INTERPOLATION ET EXTRAPOLATION EN ESPACES L^p

par

Borjan Geshkovski, Charlotte Rodriguez & Margherita Perna

Résumé. —
Le but de notre travail est d'étudier des résultats d'interpolation et d'extrapolation pour des opérateurs définis sur les espaces L^p. Si f une fonction de $L^p \cap L^q$, il n'est pas difficile de démontrer que $f \in L^r$, pour tout $p < r < q$. Une propriété analogue vaut pour un opérateur linéaire (même sous-linéaire suffit parfois). On commence par un premièr résultat, le théorème de Marcinkiewicz, pour lequel on introduira la notion d'espace L^p-faible et dont on donne une preuve par une approche d'analyse réelle. Ce théorème, à partir de deux estimations "faibles" de la norme de Tf (par exemple dans L^{p_0}-faible et L^{p_1}-faible), nous permet de donner une estimation "forte" de $\|Tf\|_{L^p}$ pour tout $p_0 < p < p_1$. Dans ce cas la sous-linéarité de l'opérateur suffit. On utilisera une approche d'analyse complexe pour démontrer un deuxième résultat d'interpolation, le théorème de Riesz-Thorin. Cette fois ci on part de deux estimations "fortes" contrairement à ce qu'on fait pour Marcinkiewicz. Dans la dernière partie de notre rapport nous traiterons un résultat d'extrapolation, c'est-à-dire qu'on suppose T linéaire et continu sur L^q et on essaie de montrer la continuité sur L^p pour $1 < p < q$. Un outil fondamental pour faire cela est la décomposition de Calderón-Zygmund - une décomposition fine d'une fonction intégrable en deux parties (la "bonne" et la "mauvaise"), analysées séparément.

Nous remercions notre tuteur Bernhard Haak, pour son aide, sa patience, ses conseils et ses explications élaborées et accessibles.

Table des matières

PARTIE I
RAPPELS SUR LES ESPACES L^p

1. Espaces L^p : quelques propriétés

Notation 1.1. — On dénote par le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, où X est un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur X et μ une mesure sur $\mathcal{A}$. Nous travaillerons souvent dans le cadre de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Convention 1.2. — Nous supposons que la mesure μ est positive (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$), et qu'elle est σ-finie, c'est-à-dire qu'on peut recouvrir X par une famille dénombrable de sous-ensembles mesurables, tous de mesure finie.(1) Cette hypothèse est nécessaire pour les théorèmes de Fubini et de Tonelli (entre autres), dont on se servira fréquemment pour le calcul intégral.

Convention 1.3. — Lorsqu'il n'est pas précisé, on prend $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour définir des objets à valeurs dans un corps commutatif $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Définition 1.4. — *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables, telles que* (2)

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty. \tag{1}$$

Quant au cas $p = \infty$, on définit $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables, pour lesquelles il existe $0 < \alpha < \infty$ tel que

$$\mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}) = 0.$$

On écrit plus généralement $L^p(X, \mu)$, ou $L^p(X)$ (quand on travaille avec une seule mesure) ou encore L^p afin de simplifier la notation, mais on sous-entend que le cadre d'espace est celui de l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

---

(1) Autrement dit, s'il existe une suite (E_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\mu(E_n) < \infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est un exemple de mesure σ-finie: on peut considérer les intervalles $E_n := [n, n+1[\ \ \forall n \in \mathbb{Z}$. On observe que $\mu(E_n) = 1$, et leur union sur $n \in \mathbb{Z}$ donne bien $\mathbb{R}$.

(2) $|f|$ désigne ici la fonction $x \mapsto |f(x)|$, qui à x associe le module ou la valeur absolue de $f(x)$.

Définition 1.5. — *Pour $f \in L^p(X,\mu)$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit la norme L^p de f par*

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$ par

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \inf\{\alpha > 0; \quad \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}) = 0\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 : \quad |f(x)| \leq \alpha \ \mu - p.p \quad x \in X\}. \end{aligned}$$

La quantité $\|f\|_{L^\infty}$ est appelée *supremum essentiel* de f, et est notée ess.sup $|f|$. L'espace $L^\infty(X,\mu)$ est donc l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables et bornées μ-presque partout.

Une observation immédiate est que L^p est un espace vectoriel. En effet, considérons f et g deux fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'opération interne $+$ est définie par: $\forall x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, et l'opération externe . par: $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$. L'espace des fonctions de $X \to \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, qui contient L^p. La fonction nulle appartient à L^p. De plus, comme $\|.\|_{L^p}$ est une norme, les opérations interne et externe sont stables. Ainsi, L^p est un sous-espace vectoriel des fonctions de $X \to \mathbb{C}$, et donc un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Par conséquent, les espaces L^p sont des espaces vectoriels normés.

Remarque 1.6. — L'assertion $\|f\|_{L^p} = 0$ n'implique pas que $f = 0$ mais seulement $f = 0$ μ-presque partout. Pour rectifier cela, on introduit la relation d'équivalence $\sim$: $f \sim g \iff f = g$ μ-presque partout sur X. L'espace L^p est donc plus précisement l'espace des classes d'équivalences de fonctions qui vérifient (1). Par abus de langage, on dit qu'un élément de L^p est une fonction plutôt qu'une classe d'équivalence de fonctions. Armés de cette remarque et de l'inégalité de Minkowski (Proposition 2.5) on vérifie que $\|.\|_{L^p}$ est bien une norme.

Notation 1.7. — Afin de simplifier davantage la notation, on écrit simplement *p.p.* au lieu de *μ-p.p.* ou *μ presque partout* (c'est-à-dire pour tout x sauf sur une partie de mesure μ nulle).

Définition 1.8. — *Pour $1 \leq p < \infty$, on définit $L^p_{loc}(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables, de module localement p-intégrable, c'est-à-dire des fonctions f telles que pour tout compact $\mathcal{K} \subset X$*

$$\int_{\mathcal{K}} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

2. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Notation 2.1. — Si deux exposants $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ satisfont $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on dit que p et q sont *conjugués* (on trouve aussi *duaux* dans certaines littératures). Nous utiliserons la convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

Ces coefficients nous seront utiles lors des démonstrations de quelques inégalités importantes, notamment l'inégalité d'Hölder. Afin de la démontrer, il nous faut le lemme suivant.

Lemme 2.2. — $\forall a, b > 0, \quad ab = \inf_{t>0}\left(\frac{t^p}{p}a^p + \frac{t^{-q}}{q}b^q\right)$.

Démonstration. — Soit, pour $t > 0$,

$$g(t) = \frac{t^p}{p}a^p + \frac{t^{-q}}{q}b^q.$$

Nous avons les informations suivantes sur la dérivée de g

$$g'(t) = t^{p-1}a^p - t^{-q-1}b^q \quad \text{et} \quad g'(\tilde{t}) = 0 \text{ si et seulement si } \tilde{t} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\tilde{t}$ est le seul point annulant g'. Alors, comme g est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et comme $g(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0$ et lorsque $t \to +\infty$, le point $\tilde{t}$ est le minimum global de g sur $]0, +\infty[$. En calculant on obtient $g(\tilde{t}) = ab$. □

Proposition 2.3 **(Inégalité de Hölder)**. — *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$ *deux exposants conjugués. Alors pour* $f \in L^p(X, \mu)$ *et* $g \in L^q(X, \mu)$, $fg \in L^1(X, \mu)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Démonstration. — Pour $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^1} &= \int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \\
&\overset{2.2}{=} \int_X \inf_{t>0}\left(\frac{t^p}{p}|f(x)|^p + \frac{t^{-q}}{q}|g(x)|^q\right)d\mu(x) \\
&\leq \inf_{t>0}\left(\frac{t^p}{p}\int_X |f(x)|^p + \frac{t^{-q}}{q}\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right) \\
&\overset{2.2}{=} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. — Pour $f, g \in L^2(X, \mu)$, on déduit *l'inégalité de Cauchy Schwarz*.

***Proposition 2.5* (Inegalité de Minkowski).** — *Soient* $f, g \in L^p(X, \mu)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $f + g \in L^p(X, \mu)$ *et*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Démonstration. — Traitons d'abord le cas $p \neq \infty$. On peut supposer $\|f+g\|_{L^p}$ non nul, car dans le cas contraire l'inégalité est immédiatement vérifiée. On a

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \\
&= \int_X |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu(x) \\
&\leq \int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu(x) + \int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu(x) \\
&= \int_X |f(x)||(f(x) + g(x))^{p-1}| d\mu(x) + \int_X |g(x)||(f(x) + g(x))^{p-1}| d\mu(x).
\end{aligned}$$

Si on prend q le coefficient conjugué de p, on peut appliquer l'inégalité de Hölder et ainsi

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p}^p &\leq \|f\|_{L^p} \|(f + g)^{p-1}\|_{L^q} + \|g\|_{L^p} \|(f + g)^{p-1}\|_{L^q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|(f + g)^{p-1}\|_{L^q}
\end{aligned} \tag{2}$$

Puisque p et q sont conjugués, $p = q(p - 1)$ et donc

$$\begin{aligned}
\|(f + g)^{p-1}\|_{L^q} &= \Big(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_X |f + g|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f + g\|_{L^p}^{p/q} \\
&= \|f + g\|_{L^p}^{p-1}.
\end{aligned}$$

En divisant par $\|f+g\|_{L^p}^{p-1}$ (qu'on a supposé non nul) dans (2) cela nous donne

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Regardons maintenant le cas $p = \infty$. Par définition de la norme, p.p. $x \in X$, $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ Similairement, p.p. $x \in X$, $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}$. Ainsi,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \quad \text{p.p. } x \in X.$$

Cette inégalité étant vraie p.p. $x \in X$ et $\|f + g\|_{L^\infty}$ étant le plus petit des majorants p.p. de $|f(x) + g(x)|$, il en suit que

$$\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}. \qquad \square$$

3. Complétude des espaces L^p

Notation 3.1. — On note par χ_E la fonction caractéristique de $E \subseteq X$, valant 1 sur E et 0 sur $X \setminus E$.

Lemme 3.2. — *Si $f \in L^1(X, \mu)$, alors $f(x)$ est finie pour presque tout $x \in X$.*

On propose deux preuves pour ce résultat.

Preuve 1. — Il s'agit de montrer que l'ensemble $A = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ est de mesure μ nulle. Supposons que $\mu(A) > 0$ [(3)]. Puisque $A \subset X$, nous avons $|f| \geq |f|\chi_A$ et donc

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) \geq \int_A |f(x)| d\mu(x) = \infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est intégrable. □

Preuve 2. — Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\{x \in X : |f(x)| = \infty\} \subset \{x \in X : |f(x)| > n\}$. Mais aussi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : |f(x)| > n\}) &= \int_{\{|f|>n\}} \frac{n}{n} d\mu(x) \\ &\leq \int_{\{|f|>n\}} \frac{|f(x)|}{n} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{n} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ayant pris n quelconque, en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat souhaité. □

***Théorème 3.3* (Riesz-Fischer)**. — *L'espace $L^p(X, \mu)$ est complet pour la norme $\|.\|_{L^p}$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Démonstration. — Regardons dans un premier temps le cas $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \ \forall n, m \geq N_\varepsilon, \ \|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Un critère suffisant pour montrer qu'une suite de Cauchy dans un espace métrique converge est de montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente. Or L^p est normé et donc métrique, on peut ainsi appliquer ce critère. Nous allons construire une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n) qui vérifie

$$\forall k \geq 1, \quad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}. \tag{3}$$

[(3)] On rappelle que l'on ne travaille qu'avec des mesures positives.

On procède par récurrence. Puisque la suite (f_n) est de Cauchy, on peut choisir $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_1$, on ait $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$. Ensuite, on choisit $\tilde{n}_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq \tilde{n}_2$, on a $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$. On a le droit de faire cela puisque (f_n) est de Cauchy. On prend $n_2 > \max(\tilde{n}_2, n_1)$, ainsi pour tout $n, m \geq n_2$, $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}$. On suppose maintenant qu'on a choisi $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$ tels que pour tout $n, m \geq n_k$, $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$. En particulier, cela veut dire que $\|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^l}$, pour tout $1 \leq l \leq k-1$. On choisit $\tilde{n}_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq \tilde{n}_{k+1}$, $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. De la même facon qu'avant, on prend $n_{k+1} > \max(\tilde{n}_{k+1}, n_k)$. Par conséquent, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$. On a donc construit une suite (n_k) strictement croissante qui vérifie (3).

Montrons maintenant que (f_{n_k}) converge dans $L^p(X)$. Posons pour tout $k \geq 1$

$$g_k = \sum_{l=1}^{k} |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}|.$$

On peut remarquer que pour tout $k \geq 1$, g_k est positive, croissante, et

$$\|g_k\|_{L^p} \overset{2.5}{\leq} \sum_{l=1}^{k} \|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\|_{L^p} \leq \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^l \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, $|g_k|^p \in L^1(X)$. On peut par conséquent appliquer le théorème de convergence monotone (de Beppo Levi) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_X \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^p d\mu(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_X |g_k(x)|^p d\mu(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{L^p}^p \leq 1. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^p$ est intégrable, et d'après le Lemme 3.2 (modulo la racine p-ième), $\lim_{k\to\infty} g_k(x) < \infty$ p.p. $x \in X$. Notons g cette limite. Nous avons $g \in L^p(X)$ et

$$g = \sum_{l=1}^{\infty} |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}|.$$

À partir de ce résultat on déduit que (f_{n_k}) converge presque partout vers une fonction f (qu'on explicitera a posteriori). En effet, on observe que

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{k-1} (f_{n_{l+1}} - f_{n_l}).$$

La série $f_{n_k}(x)$ est une série de réels, et converge absolument p.p. $x \in X$, car

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k-1} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| + |f_{n_1}(x)| = g(x) + |f_{n_1}(x)| < \infty, \text{ p.p. } x \in X.$$

Comme $\mathbb{C}$ est complet, $f_{n_k}(x)$ converge[(4)]. On construit alors la fonction f de la façon suivante : pour x appartenant à l'ensemble de mesure μ nulle sur lequel la série $f_{n_k}(x)$ diverge, on pose $f(x) = 3$. Et pour x appartenant au reste de l'ensemble X, sur lequel la série $f_{n_k}(x)$ converge, on pose $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. Il reste à montrer que (f_{n_k}) converge vers f en norme L^p et que $f \in L^p(X)$. (f_n) est de Cauchy par hypothèse, donc (f_{n_k}) l'est aussi. On a alors par définition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \ :\ \forall n_l, n_m \geq \tilde{N}_\varepsilon,\ \|f_{n_l} - f_{n_m}\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_k}\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{l\to\infty} \int_X |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) \\
&= \liminf_{l\to\infty} \|f_{n_l} - f_{n_k}\|_{L^p}^p \\
&\leq \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

lorsque $n_k > \tilde{N}_\varepsilon$. Ainsi f_{n_k} converge vers f dans $L^p(X)$. De plus, comme $f - f_{n_k} \in L^p(X)$ et $f_{n_k} \in L^p$, on tire que $f \in L^p$. On a donc démontré que la suite de Cauchy (f_n) admet une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers f dans L^p ce qui veut dire que (f_n) aussi converge vers f dans L^p.

Traitons maintenant le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^∞, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* :\ \forall n, m \geq N_\varepsilon,\ \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

On pose, pour $n, m, k \geq 1$

$$\begin{aligned}
A_n &= \{x \in X :\ |f_n(x)| > \|f_n\|_{L^\infty}\}, \\
B_{m,k} &= \{x \in X :\ |f_m(x) - f_k(x)| > \|f_m - f_k\|_{L^\infty}\}.
\end{aligned}$$

(4) C'est une condition nécessaire et suffisante: un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Il en suit que $\mu(A_n) = 0$ car $(f_n) \in L^\infty$ et $\mu(B_{n,m}) = 0$ car (f_n) est une suite de Cauchy de L^∞. Cela entraîne que l'ensemble

$$E = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \cup \Big(\bigcup_{m,k=1}^{\infty} B_{m,k} \Big)$$

est aussi de mesure μ nulle. En effet, par sous-additivité de la mesure μ,

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{m,k=1}^{\infty} \mu(B_{m,k}) = 0,$$

et de plus, μ est positive. Ainsi, pour tout $n, m, k \geq 1$, (f_n) est bornée pour tout $x \in X \setminus E$ et $|f_m(x) - f_k(x)| \leq \|f_m - f_k\|_{L^\infty}$ pour tout $x \in X \setminus E$. Comme (f_n) est une suite de Cauchy de L^∞, pour $x \in X \setminus E$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \varepsilon \quad , \forall n, m \geq N_\varepsilon, \tag{4}$$

c'est à dire pour tout $x \in X \setminus E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, $(f_n(x))$ converge et donc il existe $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in X \setminus E$. Ayant trouvé un candidat pour la limite sur $X \setminus E$, on pose, par exemple, $f(x) = 3$ pour tout x appartenant à E, et on cherche à vérifier que ce f est la limite de (f_n) pour la norme dans $L^\infty(X)$ et que $f \in L^\infty(X)$. Puisque sur $X \setminus E$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X\setminus E} |f_n(x) - f(x)|$, il en suit que

$$\mu\Big(\big\{ x \in X \setminus E : \ |f_n(x) - f(x)| > \sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \ \big\} \Big) = 0. \tag{5}$$

De plus, E étant de mesure nulle nous donne

$$\mu\Big(\big\{ x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| > \sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \ \big\} \Big) = 0. \tag{6}$$

On obtient finalement la convergence en norme L^∞ sur X tout entier, puisque

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^\infty} &\overset{\text{déf.}}{=} \inf \big\{ \alpha > 0; \quad \mu(\{x \in X; \ |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0 \big\} \\ &\overset{(6)}{\leq} \sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

et le dernier supremum converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Pour l'assertion $f \in L^\infty$, il suffit de voir que f est bornée sur $X \setminus E$ par l'inégalité triangulaire et que E est de mesure nulle, donc f est bornée p.p. $x \in X$, i.e. $f \in L^\infty(X)$. $\square$

Remarque 3.4. — Cette preuve nous "permet" de démontrer un autre résultat important qui concerne la convergence dans L^p: *de toute suite qui converge dans L^p on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout (i.e. ponctuellement sauf sur une partie de mesure μ-nulle).* La preuve suit du fait qu'une suite convergente est de Cauchy - on peut ainsi raisonner de la même façon que dans la preuve qui précède.

4. Dualité des espaces L^p

Définition 4.1. — *On définit le dual de $L^p(X)$ par l'ensemble des formes linéaires continues de $L^p(X)$ à valeurs dans $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et on le note $(L^p)'$. Ainsi $(L^p(X))' = \mathcal{L}(L^p(X), \mathbb{K})$.*

Dans les paragraphes ultérieurs, nous aurons besoin d'écrire la norme L^p d'une autre façon que celle donnée par la définition 1.5. Et cette nouvelle écriture s'appuie sur le fait qu'il existe une isométrie entre les espaces L^p et $(L^q)'$, où p et q sont des exposants conjugués. En effet, nous pouvons énoncer la proposition suivante

Proposition 4.2. — *Lorsque $1 \leq p, q < \infty$ sont des exposants conjugués l'application*

$$\begin{aligned} \Gamma \colon L^p &\to (L^q)' \\ g &\mapsto \gamma_g \end{aligned}$$

est une isométrie (linéaire), où

$$\begin{aligned} \gamma_g \colon L^q &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

Remarque 4.3. — La motivation derrière cette proposition est qu'elle permet d'écrire la norme L^p d'une fonction $g \in L^p$ de la façon suivante

$$\|g\|_{L^p} \overset{4.2}{=} \|\gamma_g\|_{(L^q)'} = \sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \leq 1}} |\gamma_g(f)| = \sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \leq 1}} \Big| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \Big|,$$

où la deuxième égalité vient par définition de la norme d'une application linéaire de L^q dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Cette relation sera notamment utile dans la démonstration du théorème de Riesz-Thorin (théorème 9.9).

Par ailleurs, pour toute partie D dense dans L^q,

$$\sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \leq 1}} \Big| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \Big| = \sup_{\substack{f \in D \\ \|f\|_{L^q} \leq 1}} \Big| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \Big|.$$

Ceci n'est pas démontré dans ce texte.

Démonstration. — Le but de la démonstration sera d'obtenir

$$\|g\|_{L^p} = \sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \le 1}} |\gamma_g(f)|. \tag{7}$$

Dans un premier temps, l'inégalité de Hölder (Proposition 2.3) donne

$$|\gamma_g(f)| = \Big| \int_X f(x) g(x) d\mu(x) \Big| \le \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^p},$$

ce qui implique que

$$\sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \le 1}} |\gamma_g(f)| \le \sup_{\substack{f \in L^q \\ \|f\|_{L^q} \le 1}} \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^p} \le \|g\|_{L^p}.$$

Dans un second temps, pour obtenir l'égalité (7), il suffit de trouver une fonction de L^q, que nous noterons h, telle que

$$\begin{gathered} \|h\|_{L^q} \le 1, \\ \text{et } |\gamma_g(h)| = \|g\|_{L^p}. \end{gathered}$$

Si $\|g\|_{L^p} = 0$, alors l'égalité (7) et directement vérifiée. On considère donc, dans la suite de la démonstration, que $\|g\|_{L^p} > 0$.

Construisons la fonction h suivante:

$$h(x) = \begin{cases} \|g\|_{L^p}^{1-p} \frac{|g(x)|^p}{g(x)} & \text{si} \quad g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad g(x) = 0 \end{cases}$$

Remarquons (pour la suite) que lorsque $p = 1$, on a

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|}{g(x)} & \text{si} \quad g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad g(x) = 0 \end{cases}$$

Maintenant nous allons montrer que la norme L^q de h vaut 1, séparémment pour les cas $p = 1$ (et donc $q = \infty$) et $1 < p < \infty$. Si $p = 1$, on a

$$\|h\|_{L^\infty} \overset{\text{déf.}}{=} \inf\{c > 0 : |h(x)| \le c, \text{ p.p. } x \in X\}$$

Or, lorsque $g(x) \neq 0$, $|h(x)| = |g(x)|/|g(x)| = 1$. Et lorsque $g(x) = 0$, $|h(x)| = 0$. Donc, $c = 1$ est le mininum (et donc l'infinimum) de l'ensemble

$$\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |h(x)| > c\}) = 0\},$$

ce qui donne $\|h\|_{L^\infty} = 1$.

