel de reversión a la media, 371
 nominal en divisa extranjera, 513
 Normal Inverse Gaussian, 150
 proceso, 165

 notación O grande, 33, 34
 notación o pequeña, 33, 34
 núcleo de Girsanov, 380, 429, 524
 número finito de saltos, 149, 154
 número infinito de saltos, 149

 opción, 56
 opción americana, 59, 321
 Opción asiática, 169, 316
 opción bermuda, 59, 321, 455–459
 opción call, 56, 109
 BCC, 381
 cobertura, 81, 147
 delta, 313
 digital, 71
 dinámica, 342
 equivalencia, 413
 europea, 59, 339, 353
 experimentos, 193
 forward start, 328, 330
 FX, 516, 543
 integral, 111
 mercado, 112
 modelo CGMY, 195
 modelo DD, 490
 modelo de Heston, 262, 305
 modelo VG, 197
 Monte Carlo, 285
 método COS, 183
 payoff, 57, 63
 saltos, 139, 141
 solución, 68, 139
 spread, 74
 todo o nada, 71, 183, 194
 valoración, 145, 189, 489
 vola. implícita, 89
 opción de activo o nada, 71, 220
 opción de comportamiento, 328
 opción dependiente de la trayectoria, 77, 96, 236, 272, 273, 327, 328
 opción digital, 71, 84, 126, 182, 183, 220, 278, 286, 313, 324
 opción europea, 56
 opción europea sobre tipos de interés, 399
 opción exótica, 59, 77, 94, 328
 opción forward start, 328
 opción FX, 518, 528
 analítica, 517
 BS, 515
 valoración, 520
 opción FX vanilla, 542
 opción gap, 183
 opción put, 56–58
 payoff, 58

opción sobre índice, 198
 opción vanilla, 61, 109, 152, 180, 182, 328
 operaciones homogéneas, 412
 origen reflectante, 289
 OU, Ornstein-Uhlenbeck, 237, 370, 452, 508
 out-of-the-money, OTM, 58, 90, 91, 97, 99, 113, 118, 305 251
 over-the-counter, OTC, 59, 80, 392, 454
 overnight index swap rate, 505

pago bullet, 513
 pago de dividendo proporcional, 190
 pago de interés, 31
 pagos descontados, 415
 paridad put-call, 59, 84, 97, 100, 102, 195, 201, 268, 382
 particiones, lotes, 347
 parámetro de asimetría, 165
 parámetro de correlación, 249, 338, 350, 493
 parámetro de deriva, 30, 46, 62, 153, 156, 190
 parámetro de desplazamiento, 489
 parámetro de escala, 156, 165, 201
 parámetro de forma, 156
 parámetro de grados de libertad, 238, 241, 305, 441, 483
 parámetro de media a largo plazo, 237
 parámetro de no centralidad, 238, 294, 333, 441, 452, 483, 487
 parámetro de reversión
 a la media, 403, 440
 parámetro de simetría, 165
 parámetro de volatilidad
 de la varianza, 519
 parámetro de volatilidad
 de la volatilidad, 237, 249
 parámetro vol-vol, 237, 249
 parámetros a trozos, 263
 parámetros de cobertura, 64
 parámetros dependientes
 del tiempo, 493
 parámetros efectivos, 535
 patrón oro, 512
 payoff, 57

- forward start, 328

 payoff de la opción, 57
 payoff descontado, 413
 payoff esperado, 456
 payoff esperado descontado, 138, 246
 payoff vanilla, 96
 peor escenario de exposición, 410

perfil de exposición, 409, 410, 413
 periodo de comportamiento, 334
 perspectiva de exposición, 412
 período, 389, 390, 502
 período de acumulación, 467
 peso de la razón de verosimilitud, 318
 Plano complejo, 5, 177
 PnL, 79
 polinomio cuadrático, 260
 porcentaje de CVA, 458
 precio CGMYB, 162
 precio de opción libre de arbitraje, 52, 94, 110, 113, 254
 precio del activo, 10, 83
 precio del activo ajustado, 182
 precio descontado de la opción, 65
 precio FX forward, 521
 precio MBG, 42, 88
 precio relativo del bono, 476
 precio transformado, 68, 76, 190
 precios \mathbb{P} -medibles, 44
 precios \mathbb{Q} -medibles, 45
 precios históricos, 48, 50, 51
 precios históricos de la acción, 166
 probabilidad condicionada, 72
 probabilidad de default, 408, 417, 455
 probabilidad de supervivencia, 2, 455, 457, 504
 proceso afín de Markov, 223
 proceso CGMY, 160, 188