Lorsque $1 < p < \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^q}^q = &\int_{\{g\neq 0\}} \|g\|_{L^p}^{(1-p)q} \frac{|g(x)|^{pq}}{|g(x)|^q} d\mu(x)\\ =&\|g\|_{L^p}^{(1-p)q} \int_{\{g\neq 0\}} |g(x)|^p d\mu(x)\\ =&\|g\|_{L^p}^{q-pq} \|g\|_{L^p}^p\\ =&1\end{aligned}$$

Dans ce dernier calcul les changements de puissances auxquelles sont élévés les termes se font en utilisant la conjugaison de p et q, qui donne notamment la relation $pq = p + q$.

Et dans les deux cas, c'est-à-dire pour $1 \leq p < \infty$, on a

$$\begin{aligned}\gamma_g(h) = &\int_X h(x)g(x)d\mu(x)\\ =&\int_{\{g\neq 0\}} \|g\|_{L^p}^{1-p} \frac{|g(x)|^p}{g(x)} g(x)d\mu(x)\\ =&\|g\|_{L^p}^{1-p} \int_{\{g\neq 0\}} |g(x)|^p d\mu(x)\\ =&\|g\|_{L^p}^{1-p} \|g\|_{L^p}^p\\ =&\|g\|_{L^p}\ ,\end{aligned}$$

ce qui clos la démontration. □

Remarque 4.4. — On peut également noter que Γ étant une isométrie linéaire (par linéarité de l'intégrale), elle est alors injective. Cela vient du fait que si on prend deux éléments γ_f et γ_g appartenant à $(L^q)'$ tels que $\gamma_f = \gamma_g$, alors

$$0 = \|\gamma_f - \gamma_g\|_{(L^q)'} \overset{\text{lin.}}{=} \|\gamma_{f-g}\|_{(L^q)'} \overset{4.2}{=} \|f - g\|_{L^p}\ ,$$

c'est-à-dire $f = g$.

PARTIE II
LES ESPACES $L^{p,\infty}$

5. La fonction de répartition d_f

Définition 5.1. — *De nouveau, soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour f une fonction mesurable sur X, on définit sa fonction de répartition*[(5)] $d_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *par*

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}).$$

Remarque 5.2. — La fonction de répartition d_f est décroissante.

Proposition 5.3. — *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour tout $\alpha, \beta > 0$, nous avons*

1. *Si $|g| \leq |f|$ μ-p.p. alors $d_g \leq d_f$;*
2. *$d_{cf}(\alpha) = d_f(\alpha/|c|)$, $\forall c \in \mathbb{C}^*$;*
3. *$d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;*
4. *$d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.*

Démonstration. — Pour 1, supposons que $|g| \leq |f|$ μ-p.p., et pour $\alpha > 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\{x \in X : \ |g(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} \\
\Longrightarrow\ &\mu(\{x \in X : \ |g(x)| > \alpha\}) \leq \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}) \\
\Longrightarrow\ &d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha).
\end{aligned}$$

Pour 2, soit $c \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
d_{cf}(\alpha) &= \mu(\{x \in X : \ |cf(x)| > \alpha\}) \\
&= \mu\Big(\Big\{x \in X : \ |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\Big\}\Big) \\
&= d_f\Big(\frac{\alpha}{|c|}\Big).
\end{aligned}$$

Pour 3, on observe dans un premier temps que

$$\begin{aligned}
\{x \in X : \ |f(x)| \leq \alpha\} &\cap \{x \in X : \ |g(x)| \leq \beta\} \\
&\subseteq \{x \in X : \ |f(x) + g(x)| \leq \alpha + \beta\}.
\end{aligned}$$

[(5)] En théorie des probabilités, une fonction mesurable f est appelée variable aléatoire, et lorsque $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité, qu'on note $\mathbb{P}$. On définit dans ce cas la fonction de répartition F de f, sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$, par $F : \alpha \mapsto \mathbb{P}(\{x \in X;\ |f(x)| \leq \alpha\})$. La définition de fonction de répartition ci-dessus ne correspond pas à celle des probabilités. Il s'agit plutôt de $1-$ fonction de répartition "probabiliste", lorsque μ est une mesure de probabilité.

En effet, soit $x \in \{x \in X : \ |f(x)| \leq \alpha\} \cap \{x \in X : \ |g(x)| \leq \beta\}$. On a alors $|f(x)| \leq \alpha$ et $|g(x)| \leq \beta$, et donc

$$|f(x)| \leq \alpha - |g(x)| + |g(x)| \iff |f(x)| + |g(x)| \leq \alpha + \beta,$$

et par l'inégalité triangulaire, x est tel que $|f(x) + g(x)| \leq \alpha + \beta$. En passant au complémentaire, on obtient

$$\{x \in X : \ |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\} \subseteq \\ \{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : \ |g(x)| > \beta\},$$

et en appliquant la mesure μ, on a le résultat souhaité. Pour 4, on raisonne de façon similaire. Soit $x \in \{x \in X : \ |f(x)| \leq \alpha\} \cap \{x \in X : \ |g(x)| \leq \beta\}$. On a donc $|f(x)| \leq \alpha$ et $|g(x)| \leq \beta$, et puisque β est supposé non nul,

$$|f(x)|\frac{\beta}{\beta} \leq \alpha \implies |f(x)||g(x)| \leq \alpha\beta.$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\{x \in X : \ |f(x)g(x)| > \alpha\beta\} \subseteq \\ \{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : \ |g(x)| > \beta\},$$

et en appliquant la mesure μ, on conclut. □

Proposition 5.4. — *Soit $f \in L^p(X, \mu)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Démonstration. — Soit $f \in L^p(X, \mu)$. On observe tout d'abord que

$$\int_X \chi_{\{|f|>\alpha\}}(x) d\mu(x) = \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}) = d_f(\alpha).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{|f|>\alpha\}}(x) d\mu(x) d\alpha \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_X \Big(\int_0^\infty p\alpha^{p-1} \chi_{\{|f|>\alpha\}}(x) d\alpha \Big) d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha \Big) d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

□

Ce résultat nous donne une évaluation exacte de la norme L^p d'une fonction en utilisant seulement sa fonction de répartition.

***Lemme 5.5* (Inégalité de Tchebychev).** — *Soit* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *une fonction mesurable. Alors pour tout* $\alpha > 0$ *et* $1 \leq p < \infty$*,*

$$\mu(\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x).$$

Démonstration. — Fixons $\alpha > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\}) &= \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}} \alpha^p d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x).\end{aligned}$$ □

Remarque 5.6. — Grâce à la Définition 5.1, on peut aussi écrire

$$d_f(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x).$$

On remarque de plus que lorsque $p = 1$, il s'agit de *l'inégalité de Markov.*

Par ailleurs, sous les mêmes conditions on a

$$\mu(\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\} \cap E) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}\cap E} |f(x)|^p d\mu(x),$$

où E est un sous-ensemble quelconque de X. La preuve est identique :

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X :\ |f(x)| > \alpha\} \cap E) &= \int_{\{|f|>\alpha\}\cap E} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}\cap E} \alpha^p d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f|>\alpha\}\cap E} |f(x)|^p d\mu(x).\end{aligned}$$

6. Espaces $L^{p,\infty}$: quelques propriétés

Définition 6.1. — *Soient* $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle quasi-norme sur* E *une application* $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+$ *qui satisfait les hypothèses suivantes:*

1. $\forall x \in E,\ \ \mathcal{N}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$*;* *(séparation)*
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \ \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$*;* *(absolue homogénéité)*
3. $\exists c \geq 1\ \forall (x, y) \in E \times E, \quad \mathcal{N}(x + y) \leq c(\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y))$.

Pour $c = 1$ *on obtient l'inégalité triangulaire et* $\mathcal{N}$ *définit ainsi une norme.*

Définition 6.2. — *Pour $1 \leq p < \infty$ on définit $L^{p,\infty}(X,\mu)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables telles que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\left\{C > 0 : \quad d_f(\alpha) < \frac{C^p}{\alpha^p} \quad \forall \alpha > 0\right\} < \infty. \tag{8}$$

On appelle cet espace $L^p(X,\mu)$-faible. On définit $L^{p,\infty}(X,\mu) := L^\infty(X,\mu)$ quand $p = \infty$.

Deux fonctions dans $L^{p,\infty}(X,\mu)$ sont égales si elles sont égales μ-p.p. On peut aussi vérifier que $\|.\|_{L^{p,\infty}}$ définit une quasi-norme sur $L^{p,\infty}$ - en effet, $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-presque partout, et pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} &= \inf\left\{C > 0 : \quad d_{\lambda f}(\alpha) < \frac{C^p}{\alpha^p} \quad \forall \alpha > 0\right\}\\ &\overset{5.3\ 2.}{=} \inf\left\{C > 0 : \quad d_f\Big(\frac{\alpha}{|\lambda|}\Big) < \frac{C^p}{\alpha^p} \quad \forall \alpha > 0\right\}.\end{aligned}$$

On pose $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{|\lambda|}$, ainsi

$$\|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\left\{C > 0 : \quad d_f(\tilde{\alpha}) < \frac{C^p}{\tilde{\alpha}^p|\lambda|^p} \quad \forall \tilde{\alpha} > 0\right\}.$$

Puis on pose $\tilde{C} = \frac{C}{|\lambda|}$, ainsi

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} &= \inf\left\{|\lambda|\tilde{C} > 0 : \quad d_f(\tilde{\alpha}) < \frac{\tilde{C}^p}{\tilde{\alpha}^p} \quad \forall \tilde{\alpha} > 0\right\}\\ &= |\lambda| \inf\left\{\tilde{C} > 0 : \quad d_f(\tilde{\alpha}) < \frac{\tilde{C}^p}{\tilde{\alpha}^p} \quad \forall \tilde{\alpha} > 0\right\}\\ &= |\lambda| \|f\|_{L^{p,\infty}}\end{aligned}$$

et on déduit l'absolue homogénéité. Enfin, nous allons vérifier l'inegalité triangulaire "affaiblie" (Définiton 6.1 3.), à l'aide d'un petit lemme, qui nous permet de caractériser $\|.\|_{L^{p,\infty}}$ par un supremum.

Lemme 6.3. — *Soit $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$. Alors*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\gamma > 0}\Big(\gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Démonstration. — En exploitant la définition précédente,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \inf\left\{C > 0 : \quad d_f(\alpha) < \frac{C^p}{\alpha^p} \quad \forall \alpha > 0\right\}\\ &= \inf\left\{C > 0 : \quad \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} < C \quad \forall \alpha > 0\right\}\\ &\overset{\text{déf}}{=} \sup_{\alpha > 0}\Big(\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\Big).\end{aligned}$$

□

Armés de ce lemme, on peut finir de prouver que $\|.\|_{L^{p,\infty}}$ est une quasi-norme. Pour $f, g \in L^{p,\infty}(X,\mu)$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0}\Big(\alpha d_{f+g}(\alpha)^{\frac{1}{p}}\Big) \\
&\overset{5.3\ 3.}{\leq} \sup_{\alpha>0}\Big(\alpha\Big(d_f\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)+d_g\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \\
&\overset{13.2}{\leq} \sup_{\alpha>0}\Big(\alpha d_f\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{1}{p}}+\alpha d_g\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \\
&\leq 2(\|f\|_{L^{p,\infty}}+\|g\|_{L^{p,\infty}}).
\end{aligned}$$

Théorème 6.4. — *Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(X,\mu) \subset L^{p,\infty}(X,\mu)$, c'est-à-dire si $f \in L^p(X,\mu)$, alors $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$ et*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha > 0$. Puisque $p > 0$, la fonction $\alpha \mapsto \alpha^p$ est strictement croissante. Ainsi, d'après l'inégalité de Tchebychev (5.5), nous avons

$$\alpha^p d_f(\alpha) \leq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x). \tag{9}$$

D'autre part,

$$\int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}^p.$$

Ayant pris α quelconque, on peut passer au supremum dans (9) et grâce au Lemme 6.3, on conclut la preuve. □

PARTIE III
INTERPOLATION EN ESPACES L^p

Un enjeu important en analyse réelle est de donner des estimations de différentes quantités, telles que les normes de fonctions et/ou d'opérateurs (c'est-à-dire les majorer ou les minorer). Un outil de base pour obtenir des estimations de ce type est l'interpolation - en ayant une ou deux majorations (ou plus), par exemple $A_0 < A_1$ et $B_0 < B_1$, on peut en déduire un estimé du type $A_\theta \leq B_\theta$ (ou bien $A_\theta \leq C_\theta B_\theta$ où C_θ est une constante) pour tout paramètre $0 < \theta < 1$. On s'intéresse principalement aux fonctions définies sur des espaces L^p (et/ou $L^{p,\infty}$). Quant à l'interpolation des opérateurs, on étudie des opérateurs linéaires (ou sous-linéaires), en ayant a priori deux estimations sur deux espaces L^p-faibles, on interpole pour déduire une estimation L^p-forte. On propose deux méthodes d'interpolation pour ces opérateurs: une "méthode réelle" qui consiste à découper la fonction sous-jacente à une hauteur donnée (une technique que nous allons voir plus en détail via la décomposition de Calderón-Zygmund, dans la Partie IV), et une "méthode complexe", qui comme le nom l'indique, fait intervenir certaines propriétés analytiques des fonctions sous-jacentes.

7. Interpolation de fonctions

Proposition 7.1. — *Soient $1 \leq p < q \leq \infty$ et $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$. Alors pour tout $p \leq r \leq q$, $f \in L^r(X,\mu)$, pour $0 \leq \theta \leq 1$*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}. \tag{10}$$

Nous proposons deux preuves de ce résultat.

Preuve 1. — On pose

$$p' = \frac{p}{r\theta}, \qquad q' = \frac{q}{(1-\theta)r}.$$

On observe que p' et q' sont des exposants conjugués. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r}^r = \int_X |f(x)|^r d\mu(x) &= \int_X |f(x)|^{r\theta} |f(x)|^{r(1-\theta)} d\mu(x) \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X |f(x)|^{r\theta p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_X |f(x)|^{r(1-\theta)q'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int_X |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{L^p}^{r\theta} \|f\|_{L^q}^{r(1-\theta)}.$$

On déduit l'inégalité (10). □

Preuve 2. — Soit $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$ et soit $p \leq r \leq q$. On remarque que lorsque $|f| > 1$, $|f|^r \leq |f|^q$ et lorsque $|f| \leq 1$, $|f|^r \leq |f|^p$. Nous avons via une décomposition dite *"layer cake"*

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^r d\mu(x) &= \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x)|^r d\mu(x) + \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^r d\mu(x) \\ &\leq \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|>1\}} |f(x)|^q d\mu(x) \\ &\leq \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \int_X |f(x)|^q d\mu(x).\end{aligned}$$ □

C'est un résultat assez intéressant, puisqu'il nous permet de dire que pour p et q bien choisis, $L^p \cap L^q \subset L^r$. Le résultat peut être raffiné et généralisé sur les plus gros espaces $L^{p,\infty}$ via la proposition suivante.

Proposition 7.2. — *Soit $f \in L^{p,\infty}(X,\mu) \cap L^{q,\infty}(X,\mu)$, avec $1 \leq p < q \leq \infty$. Alors $f \in L^r(X,\mu)$, pour tout r tel que $p < r < q$ avec l'inégalité pour $0 \leq \theta \leq 1$*

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\theta} \|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}. \tag{11}$$

Démonstration. — Regardons d'abord le cas $q < \infty$. Comme $f \in L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty}$, par le Lemme (6.3) nous avons

$$d_f(\alpha) \leq \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right), \ \forall \alpha > 0. \tag{12}$$

Posons

$$B = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

On cherche à estimer la norme L^r de f, donc

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^r}^r &\overset{5.4}{=} r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \\ &\overset{(12)}{\leq} r\int_0^\infty \alpha^{r-1} \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right) d\alpha \\ &= r\int_0^B \alpha^{r-1-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r\int_B^\infty \alpha^{r-1-q} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha \qquad (13)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r\|f\|^p_{L^{p,\infty}} \int_0^B \alpha^{r-1-p} d\alpha + r\|f\|^q_{L^{q,\infty}} \int_B^\infty \alpha^{r-1-q} d\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|^q_{L^{q,\infty}} B^{r-q} \\
&= \Big(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\Big)(\|f\|^p_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^q_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}}.
\end{aligned}
$$

Les intégrales sur la ligne (13) et sur la ligne suivante sont convergentes puisque $r-p>0$ et $r-q<0$. Donc on a obtenu

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^r} &\le \Big(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\Big)^{\frac{1}{r}}(\|f\|^{p/r}_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^{q/r}_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}} \\
&= \Big(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\Big)^{\frac{1}{r}}\|f\|^{\theta}_{L^{p,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}},
\end{aligned}
$$

où $\theta = \frac{p(q-r)}{r(q-p)}$ vérifie bien $0<\theta<1$. Pour le cas $q=\infty$, on considère f dans $L^{p,\infty}(X)\cap L^\infty(X)$. Il en suit que

$$
d_f(\alpha) \le \frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p} \quad \text{et} \quad d_f(\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha > \|f\|_{L^\infty}. \tag{14}
$$

Grâce à cette remarque, on évalue de nouveau la norme L^r de f et donc

$$
\begin{aligned}
\|f\|^r_{L^r} &\overset{5.4}{=} r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \\
&\overset{(14)}{\le} r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} d\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^{r-p}_{L^\infty}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}
$$

□

On observe qu'en prenant $\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r} = 1$, on déduit le résultat proposé dans (7.1). Cette proposition est parfois appelée interpolation réelle "bébé", puisque l'estimation obtenue est similaire à celle obtenue par le théorème de Marcinkiewicz (Théorème 8.3).

Définition 7.3. — *Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient $(A_n)_{n=1\ldots N}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints de $\mathcal{A}$, tous de mesure finie, et $(a_n)_{n=1\ldots N}$ une suite de nombres complexes non nuls. Une fonction simple est une fonction f définie par*

$$
\begin{aligned}
f\colon X &\to \mathbb{C} \\
x &\mapsto \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x).
\end{aligned}
$$

Une fonction simple est en particulier une fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs.

Remarque 7.4. — Une telle fonction est d'intégrale égale à

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x)d\mu(x) = \sum_{n=1}^N a_n \int_X \chi_{A_n}(x)d\mu(x) = \sum_{n=1}^N a_n \mu(A_n).$$

De plus, elle appartient à tous les L^p, $1 \leq p \leq \infty$. En effet, elle est p-intégrable, pour tout $1 \leq p < \infty$, puisque

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|^p d\mu(x) &= \int_X \Big| \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x) \Big|^p d\mu(x) \\
&\overset{\text{Chasles}}{=} \int_{\bigcup_{k=1}^N A_k} \Big| \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x) \Big|^p d\mu(x) \\
&\quad + \underbrace{\int_{X\setminus \bigcup_{k=1}^N A_k} \Big| \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x) \Big|^p d\mu(x)}_{=0} \\
&\overset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=1}^N \Big(\int_{A_k} \Big| \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x) \Big|^p d\mu(x) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{A_k} |a_k|^p d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^N |a_k|^p \int_{A_k} d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^N |a_k|^p \mu(A_k).
\end{aligned}$$

Et elle appartient à L^∞ car pour tout $x \in X$,

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \chi_{A_n}(x) \leq N \max_{n=1\ldots N} |a_n|.$$

Donc $\|f\|_{L^\infty} \leq N \max_{n=1\ldots N} |a_n| < \infty$.

Notation 7.5. — Afin de simplifier la notation, on désigne par $\mathcal{M}(X,\mu)$ (ou bien $\mathcal{M}(X,\mathcal{A},\mu)$) l'ensemble des fonctions mesurables sur X, à valeurs complexes, et par $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des fonctions simples sur X, à valeurs complexes.

8. Interpolation d'opérateurs: méthode réelle

Définition 8.1. — *Soit $T : \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathcal{M}_{<\infty}(Y, \mathcal{B}, \nu)$*[6] *un opérateur. T est appelé linéaire si pour tout $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g). \tag{15}$$

T est appelé sous-linéaire si sous les mêmes hypothèses, T vérifie

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{et} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|. \tag{16}$$

T est appelé quasi-linéaire si sous les mêmes hypothèses, T vérifie

$$|T(f+g)| \leq c(|T(f)| + |T(g)|) \quad \text{et} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \tag{17}$$

pour une certaine constante $c > 0$. On remarque que la sous-linéarité est un cas particulier de la quasi-linéarité où $c = 1$.

Notation 8.2. — On dénote par $L^p + L^q$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(X, \mu)$ défini par

$$L^p + L^q = \{g + h : g \in L^p, h \in L^q\}.$$

***Théorème 8.3* (Marcinkiewicz).** — *Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés, et $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Soit T un opérateur sous-linéaire défini sur l'espace $L^{p_0} + L^{p_1}$ à valeurs dans $\mathcal{M}(Y, \nu)$. Supposons qu'il existe deux constantes $A_0, A_1 \geq 0$ telles que*

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)} \quad \text{pour tout } f \in L^{p_0}(X) \tag{18}$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)} \quad \text{pour tout } f \in L^{p_1}(X). \tag{19}$$

Alors pour tout $p_0 < p < p_1$, et pour tout $f \in L^p(X)$,

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq A \|f\|_{L^p(X)},$$

où

$$A = 2\Big(\frac{p}{p - p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\Big)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}}.$$

Remarque 8.4. — En posant

$$\theta = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}},$$

on peut reformuler le théorème de façon à le rendre plus "lisible". Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus on a que pour tout $p_0 < p < p_1$, et pour tout $f \in L^p(X)$,

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq A \|f\|_{L^p(X)},$$

[6] T est à valeurs dans l'espace des fonctions qui sont mesurables, finies presque partout et à valeurs complexes sur l'espace mesuré $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

avec

$$A = 2\Big(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\Big)^{\frac{1}{p}} A_0^{\theta} A_1^{1-\theta},$$

où $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ et $0 \le \theta \le 1$.

Démonstration. — Soient $f \in L^p(X,\mu)$ et $\alpha > 0$. On commence en considérant le cas $p_1 < \infty$. En découpant $|f|$ à une certaine hauteur $\delta > 0$ que l'on déterminera plus tard, on peut réécrire f comme la somme d'une fonction $f_0^\alpha \in L^{p_0}$ (qui sera la partie non-bornée) et d'une fonction $f_1^\alpha \in L^{p_1}$ (qui sera la partie bornée) définies de la manière suivante

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > \delta\alpha \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \le \delta\alpha \end{cases}$$

et

$$f_1^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(x)| > \delta\alpha \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \le \delta\alpha. \end{cases}$$

On peut vérifier dans un premier temps que f_0^α est bien une fonction de L^{p_0}. Puisque $p_0 < p$, nous avons que $|f(x)|^{p_0-p} < (\delta\alpha)^{p_0-p}$ quand $|f(x)| > \delta\alpha$ et ainsi

$$\begin{aligned} \|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} &= \int_X |f_0^\alpha(x)|^{p_0} d\mu(x) \\ &= \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0-p}|f(x)|^p d\mu(x) \\ &\le (\delta\alpha)^{p_0-p}\|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

De la même façon on vérifie que f_1^α est une fonction de L^{p_1}. Puisque $p < p_1$, nous avons que $|f(x)|^{p_1-p} \le (\delta\alpha)^{p_1-p}$ quand $|f(x)| \le \delta\alpha$ et ainsi

$$\begin{aligned} \|f_1^\alpha\|_{L^{p_1}}^{p_1} &= \int_{\{|f|\le\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1-p}|f(x)|^p d\mu(x) \\ &\le (\delta\alpha)^{p_1-p}\|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

T étant sous-linéaire, on a de plus que $|T(f)| \le |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|$, ce qui entraîne

(20)

$$\{x :\ |T(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x :\ |T(f_0^\alpha)(x)| > \alpha/2\} \cup \{x :\ |T(f_1^\alpha)(x)| > \alpha/2\}.$$

En effet, si $x \in X$ est tel que $|T(f_0^\alpha)(x)| \le \frac{\alpha}{2}$ et $|T(f_1^\alpha)(x)| \le \frac{\alpha}{2}$, alors

$$|T(f_0^\alpha)(x)| + |T(f_1^\alpha)(x)| \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \implies |T(f)(x)| \le \alpha$$

par la sous-additivité de T et donc

$$\{x :\ |T(f_0^\alpha)(x)| \le \alpha/2\} \cap \{x :\ |T(f_1^\alpha)(x)| \le \alpha/2\} \subset \{x :\ |T(f)(x)| \le \alpha\}.$$

L'assertion (20) est justifiée en passant au complémentaire ci-dessus. En "mesurant" par ν sur les deux côtés dans (20) on déduit que

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2).$$

Par ailleurs, on observe que

$$\begin{aligned}
d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) &\overset{6.3}{\leq} \frac{1}{(\alpha/2)^{p_0}} \|T(f_0^\alpha)\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0} \\
&\overset{(18)}{\leq} \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} \\
&= \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x),
\end{aligned}$$

et similairement que

$$d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2) \leq \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x).$$

En combinant les trois résultats précédents, on déduit que

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x).$$

On peut finalement donner une estimation de la norme L^p de $T(f)$,

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p}^p &\overset{5.4}{=} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha \\
&\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) \Big) d\alpha \\
&\quad + p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) \Big) d\alpha \\
&= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_X \chi_{\{|f|>\delta\alpha\}}(x) |f(x)|^{p_0} d\mu(x) \Big) d\alpha \\
&\quad + p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_X \chi_{\{|f|\leq\delta\alpha\}}(x) |f(x)|^{p_1} d\mu(x) \Big) d\alpha \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} p(2A_0)^{p_0} \int_X \int_0^\infty |f(x)|^{p_0} \chi_{\{|f|>\delta\alpha\}}(x) \alpha^{p-1-p_0} d\alpha d\mu(x) \\
&\quad + p(2A_1)^{p_1} \int_X \int_0^\infty |f(x)|^{p_1} \chi_{\{|f|\leq\delta\alpha\}}(x) \alpha^{p-1-p_1} d\alpha d\mu(x) \\
&= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \Big(\int_0^{\frac{|f(x)|}{\delta}} \alpha^{p-1-p_0} d\alpha \Big) d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ p(2A_1)^{p_1} \int_X |f(x)|^{p_1} \Big(\int_{\frac{|f(x)|}{\delta}}^{\infty} \alpha^{p-1-p_1} d\alpha \Big) d\mu(x) \\
&= \frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} \int_X |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} d\mu(x) \\
&\quad + \frac{p(2A_1)^{p_1}}{p_1-p} \frac{1}{\delta^{p-p_1}} \int_X |f(x)|^{p_1} |f(x)|^{p-p_1} d\mu(x) \\
&= \Big(\frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0} \frac{1}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p(2A_1)^{p_1}}{p_1-p} \frac{1}{\delta^{p-p_1}} \Big) \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}
$$

Les intégrales en α convergent puisque $p_0 < p < p_1$ et donc $p - p_0 - 1 > -1$ et $p - p_1 - 1 < -1$. Pour obtenir la constante A, on prend

$$
\delta = \frac{(2A_0)^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}}{(2A_1)^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}}.
$$

On remarque que δ est bien strictement positif, et la dernière constante obtenue dans les majorations qui précèdent est la puissance p-ième de A. On a donc démontré le résultat pour $p_1 < \infty$.

Regardons maintenant le cas $p_1 = \infty$. On peut de nouveau décomposer f en une somme de deux fonctions $f_0^\alpha \in L^{p_0}$ et $f_1^\alpha \in L^\infty$, définies de la même façon qu'avant:

$$
f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > \gamma\alpha \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq \gamma\alpha \end{cases}
$$

et

$$
f_1^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(x)| > \gamma\alpha \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq \gamma\alpha, \end{cases}
$$

pour un $\gamma > 0$ que l'on déterminera plus tard. Puisque $f_1^\alpha \in L^\infty(X, \mu)$ par construction, on a

$$
\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \overset{(19)}{\leq} A_1 \|f_1^\alpha\|_{L^\infty} \leq A_1 \gamma\alpha.
$$

En choisissant $\gamma = 1/(2A_1)$, on a $\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \leq \alpha/2$. Donc par définition de la norme L^∞, on déduit que $\nu(\{x \in X : |T(f_1^\alpha)(x)| > \alpha/2\}) = 0$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
d_{T(f)}(\alpha) &= d_{|T(f)|}(\alpha) \overset{5.3\ 1.}{\leq} d_{|T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|}(\alpha) \\
&= d_{|T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|}(\alpha/2 + \alpha/2) \\
&\overset{5.3\ 3.}{\leq} d_{|T(f_0^\alpha)|}(\alpha/2) + d_{|T(f_1^\alpha)|}(\alpha/2) \\
&= d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + \underbrace{d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2)}_{=0} \\
&= d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2).
\end{aligned} \tag{21}
$$

De plus, par définition, $\forall c > 0, \|T(f_0^\alpha)\|_{L^{p_0,\infty}} \geq c d_{T(f_0^\alpha)}(c)^{\frac{1}{p_0}}$. Cela est donc vrai en particulier pour $c = \alpha/2$ et on obtient

$$\frac{\alpha}{2} d_{T(f_0^\alpha)}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{1}{p_0}} \leq \|T(f_0^\alpha)\|_{L^{p_0,\infty}} \overset{(18)}{\leq} A_0 \|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}},$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) &\leq \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} \\ &= \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_X |f_0^\alpha(x)|^{p_0} d\mu(x) \\ &= \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{\{|f| > \frac{\alpha}{2A_1}\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x). \end{aligned}$$

On peut finalement donner une estimation de la norme L^p de $T(f)$,

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{L^p}^p &\overset{5.4}{=} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha \\ &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) d\alpha \\ &\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{\{|f| > \frac{\alpha}{2A_1}\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) \Big) d\alpha \\ &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \Big(\frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_X \chi_{\{|f| > \frac{\alpha}{2A_1}\}}(x) |f(x)|^{p_0} d\mu(x) \Big) d\alpha \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} p(2A_0)^{p_0} \int_X \int_0^\infty \alpha^{p-1} \frac{1}{\alpha^{p_0}} \chi_{\{|f| > \frac{\alpha}{2A_1}\}}(x) |f(x)|^{p_0} d\alpha d\mu(x) \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \Big(\int_0^{2A_1|f(x)|} \alpha^{p-1-p_0} d\alpha \Big) d\mu(x) \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{(2A_1|f(x)|)^{p-p_0}}{p-p_0} d\mu(x) \\ &= 2^p \frac{p}{p-p_0} A_0^{p_0} A_1^{p-p_0} \int_X |f(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Les intégrales en α convergent puisque $p_0 < p < +\infty$ et donc $p - p_0 - 1 > -1$. Ainsi, en élevant à la puissance $1/p$, on obtient

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq 2 \Big(\frac{p}{p-p_0} \Big)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{\frac{p-p_0}{p}} \|f\|_{L^p}. \qquad \square$$

Via la définition suivante, nous pouvons interpréter ce théorème d'une manière plus intuitive.

Définition 8.5. — *Un opérateur $T : L^p(X) \to L^q(Y)$ pour lequel il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \leq C_0 \|f\|_{L^p(X)}, \quad \forall f \in L^p(X),$$

est dit de "strong type" (p, q).

Un opérateur $T : L^p(X) \to L^{q,\infty}(Y)$ pour lequel il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(X)}, \quad \forall f \in L^p(X),$$

est dit de type "weak type" (p, q).(7)

Grâce à cette définition on peut reformuler l'énoncé du théorème de Marcinkiewicz. Soient, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ et T un opérateur sous-linéaire défini sur $L^{p_0} + L^{p_1}$ à valeurs dans l'espace de fonctions mesurables sur Y. Si T est de "weak type" (p_0, p_0) et de "weak type" (p_1, p_1) alors T est "strong type" (p, p) , $\forall p_0 < p < p_1$.

9. Interpolation d'opérateurs: méthode complexe

Proposition 9.1. — *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $T \in L(\mathcal{S}(X), \mathcal{M}(Y, \nu))$*(8). *Soient $1 \leq p, q < \infty$. S'il existe une constante $C_{p,q} > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}(X)$*

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(X,\mu)}, \tag{22}$$

alors par densité, T admet un unique prolongement borné de $L^p(X, \mu)$ à $L^q(Y, \nu)$. Ce prolongement est aussi noté T.

Démonstration. — Considérons l'opérateur $T : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{M}(Y, \nu)$. Par hypothèse, il existe une constante $C_{p,q} > 0$ telle que $\forall f \in \mathcal{S}(X)$, $\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(X,\mu)}$. Et comme $\mathcal{S}(X) \subset L^p$ (remarque 7.4), T est donc un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(X)$ dans $L^q(Y, \nu)$ (i.e. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(X), L^q(Y, \nu))$). On veut montrer que T admet un prolongement $\widetilde{T}$ linéaire continu de $L^p(X, \mu)$ dans $L^q(Y, \nu)$.

---

(7) On peut simplifier davantage en utilisant la notation de Vinogradov: T est de strong type (p, q) si

$$\|T(f)\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p,$$

et de weak type (p, q) si

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p.$$

(8) Ainsi il s'agit d'un opérateur linéaire, défini au préalable sur $\mathcal{S}(X)$, tel que pour tout $f \in \mathcal{S}(X)$, $T(f)$ est une fonction ν-mesurable sur Y. On trouve parfois la notation *Lin* au lieu de L.

Par densité de $\mathcal{S}(X)$ dans $L^p(X,\mu)$, pour toute fonction $f \in L^p$, il existe une suite $(f_n) \subset \mathcal{S}(X)$ qui converge vers f dans L^p. On peut poser $\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(f_n)$ dans L^q. $\widetilde{T}(f)$ est bien défini. En effet, $\widetilde{T}(f)$ ne dépend pas de la suite (f_n) choisie car si l'on prend deux suites (g_n) et (h_n) de $\mathcal{S}(X)$ convergeant vers f dans L^p, on a l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T(g_n) - T(h_n)\|_{L^q} &= \|T(g_n - h_n)\|_{L^q} \\ &\overset{g_n-h_n\in E}{\leq} C_{p,q}\|g_n - h_n\|_{L^p} \\ &\overset{2.5}{\leq} C_{p,q}\big(\|g_n - f\|_{L^p} + \|f - h_n\|_{L^p}\big),\end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \|T(g_n) - T(h_n)\|_{L^q} = 0$.

De plus, on peut vérifier que T et $\widetilde{T}$ coïncident bien sur $\mathcal{S}(X)$ en choisissant, pour un élément $f \in \mathcal{S}(X)$, la suite (f_n) de $\mathcal{S}(X)$ constante égale à f (qui converge donc vers f dans L^p). Et on a alors

$$\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} T(f) = T(f).$$

Il faut vérifier que $\widetilde{T}$ est linéaire continu. Pour deux éléments f et g de L^p et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a l'existance des suites (f_n) et (g_n) de $\mathcal{S}(X)$ convergeant respectivement vers f et g dans L^p. Ainsi,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(f+\lambda g) &= \lim_{n\to\infty} T(f_n + \lambda g_n) \\ &\overset{T \text{ lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} \big(T(f_n) + \lambda T(g_n)\big) \\ &= \widetilde{T}(f) + \lambda \widetilde{T}(g),\end{aligned}$$

car les deux limites sont finies. Et $\widetilde{T}$ est continu car pour $f \in L^p$, on peut écrire, en prenant $(f_n) \subset \mathcal{S}(X)$ convergeant vers f dans L^p,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}(f)\|_{L^q} &= \|\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(f_n)\|_{L^q} \\ &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{T}(f_n)\|_{L^q} \\ &\leq C_{p,q} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} \\ &= C_{p,q}\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'unicité du prolongement. Supposons qu'il existe $\overline{T}$ un autre prolongement continu et linéaire de T sur $L^p(X)$. Par densité de $\mathcal{S}(X)$ dans $L^p(X)$ on sait que pour tout $f \in L^p(X)$ il existe une suite $(f_n) \subset \mathcal{S}(X)$ telle que f_n converge vers f dans $L^p(X)$. Par définition du prolongement on sait que $\overline{T} \equiv T \equiv \widetilde{T}$ sur $\mathcal{S}(X)$ ce qui donne $\overline{T}(f_n) = T(f_n) = \widetilde{T}(f_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

car $f_n \in \mathcal{S}(X)$. Cela entraîne que pour tout $f \in L^p(X)$,

$$\overline{T}(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{T}(f_n) = \lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(f_n) = \widetilde{T}(f). \qquad \square$$

Notation 9.2. — Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note par $D(z_0, r)$ le disque ouvert centré en z_0 de rayon r

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}.$$

On note le disque fermé correspondant par $\overline{D}(z_0, r)$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\},$$

et le bord $\overline{D}(z_0, r) \setminus D(z_0, r)$ par $\partial D(z_0, r)$.

Théorème 9.3 **(Principe des zéros isolés)**. — *Les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont isolés.*

Le résultat n'est pas ici démontré.

Théorème 9.4 **(Rouché)**. — *Soit $\mathcal{D}$ un disque ouvert. Supposons que f et g sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathcal{D}}$. Si $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \partial\mathcal{D}$, alors g et $g + f$ ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{D}$.*

Le résultat n'est pas ici démontré.

Théorème 9.5 **(de l'image ouverte)**. — *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors l'image d'un ouvert connexe de $\mathcal{O}$ par f est ouvert connexe dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $f(\mathcal{O})$ est ouvert. Soit $w_0 \in f(\mathcal{O})$, on veut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\mathcal{O})$. Comme w_0 est dans l'image de $\mathcal{O}$ par f, il existe $z_0 \in \mathcal{O}$ tel que $w_0 = f(z_0)$. Puisque $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \mathcal{O}$. Remarquons que z_0 est racine (peut-être multiple) de la fonction holomorphe non constante

$$g(z) = f(z) - w_0,$$

ainsi par le théorème des zéros isolés, z_0 est "isolé" des autres racines et on peut donc choisir $r > 0$ de sorte que g ne s'annule en aucun autre point du disque $\overline{D}(z_0, r)$ (on "rétrécit" le disque initial). Le bord $\partial D(z_0, r)$ est un cercle, et donc un compact(9), sur lequel $|g|$ est une fonction positive et continue,

(9)On utilise le théorème de Heine-Borel: $\partial D(z_0, r) = \varphi^{-1}(\{r^2\})$ où $\varphi : (x, y) \mapsto (x - \Re(z_0))^2 + (y - \Im(z_0))^2$, c'est donc un fermé, et il est borné car on peut l'inclure dans le disque $D(z_0, 2r)$.

donc elle admet un minimum strictement positif[10] qu'on note τ. On a donc $|g(z)| = |f(z) - w_0| > \tau$, pour tout $z \in \partial D(z_0, r)$.

Par le théorème de Rouché, pour tout $w \in D(w_0, \tau)$, la fonction h définie par

$$h(z) = f(z) - w$$

possède autant de zéros dans $D(z_0, r)$ que g. En effet, soit $w \in D(w_0, \tau)$, c'est-à-dire $|w - w_0| < \tau$. On observe que $h(z) = g(z) + (w_0 - w)$, et pour tout $z \in \partial D(z_0, r)$ on a $|g(z)| > \tau > |w - w_0|$. Donc par le théorème de Rouché, puisque g a comme racine $z_0 \in D(z_0, r)$, il existe un $z \in D(z_0, r)$ tel que $h(z) = 0$, c'est-à-dire $f(z) = w$. Ayant pris $w \in D(w_0, \tau)$ quelconque, on a donc $D(w_0, \tau) \subset f(D(z_0, r))$. Mais aussi, $f(D(z_0, r)) \subset f(\mathcal{O})$. On prend $\varepsilon = \tau$ et la preuve est close. $\square$

Théorème 9.6 **(Principe du maximum)**. — *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors $|f|$ ne peut pas avoir un maximum sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — Par l'absurde, supposons que $|f|$ admet un maximum en $z_0 \in \mathcal{O}$, et posons $w_0 = f(z_0)$. Par le théorème 9.5, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\mathcal{O})$. Mais il existe donc au moins un point $w \in D(w_0, \varepsilon)$ tel que $|w| > |w_0| = |f(z_0)|$, et donc $|f|$ n'admet pas son maximum en z_0, ce qui est une contradiction. $\square$

Corollaire 9.7. — *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{\mathcal{O}}$ est compact. Si f est holomorphe sur $\mathcal{O}$ et continue sur $\overline{\mathcal{O}}$ alors f admet son maximum sur $\partial\mathcal{O}$.*

Démonstration. — Si f est constante, le résultat est immédiat. Si f n'est pas constante, puisqu'elle est continue et $\overline{\mathcal{O}}$ est compact, elle atteint son maximum dans $\overline{\mathcal{O}}$, mais pas dans $\mathcal{O}$ d'après le principe du maximum. Par conséquent, f atteint son maximum sur le bord de $\mathcal{O}$. $\square$

Lemme 9.8 **(Trois droites de Hadamard)**. — *Soit F une fonction holomorphe sur la bande ouverte $S = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \Re(z) < 1\}$, continue et bornée jusqu'au bord et telle qu'il existe $B_0, B_1 > 0$ de sorte que $|F(z)| \leq B_0$ quand $\Re(z) = 0$ et $|F(z)| \leq B_1$ quand $\Re(z) = 1$. Alors pour tout $0 \leq \theta \leq 1$, $|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^{\theta}$ quand $\Re(z) = \theta$.*

[10] Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes par le théorème des valeurs extremes de Weierstraß. De plus, puisque z_0 est l'unique zéro dans le disque et $|g|$ est positive, le minimum est strictement positif.

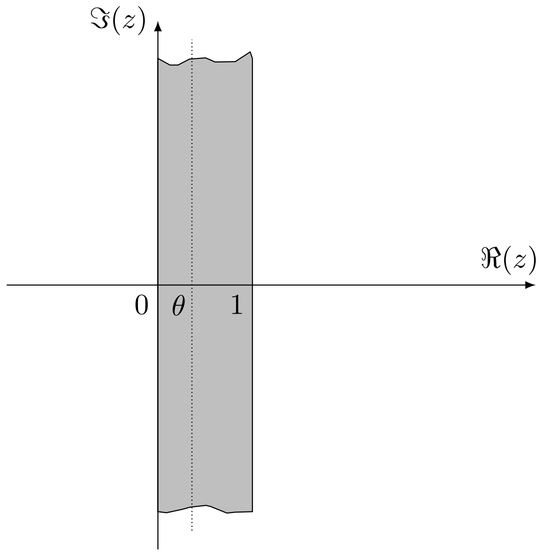

FIGURE 1. La bande S.