- experimentos, 194
- función característica, 161
- modelo, 190

 proceso CGMYB, 190

- función característica, 162

 proceso CIR, 244, 248
 proceso CIR integrado, 298–300
 proceso con reversión a la media, 237, 370, 372
 proceso de actividad finita, 149–152, 160
 proceso de actividad infinita, 149, 160, 170, 193, 197
 proceso de activo descontado, 45
 proceso de Bessel, 241, 300, 487
 proceso de Bessel cambiado
 en tiempo, 485
 proceso de Bessel cuadrado, 241, 299, 484, 485
 proceso de Bessel cuadrado
 estándar, 241
 proceso de difusión afín con saltos, DAS, 223, 229, 265

- clase, 228, 229
- modelo, 229

 proceso de Itô, 32, 35, 282, 283, 340

- proceso de Jacobi acotado, 290, 291
 proceso de Lévy, 147, 150, 189
 actividad finita, 151
 actividad infinita, 155
 cálculo, 194
 definición, 148
 función característica, 190
 hiperbólico, 165
 proceso de Lévy exponencial, 147, 151, 155, 188, 190, 191, 193
 proceso de Markov, 30, 241, 485
 proceso de Poisson, 130, 131, 133, 229, 247, 265, 288
 lema de Itô, 132, 135
 proceso de Poisson compensado, 131
 proceso de Poisson compuesto, 141
 proceso de precio del activo, 129
 proceso de precios de Lévy, 154
 proceso de precios descontado, 46
 proceso de Schöbel-Zhu, 237
 proceso de Wiener, 11, 12, 14, 30, 34, 67, 156, 274, 435
 correlado, 212
 proceso del activo descontado, 412
 proceso detenido, 341
 proceso discreto, 93, 291
 proceso elemental, 15, 16, 19
 proceso estocástico, 10
 proceso FX, 516
 proceso gamma, 155, 159
 proceso gamma escalado, 159
 proceso multidimensional, 205, 209, 231
 proceso OU, 372
 proceso raíz-cuadrada
 con reversión a la media, 238
 proceso SABR condicionado, 119
 proceso short-rate, 362
 FX, 517
 proceso subordinado, 156
 proceso transformado
 logarítmicamente, 69, 139, 227, 260
 proceso Variance Gamma VG, 155
 ajuste de deriva, 158
 experimentos, 194
 precio del activo, 157
 proceso VG
 función característica, 157
 procesos correlados, 205
 procesos de Wiener correlados, 435
 procesos MBG, 30, 72, 340
 producto derivado híbrido, 436
 productos FX, 513
 programación dinámica regresiva, 456
 propiedad de Markov, 31
 propiedad de martingala, 10, 12, 25, 44, 65, 132, 341
 SV, 246
 propiedades de estacionariedad, 151
 proyección de Markov, 345, 517
 proyección sobre los momentos, 539
 puente browniano, 306
 punto básico, 359, 388, 394, 395, 438, 497
 puntos vertebral, 396
 razón de verosimilitud, 309
 raíces del polinomio, 260
 rebalanceo discreto, 475
 recuperación, 415
 recuperación de la densidad, 173, 178, 179, 200, 201, 461
 redactor de la opción, 56–58, 60, 61, 63, 153
 reducción de la exposición, 419
 regla de cuadratura, 184, 272
 reloj, 243
 renta variable, 359
 renta variable, FRN, 388, 391
 rentabilidad, 395
 esperada, 497
 rentabilidad por dividendo, 41, 64
 replicación, 153, 158
 representación de Lévy-Khinchine, 164
 Resultado COS de FX, 529, 543
 Resultado Monte Carlo de FX, 529, 543
 retorno del activo, 54, 93
 retorno logarítmico, 93
 retraso de pago, 467
 retraso de reseteo, 467
 riesgo de contraparte, CCR, 408, 455
 riesgo de contrapartida, 416
 riesgo de default, 408, 503
 riesgo por salto, 154
 rol único, 240
 saltos de Merton, 141
 saltos de Poisson, 132
 saltos simétricos, 137, 145
 Stochastic Collocation Monte Carlo, SCMC 306
 secuencia de localización, 342
 semiespacio semiinfinito, 63
 semilla aleatoria, 353
 semimartingala, 340
 sensibilidad en la trayectoria, 311
 serie de coseno, 186
 serie de Fourier
 convergencia, 185
 serie de Fourier completa, 186
 serie de Fourier de cosenos, 174
 serie de Taylor, 546

- serie infinita, 136
 Series de Fourier, 175
 short-rate, 361, 365
 - CIR, 375
 - HW, 379
 - medida forward, 380
 - modelo híbrido, 427
 - multifactor, 439
 short-rate afín, 381
 short-rate descontado, 364
 short-rate instantáneo, 361, 365
 sigma-álgebra, 10, 12, 13, 213, 246
 simulación basada en Taylor, 291
 Simulación de Monte Carlo
 - híbrido, 448
 simulación de Monte Carlo, 271
 - bivariante, 286
 - ejercicio anticipado, 321
 - Heston, 298
 - HW, 497
 - importance sampling, 309
 - IV, 124
 - mejoras, 308
 - reducción de la varianza, 308
 - saltos, 287
 - SLV Heston, 353
 simulación del modelo SLV, 348
 simulación exacta, 282, 293, 297
 simulación Monte Carlo
 - FX-HHW, 529
 Simulación Quasi-Exacta, AES, 303, 305, 306, 323, 348, 353
 simétrica y semidefinida positiva, 207
 sistema 2D, 227
 sistema 2D de EDEs, 237
 sistema de EDEs correlado, 206
 solución analítica, 136, 194, 264, 276, 446
 - ecuación de Black-Scholes, 68, 286
 solución fuerte única, 486
 solución fundamental, 73
 solución no explosiva, 241, 482
 solución no única, 242, 482
 solución semianalítica, 198
 - ecuación de Black-Scholes, 55
 solución única, 241, 482, 485
 solución única de EDE, 241
 solvencia de la contraparte, 408
 sonrisa FX IR, 532
 spread de calendario, 117
 spread mariposa
 - arbitraje, 117, 121, 127
 Stochastic Grid Bundling Method, SGBM, 321
 Stratonovich, 17
- cálculo, 18
 suavidad, 277, 279
 subestimación del riesgo, 417
 submartingala, 45, 47, 486
 suma discreta, 53
 suma infinita, 38, 153, 200
 suma telescopica, 22, 394
 superficie de volatilidad, 254
 SV-LMM, 482, 495
 swap, 392
 - definición, 392
 swap de tipos de interés, 392
 swap de varianza
 - Heston, 253
 - payoff, 103
 - valoración, 105, 253
 - VIX, 107
 swap FX, 513, 531
 swap IR variable-variable, 502
 swap pagador, 392, 393
 swap receptor, 392, 393
 swaps de varianza, 103
 swaption, 380, 403–405, 440, 466
 - vencimiento, 534
 - volatilidad, 491
 swaption europea, 407
 swaption europeo, 403, 405, 421
 swaption pagador, 404
 swaption receptor, 404
 SWIFT, 199
 Símbolos de Pochhammer, 442
- tabla de Itô, 104, 210
 tamaño de la perturbación, 312
 tasa de decaimiento, 160, 185, 240
 tasa de recuperación, 416, 419, 462
 teorema central del límite, 272, 275
 teorema de Bayes, 213
 teorema de Feynman-Kac, 63, 66–68, 75, 84, 138, 256
 - multidimensional, 211
 teorema de Girsanov, 213, 215, 217, 379, 473, 477
 teorema de Lévy-Khinchine, 161
 teorema de Nyquist, 199
 teorema de representación
 de la martingala, 21, 213
 teorema fundamental, 359
 teoría de la función de Green, 487
 teoría de la medida, 48
 terminología EDP, 73
 terminología financiera, 358, 399
 tests de estrés, 51
 tiempo aleatorio, 169
 tiempo de espera, 340
 tiempo de espera óptimo, 455

tipo cap, 399
 tipo de interés forward, 465
 tipo de interés implícito, 458
 tipo de interés libre de riesgo, 45, 46, 248
 tipo de interés negativo, 496
 tipo de riesgo, 504
 tipo fijo, 390, 424, 505, 531
 tipo forward, 361, 377, 395, 467, 513, 521

- Libor, 389
- volatilidad, 469

 tipo forward implícito, 362, 396
 tipo forward instantáneo, 357, 361, 363, 364, 374, 469, 470
 tipo forward instantáneo HJM, 366
 tipo FX, 512
 tipo FX forward, 513, 521, 525, 528, 531
 tipo FX futuro, 514
 tipo FX variable, 512, 531
 tipo Libor, 388, 400, 466