Démonstration. — Pour $z = x + iy \in S$ on pose

$$G(z) = \frac{F(z)}{(B_0^{1-z} B_1^z)},$$

où $B^\zeta = e^{\zeta \ln B}$ pour $\zeta \in \mathbb{C}$ et $B > 0$. L'idée de la preuve est de montrer que G est bornée en module par 1 sur la bande S y compris ses bords verticaux. G est une fonction holomorphe sur S en tant que produit de la fonction holomorphe F et d'une exponentielle. La fonction $z \longmapsto \frac{1}{B_0^{1-z} B_1^z}$ est bornée sur $\overline{S}$, car

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{B_0^{1-z} B_1^z}\Big| &= \Big|\frac{1}{B_0^{1-x} B_1^x}\Big| \\ &\leq \frac{1}{\min(1, B_0)\min(1, B_1)}.\end{aligned}$$

Cela, avec l'hypothèse de bornétude de F sur $\overline{S}$, entraîne que G est bornée sur $\overline{S}$. En particulier, $|G(z)| \leq 1$ sur les bords verticaux de la bande S. En effet, pour $\Re(z) = x = 0$ nous avons

$$\begin{aligned}|G(z)| &= |F(z)||(B_0^{1-z} B_1^z)^{-1}| \\ &\leq |B_0 e^{(-1+iy)\ln(B_0)} e^{-iy\ln(B_1)}| \\ &\leq |B_0 e^{-\ln(B_0)}| = B_0 B_0^{-1} = 1\end{aligned}$$

De même pour $\Re(z) = x = 1$ on obtient

$$\begin{aligned}|G(z)| &\leq |F(z)||(B_0^{1-z}B_1^z)^{-1}| \\ &\leq |B_1 e^{(-1+1+iy)\ln(B_0)} e^{-(1+iy)\ln(B_1)}| \\ &\leq |B_1 e^{-\ln(B_1)}| = B_1 B_1^{-1} = 1\end{aligned}$$

Pour conclure on voudrait démontrer que $|G(z)| \leq 1$ pour tout z dans S. On pose, pour $n \geq 1$,

$$G_n(z) = G(z)e^{\frac{z^2-1}{n}},$$

G_n est aussi holomorphe sur S comme produit de deux fonctions holomorphes sur S et continue sur $\overline{S}$. De plus, pour $z \in \overline{S}$

$$|G_n(x+iy)| \leq Me^{\frac{x^2-1}{n}} e^{\frac{-y^2}{n}} \leq Me^{\frac{-y^2}{n}}$$

car $0 \leq x \leq 1$. Cela nous donne une borne uniforme en x de G_n et par conséquent,

$$G_n(x+iy) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} 0$$

uniformément en $0 \leq x \leq 1$ par continuité de la fonction $y \mapsto e^{-y^2/n}$. Ainsi il existe un certain $y(n) > 0$ tel que $\forall |y| \geq y(n)$, $|G_n(x+iy)| \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc G_n est bornée par 1 sur $\overline{S}$ hormis le rectangle ouvert $\mathcal{R} =]0,1[\times]-y(n), y(n)[$. D'aprés le Corollaire 9.7 (G_n est holomorphe sur $\mathcal{R}$ et continue sur $\overline{\mathcal{R}}$ qui est compact comme un produit d'intervalles fermés bornés [(11)]), on déduit que G_n admet son maximum sur le bord de $\mathcal{R}$ et elle est donc bornée par 1 sur tout $\overline{S}$. Comme la suite de fonctions $(G_n)_{n\geq 1}$ converge ponctuellement vers G en faisant tendre n vers l'infini, on conclut que $|G(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{S}$, ce qui équivaut à dire

$$|F(z)| \leq B_0^{1-x}B_1^x \qquad \text{pour tout } 0 \leq x \leq 1. \qquad \square$$

***Théorème 9.9* (Riesz-Thorin).** — *Soit $T \in L(\mathcal{S}(X), \mathcal{M}(Y,\nu))$. Soient $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ et supposons que*

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)} \tag{23}$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)} \tag{24}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(X)$. Alors pour tout $0 < \theta < 1$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(X)$ on a

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(X)}, \tag{25}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

(11) Par le théorème de Heine-Borel.

Par densité des fonctions simples, T admet un unique prolongement borné de $L^p(X)$ dans $L^q(Y)$.

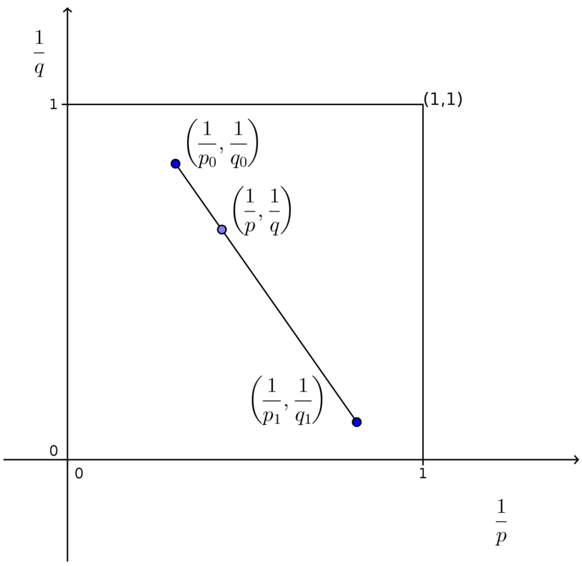

FIGURE 2. Explication graphique du théorème de Riesz-Thorin: on représente en abscisse l'espace où vit f et en ordonnée l'espace où vit Tf; la droite qui relie les points $\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$ et $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$ est la *droite d'interpolation*.

Remarque 9.10. — Le théorème de Riesz-Thorin peut aussi se reformuler d'une manière plus simple: si T est de "strong type" (p_0, q_0) et (p_1, q_1), alors T est de "strong type" (p, q), pour tout p, q satisfaisant la relation énoncée ci-dessus.

Remarque 9.11. — On observe premièrement que si q, q_0, q_1 satisfont la relation

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

pour tout $0 < \theta < 1$, alors leur exposants conjugués q', q_0', q_1' satisfont la même relation. En effet

$$\begin{aligned}\frac{1-\theta}{q_0'} + \frac{\theta}{q_1'} &= \left(1 - \frac{1}{q_0}\right)(1-\theta) + \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\theta \\ &= 1 - \frac{1-\theta}{q_0} - \frac{\theta}{q_1} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{S}(X)$, i.e.

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{m} |a_k| e^{i\alpha_k} \chi_{A_k},$$

où $|a_k|e^{i\alpha_k}$, avec $\alpha_k \in \mathbb{R}$, est l'écriture de $a_k \in \mathbb{C}^*$ en forme polaire et les A_k sont des sous-ensembles de X deux à deux disjoints. De la même façon, pour $g \in \mathcal{S}(Y)$,

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{n} |b_j| e^{i\beta_j} \chi_{B_j},$$

où $|b_j|e^{i\beta_j}$ avec $\beta_j \in \mathbb{R}$, est l'écriture de $b_j \in \mathbb{C}^*$ en forme polaire et les B_j des sous-ensembles deux à deux disjoints de Y. Notre objectif est de majorer $\|T(f)\|_{L^q(Y)}$ par $\|f\|_{L^p(X)}$, modulo une constante. Par dualité (c.f. Proposition 4.2)

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}(Y) \\ \|g\|_{L^{q'}} \leq 1}} \left| \int_Y T(f)(y) g(y) d\nu(y) \right|,$$

où q' est l'exposant conjugué de q. Posons

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1} z \quad \text{et} \quad Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1} z,$$

où q', q'_0, q'_1 sont les exposants conjugués de q, q_0 et q_1 respectivement. Pour $z \in \overline{S} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \; 0 \leq \Re(\zeta) \leq 1\}$ on définit

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x) g_z(x) d\nu(x),$$

où

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \quad \text{et} \quad g_z = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}.$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale et de l'opérateur T, on a pour tout $z \in S$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_Y T\bigg(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \bigg) \sum_{j=1}^{n} |b_j|^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}(x) d\nu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_k|^{P(z)} |b_j|^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\chi_{A_k})(x) \chi_{B_j}(x) d\nu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e^{P(z)\ln(|a_k|)} e^{Q(z)\ln(|b_j|)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\chi_{A_k})(x) \chi_{B_j}(x) d\nu(x),
\end{aligned}$$

et puisque $|a_k|, |b_j| > 0$, cela montre que F est une fonction analytique en tout $z \in S$. De plus, F est continue et bornée sur $\overline{S}$.

En effet, F est bornée pour tout $z \in \overline{S}$ car le seul terme dépendant de z est de la forme e^{az}, avec $a \in \mathbb{R}$, et en module ce terme vaut $e^{a\Re(z)}$, avec $0 \leq \Re(z) \leq 1$. Pour pouvoir appliquer le lemme des trois droites d'Hadamard et obtenir une majoration de $|F(z)|$ il reste à démontrer qu'il existe deux constantes $C_0, C_1 > 0$, telles que $|F(z)| \leq C_0$ sur la droite $\Re(z) = 0$ et $|F(z)| \leq C_1$ sur $\Re(z) = 1$.

On commence en considérant le cas $\Re(z) = 0$. On regarde la quantité

$$\|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \int_X \left| \sum_{k=1}^m |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x).$$

On écrit $X = (\bigcup_{j=1}^m A_j) \cup \mathfrak{X}$ où $\mathfrak{X} = X \setminus (\bigcup_{j=1}^m A_j)$, et puisque les A_j sont deux à deux disjoints, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} &\overset{\text{Chasles}}{=} \int_{(\bigcup_{j=1}^m A_j)} \left| \sum_{k=1}^m |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \\
&\quad + \int_{\mathfrak{X}} \left| \sum_{k=1}^m |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \\
&\overset{\text{Chasles}}{=} \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \left| \sum_{k=1}^m |a_k|^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \left| |a_j|^{P(z)} e^{i\alpha_j} \right|^{p_0} d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \left| |a_j|^{P(z)} \right|^{p_0} d\mu(x).
\end{aligned}$$

Pour $\Re(z) = 0$, on a $P(z) = \frac{p}{p_0}(1 - i\Im(z)) + \frac{p}{p_1}(i\Im(z))$ et

$$\left| |a_j|^{P(z)} \right| = |e^{P(z)\ln(|a_j|)}| = |e^{\frac{p}{p_0}\ln(|a_j|)}| = |a_j|^{\frac{p}{p_0}}.$$

En combinant cela avec le calcul précédent,

$$\|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} |a_j|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p.$$

Similairement, en considérant cette fois ci g_z avec $\Re(z) = 0$ et en travaillant sur Y, comme les sous-ensembles B_j sont deux à deux disjoints, on déduit que $\|g_z\|_{L^{q_0'}}^{q_0'} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$. En utilisant le même raisonnement que pour le cas $\Re(z) = 0$, on déduit que $\|f_z\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \|f\|_{L^p}^p$ et $\|g_z\|_{L^{q_1'}}^{q_1'} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$ sur $\Re(z) = 1$.

Déterminons les constantes C_0 et C_1. Pour $\Re(z) = 0$, en utilisant l'inégalité d'Hölder, les hypothèses du théorème et les égalités des normes démontrées ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}|F(z)| &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|T(f_z)\|_{L^{q_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} \\ &\leq M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} = M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}}.\end{aligned}$$

De même, pour $\Re(z) = 1$ on a

$$|F(z)| \leq M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}.$$

On pose $C_0 = M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}}$ et $C_1 = M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}$, et les hypothèses du lemme des trois droites d'Hadamard sont satisfaites. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq \left(M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}} \right)^{(1-\theta)} \left(M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}} \right)^{\theta} \\ &\overset{9.11}{=} M_0^{(1-\theta)} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}},\end{aligned}$$

pour $\Re(z) = \theta$.

Nous avons construit $F(z)$ de sorte que

$$F(\theta) = \int_Y T(f)(y) g(y) d\nu(y),$$

car $P(\theta) = Q(\theta) = 1$ par hypothèse et la remarque 9.11. En conclusion

$$\left| \int_Y T(f)(y) g(y) d\nu(y) \right| \leq M_0^{(1-\theta)} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}},$$

et en passant au supremum sur les $g \in \mathcal{S}(Y)$, $\|g\|_{L^{q'}} \leq 1$ on déduit la majoration souhaitée :

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(X).$$

Finalement, on étend le résultat pour $T : L^p \to L^q$ via la Proposition 9.1. □

Un exemple d'application du théorème 9.9 est la démonstration de l'inégalité de Young (qui suit).

***Corollaire 9.1* (Inégalité de Young).** — *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tels que* $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. *Alors* $\forall f \in L^p(X)$, $\forall g \in L^r(X)$,

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. — On considère ici l'opérateur de convolution $T : f \longmapsto g * f$, où $g \in L^r(X)$ et $g * f$ est donnée par $g * f : x \longmapsto \int_X g(x-y) f(y) d\mu(y)$. On note r' l'exposant conjugué de r.

Soit $f \in L^{r'}$ et $x \in X$,

$$|(g*f)(x)| = \Big| \int_X g(x-y)f(y)d\mu(y) \Big| \leq \int_X |g(x-y)f(y)|d\mu(y),$$

et comme la fonction $y \mapsto g(x-y)$ appartient à $L^r(X)$ p.p. $x \in X$ (car elle est de même norme L^r que g), on utilise l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$|(g*f)(x)| \leq \|g\|_{L^r}\|f\|_{L^{r'}}$$

Ainsi,

$$\|g*f\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^r}\|f\|_{L^{r'}}, \ \forall f \in L^{r'}(X).$$

Prenons maintenant $f \in L^1(X)$. On a

$$\begin{aligned}
\|g*f\|_{L^r}^r &= \int_X |(g*f)(x)|^r d\mu(x) \\
&= \int_X \Big| \int_X g(x-y)f(y)d\mu(y)\Big|^r d\mu(x) \\
&\leq \int_X \Big(\int_X |g(x-y)f(y)|d\mu(y)\Big)^r d\mu(x) \\
&= \int_X \Big(\int_X |g(x-y)f(y)^{\frac{1}{r}} f(y)^{\frac{1}{r'}}|d\mu(y)\Big)^r d\mu(x).
\end{aligned} \tag{26}$$

Pour presque tout $x \in X$, la fonction $y \longmapsto g(x-y)f(y)^{\frac{1}{r}}$ appartient à $L^r(X)$. En effet,

$$\int_X \Big| g(x-y)f(y)^{\frac{1}{r}}\Big|^r d\mu(y) = \int_X |g(x-y)^r f(y)|d\mu(y) = \int_X \tilde{g}(x-y)\tilde{f}(y)d\mu(y)$$

avec $\tilde{g} : y \longmapsto |g(y)|^r$ et $\tilde{f} : y \longmapsto |f(y)|$. On sait que $\tilde{g} \in L^1(X)$ et $\tilde{f} \in L^1(X)$, car $g \in L^r(X)$ et $f \in L^1(X)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}*\tilde{f}\|_{L^1} &= \int_X |(\tilde{g}*\tilde{f})(x)|d\mu(x) \\
&= \int_X \Big| \int_X |g(x-y)^r f(y)|d\mu(y)\Big| d\mu(x) \\
&= \int_X \int_X |g(x-y)|^r |f(y)|d\mu(y)d\mu(x) \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_X |f(y)| \Big(\int_X |g(x-y)|^r d\mu(x)\Big) d\mu(y) \\
&= \|g\|_{L^r}^r \int_X |f(y)|d\mu(y) \\
&= \|g\|_{L^r}^r \|f\|_{L^1} < \infty.
\end{aligned} \tag{27}$$

Donc d'après le Lemme 3.2, p.p. $x \in X$, $(\tilde{g} * \tilde{f})(x) < \infty$, c'est-à-dire

$$\int_X \left| g(x-y) f(y)^{\frac{1}{r}} \right|^r d\mu(y) < \infty, \ p.p.\ x \in X.$$

De plus, la fonction $y \longmapsto f(y)^{\frac{1}{r'}}$ appartient à $L^{r'}(X)$ car $f \in L^1(X)$. On peut donc utiliser l'inégalité de Hölder dans (26), ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|g * f\|_{L^r}^r &\leq \int_X \left[\left(\int_X \left| g(x-y) f(y)^{\frac{1}{r}} \right|^r d\mu(y) \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_X \left| f(y)^{\frac{1}{r'}} \right|^{r'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{r'}} \right]^{r'} d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_X |g(x-y)|^r |f(y)| d\mu(y) \right) \left(\int_X |f(y)| d\mu(y) \right)^{\frac{r}{r'}} d\mu(x) \\
&= \|f\|_{L^1}^{\frac{r}{r'}} \int_X \left(\int_X |g(x-y)|^r |f(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&\overset{(27)}{\leq} \|f\|_{L^1}^{\frac{r}{r'}} \|g\|_{L^r}^r \|f\|_{L^1} \\
&= \|g\|_{L^r}^r \|f\|_{L^1}^{\frac{r}{r'}+1} \\
&= \|g\|_{L^r}^r \|f\|_{L^1}^r,
\end{aligned}$$

car comme r et r' sont conjugués, $\frac{r}{r'} + 1 = r(1 - \frac{1}{r}) + 1 = r$. Ainsi,

$$\|g * f\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^1}, \ \forall f \in L^1(X).$$

On a donc obtenu

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^r} &\leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^1}, \ \forall f \in L^1(X), \text{ et} \\
\|Tf\|_{L^\infty} &\leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^{r'}}, \ \forall f \in L^{r'}(X).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz-Thorin (théorème 9.9), pour tout $0 < \theta < 1$ et pour tous p, q vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{p} & = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'} \\ \frac{1}{q} & = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}, \end{array} \right. \tag{28}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \|Tf\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^r}^{1-\theta} \|g\|_{L^r}^{\theta} \|f\|_{L^p}, \ \forall f \in L^p(X) \\
\Longleftrightarrow\ & \|Tf\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^p}, \qquad \forall f \in L^p(X).
\end{aligned} \tag{29}$$

Or, (28) peut être réécrit de la façon suivante (en utilisant le fait que r et r' sont conjugués)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{p} & = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'} \\ \frac{1}{q} & = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{p} & = 1 - \theta + \frac{\theta}{r'} \\ \frac{1}{q} & = \frac{1}{r} - \frac{\theta}{r} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 1 - \theta + \frac{\theta}{r'} & = \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q} + \frac{\theta}{r} & = \frac{1}{r} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \theta + \frac{\theta}{r'} & = \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q} + \theta - \frac{\theta}{r'} & = \frac{1}{r} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 1 + \frac{1}{q} & = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \\ \frac{1}{q} + \theta - \frac{\theta}{r'} & = \frac{1}{r} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 1 + \frac{1}{q} & = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \\ \theta & = \frac{1}{r} - \frac{1}{q} + \frac{\theta}{r'}. \end{array} \right.$$

Puisque θ n'intervient pas dans (29), il n'est pas nécessaire de le faire apparaître dans le résultat : soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, pour tout $g \in L^r(X)$ et pour tout $f \in L^p(X)$,

$$\|Tf\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^r} \|f\|_{L^p}. \qquad \square$$

PARTIE IV
EXTRAPOLATION EN ESPACES L^p

Dans cette partie on s'intéresse surtout aux propriétés d'un objet important pour le théorème d'extrapolation (théorème 13.1) : la fonction maximale. Nous allons travailler dans le cadre de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni d'une famille de boules ouvertes (par exemple les boules euclidiennes).

Tout d'abord, on s'intéresse aux propriétes nécessaires sur la famille des boules pour développer la théorie. En un sens géneral, on suppose que $\mathbb{R}^d$ est muni d'une famille de boules[12] $\{B(x,\delta)\}_\delta$ ouvertes, bornées, non vides, paramétrées par $0 < \delta < \infty$. On se donne aussi une mesure de Borel μ [13], vérifiant les hypothèses énoncées au préalable (c.f. convention 1.2), et de sorte que $\mu(\mathbb{R}^d) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu(\{x\}) = 0$ (la mesure est non atomique). Nous allons faire quelques hypothèses supplémentaires nécessaires pour la théorie qui suit.

On suppose qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 1$, telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$(i) \quad B(x,\delta) \cap B(y,\delta) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad B(y,\delta) \subset B(x, c_1\delta)$$

ainsi que la propriété de dédoublement

$$(ii) \quad \mu(B(x, c_1\delta)) \leq c_2 \mu(B(x,\delta)).$$

En addition, on suppose que

$$(iii) \quad \bigcap_{\delta>0} \overline{B}(x,\delta) = \{x\},$$

et

$$(iv) \quad \bigcup_{\delta>0} B(x,\delta) = \mathbb{R}^d.$$

Finalement,

(v) Pour tout U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $\delta > 0$, l'application

$$x \longmapsto \mu(\{B(x,\delta) \cap U\})$$

est continue en $x \in \mathbb{R}^d$.

(vi) Les boules sont supposées monotones, c'est-à-dire

$$B(x,\delta_1) \subset B(x,\delta_2) \quad \text{lorsque } \delta_1 < \delta_2.$$

---

(12) Dans ce contexte, une boule n'est pas nécessairement convexe.

(13) Rappelons que la tribu Borélienne de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu qui contient les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent boreliens, et une mesure de Borel est tout simplement une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}$.

Notation 9.12. — On note par B une boule centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque, de rayon $\delta > 0$ quelconque.

Les hypothèses (i) et (ii) peuvent etre remplacées par une hypothèse plus "faible". Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\delta > 0$, et notons $B = B(x, \delta)$. On définit

$$B^* = \bigcup_{B_1 \in \{B(y,\delta):\ B(y,\delta) \cap B \neq \emptyset,\ y \in \mathbb{R}^d\}} B_1. \tag{30}$$

On substitue (i) et (ii) par

$$(i, ii)^* \quad \mu(B^*(x, \delta)) \leq c_2 \mu(B(x, \delta)).$$

On peut vérifier que (i) et (ii) impliquent $(i, ii)^*$. En effet,

$$\begin{aligned} \bigcup_{B_1 \in \{B(y,\delta):\ B(y,\delta) \cap B \neq \emptyset,\ y \in \mathbb{R}^d\}} B_1 &= \bigcup_{\{y \in \mathbb{R}^d:\ B(y,\delta) \cap B \neq \emptyset\}} B(y, \delta) \\ &\overset{(i)}{\subset} \bigcup_{\{y \in \mathbb{R}^d:\ B(y,\delta) \cap B \neq \emptyset\}} B(x, c_1 \delta) \\ &= B(x, c_1 \delta). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mu(B^*) \leq \mu(B(x, c_1 \delta)) \overset{(ii)}{\leq} c_2 \mu(B(x, \delta)).$$

Remarque 9.13. — L'hypothèse (i) implique que pour $r \leq \delta$, si $B(x, \delta) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ alors $B(y, r) \subset B(x, c_1 \delta)$. En effet, si $B(x, \delta) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ alors $B(x, \delta) \cap B(y, \delta) \neq \emptyset$ (car $B(y, r) \subset B(y, \delta)$ par l'hypothèse (vi)), donc par l'hypothèse (i) on obtient $B(y, \delta) \subset B(x, c_1 \delta)$, ce qui implique $B(y, r) \subset B(x, c_1 \delta)$.

Remarque 9.14. — L'hypothèse (ii) implique qu'il existe une constante $\tilde{c}_2$, dépendente de c_2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\delta > 0$,

$$(ii)^* \quad \mu(B(x, 2\delta)) \leq \tilde{c}_2 \mu(B(x, \delta)).$$

En effet, puisque $c_1 > 1$, $\lim_{n \to \infty} c_1^n = \lim_{n \to \infty} e^{n \ln c_1} = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $c_1^n > 2$, et en particulier $c_1^{n_0} > 2$. Ainsi par (vi) (monotonie),

$$\mu(B(x, 2\delta)) \leq \mu(B(x, c_1^{n_0} \delta)).$$

En appliquant n_0 fois la proprieté (ii) à $B(x, c_1^{n_0} \delta)$, on obtient

$$\mu(B(x, c_1^{n_0} \delta)) \leq \underbrace{c_2^{n_0}}_{:= \tilde{c}_2} \mu(B(x, \delta)).$$

Il suffit de combiner les deux inégalités pour obtenir $(ii)^*$.