- dinámica, 468, 473
- marco HJM, 467, 469
- CEV, 483

 DD, 488
 definición, 388
 extranjero, 534, 537
 forward, 389
 local, 534, 537
 opción europea, 489
 variable, 390, 391
 varianza, 534, 535
 tipo Libor congelado, 541
 Tipo Libor forward, 389
 tipo Libor forward, 389, 475
 tipo Libor forward discreto, 466
 tipo Libor GBM, 483
 tipo Libor lognormal, 471, 472
 tipo swap, 394, 395, 405, 462, 491
 tipo variable, 399, 407
 tipos de interés correlados, 517, 519
 tipos Libor, FX, 533
 todo o nada, 71, 183
 transacción back-to-back, 78
 transformación de medida, 428
 transformación temporal, 241, 243
 transformada de coseno discreta, 186
 Transformada de Fourier

- densidad, 5

 transformada de Fourier, 175, 199, 431

- existencia, 176

 transformada de Fourier discreta,
 TFD, 186, 202
 transformada de Fourier inversa, 7
 Transformada de Fourier-Stieltjes, 4
 transformada rápida de Fourier, FFT, 199
 trayectoria del activo, 10, 54, 124, 155, 271, 272, 288, 323
 trayectoria discreta del activo, 454
 trayectoria Monte Carlo, 314
 trayectoria Monte Carlo del activo, 273
 trayectorias ajustadas, 292
 trayectorias de Monte Carlo perturbadas, 313
 trayectorias discretas, 46, 131, 277
 tripleta de Lévy, 152, 160

- CGMYB, 161
- NIG, 165

 truncamiento del intervalo de integración, 185
 técnica de congelación, 493
 técnica de Fourier, 73, 448
 término de corrección quanto, 520
 término de deriva del MBG, 41
 término de raíz cuadrada no afín, 526
 término exponencial, 333
 título de renta fija, 359
 unicidad, 17
 valor de continuación, 456
 valor del caplet, 403
 valor esperado, 2, 30, 272

- cero, 134
- descontado, 138
- martingala, 65

 valor esperado descontado, 77, 138
 valor justo único, 88
 valor temporal del dinero, 31
 valoración Black-76, 489
 valoración de opciones basada en Fourier, 199, 527
 valoración del caplet, 402, 498
 valoración del derivado, 60, 74, 272
 valoración del derivado financiero, 60, 74, 272
 variable aleatoria condicionada, 49
 Variable aleatoria de Poisson, 130
 variable aleatoria discreta, 138
 variable aleatoria simétrica, 144
 variable de control, 308
 variable normal estándar, 23
 variables antitéticas, 308
 variación finita, 150, 151, 161
 variación infinita, 150
 varianza del activo, 235, 238
 varianza esperada, 146
 varianza lognormal, 448

vega de una opción, 89
velocidad de reversión a la media, 237,
238, 244, 249, 375, 427, 435, 518, 519, 534
vencimiento, 56, 395
vencimiento de la opción, 56
venta al descubierto, 61, 62, 64
vola implícita mueca
 FX, 517
vola. local de Dupire, 112, 344,
351, 354
volatilidad de Black, 466
volatilidad del activo, 459
volatilidad dependiente del tiempo, 42
volatilidad descontada, 364
volatilidad efectiva, 494
volatilidad estocástica, 454
volatilidad HJM, 369, 494
volatilidad implicada
 sonrisa, 92
volatilidad implícita, 88, 336, 483
 ATM, 433
 BSHW, 433
 caplet, 403
 CEV, 484
 concepto, 88
 curva, 249
 definición, 88
 ejemplo, 89
 estructura, 426
 estructura de vencimientos, 95, 433
 forward, 331, 334, 335
 FX, 543
 Heston, 249
 IR estocástico, 433
 mueca, 92, 96, 248, 483, 484
 mueca DD, 490
 pendiente, 145
 saltos, 144
 sonrisa, 96, 167, 248, 484
 sonrisa DD, 490
 sonrisa FX, 532
 superficie, 92, 480
volatilidad implícita de Black, 529
volatilidad implícita de Black-Scholes, 88
volatilidad implícita del caplet, 403, 466
volatilidad implícita forward, 331, 332,
334, 335
volatilidad implícita FX, 543
volatilidad implícita plana, 433
volatilidad implícita trasladada, 508
Volatilidad Local Estocástica de Heston, 327
volatilidad plana, 336, 354

wavelet, 199
wavelet de Shannon, 199
wrong way risk, WWR, 417