Les hypothèses (i) à (vi) nous conduisent vers deux observations intéressantes.

Proposition 9.15. — *Sous les hypothèses (i) à (vi), toute boule ouverte de* $\mathbb{R}^d$ *est de mesure strictement positive.*

Démonstration. — On procède par l'absurde en supposant qu'il existe $\delta_0 > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tels que $\mu(B(x_0, \delta_0)) = 0$.

L'hypothèse (iv) donne

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, c_1^n \delta_0).$$

En effet, comme $\lim_{n\to\infty} c_1^n \delta_0 = +\infty$ (puisque $c_1 > 1$), pour tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta \leq c_1^N \delta_0$ et donc l'hypothèse (vi) implique que $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, c_1^N \delta_0)$. Par conséquent

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\delta > 0} B(x_0, \delta) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, c_1^n \delta_0).$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que $c_1^n \delta_0 \leq \delta$ et donc l'hypothèse (vi) implique que $B(x_0, c_1^n \delta_0) \subset B(x_0, \delta)$. Par conséquent

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, c_1^n \delta_0) \subset \bigcup_{\delta > 0} B(x_0, \delta) = \mathbb{R}^d.$$

Ainsi on obtient

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, c_1^n \delta_0) = \mathbb{R}^d.$$

Maintenant en utilisant l'hypothèse (ii), on peut observer pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(B(x_0, c_1^n \delta_0)) &= \mu(B(x_0, c_1 c_1^{n-1} \delta_0)) \\
&\leq c_1 \mu(B(x_0, c_1^{n-1} \delta_0)) \\
&= c_1 \mu(B(x_0, c_1 c_1^{n-2} \delta_0)) \\
&\leq c_1^2 \mu(B(x_0, c_1^{n-2} \delta_0)) \\
&\dots \\
&\leq c_1^n \mu(B(x_0, \delta_0)).
\end{aligned}$$

Il apparaît alors une contradiction puisque d'une part dans les hypothèses on a choisi une mesure μ vérifiant $\mu(\mathbb{R}^d) > 0$, et d'autre part on obtient

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}^d) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0, c_1^n\delta_0)\Big) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B(x_0, c_1^n\delta_0)) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} c_1^n \underbrace{\mu(B(x_0,\delta_0))}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 9.16. — *Pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\delta > 0$, la moyenne*

$$(A_\delta f)(x) = \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} f(y)d\mu(y) \tag{31}$$

est continue en $x \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. — L'hypothèse (v), en prenant $U = \mathbb{R}^d$, implique que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi, si on montre que la fonction

$$x \longmapsto \int_{B(x,\delta)} f(t)d\mu(t)$$

est aussi continue sur $\mathbb{R}^d$, on aura la continuité de $A_\delta f$ (comme produit de fonctions continues). Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^d$ qui converge vers x dans $\mathbb{R}^d$. On cherche à montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{B(x_n,\delta)} f(t)d\mu(t) - \int_{B(x,\delta)} f(t)d\mu(t)\right| = 0. \tag{32}$$

Comme (x_n) converge vers x, il existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\delta,\ \|x - x_n\|_2 \leq \delta$. Par conséquent, $\forall n \geq N_\delta,\ B(x,\delta)\cap B(x_n,\delta) \neq \emptyset$, et alors l'hypothèse (i) donne que $\forall n \geq N_\delta,\ B(x_n,\delta) \subset B(x, c_1\delta)$. On a par ailleurs toujours l'inclusion $B(x,\delta) \subset B(x,c_1\delta)$ par l'hypothèse (vi), car $c_1 > 1$ et donc $c_1\delta > \delta$. Comme on s'intéressera à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on suppose maintenant que $n \geq N_\delta$. Cela donne

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(x_n,\delta)} f(t)d\mu(t) - \int_{B(x,\delta)} f(t)d\mu(t) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{B(x,c_1\delta)} \chi_{B(x_n,\delta)}(t) f(t) d\mu(t) - \int_{B(x,c_1\delta)} \chi_{B(x,\delta)}(t) f(t) d\mu(t) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{B(x,c_1\delta)} \Big(\chi_{B(x_n,\delta)}(t) - \chi_{B(x,\delta)}(t)\Big) f(t) d\mu(t) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B(x,c_1\delta)}(t) \Big(\chi_{B(x_n,\delta)}(t) - \chi_{B(x,\delta)}(t)\Big) f(t) d\mu(t) \right| \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \chi_{B(x,c_1\delta)}(t) \Big(\chi_{B(x_n,\delta)}(t) - \chi_{B(x,\delta)}(t)\Big) f(t) \Big| d\mu(t) \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(t) d\mu(t),
\end{aligned}$$

où on a posé

$$g_n(t) = \Big| \chi_{B(x,c_1\delta)}(t) \Big(\chi_{B(x_n,\delta)}(t) - \chi_{B(x,\delta)}(t)\Big) f(t) \Big|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est mesurable et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^d$ on peut réécrire $g_n(t)$ de la façon suivante:

$$g_n(t) = \begin{cases} |f(t)| & \text{si } t \in B(x_n,\delta) \setminus B(x,\delta) \\ |f(t)| & \text{si } t \in B(x,\delta) \setminus B(x_n,\delta) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire $g_n(t) = |f(t)|\chi_{A_n}(t)$, où $A_n = (B(x_n,\delta) \setminus B(x,\delta)) \cup (B(x,\delta) \setminus B(x_n,\delta))$. Or

$$\begin{aligned}
\|\chi_{A_n}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \mu(A_n) \\
&= \mu((B(x_n,\delta) \setminus B(x,\delta)) \cup (B(x,\delta) \setminus B(x_n,\delta))) \\
&= \mu(B(x_n,\delta) \setminus B(x,\delta)) + \mu(B(x,\delta) \setminus B(x_n,\delta)) \\
&= \mu(B(x_n,\delta) \cap B(x,\delta)^c) + \mu(B(x,\delta) \cap B(x_n,\delta)^c).
\end{aligned}$$

En passant à la limite et en utilisant l'hypothèse (v) on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \lim_{n\to\infty} \mu(B(x_n,\delta) \cap B(x,\delta)^c) + \lim_{n\to\infty} \mu(B(x,\delta) \cap B(x_n,\delta)^c) \\
&\overset{(v)}{=} \mu(B(x,\delta) \cap B(x,\delta)^c) + \mu(B(x,\delta) \cap B(x,\delta)^c) \\
&= \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions (χ_{A_n}) admet une sous-suite qui converge presque-partout vers 0 : il existe $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$\lim_{n\to\infty} \chi_{A_{\varphi(n)}}(t) = 0$ p.p. $t \in \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} g_{\varphi(n)}(t)$ p.p. $t \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(t)| \leq \chi_{B(x,c_1\delta)}(t)2|f(t)| \leq \chi_{\overline{B}(x,c_1\delta)}2|f(t)|.$$

Et comme $\overline{B}(x, c_1\delta)$ est un compact (fermé borné de $\mathbb{R}^d$, donc d'après le théorème de Heine-Borel), la fonction $t \longmapsto \chi_{\overline{B}(x,c_1\delta)}2|f(t)|$ est intégrable (puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$). Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_{\varphi(n)}(t)d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} g_{\varphi(n)}(t)d\mu(t) = 0.$$

On a montré que pour toute suite (x_n) de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$A_\delta f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_\delta f(x). \tag{33}$$

Ce résultat implique que pour toute suite $(x_n) \subset \mathbb{R}^d$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$,

$$A_\delta f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_\delta f(x).$$

En effet, supposons qu'il existe une suite $(u_n) \subset \mathbb{R}^d$ qui converge vers u et que $(A_\delta f(u_n))$ ne converge pas vers $(A_\delta f(u))$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ vérifiant

$$\Big|A_\delta f(u_n) - A_\delta f(u)\Big| > \varepsilon_0$$

Par conséquent il existe une sous-suite extraite $(A_\delta f(u_{\psi(n)}))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|A_\delta f(u_{\psi(n)}) - A_\delta f(u)\Big| > \varepsilon_0. \tag{34}$$

Or comme $u_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u$, d'après (33) on peut extraire $(A_\delta f(u_{\psi\circ\varphi(n)}))$ convergeant vers $A_\delta f(u)$. Mais d'autre part, du fait de (34) la suite $(A_\delta f(u_{\psi\circ\varphi(n)}))$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $|A_\delta f(u_{\psi\circ\varphi(n)}) - A_\delta f(u)| > \varepsilon_0$. On a donc une contradiction. Cela prouve (32). □

L'analyse du comportement de cette moyenne, et notamment la question si $A_\delta(f) \longrightarrow f$ presque partout quand $\delta \longrightarrow 0$ nous ramène à l'étude de la fonction (l'opérateur) maximale, définie par

***Définition 9.17* (Hardy-Littlewood).** — *Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on définit la fonction maximale (centrée) de f par*

$$(Mf)(x) = \sup_{\delta>0} \frac{1}{\mu(B(x,\delta))} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|d\mu(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

On définit aussi la fonction maximale décentrée

$$(\widetilde{M}f)(x) = \sup_{B\in\{B\subset\mathbb{R}^d\,:\,x\in B\}} \frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)|d\mu(y).$$

On peut remarquer que $(Mf)(x) = \sup_{\delta>0} A_\delta(|f|)(x)$, et que $|(Mf)(x)| = (Mf)(x)$ puisque μ est une mesure positive. En addition, la fonction maximale est un opérateur sous-linéaire. Finalement, on a $Mf \leq \widetilde{M}f$. Avant de se plonger dans l'étude de cet opérateur, on s'intéresse à savoir si une famille concrète de boules satisfait les hypothèses (i) à (vi).

Proposition 9.18. — *La mesure de Lebesgue μ verifie $\mu(\mathbb{R}^d) > 0$ et elle est non atomique.* [14]

Démonstration. — Notons $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ le "cube" de longueur 1. On a $\mu(\mathcal{Q}) = 1^d = 1$. Comme $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$, $\mu(\mathcal{Q}) \leq \mu(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\mu(\mathbb{R}^d) \geq 1 > 0$. □

Notation 9.19. — On note par la suite $\|.\|_2$ la norme euclidienne, c'est-à-dire, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}.$$

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et c un réel strictement positif, on note par cE l'ensemble $\{cx : x \in E\}$.

Proposition 9.20. — *La mesure de Lebesgue et les boules (ouvertes) "euclidiennes" de $\mathbb{R}^d$*

$$B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^d : \ \|y-x\|_2 < \delta\}$$

satisfont les hypothèses (i) à (vi).

Démonstration. — Pour (i), soit $\delta > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $B(x,\delta)\cap B(y,\delta) \neq \emptyset$. Soit $u \in B(y,\delta)$, ce point vérifie $\|y-u\|_2 < \delta$. Soit $v \in B(x,\delta)\cap B(y,\delta)$, ce point vérifie $\|x-v\|_2 < \delta$ et $\|y-v\|_2 < \delta$. Ainsi en utilisant l'inégalité triangulaire on peut écrire

$$\begin{aligned}\|x-u\|_2 &= \|x-v+v-y+y-u\|_2\\ &\leq \|x-v\|_2 + \|v-y\|_2 + \|y-u\|_2\\ &\leq \delta+\delta+\delta\\ &= 3\delta.\end{aligned}$$

C'est-à-dire $u \in B(x, 3\delta)$. On a donc obtenu $B(y,\delta) \subset B(x, c_1\delta)$, avec $c_1 = 3$.

Pour (ii), on prend $\delta > 0$, $c_1 > 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Par définition, $B(x, c_1\delta) = \{t \in \mathbb{R}^d \ : \ \|x-t\|_2 < c_1\delta\}$. Si on remplace la variable $t \in \mathbb{R}^d$ par c_1u, où $u \in \mathbb{R}^d$,

[14] On admet que la mesure de Lebesgue est une mesure de Borel.

on obtient $B(x, c_1\delta) = \{c_1 u \in \mathbb{R}^d \ : \ u \in \mathbb{R}^d, \ \|x - c_1 u\|_2 < c_1\delta\}$. Par ailleurs, les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}\|x - c_1 u\|_2 < c_1\delta &\iff \Big\|c_1\Big(\frac{x}{c_1} - u\Big)\Big\|_2 < c_1\delta \\ &\iff c_1\Big\|\frac{x}{c_1} - u\Big\|_2 < c_1\delta \\ &\iff \Big\|\frac{x}{c_1} - u\Big\|_2 < \delta,\end{aligned}$$

impliquent que

$$\begin{aligned}B(x, c_1\delta) &= \Big\{c_1 u \in \mathbb{R}^d \ : \ u \in \mathbb{R}^d, \ \Big\|\frac{x}{c_1} - u\Big\|_2 < \delta\Big\} \\ &= \Big\{c_1 u \in \mathbb{R}^d \ : \ u \in B\Big(\frac{x}{c_1}, \delta\Big)\Big\} \\ &= c_1 B\Big(\frac{x}{c_1}, \delta\Big).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu\big(B(x, c_1\delta)\big) = \mu\Big(c_1 B\Big(\frac{x}{c_1}, \delta\Big)\Big) = c_1^d \mu\Big(B\Big(\frac{x}{c_1}, \delta\Big)\Big) = c_1^d \mu\big(B(x, \delta)\big).$$

Pour établir les deux dernières égalités, on utilise deux "propriétés d'invariance" de la mesure de Lebesgue (translation et dilatation).

Pour (iii), x est dans l'intersection par construction. Montrons que il n'y a que x dans l'intersection. Soit $y \in \bigcap_{\delta>0} \overline{B}(x, \delta)$. Il en suit que $\|x - y\|_2 < \delta$, pour tout $\delta > 0$. En passant à la limite quand δ tend vers 0, on obtient $\|x - y\|_2 = 0$, et donc $x = y$.

Pour (iv), on procède par double inclusion. On a directement l'inclusion $\bigcup_{\delta>0} B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^d$ (puisque le premier membre est l'union de boules de $\mathbb{R}^d$). Il reste à établir la deuxième inclusion. Prenons y dans $\mathbb{R}^d$, $\|x - y\|_2 = r$, avec $0 < r < \infty$. On peut donc poser par exemple $\delta_0 = r + 42$, et on a $\|x - y\|_2 = r < \delta_0$, c'est-à-dire $y \in B(x, \delta_0) \subset \bigcup_{\delta>0} B(x, \delta)$. Donc $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{\delta>0} B(x, \delta)$.

Pour (v), soit $\zeta \in \mathbb{R}^d$ et soit $\|\zeta\|_2 = \varepsilon$. On montrera que

$$|\mu(B(x + \zeta, \delta)) - \mu(B(x, \delta))| \to 0, \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,$$

car le même résultat reste valable si on intersecte les deux boules avec un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. Remarquons que

$$B(x + \zeta, \delta) \subset B(x, \delta) \cup \big(B(x + \zeta, \delta) \triangle B(x, \delta)\big),$$

où $\triangle$ désigne la différence symétrique définie, par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A), \ \text{pour } A, B \subset \mathbb{R}^d.$$

Par les propriétés de la mesure de Lebesgue on obtient

$$\mu(B(x + \zeta, \delta)) - \mu(B(x, \delta)) \leq \mu(B(x + \zeta, \delta) \triangle B(x, \delta))$$

et, en échangeant les rôles des deux boules, on obtient aussi que

$$\mu(B(x,\delta)) - \mu(B(x+\zeta,\delta)) \leq \mu(B(x+\zeta,\delta)\triangle B(x,\delta)).$$

Ainsi, on tire des ces deux inégalités:

$$|\mu(B(x+\zeta,\delta)) - \mu(B(x,\delta))| \leq \mu(B(x+\zeta,\delta)\triangle B(x,\delta)).$$

Le but est maintenant de montrer que $\mu(B(x+\zeta,\delta)\triangle B(x,\delta)) = O(\varepsilon)$. On observe que l'on peut inscrire $B(x+\zeta,\delta)\triangle B(x,\delta)$ dans $B(\bar{x},\delta+\varepsilon)\setminus B(\bar{x},\delta-\varepsilon)$ où $\bar{x} = \frac{x+\zeta}{2}$. Donc on a que

$$\begin{aligned}
\mu(B(x+\zeta,\delta)\triangle B(x,\delta)) &\leq \mu(B(\bar{x},\delta+\varepsilon)\setminus B(\bar{x},\delta-\varepsilon)) \\
&= \mu(B(\bar{x},\delta+\varepsilon)) - \mu(B(\bar{x},\delta-\varepsilon)) \\
&= \omega_d((\delta+\varepsilon)^d - (\delta-\varepsilon)^d)
\end{aligned}$$

où $\omega_d = \mu(B(0,1))$. Or, à l'aide de la formule du binôme de Newton, on peut voir que $(\delta+\varepsilon)^d - (\delta-\varepsilon)^d = O(\varepsilon)$. En fait on a

$$\begin{aligned}
(\delta+\varepsilon)^d - (\delta-\varepsilon)^d &= \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}\delta^{d-k}\varepsilon^k - \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}\delta^{d-k}\varepsilon^k(-1)^k \\
&= \delta^d + \sum_{k=1}^{d}\binom{d}{k}\delta^{d-k}\varepsilon^k - \delta^d - \sum_{k=1}^{d}\binom{d}{k}\delta^{d-k}\varepsilon^k(-1)^k \\
&= \varepsilon\Big(\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k+1}\delta^{d-k-1}\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k+1}\delta^{d-k-1}\varepsilon^k(-1)^k\Big) \\
&= \varepsilon f(\varepsilon),
\end{aligned}$$

où f est une fonction continue qu'on peut donc majorer par une constante dans un voisinage de zero. Par conséquent on a bien que $(\delta+\varepsilon)^d - (\delta-\varepsilon)^d = O(\varepsilon)$, ce qui nous permet de clôturer la preuve de (v).

Pour (vi), soient $\delta_2 > \delta_1 > 0$. Soit $y \in B(x,\delta_1)$, ce point vérifie $\|x-y\|_2 < \delta_1$, ce qui implique $\|x-y\|_2 < \delta_2$ et donc $y \in B(x,\delta_2)$. On a ainsi l'inclusion $B(x,\delta_1) \subset B(x,\delta_2)$. □

10. L'inégalité maximale de Hardy-Littlewood

Notation 10.1. — Par la suite, on note par rad_B le rayon de la boule B.

***Lemme 10.2* (Vitali)**. — *Soit $\mathcal{B} = \{B_1,\dots,B_n\}$ une suite finie de boules de $\mathbb{R}^d$. Alors on peut extraire une sous-suite $\{B_{i_1},\dots,B_{i_m}\}$ de boules disjointes telle que*

$$\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) \leq c_2 \sum_{k=1}^{m}\mu(B_{i_k}).$$

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ est ordonnée par rayon décroissant. Nous allons construire la sous-suite de manière itérative[15]. Soit B_{i_1} une boule de $\mathcal{B}$ de rayon plus grand, c'est-à-dire $\mathrm{rad}_{B_{i_1}} \geq \mathrm{rad}_B$ pour toute boule $B \in \mathcal{B}$. Soit B_{i_2} une boule de $\{B \in \mathcal{B} : B \cap B_{i_1} = \emptyset\}$ de rayon plus grand, c'est-à-dire $\mathrm{rad}_{B_{i_2}} \geq \mathrm{rad}_B$ pour toute boule B dans $\{B \in \mathcal{B} : B \cap B_{i_1} = \emptyset\}$. Plus généralement, soit B_{i_k} une boule de $\{B \in \mathcal{B} : B \cap B_{i_l} = \emptyset,\ \forall 1 \leq l \leq k\}$, de rayon plus grand. Nous construisons de cette façon, en au plus n étapes, une sous-suite $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$ de boules disjointes, ordonnées par rayon décroissant.

Notre but étant de majorer en mesure la réunion de toutes les boules de la suite initiale, on cherche maintenant à "récupérer" les boules que nous avons "perdu" lors du choix des B_{i_k}. Posons

$$B_{i_1}^* = \bigcup_{\left\{y \in \mathbb{R}^d :\ B(y, \mathrm{rad}_{B_{i_1}}) \cap B_{i_1} \neq \emptyset\right\}} B(y, \mathrm{rad}_{B_{i_1}}).$$

D'aprés l'hypothèse (vi), les boules sont monotones, donc toute boule de $\mathcal{B}$ de rayon au plus égal à $\mathrm{rad}_{B_{i_1}}$ qui intersecte B_{i_1} est dans $B_{i_1}^*$. Plus généralement, si on pose

$$B_{i_k}^* = \bigcup_{\left\{y \in \mathbb{R}^d :\ B(y, \mathrm{rad}_{B_{i_k}}) \cap B_{i_k} \neq \emptyset\right\}} B(y, \mathrm{rad}_{B_{i_k}}).$$

pour $k \leq m$, alors toutes les boules de $\mathcal{B}$ de rayon au plus égal à $\mathrm{rad}_{B_{i_k}}$ qui intersectent B_{i_k} sont dans $B_{i_k}^*$.

Cette procédure nous a permis de récupérer les boules de $\mathcal{B}$ que nous n'avons pas pris dans la sous-suite. En effet, si B_2 (qui est de rayon au plus égal à B_{i_1}) n'était pas choisie dans la construction initiale, c'est car $B_2 \cap B_{i_1} \neq \emptyset$, et donc $B_2 \subset B_{i_1}^*$. Plus généralément, si B_l n'était pas prise en compte dans la construction initiale, c'est qu'il existe un $i_k < l$ tel que $B_l \cap B_{i_k} \neq \emptyset$, et donc $B_l \subset B_{i_k}^*$. Ainsi,

$$\bigcup_{l=1}^{n} B_l \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{i_k}^*,$$

et en "mesurant" par μ on a

$$\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} B_{i_k}^*\Big) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{i_k}^*).$$

[15] Il s'agit d'un algorithme dit "greedy".

D'après l'hypothèse $(i, ii)^*$, $\mu(B^*_{i_k}) \leq c_2\mu(B_{i_k})$, et donc

$$\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) \leq c_2 \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{i_k}). \qquad \square$$

Grâce au lemme, on pourra déduire des propriétes fondamentales de la fonction maximale (9.17).

Lemme 10.3. — *Soit* $\alpha > 0$. *Alors*

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : (\widetilde{M}f)(x) > \alpha\}$$

est un ouvert.

Démonstration. — Soit $x_0 \in E_\alpha$, on va montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset E_\alpha$. Cela entrainera que E_α est ouvert.

Comme $x_0 \in E_\alpha$, ce point vérifie $(\widetilde{M}f)(x_0) > \alpha$, c'est-à-dire

$$\sup_{B\in\{B\subset\mathbb{R}^d \,:\, x_0\in B\}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|d\mu(y) > \alpha.$$

Cela implique l'existance d'une boule ouverte B_0 contenant x_0 qui vérifie

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} |f(y)|d\mu(y) > \alpha.$$

Comme B_0 est un ouvert et $x_0 \in B_0$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset B_0$. De plus, chaque x appartenant à $B(x_0, r)$ appartient aussi à E_α. En effet, si $x \in B(x_0, r)$, alors $x \in B_0$ et donc

$$(\widetilde{M}f)(x) = \sup_{B\in\{B\subset\mathbb{R}^d \,:\, x\in B\}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|d\mu(y) \geq \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} |f(y)|d\mu(y) > \alpha.$$

On a donc montré que $B(x_0, r) \subset E_\alpha$. $\square$

Lemme 10.4. — *Soit* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert et soit* $c > 0$. *Si tout compact* $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ *vérifie*

$$\mu(\mathcal{K}) \leq c,$$

alors $\mu(\mathcal{O}) \leq c$.

Démonstration. — Commençons par clarifier la notation dans cette preuve. Pour F un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on note $dist(x, F) := \inf_{f\in F} \|x-f\|_2$. On travaille avec des boules euclidiennes et $\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_2 \leq \delta\}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\delta > 0$.

Le but de la démonstration sera de réécrire $\mathcal{O}$ comme une union croissante de compacts D_k, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour construire cela, on se servira du fait que la fonction $x \mapsto dist(x, A)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ (où A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$).

En effet, on peut démontrer que cette fonction est 1-Lipschitz. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, d'une part

$$\begin{aligned} dist(x, A) &= \inf_{a\in A} \|x-a\|_2 \\ &\leq \|x-a\|_2, \qquad\qquad \forall a \in A \\ &\leq \|x-y\|_2 + \|y-a\|_2, \quad \forall a \in A \\ \iff dist(x, A) &\leq \|x-y\|_2 + \inf_{a\in A} \|y-a\|_2 \\ &= \|x-y\|_2 + dist(y, A) \\ \iff dist(x, A) &- dist(y, A) \leq \|x-y\|_2. \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} dist(y, A) &= \inf_{a\in A} \|y-a\|_2 \\ &\leq \|y-a\|_2, \qquad\qquad \forall a \in A \\ &\leq \|y-x\|_2 + \|x-a\|_2, \quad \forall a \in A \\ &= \|x-y\|_2 + \|x-a\|_2, \quad \forall a \in A \\ \iff dist(y, A) &\leq \|x-y\|_2 + \inf_{a\in A} \|x-a\|_2 \\ &= \|x-y\|_2 + dist(x, A) \\ \iff dist(y, A) &- dist(x, A) \leq \|x-y\|_2. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq \|x-y\|_2.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D_k := \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^d : dist(x, \mathcal{O}^c) \geq \frac{1}{k}\right\}}_{:=A_k} \bigcap \overline{B}(0, k).$$

Cet ensemble est inclu dans $\mathcal{O}$, puisque tout $x \in D_k$ vérifie $dist(x, \mathcal{O}^c) > 0$. De plus, $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'ensembles. En effet, $A_k \subset A_{k+1}$, car $dist(x, \mathcal{O}^c) \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1}$. En addition, $\overline{B}(0, k) \subset \overline{B}(0, k+1)$. Donc $D_k = A_k \cap \overline{B}(0, k) \subset A_{k+1} \cap \overline{B}(0, k+1) = D_{k+1}$.

Par ailleurs, on peut réécrire A_k de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R}^d : dist(x, \mathcal{O}^c) \geq \frac{1}{k}\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R}^d : dist(x, \mathcal{O}^c) \in \left[\frac{1}{k}, +\infty\right[\right\} \\ &= \Big(x \mapsto dist(x, \mathcal{O}^c)\Big)^{-1}\left(\left[\frac{1}{k}, +\infty\right[\right). \end{aligned}$$

C'est donc un ensemble fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. D_k étant l'intersection de deux fermés, est un ensemble fermé. Et D_k est borné car il est inclu dans $\overline{B}(0,k)$. Ainsi D_k est un compact inclu dans $\mathcal{O}$. Il vérifie par conséquent $\mu(D_k) \leq c$.

Maintenant montrons que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k = \mathcal{O}$. L'inclusion $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k \subset \mathcal{O}$ est vraie puique les ensembles D_k sont inclus dans $\mathcal{O}$. Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, on prend $x \in \mathcal{O}$ et on montre qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_{k_0}$. D'abord, il existe un entier non nul k_1 tel que $\|x\|_2 \leq k_1$, c'est-à-dire $x \in \overline{B}(0,k_1)$. Par ailleurs, comme la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0, il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{1}{k_2} \leq dist(x, \mathcal{O}^c)$. Ainsi en choisissant $k = \max(k_1,k_2)$ on obtient $x \in D_{k_0}$, et donc $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k$.

On peut finalement conclure car $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite croissante d'ensembles, $\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(D_k)$. On a donc

$$\mu(\mathcal{O}) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k\Big) = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\mu(D_k)}_{\leq c} \leq c. \qquad \square$$

Théorème 10.5 **(Inégalité maximale de Hardy-Littlewood)**

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mu),\ 1 \leq p \leq \infty,$ alors $(Mf)(x)$ est finie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu),$ alors pour tout $\alpha > 0$

$$d_{Mf}(\alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d\mu(y),$$

c'est-à-dire Mf est de "weak type" $(1,1)$.

(c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mu),\ 1 < p \leq \infty,$ alors $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ avec

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A_{c_2,p} \|f\|_{L^p},$$

c'est-à-dire Mf est de "strong type" (p,p).

Démonstration. — On va démontrer le théorème pour la fonction maximale décentrée $\widetilde{M}f$, puisque si les propriétés sont vraies pour $\widetilde{M}f$, elles seront automatiquement vérifiées pour Mf (car $Mf \leq \widetilde{M}f$).

On commence par (b). Soit $\alpha > 0$ et posons $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\}$. Pour tout $x \in E_\alpha$, il existe une boule B_x telle que $x \in B_x$ et

$$\frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| d\mu(y) > \alpha.$$

Ainsi pour toute boule B_x nous avons

$$\mu(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| d\mu(y). \tag{35}$$

Soit $\mathcal{K} \subset E_\alpha$ un compact quelconque. Pour tout $x \in \mathcal{K}$, les boules B_x forment un recouvrement de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{K}} B_x.$$

Par compacité de $\mathcal{K}$, on peut (par la propriété de Borel-Lebesgue) choisir un sous-recouvrement fini de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_l.$$

Le lemme de Vitali (10.2) nous permet d'extraire une sous-suite $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}\}$ de boules disjointes telle que

$$\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) \leq c_2 \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{i_k}). \tag{36}$$

Puisque les boules $B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}$ sont disjointes et satisfont (35) (elles font partie des boules B_x du recouvrement initial) et (36), on trouve

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{K}) \leq \mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) \overset{(36)}{\leq} c_2 \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{i_k}) &\overset{(35)}{\leq} \frac{c_2}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} \int_{B_{i_k}} |f(y)| d\mu(y) \\ &\overset{\text{Chasles}}{=} \frac{c_2}{\alpha} \int_{\bigcup_{k=1}^{m} B_{i_k}} |f(y)| d\mu(y) \\ &\leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d\mu(y).\end{aligned}$$

Ayant pris $\mathcal{K}$ quelconque, en utilisant le lemme 10.4 sur les $\mathcal{K} \subset E_\alpha$, on obtient

$$\mu(E_\alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d\mu(y).$$

On démontre (c) en commençant par le cas $p < \infty$. Le but est de donner une estimation de $\|\widetilde{M} f\|_{L^p}$ que, via la Proposition 5.4 on peut écrire de manière équivalente comme

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{M} f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty d_{\widetilde{M} f}(\alpha) \alpha^{p-1} d\alpha.$$

À partir de f on définit la fonction

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

qu'on vérifie être dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)| d\mu(x) = \int_{\left\{|f| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)| d\mu(x) = \int_{\left\{|f| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|^{1-p} |f(x)|^p d\mu(x)$$

$$\leq \int_{\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\}} \left|\frac{\alpha}{2}\right|^{1-p} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \left|\frac{\alpha}{2}\right|^{1-p} \|f\|_{L^p}^p.$$

De plus, f_1 est définie de sorte que $\widetilde{M}f(x) \leq \widetilde{M}f_1(x) + \frac{\alpha}{2}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$. On obtient

$$\widetilde{M}f(x) \leq \widetilde{M}\big(f_1(x) + \frac{\alpha}{2}\big) \leq \widetilde{M}f_1(x) + \frac{\alpha}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

puisque l'opérateur $\widetilde{M}$ est sous-linéaire (par sous-additivité de l'intégrale).

Cette inégalité implique que $\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}$. En utilisant la propriété de monotonie de la mesure ainsi que le point (b) appliqué à f_1, on obtient l'inégalité suivante (qu'on utilisera par la suite)

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{M}f}(\alpha) = \mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\big\}\Big) &\leq \mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f_1(x) > \frac{\alpha}{2}\big\}\Big) \\ &\overset{(b)}{\leq} \frac{2c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(y)| d\mu(y) \\ &= \frac{2c_2}{\alpha} \int_{\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\}} |f(y)| d\mu(y). \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{M}f(y)|^p d\mu(y) &= p \int_0^\infty d_{\widetilde{M}f}(\alpha) \alpha^{p-1} d\alpha \\ &\leq 2pc_2 \int_0^\infty \int_{\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\}} \alpha^{p-2} |f(y)| d\mu(y) d\alpha \\ &= 2pc_2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\}}(y) \alpha^{p-2} |f(y)| d\mu(y) d\alpha \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} 2pc_2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \chi_{\left\{|f|>\frac{\alpha}{2}\right\}}(y) \alpha^{p-2} |f(y)| d\alpha d\mu(y) \\ &= 2pc_2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_0^{2|f(y)|} \alpha^{p-2} d\alpha d\mu(y) \\ &= \frac{pc_2}{p-1} 2^p \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p d\mu(y) \\ &= \frac{pc_2}{p-1} 2^p \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve $p < \infty$.

On passe au cas $p = \infty$. On a

$$\begin{aligned}\|\widetilde{M}f\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \widetilde{M}f(x)\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{B\in\{B\subset\mathbb{R}^d\,:\,x\in B\}} \frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)|d\mu(y)\\ &\leq \|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

L'assertion (a) découle de (c) pour $f \in L^p$ lorsque $1 < p \leq \infty$, car $\int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{M}f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ implique que $\widetilde{M}f$ est finie presque partout (c.f. Lemme 3.2). Si $f \in L^1$, on a pour tout $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) = \infty\big\}\Big) &\leq \mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\big\}\Big)\\ &\overset{(b)}{\leq} \frac{c_2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|d\mu(y).\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers $+\infty$ (et en utilisant la positivité de la mesure μ), on obtient bien

$$\mu\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) = \infty\big\}\Big) = 0. \qquad \square$$

La point (b) du théorème ne vaut pas pour $f \in L^1$ - on observe que la borne $A_{c_2,p}$ explose quand on fait tendre p vers 1. Cela veut dire que la fonction maximale n'est pas bornée en tant qu'opérateur de L^1 dans L^1, on n'a qu'une estimation L^1-faible. En effet, plaçons-nous dans $\mathbb{R}$ et choisissons $f : y \mapsto \chi_{[-1,1]}(y)$. Alors

$$\begin{aligned}(Mf)(x) &\geq \frac{1}{\mu(B(x,|x|))}\int_{B(x,|x|)} f(y)d\mu(y)\\ &= \frac{1}{2|x|}\int_{[x-|x|,x+|x|]} \chi_{[-1,1]}(y)d\mu(y)\end{aligned}$$

On veut montrer que le terme à droite de l'inégalité n'est pas intégrable. On peut donc s'intéresser à des x grands, notamment $2|x| > 1$. Ainsi, on calcule

$$\int_{[x-|x|,x+|x|]} \chi_{[-1,1]}(y)d\mu(y) = \int_{[-1,1]} 1 d\mu(y) = 2$$

On a donc pour $2|x| > 1$,

$$(Mf)(x) \geq \frac{2}{2|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Ainsi

$$\|Mf\|_{L^1} \geq \int_{2|x|>1} |(Mf)(x)|d\mu(x) \geq \int_{2|x|>1} \frac{1}{|x|}d\mu(x) = +\infty,$$

c'est-à-dire $Mf \notin L^1$.

Corollaire 10.6 **(Théorème de dérivation de Lebesgue)**
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *alors*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} f(y)d\mu(y) = f(x),$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. — Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\delta > 0$, on note

$$(A_\delta f)(x) = \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} f(y)d\mu(y)$$

où f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

On démontre tout d'abord ce théorème pour les fonctions continues à support compact. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $y \in B(x,\eta)$ implique $g(y) \in B(g(x),\varepsilon)$. Comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $g(y) \in B(g(x),\varepsilon)$ équivaut à $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'existence d'un $\eta > 0$ tel que si $y \in B(x,\eta)$ alors

$$\begin{aligned} |(A_\delta g)(x) - g(x)| &= \left|\frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} \big(g(y) - g(x)\big)d\mu(y)\right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} |g(y) - g(x)|d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{\mu(B(x,\delta))}\int_{B(x,\delta)} \varepsilon d\mu(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela revient à dire que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_{\delta\to 0}(A_\delta g)(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

L'idée de la preuve pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est de montrer que pour tout $\alpha > 0$ l'ensemble

$$\mathcal{W}_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{\delta\to 0} |(A_\delta f)(x) - f(x)| > 2\alpha\right\}$$

est de mesure nulle. En fait cela assurera que $\mathcal{W} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{W}_{\frac{1}{n}}$ soit de mesure nulle, puisque

$$\mu(\mathcal{W}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}),$$

et donc

$$\lim_{\delta\to 0}(A_\delta f)(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{W}^c.$$

Soit $\alpha > 0$ fixé. Par densité des fonctions continues à support compact dans L^1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$. Or on peut récrire

$$(A_\delta f)(x) - f(x) = (A_\delta f)(x) - (A_\delta g)(x) + (A_\delta g)(x) - g(x) + g(x) - f(x),$$

et par l'inégalité triangulaire

$$|(A_\delta f)(x) - f(x)| \leq |(A_\delta f)(x) - (A_\delta g)(x)| + |(A_\delta g)(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|.$$

En passant à la limite pour $\delta \to 0$ on obtient donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} |(A_\delta f)(x) - f(x)| &\leq \lim_{\delta\to 0} |(A_\delta f)(x) - (A_\delta g)(x)| + \lim_{\delta\to 0} |(A_\delta g)(x) - g(x)| \\
&\quad + |g(x) - f(x)| \\
&= \lim_{\delta\to 0} |(A_\delta f)(x) - (A_\delta g)(x)| + |g(x) - f(x)|, \qquad (37)
\end{aligned}$$

car pour g continue à support compact on a vu que $\lim_{\delta\to 0} A_\delta g(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$\mathcal{Y}_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{\delta\to 0} |(A_\delta f)(x) - (A_\delta g)(x)| > \alpha\right\}$$

et

$$\mathcal{Z}_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x) - g(x)| > \alpha\right\}.$$

Dans un premier temps, on a par l'inégalité de Tchebychev

$$\mu(\mathcal{Z}_\alpha) = d_{g-f}(\alpha) \overset{5.5}{\leq} \frac{1}{\alpha}\|f - g\|_{L^1},$$

et par l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (10.5, (b)) on a aussi

$$\mu(\mathcal{Y}_\alpha) \leq \mu\Big(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{\delta>0} |A_\delta f(x) - A_\delta g(x)| > \alpha\right\}\Big) \leq \frac{c_2}{\alpha}\|f - g\|_{L^1}.$$

On observe que

$$\mathcal{W}_\alpha \subset \mathcal{Y}_\alpha \cup \mathcal{Z}_\alpha.$$

En effet, si $x \in \mathcal{Y}_\alpha^c \cap \mathcal{Z}_\alpha^c$, l'inégalité (37) implique que $x \in \mathcal{W}_\alpha^c$, et on déduit l'inclusion souhaitée en passant au complémentaire. En "mesurant" par μ et en utilisant les majorations précédentes, on obtient

$$\mu(\mathcal{W}_\alpha) \leq \mu(\mathcal{Y}_\alpha) + \mu(\mathcal{Z}_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}(1 + c_2)\|f - g\|_{L^1}.$$

La fonction g a été choisie de sorte à avoir $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$, donc

$$\mu(\mathcal{W}_\alpha) < \frac{1}{\alpha}(1 + c_2)\varepsilon$$

et ayant pris $\varepsilon > 0$ quelconque, on déduit que $\mu(\mathcal{W}_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha > 0$. $\square$

Remarque 10.7. — L'hypothèse (iv) et le fait que la boule $\overline{B}(x,\delta) \subset \mathbb{R}^d$ est compacte[16] nous donne

$$\lim_{\delta\to 0} \mu(B(x,\delta)) = 0.$$

En effet, soit $(\delta_k) \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite décroissante et telle que $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Alors on a

$$B(x,\delta_{k+1}) \subset B(x,\delta_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\mu(B(x,\delta_1)) < \infty,$$

par la l'hypothèse (vi) et car μ est σ-finie. Via une preuve analogue à celle du point (iii) de la proposition 9.20, on peut montrer que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x,\delta_k) = \{x\}. \tag{38}$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B(x,\delta_k)) = \mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(x,\delta_k)\Big) \leq \mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{B}(x,\delta_k)\Big) \overset{(38)}{=} \mu(\{x\}) = 0.$$

On a donc montré que pour toute suite $(\delta_k) \subset \mathbb{R}_+^*$ décroissante vers zero,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B(x,\delta_k)) = 0. \tag{39}$$

Ce résultat implique que

$$\lim_{\delta\to 0} \mu(B(x,\delta)) = 0,$$

car si on suppose par l'absurde que $\lim_{\delta\to 0} \mu(B(x,\delta)) \neq 0$, cela signifie que l'expression

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0,\delta_0]\ \Rightarrow |\mu(B(x,\delta))| \leq \varepsilon$$

est fausse. On a donc

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta_0 > 0\ \exists \delta \in (0,\delta_0] \text{ et } \mu(B(x,\delta)) > \varepsilon.$$

En choisissant $\delta_0 = \frac{1}{n}$, cela implique que

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \delta_n \in (0,\frac{1}{n}] \text{ et } \mu(B(x,\delta_n)) > \varepsilon.$$

---

[16] Cela peut se voir comme une application du théorème de Riesz: *La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension fini.* Une version équivalente est la suivante: *Toute partie bornée d'un espace vectoriel normé est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) si et seulement si l'espace est de dimension fini.*

C'est-à-dire qu'il existe une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{aligned} &\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\text{et } \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mu(B(x,\delta_n) > \varepsilon. \end{aligned} \tag{40}$$

Puis, on extrait de (δ_n) une sous-suite (δ_{n_k}) qui est décroissante. On définit (δ_{n_k}) et (n_k) par :

$$\begin{cases} n_0 = 16, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}^* : n_k < n \text{ et } \delta_{n_{k+1}} \leq \delta_{n_k}\}. \end{cases}$$

Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, n_{k+1} est bien défini. En effet, comme $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\delta_N \leq \delta_{n_k}$. On peut donc choisir $n_{k+1} = \max(N, n_k) + 1$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}^* : n_k < n \text{ et } \delta_{n_{k+1}} \leq \delta_{n_k}\} \geq n_k.$$

ce qui implique que $(n_k) \subset \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante. Et (δ_{n_k}) est décroissante par construction.

Ainsi, (δ_{n_k}) est décroissante. De plus d'après (40), $\delta_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu(B(x, \delta_{n_k}) > \varepsilon$. Cela contredit (39). On conlue donc que

$$\lim_{\delta\to 0} \mu(B(x,\delta)) = 0.$$

11. Lemme de recouvrement de Whitney

Regardons maintenant une autre idée de recouvrement, celle de Whitney. Soit F est un ensemble fermé non vide, et notons $\mathcal{O} = F^c$ son complémentaire. Dans le cadre de $\mathbb{R}^d$, on peut recouvrir $\mathcal{O}$ par des "cubes" fermés, d'intérieurs disjoints et dont les longueurs sont "comparables" à leur distance à l'ensemble F. Dans le cadre géneral que l'on considère ici, on commence en fixant deux constantes c^* et c^{**}, telles que $c^{**} > c^* > 1$, qui dépendent seulement de la constante c_1 définie dans l'hypothèse (i), et sont uniformes pour tout F. En utilisant ces constantes, que nous allons expliciter par la suite, on définit les boules B^* et B^{**} pour un point x quelconque et pour $\delta > 0$ par

$$B = B(x,\delta), \quad B^* = B(x, c^*\delta), \quad B^{**} = B(x, c^{**}\delta).$$

On remarque que $B \subset B^* \subset B^{**}$ par l'hypothèse (vi). On précise que B^* défini ci-dessus n'est pas le même que celui dans l'hypothése $(i, ii)^*$.

***Lemme 11.1* (Whitney).** — *Étant donné F un ensemble fermé non vide, il existe une suite de boules $\{B_k\}$, telle que*

(a) Les B_k sont deux à deux disjoints.

(b) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k^* = \mathcal{O} = F^c.$

(c) $B_k^{**} \cap F \neq \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$

Démonstration. — F est un ensemble fermé non vide. L'objectif est de recouvrir son complémentaire $\mathcal{O}$ (qui est donc un ouvert) par une famille dénombrable de boules qui doivent également vérifier les points (a) et (c).

Soit $0 < \varepsilon < 1$. La valeur adéquate pour ε à choisir sera déterminée au cours de la preuve. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\mathfrak{d}(x) = \sup\{\delta > 0 : B(x, \delta) \subset \mathcal{O}\}.$$

$\mathfrak{d}(x)$ correspond à la distance du point x à l'ensemble F lorsque $x \in \mathcal{O}$. On commence par recouvrir $\mathcal{O}$ par la famille de boules $\big\{B\big(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)\big) : x \in \mathcal{O}\big\}$, i.e.

$$\mathcal{O} \subset \bigcup_{x\in\mathcal{O}} B\big(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)\big).$$

Quel que soit le point $x \in \mathcal{O}$ choisi, $\mathfrak{d}(x)$ pourra être utilisé dans l'expression du rayon d'une boule, puisque $\mathfrak{d}(x) > 0$. En effet, soit $x \in \mathcal{O}$, comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$. Ainsi, $\mathfrak{d}(x) = \sup\{\delta > 0 : B(x, \delta) \subset \mathcal{O}\} \geq r > 0$. Par ailleurs, toujours pour des points $x \in \mathcal{O}$, $\mathfrak{d}(x)$ est bien défini. Cela peut se montrer par l'absurde, en supposant qu'il existe $x \in \mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{d}(x) = +\infty$, c'est-à-dire quel que soit $\delta > 0$, $B(x, \delta) \subset \mathcal{O}$ et donc $\bigcup_\delta B(x, \delta) \subset \mathcal{O}$. Or l'hypothèse (iii) donne $\bigcup_\delta B(x, \delta) = \mathbb{R}^d$. On a ainsi obtenu $\mathbb{R}^d \subset F^c$, soit par contraposée $F \subset (\mathbb{R}^d)^c = \emptyset$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle F est non vide.

À partir de la famille $\big\{B\big(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)\big) : x \in \mathcal{O}\big\}$, on choisit une sous famille $\{B_k\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots\}$, disjointe dénombrable et maximale, c'est-à-dire c'est une famille disjointe dénombrable inclue dans $\big\{B\big(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)\big) : x \in \mathcal{O}\big\}$ telle que si on lui ajoute un nouvel élément alors elle perd la propriété d'être disjointe. [17]

Puisqu'il s'agit d'une sous-famille, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les B_k sont données par

$$B_k = B(x_k, \varepsilon\mathfrak{d}(x_k)).$$

La famille étant disjointe, quel que soit $l \neq k$, $B_l \cap B_k = \emptyset$. Le point (a) du lemme est donc directement vérifié pour cette famille. Enfin, étant maximale, si un point x n'appartient pas à l'ensemble des centres $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, alors

[17] L'existence d'une telle famille repose sur le lemme de Zorn. Elle est admise dans ce rapport.

$B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x))$ ne peut pas faire partie de $\{B_k\}$. Cela signifie que $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x))$ intersecte au moins une des boules de $\{B_k\}$ puisque la famille est maximale. Donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{O} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}, \quad B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B_{k_0} \neq \emptyset. \tag{41}$$

On choisit les valeurs des constantes c^* et c^{**} - on pose $c^* = \frac{1}{2\varepsilon}$ et $c^{**} = \frac{2}{\varepsilon}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$B_k^* = B(x_k, c^*\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)) = B\Big(x_k, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x_k)\Big),$$

et

$$B_k^{**} = B(x_k, c^{**}\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)) = B(x_k, 2\mathfrak{d}(x_k)).$$

Le point (c) du lemme est lui aussi vérifié par $\{B_k\}$ car

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{d}(x_k) &> \mathfrak{d}(x_k) \\ &= \sup\{\delta > 0 : B(x_k, \delta) \subset \mathcal{O}\} \\ &= \sup\{\delta > 0 : B(x_k, \delta) \cap F = \emptyset\}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $2\mathfrak{d}(x_k) \notin \{\delta > 0 : B(x_k, \delta) \cap F = \emptyset\}$, c'est-à-dire $2\mathfrak{d}(x_k) \in \{\delta > 0 : B(x_k, \delta) \cap F \neq \emptyset\}$. Donc $B_k^{**} \cap F \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Il reste maintenant à démontrer le point (b), soit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k^* = \mathcal{O}$. On montre dans un premier temps que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k^* \subset \mathcal{O}$, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k^* \subset \mathcal{O}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par définition de $\mathfrak{d}$, la boule $B(x_k, \mathfrak{d}(x_k))$ est incluse dans $\mathcal{O}$. Comme $\frac{1}{2}\mathfrak{d}(x_k) \leq \mathfrak{d}(x_k)$, l'hypothèse (vi) donne $B_k^* = B(x_k, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x_k)) \subset B(x_k, \mathfrak{d}(x_k))$, et donc $B_k^* \subset \mathcal{O}$.

On montre dans un second temps que $\mathcal{O} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k^*$. Soit un point x de $\mathcal{O}$ fixé, on va montrer que x se trouve dans un des B_k^*. Comme $\{B_k\}$ est maximale, on sait qu'il existe $\kappa \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x))$ intersecte la boule $B_\kappa = B(x_\kappa, \varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa))$ par (41). L'idée maintenant est d'inclure $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x))$ (et par conséquent inclure la point x) dans une boule de la forme $B(x_\kappa, C\varepsilon\mathfrak{d}(x_k))$, où C est une constante strictement positive. Le rayon de cette boule dépend du paramètre ε. On pourra donc fixer la valeur de ε de façon à ce que $B(x_\kappa, C\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)) = B_\kappa^*$.

On commence par montrer par l'absurde que

$$\frac{\mathfrak{d}(x)}{4c_1} \leq \mathfrak{d}(x_\kappa). \tag{42}$$

Supposons que $\mathfrak{d}(x_\kappa) < \frac{\mathfrak{d}(x)}{4c_1}$. On choisira la valeur du paramètre ε de façon à avoir $\varepsilon < \frac{1}{2c_1}$. Ainsi, $\varepsilon\mathfrak{d}(x) < \frac{1}{2c_1}\mathfrak{d}(x)$, et donc l'hypothèse (vi) donne $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \subset B(x, \frac{1}{2c_1}\mathfrak{d}(x))$. On a par ailleurs $B_\kappa \subset B_\kappa^{**} = B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa))$. Ces deux inclusions permettent d'obtenir

$$B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B_\kappa \subset B\Big(x, \frac{1}{2c_1}\mathfrak{d}(x)\Big) \cap B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa)).$$

On déduit que

$$B\Big(x, \frac{1}{2c_1}\mathfrak{d}(x)\Big) \cap B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa)) \neq \emptyset,$$

puisque κ est tel que $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B_\kappa \neq \emptyset$. Par hypothèse, $\mathfrak{d}(x_\kappa) < \frac{\mathfrak{d}(x)}{4c_1}$ et donc $2\mathfrak{d}(x_\kappa) < \frac{\mathfrak{d}(x)}{2c_1}$. On peut alors déduire, via l'hypothèse (i), que

$$B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa)) \subset B\Big(x, c_1\frac{1}{2c_1}\mathfrak{d}(x)\Big) = B\Big(x, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x)\Big).$$

Cela met à jour une contradiction, puisque d'une part

$$B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa)) \cap \mathcal{O}^c \neq \emptyset$$

par le point (c) du lemme, et d'autre part,

$$B(x_\kappa, 2\mathfrak{d}(x_\kappa)) \subset B(x, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x)) \subset \mathcal{O},$$

où la dernière inclusion provient du fait que $x \in \mathcal{O}$ et $\mathfrak{d}(x) = \sup\{\delta > 0 : B(x,\delta) \subset \mathcal{O}\} \geq \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x)$ (et donc par l'hypothèse (vi), $B(x, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x)) \subset B(x, \mathfrak{d}(x)) \subset \mathcal{O}$). On a donc montré (42).

Cette inégalité va nous permettre d'inclure $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x))$ dans la boule $B(x_\kappa, C\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa))$ avec $C > 0$. On sait que $B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B(x_\kappa, \varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)) \neq \emptyset$. Et comme $c_1 > 1$, $\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa) \leq 4c_1\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)$, donc l'hypothèse (vi) donne $B(x_\kappa, \varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)) \subset B(x_\kappa, 4c_1\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa))$. Par conséquent,

$$\underbrace{B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B(x_\kappa, \varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa))}_{\neq\emptyset} \subset B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \cap B(x_\kappa, 4c_1\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)).$$

Grace à cela et à l'inégalité (42), on utilise l'hypothèse (i) qui donne

$$B(x, \varepsilon\mathfrak{d}(x)) \subset B(x_\kappa, c_1 4c_1\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)) = B(x_\kappa, 4c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)).$$

En particulier $x \in B(x_\kappa, 4c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa))$.

Finalement, pour obtenir $x \in B_\kappa^*$, on choisit ε de sorte que $B(x_\kappa, 4c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_\kappa)) = B(x_\kappa, \frac{1}{2}\mathfrak{d}(x_\kappa))$, soit $4c_1^2\varepsilon = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\varepsilon = \frac{1}{8c_1^2}$. On peut remarquer que $\varepsilon = \frac{1}{8c_1^2}$ vérifie bien $\varepsilon < \frac{1}{2c_1}$. Par ailleurs, les valeurs des constantes c^* et c^{**} sont alors $c^* = \frac{1}{2\varepsilon} = 4c_1^2 > 1$ et $c^{**} = \frac{2}{\varepsilon} = 16c_1^2 > c^*$. □

Remarque 11.2. — À partir de la famille $\{B_k\}$ déduite par le lemme de Whitney, on peut construire une famille de cubes $\{Q_k\}$ deux à deux disjoints et tels que

$$B_k \subset Q_k \subset B_k^* \quad \text{et} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Q_k = \mathcal{O}.$$

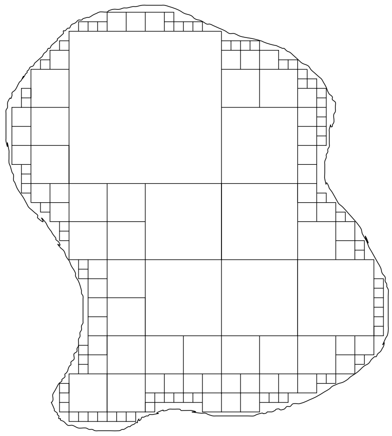

FIGURE 3. Le recouvrement de Whitney en dimension 2.

Ce sont en particulier ces cubes que l'on utilisera lors de la preuve du théorème de Calderón-Zygmund (théorème 12.1). On pose

$$Q_k = B_k^* \cap \big(\bigcup_{j<k} Q_j\big)^c \cap \big(\bigcup_{j>k} B_j\big)^c, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On observe que les Q_k ainsi définis sont deux à deux disjoints. En effet, soit $i \neq k$, et sans perte de généralité, supposons que $i < k$. Alors $Q_i \subset \bigcup_{j<k} Q_j$ et, par définition, $Q_k \subset \big(\bigcup_{j<k} Q_j\big)^c$, ce qui implique que $Q_k \cap Q_i = \emptyset$.

Montrons maintenant que $B_k \subset Q_k \subset B_k^*$. Par définition, $Q_k \subset B_k^*$. Montrons que $B_k \subset Q_k$. Dans un premier temps, puisque les B_j sont deux à deux disjoints pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $B_k \subset B_j^c$ pour tout $j \neq k$. Donc

$$B_k \subset \bigcap_{j\neq k} B_j^c \subset \bigcap_{j>k} B_j^c = \big(\bigcup_{j>k} B_j\big)^c.$$

Or $B_k \subset B_k^*$. Donc il ne reste plus qu'à montrer que $B_k \subset \big(\bigcup_{j<k} Q_j\big)^c$, c'est à dire $B_k \cap \big(\bigcup_{j<k} Q_j\big) = \emptyset$. On procède par récurrence.

Pour $k = 1$ le résultat est vrai car $\bigcup_{j<1} Q_j = \emptyset$. Supposons que $B_l \cap \big(\bigcup_{j<l} Q_j\big) = \emptyset$ pour tout $1 \leq l \leq k$ et montrons-le au rang $k+1$. Soit $j \leq k$, alors $B_{k+1} \cap Q_j = \emptyset$ car $Q_j \subset \big(\bigcup_{p>j} B_p\big)^c \subset B_{k+1}^c$. Donc

$$B_{k+1} \cap \big(\bigcup_{j<k+1} Q_j\big) = \emptyset$$

ce qui nous permet de dire que $B_k \cap \big(\bigcup_{j<k} Q_j\big) = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $B_k \subset Q_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

On termine en montrant que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}*} Q_k = \mathcal{O}$. L'inclusion $\bigcup_{k\in\mathbb{N}*} Q_k \subset \mathcal{O}$ est vraie, car $Q_k \subset B_k^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et d'un autre côté, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}*} B_k^* = \mathcal{O}$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens on prend $x \in \mathcal{O}$ et on raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \notin Q_k$. D'autre part, comme $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k^* = \mathcal{O}$, on sait qu'il existe j tel que $x \in B_j^*$. Cela et le fait que par hypothèse $x \notin Q_j$ entraîne que soit $x \in \bigcup_{l<j} Q_l$, soit $x \in \bigcup_{l>j} B_l$. On ne peut pas être dans le premier cas (puisqu'on a supposé $x \notin Q_l$, $\forall l$) donc on doit forcément avoir $x \in \bigcup_{l>j} B_l$. Cela veut dire qu'il existe $l > j$ tel que $x \in B_j \subset Q_j$ ce qui est absurde.

Remarque 11.3. — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les boules B_k^* et B_k^{**} sont des "dilatées" de la boule $B_k = B(x_k, \varepsilon\mathfrak{d}(x_k))$. En particulier,

$$B_k^* = B\big(x_k, 4c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)\big) \quad \text{et} \quad B_k^{**} = B\big(x_k, 16c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)\big).$$

En appliquant la propriété de dédoublement dans sa forme (ii) et $(ii)^*$, on obtient les majorations suivantes (que l'on utilisera par la suite)

$$\begin{aligned}
&\mu(B_k^{**}) = \mu(B(x_k, 2^4c_1^2\varepsilon\mathfrak{d}(x_k)) \leq (\tilde{c_2})^4(c_2)^2\mu(B_k),\\
&\mu(B_k^{**}) \leq (\tilde{c_2})^2\mu(B_k^*),\\
&\mu(B_k^*) \leq (\tilde{c}_2)^2(c_2)^2\mu(B_k).
\end{aligned}$$

12. Décomposition de Calderón-Zygmund

L'idée de la décomposition de Calderón-Zygmund est de séparer une fonction intégrable quelconque en ses "petites" et "grandes" parties, (connues sous le nom "good and bad" respectivement - c'est pour cela que l'on notera les parties par g et b!) et ensuite appliquer des méthodes différentes pour analyser chaque partie. Étant donné une fonction f et une "hauteur" $\alpha > 0$, on écrit $f = g + b$, où g (le "good part") est bornée ponctuellement par un multiple de α, que l'on observe dans le théorème. Bien que b (le "bad part") soit grande, elle a tout de même deux propriétés intéressantes: elle est supportée sur un ensemble de mesure petite, et est de moyenne nulle sur toute boule qui englobe son support. Rappelons que lors de la démonstration du théorème de Marcinkiewicz (8.3), nous avons fait une décomposition similaire, en découpant $|f|$ à la hauteur α. L'idée de Calderón-Zygmund diffère un peu, puisqu'on coupe la fonction maximale de f à la hauteur α.

***Théorème 12.1* (Calderón-Zygmund)**. — *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha > \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|d\mu(x)$. Alors il existe une décomposition $f = g + b$*

avec $b = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k$*, une suite de boules* $\{B_k^*\}$ *et* $c > 0$[18] *telles que*

(a) $|g(x)| \leq c\alpha$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) *Tout les* b_k *sont supportées dans* B_k^*,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |b_k(x)|d\mu(x) \leq c\alpha\mu(B_k^*), \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} b_k(x)d\mu(x) = 0.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(B_k^*) \leq \frac{c}{\alpha}\int |f(x)|d\mu(x)$.

Démonstration. — On remarque tout d'abord que si $\mu(\mathbb{R}^d) = \infty$, il suffit de supposer $\alpha > 0$.

L'idée de la preuve est de couper $\mathbb{R}^d$ en deux parties: là où la fonction maximale décentrée (9.17) est plus grande que la hauteur α, et là où elle est plus petite. Soit donc $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\}$. On rappelle que nous avons constaté dans le Lemme 10.3 que E_α est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Supposons dans un premier temps que son complémentaire $F_\alpha := E_\alpha^c$ est non vide. La remarque 11.2 nous permet de dire qu'il existe trois familles de boules $\{B_k\}$, $\{B_k^*\}$, $\{B_k^{**}\}$, vérifiant le lemme de recouvrement de Whitney (11.1) ainsi qu'une famille de cubes $\{Q_k\}$, deux à deux disjoints et telle que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Q_k = E_\alpha \qquad \text{et} \qquad B_k \subset Q_k \subset B_k^*.$$

On remarque que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Q_k\Big) = \mu(E_\alpha).$$

On définit g pour $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$g(x) = \chi_{F_\alpha}(x)f(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \chi_{Q_k}(x)\frac{1}{\mu(Q_k)}\int_{Q_k} f(y)d\mu(y).$$

Or, on peut réécrire f comme

$$f(x) = \chi_{F_\alpha}(x)f(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \chi_{Q_k}(x)f(x),$$

et on déduit une décomposition $f = g + b$ où b est donnée par

$$b(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k(x),$$

et

$$b_k(x) = \chi_{Q_k}(x)\Big(f(x) - \frac{1}{\mu(Q_k)}\int_{Q_k} f(y)d\mu(y)\Big), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

[18] La constante c n'est pas la même pour (a) et (c).

Montrons que la partie g et les parties b_k satisfont les propriétés souhaitées.

Pour (a), on observe que le théorème de dérivation de Lebesgue (10.6) implique

$$|f(x)| \geq \alpha, \quad p.p.\ x \in F_\alpha.$$

En effet, pour $x \in F_\alpha$ on a $Mf(x) \leq \widetilde{M}f(x) \leq \alpha$, c'est à dire

$$(A_\delta|f|)(x) = \frac{1}{\mu(B(x,\delta))} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|d\mu(y) \leq \alpha, \quad \forall \delta > 0,$$

et en passant à la limite quand $\delta \longrightarrow 0$ on obtient

$$|f(x)| \overset{10.6}{=} \lim_{\delta \to 0} (A_\delta|f|)(x) \leq \alpha, \quad p.p.\ x \in F_\alpha.$$

Ainsi, par définition g vérifie

$$|g(x)| \leq \alpha \quad p.p.\ x \in F_\alpha.$$

Il nous reste à montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|g(x)| \leq c\alpha$ pour presque tout $x \in E_\alpha$. On observe tout d'abord que, grâce au lemme de recouvrement de Whitney (11.1) $B_k^{**} \cap F_\alpha \neq \emptyset$, et cela assure donc l'existence d'un $x_0 \in B_k^{**} \cap F_\alpha$ pour lequel

$$\frac{1}{\mu(B_k^{**})} \int_{B_k^{**}} |f(y)|d\mu(y) \leq \sup_{\{B \subset \mathbb{R}^d \,:\, x_0 \in B\}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|d\mu(y) \leq \alpha. \tag{43}$$

De plus, $B_k \subset Q_k \subset B_k^{**}$, donc pour tout $x \in Q_k$ on a

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} |f(y)|d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{B_k^{**}} |f(y)|d\mu(y) \\ &\leq \frac{\mu(B_k^{**})}{\mu(B_k)} \alpha \leq \bar{c}\alpha, \end{aligned}$$

où $\bar{c} = (\tilde{c}_2)^4 (c_2)^2$ est la constante positive, indépendante de k, donnée par la propriété de dédoublement (Remarque 11.3). Cela termine la preuve de (a).

Pour (b), les fonctions b_k sont à support dans B_k^*, car par construction elles sont à support dans Q_k et $Q_k \subset B_k^*$. Il suffit de réécrire l'expression de b_k pour voir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} b_k(x) d\mu(x) = 0,$$

donc il nous reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |b_k(x)|d\mu(x) \leq c\alpha\mu(B_k^*).$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |b_k(x)| d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \chi_{Q_k}(x) \Big(f(x) - \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) d\mu(y) \Big) \right| d\mu(x) \\ &\leq 2 \int_{Q_k} |f(x)| d\mu(x) \leq 2 \int_{B_k^{**}} |f(x)| d\mu(x) \\ &\overset{(43)}{\leq} 2\mu(B_k^{**})\alpha \leq 2\bar{c}\alpha\mu(B_k^*) = c\alpha\mu(B_k^*),\end{aligned}$$

où $\bar{c} = (\tilde{c}_2)^2$ est à nouveau donnée par la proprieté de dédoublement.

Pour (c) il suffit d'observer que, par la proprieté de dédoublement,

$$\mu(B_k^*) \leq (\tilde{c}_2)^2 (c_2)^2 \mu(B_k) = \bar{c}\mu(B_k).$$

Donc

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(B_k^*) \leq \bar{c} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(B_k) \leq \bar{c}\mu(E_\alpha)$$

et par l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (10.5) on a

$$\mu(E_\alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d\mu(y),$$

ce qui conclut la preuve lorsque $E_\alpha^c = \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M} f(x) \leq \alpha\} \neq \emptyset$.

Dans le cas où $E_\alpha^c = \emptyset$, c'est-à-dire $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M} f(x) > \alpha\} = \mathbb{R}^d$, on utilise l'hypothèse

$$\alpha > \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| d\mu(y). \tag{44}$$

Remarquons que l'on se trouve dans ce cas de figure uniquement si $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, car sinon on aurait une contradiction avec l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood.

On décompose $f = g + b_1$ où

$$g(x) = \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\mu(y),$$

et $b_1 = f - g$. Grâce à l'hypothèse (44) on a $|g(x)| < \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus b_1 est à support dans $B_1^* = \mathbb{R}^d$ et $\int b_1(x) d\mu(x) = 0$. En addition,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |b_1(x)| d\mu(x) \leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu(x) \overset{(44)}{<} 2\alpha\mu(\mathbb{R}^d).$$

Pour conclure, l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood nous donne

$$\mu(B_1^*) = \mu(\mathbb{R}^d) = \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M} f(x) > \alpha\}\big) \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu(x). \qquad \square$$

Corollaire 12.1. — *La fonction g donnée par la décomposition de Calderón-Zygmund appartient à $L^q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$. En particulier pour $1 \leq q < \infty$, il existe une constante $\tilde{c}$ telle que*

$$\|g\|_{L^q}^q \leq \tilde{c}\alpha^{q-1}\|f\|_{L^1}.$$

Démonstration. — Pour le cas $q = \infty$, le théorème 12.1 (a) donne directement que $|g(x)| \leq c\alpha$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $\|g\|_{L^\infty} \leq c\alpha$ et ainsi $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $1 \leq q < \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q d\mu(x) = \int_{E_\alpha} |g(x)|^q d\mu(x) + \int_{E_\alpha^c} |g(x)|^q d\mu(x),$$

où $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : \widetilde{M}f(x) > \alpha\}$. Par le théorème 12.1 on sait que $g(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in E_\alpha^c$ et qu'il existe $c > 0$ tel que $|g(x)| < c\alpha$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ainsi,

$$\int_{E_\alpha^c} |g(x)|^q d\mu(x) \leq c\alpha^{q-1} \int_{E_\alpha^c} |f(x)| d\mu(x) \leq c\alpha^{q-1}\|f\|_{L^1}.$$

D'autre part,

$$\int_{E_\alpha} |g(x)|^q d\mu(x) \leq c\alpha^q \mu(E^\alpha) \leq c\alpha^{q-1}\|f\|_{L^1},$$

car l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood (Théorème 10.5, (b))assure que $\mu(E_\alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. On a donc montré que

$$\|g\|_{L^q}^q \leq \tilde{c}\alpha^{q-1}\|f\|_{L^1},$$

c'est-à-dire que g est bien dans $L^q(\mathbb{R}^d)$. □

13. Intégrales singulières et extrapolation

Le résultat qu'on présente dans cette partie est un résultat d'extrapolation d'opérateurs, c'est-à-dire un résultat qui donne une bornétude en L^p, $1 < p \leq q$ en ayant déjà une bornétude dans L^q.

Les opérateurs qui nous intéressent sont des opérateurs T de la forme

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y) d\mu(y), \tag{45}$$

où $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction ayant une singularité en $x = y$ [19]. On appelle ces opérateurs *intégrales singulières.* Pour définir l'opérateur T, l'idée est de démontrer des estimations sur un sous-espace (dense) où l'opérateur est défini initialement.

[19] K est appelée noyau (kernel).

Théorème 13.1. — *Soit $T : L^q(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq q \leq \infty$, un opérateur pour lequel il existe $A > 0$ telle que*

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq A\|f\|_{L^q}, \quad \forall f \in L^q(\mathbb{R}^d). \tag{46}$$

Soit $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable pour laquelle il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\int_{B(u,\lambda\delta)^c} |K(x,u) - K(x,v)|d\mu(x) \leq A, \quad \forall v \in B(u,\delta), \tag{47}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^d$ et $\forall \delta > 0$, et telle que pour tout $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ à support compact,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)f(y)|d\mu(y) < \infty, \quad p.p.\ x \in (suppf)^c, \\ &\text{avec pour ces } x,\ Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)d\mu(y). \end{aligned} \tag{48}$$

Alors T est un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $1 < p \leq q$, avec

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq A_{p,A}\|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d). \tag{49}$$

Démonstration. — On démontre ce résultat à l'aide du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz 8.3. On sait, par hypothèse, que T est un opérateur de "strong type" (q,q) ce qui implique que T est aussi de "weak type" (q,q). Afin d'appliquer le théorème de Marcinkiewicz il faut donc montrer que T est de "weak type" $(1,1)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante A' telle que

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq A'\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1 \cap L^q$$

Rappelant la définition de norme L^1-faible cela équivaut à montrer qu'il existe A' telle que pour chaque $f \in L^1 \cap L^q$,

$$d_{Tf}(\alpha) = \mu(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}, \quad \forall \alpha > 0, \tag{50}$$

où d_{Tf} représente la fonction de répartition de Tf. On montrera cette inégalité pour $d_{Tf}(c'\alpha)$ au lieu de $d_{Tf}(\alpha)$ avec c' une constante suffisamment grande que l'on déterminera, en fonction de A et $\tilde{c}$, au cours de la preuve.

Considérons deux cas en fonction de la valeur de α. Si $\alpha \leq \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|d\mu(x)$ (cela ne peut arriver que lorsque $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ car α est strictement positif), alors

$$d_{Tf}(\alpha) \leq \mu(\mathbb{R}^d) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|d\mu(x),$$

qui est directement le résultat voulu (avec $A' = 1$). Et si $\alpha > \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|d\mu(x)$, alors on applique le théorème 12.1.

La décomposition de Calderon-Zygmund nous permet d'écrire $f \in L^1 \cap L^q$ comme la somme de deux fonctions g et b. En particulier on est ramenés à démontrer qu'il existe A' tel que

$$d_{Tg}\big(c'\alpha/2\big) + d_{Tb}\big(c'\alpha/2\big) \leq \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1 \cap L^q,$$

car, en utilisant la linéarité de l'opérateur T (même la sublinéarité suffit) et les propriétés de la fonction de répartition (Proposition 5.3), on a que

$$d_{Tf}(c'\alpha) = d_{T(g+b)}(c'\alpha) = d_{Tg+Tb}(c'\alpha/2 + c'\alpha/2) \leq d_{Tg}(c'\alpha/2) + d_{Tb}(c'\alpha/2).$$

On peut donc répartir la preuve en deux parties et démontrer l'inégalité d'abord pour la fonction "good", g, et ensuite pour la fonction "bad", b.

Dans les deux parties de la preuve, on utilisera la notation c pour une constante dont la valeur varie mais dépend seulement des constantes c_1, c_2 et $\tilde{c_2}$. De la même façon on utilisera la notation A' pour une constante dont la valeur varie mais dépend seulement de A, c, q et c'.

Commençons par démontrer qu'il existe A' tel que

$$d_{Tg}\big(c'\alpha/2\big) \leq \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1 \cap L^q,$$

Supposons que $q < \infty$, d'après le corollaire 12.1, $g \in L^q$ et $\|g\|_{L^q}^q \;\leq\; \tilde{c}\,\alpha^{q-1}\,\|f\|_{L^1}$. Or, en utilisant ce résultat, l'inégalité de Tchebycheff et l'hypothèse de bornétude de T sur l'espace L^q, on obtient le résultat souhaité:

$$\begin{aligned} d_{Tg}(c'\alpha/2) &= \mu(\{x : |Tg(x)| > c'\alpha/2\}) \leq (c'\alpha/2)^{-q}\|Tg\|_{L^q}^q \\ &\leq (c'\alpha/2)^{-q}A\|g\|_{L^q}^q \leq A'\alpha^{-q}\alpha^{q-1}\|f\|_{L^1} \\ &= \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On remarque qu'on n'a pas eu besoin d'imposer des conditions sur la constante c' afin que l'inégalité soit satisfaite dans le cas $q < \infty$.
Supposons maintenent $q = \infty$. Le point (a) du théorème 12.1 implique que $\|g\|_{L^\infty} \leq \tilde{c}\alpha$ et par conséquent $\|Tg\|_{L^\infty} \leq A\|g\|_{L^\infty} \leq \tilde{c}A\alpha$ par la bornétude de l'opérateur T. Cela entraîne que si on choisit $c' > 2\tilde{c}A$ alors $\mu(\{x : |Tg(x)| > c'\alpha/2\}) = 0$ et donc l'inégalité est satisfaite pour $q = \infty$ aussi. Il suffit donc de choisir une constante c' suffisament grande, en particulier $c' > 2\tilde{c}A$, pour obtenir que la conclusion

$$d_{Tg}(c'\alpha/2) \leq \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

est valable dans tous les cas.

Montrons maintenant qu'il existe A' tel que

$$d_{Tb}\big(c'\alpha/2\big) \leq \frac{A'}{\alpha}\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1 \cap L^q.$$

Comme dans la première partie de la preuve, on commence par remarquer que les fonctions b_k appartiennent à L^q. On sait que $f = g + b$ et $b = \sum_k b_k$. Comme $f, g \in L^q$, $b = f - g \in L^q$ (car L^q est un espace vectoriel). De plus, via la relation de Chasles, on peut réécrire la norme L^q de b de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\|b\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^d} |b(x)|^q d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{Q_k} |b(x)|^q d\mu(x) \Big) + \underbrace{\int_{(\bigcup_k Q_k)^c} |b(x)|^q d\mu(x)}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{Q_k} | \sum_{k'=1}^{\infty} b_{k'}(x)|^q d\mu(x) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{Q_k} |b_k(x)|^q d\mu(x) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\|_{L^q}^q .
\end{aligned}$$

Pour effectuer ce calcul, on a utilisé la famille $\{Q_k\}$ donnée par la remarque 11.2. Cette famille vérifie notamment que ses éléments Q_k sont disjoints et que le support de b_k est inclu dans Q_k (c.f. preuve du théorème 12.1). Et comme $b \in L^q$, on obtient que pour tout k, $b_k \in L^q$.

Le lemme de Whitney (lemme 11.1) nous utilise les boules B_k^* et B_k^{**}, où B_k^{**} est la boule de même centre que B_k^* et de rayon $4\text{rad}_{B_k^*}$. On définit dans cette preuve de nouvelles boules $\mathcal{B}_k^{**}$ qui sont également de même centre que B_k^* mais de rayon $\lambda\text{rad}_{B_k^*}$, où λ est la constante de l'hypothèse (47).

On utilise l'hypothèse (48) en choisissant $\delta = \text{rad}_{B_k^*}$, $u = y$ et $v = y_k$ (où y_k est le centre commun de B_k^* et $\mathcal{B}_k^{**}$). Cela donne que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $y \in B(y_k, \delta) = B_k^*$ (cela est équivalent à dire que $y_k \in B(y, \delta)$ et donc dans l'hypothèse $v \in B(u, \delta)$) alors

$$\int_{(\mathcal{B}_k^{**})^c} |K(x,y) - K(x,y_k)| d\mu(x) \leq A. \tag{51}$$

On passe à la majoration de $d_{Tb}(c'\alpha/2)$, que l'on découpe d'abord en deux parties F et G que l'on majorera séparément

$$\begin{aligned}
d_{Tb}(c'\alpha/2) &= \mu(\{x : |Tb(x)| > c'\alpha/2\}) \\
&= \mu\Big((\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)^c) \,\cup\, (\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)) \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\Big(\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)^c \Big) + \mu\Big(\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big) \Big) \\
&\leq \underbrace{\mu\Big(\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)^c \Big)}_{=:F} + \underbrace{\mu\Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)}_{=:G}.
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Tchebychev (remarque 5.6),

$$
\begin{aligned}
F &= \mu\Big(\{|Tb| > c'\alpha/2\} \cap \Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big)^c \Big) \\
&\leq \frac{1}{(c'\alpha/2)} \int_{\{|Tb|>c'\alpha/2\}\cap(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb(x)|d\mu(x) \\
&\leq \frac{2}{c'\alpha} \underbrace{\int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb(x)|d\mu(x)}_{=:I}.
\end{aligned}
$$

Pour estimer l'intégrale I, on considère les $x \notin \mathcal{B}_k^{**}$. Ces x se trouvent dans le complémentaire du support de b_k. En effet, le support de b_k est inclu dans B_k^*. De plus il est fermé par définition et donc compact (car b_k prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Et comme $b_k \in L^q$, l'hypothèse (48) permet d'utiliser pour $Tb_k(x)$ la représentation suivante (dans l'intégrale I):

$$
Tb_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) b_k(y) d\mu(y).
$$

On utilise la linéarité de T et l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb(x)|d\mu(x) = \int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |\sum_{k=1}^{\infty} Tb_k(x)|d\mu(x) \\
&\leq \int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} \sum_{k=1}^{\infty} |Tb_k(x)|d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb_k(x)|d\mu(x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb_k(x)|d\mu(x),
\end{aligned}
$$

où la dernière inégalité provient du fait que $(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c \subset (\mathcal{B}_k^{**})^c$, par contraposée de $\mathcal{B}_k^{**} \subset \bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}$. On peut inverser somme sur k et intégrale par le théorème de Beppo Levi.

Afin d'utiliser par la suite le résultat (51), on donne une nouvelle expression de $Tb_k(x)$:

$$\begin{aligned}
Tb_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)b_k(y)d\mu(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)b_k(y)d\mu(y) - K(x,y_k)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} b_k(y)d\mu(y)}_{=0 \text{ par 12.1 (b)}}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)b_k(y)d\mu(y) - \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y_k)b_k(y)d\mu(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (K(x,y) - K(x,y_k))b_k(y)d\mu(y)\\
&= \int_{B_k^*} (K(x,y) - K(x,y_k))b_k(y)d\mu(y),
\end{aligned}$$

car le support de b_k est inclu dans B_k^*. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
I &\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\mathcal{B}_k^{**})^c} \Big| \int_{B_k^*} (K(x,y) - K(x,y_k))b_k(y)d\mu(y)\Big| d\mu(x)\\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\mathcal{B}_k^{**})^c} \int_{B_k^*} |K(x,y) - K(x,y_k)||b_k(y)|d\mu(y)d\mu(x)\\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k^*} |b_k(y)| \underbrace{\Big(\int_{(\mathcal{B}_k^{**})^c} |K(x,y) - K(x,y_k)|d\mu(x)\Big)}_{\le A \text{ par (51)}} d\mu(y)\\
&\le A \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k^*} |b_k(y)|d\mu(y).
\end{aligned}$$

Puis on utilise successivement les résultats (b) et (c) du théorème 12.1 :

$$\begin{aligned}
I &\le A \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\|b_k\|_{L^1}}_{\le c\alpha\mu(B_k^*)} \le \underbrace{Ac}_{=:A'} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k^*)\\
&= A'\alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k^*)}_{\le \frac{c}{\alpha}\|f\|_{L^1}} \le \underbrace{A'c}_{=:A'} \|f\|_{L^1}\\
&= A'\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

On a obtenu

$$\int_{(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**})^c} |Tb(x)| d\mu(x) \leq A' \|f\|_{L^1},$$

La majoration de F est alors

$$F \leq \underbrace{\frac{2A'}{c'}}_{=:A'} \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1} = \frac{A'}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

Il reste à majorer G. Par une preuve analogue à celle de la remarque 9.14 (en utilisant λ à la place de 2), on peut montrer l'existance d'une constante $\tilde{\lambda}$ ne dépendant que de c_1 et λ telle que $\mu(\mathcal{B}_k^{**}) \leq \tilde{\lambda}\mu(B_k^*)$.

$$\begin{aligned} G = \mu\Big(\bigcup_k \mathcal{B}_k^{**}\Big) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathcal{B}_k^{**}) \\ &\leq \tilde{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k^*) \leq \underbrace{\tilde{\lambda} c}_{=:c} \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1} \\ &= \frac{c}{\alpha} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu le résultat voulu

$$\begin{aligned} d_{Tf}(c'\alpha/2) &\leq \frac{A'}{\alpha} \|f\|_{L^1} + \frac{c}{\alpha} \|f\|_{L^1} \\ &= \underbrace{(A' + c)}_{=:A'} \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1} \\ &= \frac{A'}{\alpha} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 13.1. — *L'opérateur T du théorème admet un prolongement unique (noté aussi T) sur L^p, $1 \leq p < q$, vérifiant les inégalités* (49) *et* (50).

Démonstration. — La preuve est analogue à celle de la proposition 9.1, en utilisant ici la densité de $L^p \cap L^q$ dans L^p (que l'on démontre ici).

Soit $f \in L^p$. Soit la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\begin{aligned} f_n : \quad \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} n & , \text{ si } n < |f(x)| \\ f(x) & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_n(x)| = \begin{cases} n & , \text{ si } n < |f(x)| \\ |f(x)| & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases}$$

et donc $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ dans les deux cas. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ et $f_n \in L^p$. On a également $|f_n(x)| \leq n$. Cela implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{L^\infty} \leq n$ et $f_n \in L^\infty$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout q vérifiant $p \leq q \leq \infty$, f_n appartient à L^q.

On a donc trouvé une suite (f_n) d'éléments de $L^p \cap L^q$, pour tous $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Il reste à montrer qu'elle converge vers f dans L^p, c'est-à-dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{52}$$

Posons $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est mesurable. Presque pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En effet,

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p = \begin{cases} |n - f(x)|^p & , \text{ si } n < |f(x)| \\ 0 & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases}$$

or, à $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, $|f(x)|$ est un réel fixé. Par conséquent, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x)| \leq N_x$, et donc pour tout $n \geq N_x$, $g_n(x) = 0 \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $(g_n(x))_n$ a pour limite 0. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &= |f_n(x) - f(x)|^p \\ &= \begin{cases} |n - f(x)|^p & , \text{ si } n < |f(x)| \\ 0 & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} (n + |f(x)|)^p & , \text{ si } n < |f(x)| \\ 0 & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} (2|f(x)|)^p & , \text{ si } n < |f(x)| \\ 0 & , \text{ si } |f(x)| \leq n \end{cases} \\ &\leq 2^p |f(x)|^p. \end{aligned}$$

g_n est donc majorée par la fonction $x \mapsto 2^p|f(x)|^p$ qui est indépendante de n et intégrable (car $f \in L^p$). Ainsi le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne (52). $\square$

PARTIE V
APPENDICE

Proposition 13.2. — *La fonction* $f : x \mapsto x^p$ *est sous-additive (i.e.* $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$*) pour* $0 < p < 1$*.*

Démonstration. — Soient $a, b \geq 0$. On remarque que f est infiniment dérivable et

$$f(a+b) - f(b) = \int_b^{a+b} f'(x)dx = \int_0^a f'(y+b)dy \leq \int_0^a f'(y)dy = f(a),$$

où pour majorer nous avons utilisé le fait que f' est décroissante - en effet, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \leq 0$. □

Preuve 3 de la Proposition 7.1. — Une troisième façon de procéder passe, comme dans la *Preuve 2*, par une décomposition *"layer cake"* mais en introduisant cette fois un paramètre $\lambda > 0$ sur lequel on va travailler pour trouver une majoration optimale de $\|f\|_{L_p}$ (c'est-à-dire une majoration la plus petite possible). Pour tout λ réel strictement positif,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_r}^r &= \int_X |f(x)|^r d\mu(x) \\
&= \lambda^r \int_X \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^r d\mu(x) \\
&= \lambda^r \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| \leq 1\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^r d\mu(x) + \lambda^r \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| > 1\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^r d\mu(x) \\
&\leq \lambda^r \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| \leq 1\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^p d\mu(x) + \lambda^r \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| > 1\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^q d\mu(x) \\
&= \lambda^{r-p} \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| \leq 1\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \lambda^{r-q} \int_{\{|\frac{f}{\lambda}| > 1\}} |f(x)|^q d\mu(x) \\
&\leq \lambda^{r-p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \lambda^{r-q} \int_X |f(x)|^q d\mu(x) \\
&\leq \lambda^{r-p} \|f\|_{L_p}^p + \lambda^{r-q} \|f\|_{L_q}^q \\
&= g(\lambda)
\end{aligned}$$

avec $g(\lambda) = \lambda^{r-p}\|f\|_{L_p}^p + \lambda^{r-q}\|f\|_{L_q}^q$. Pour plus de clareté dans les prochains calculs, on note $a = \|f\|_{L_p}$ et $b = \|f\|_{L_q}$. On peut donc écrire $g(\lambda) = \lambda^{r-p}a^p + \lambda^{r-q}b^q$.

On va maintenant montrer que g admet un minimum global sur l'intervalle $]0, +\infty[$. La dérivée de g est donnée par : $g'(\lambda) = (r-p)\lambda^{r-p-1}a^p + (r -$

$q)\lambda^{r-q-1}b^q$. Et

$$\begin{aligned} g'(\lambda) = 0 &\iff (r-p)\lambda^{r-p-1}a^p + (r-q)\lambda^{r-q-1}b^q = 0 \\ &\iff (r-p)\lambda^{-p}a^p + (r-q)\lambda^{-q}b^q = 0 \\ &\iff (r-p)\lambda^{-p}a^p = (q-r)\lambda^{-q}b^q \\ &\iff \lambda^{q-p} = \frac{q-r}{r-p}b^q a^{-p} \\ &\iff \lambda = \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{1}{q-p}} b^{\frac{q}{q-p}} a^{\frac{-p}{q-p}} \end{aligned}$$

Comme, de plus, g est continue sur $]0,+\infty[$, et $g(\lambda) \longrightarrow +\infty$ lorsque $t \longrightarrow 0$ (par valeur supérieure) et lorsque $t \to +\infty$, g admet un minimum global sur $]0,+\infty[$ qui est atteint au point $\tilde{\lambda} = \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{1}{q-p}} b^{\frac{q}{q-p}} a^{\frac{-p}{q-p}}$.

Il reste donc à calculer la valeur $g(\tilde{\lambda})$.

$$\begin{aligned} g(\tilde{\lambda}) &= \tilde{\lambda}^{r-p}a^p + \tilde{\lambda}^{r-q}b^q \\ &= \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-p)}{q-p}} a^p + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}} b^{\frac{q(r-q)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} b^q \\ &= \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-p)+p(q-p)}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}} b^{\frac{q(r-q)+q(q-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} \\ &= \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-pr+pq}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}} b^{\frac{qr-qp}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} \\ &= \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}} b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} \\ &= \left(\left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}}\right) b^{\frac{q(r-p)}{q-p}} a^{\frac{-p(r-q)}{q-p}} \end{aligned}$$

On a obtenu

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \min_{\lambda>0} g(\lambda) = g(\tilde{\lambda})$$

Et en enlevant la puissance:

$$\|f\|_{L^r} \leq g(\tilde{\lambda})^{1/r} = \left(\left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}}\right)^{1/r} a^{\frac{-p(r-q)}{r(q-p)}} b^{\frac{q(r-p)}{r(q-p)}}$$

Posons $\theta = \frac{-p(r-q)}{r(q-p)}$. Alors, $1-\theta = 1 - \frac{-p(r-q)}{r(q-p)} = \frac{r(q-p)+p(r-q)}{r(q-p)} = \frac{rq-pq}{r(q-p)} = \frac{q(r-p)}{r(q-p)}$. Comme $1 < p \leq r \leq q < \infty$, on a $0 \leq \theta \leq 1$. De plus, on a $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{-(r-q)}{r(q-p)} + \frac{r-p}{r(q-p)} = \frac{1}{r}$. Par conséquent θ vérifie bien les hypothèses de la proposition et on peut réécrire l'inégalité de la façon suivante:

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-p}{q-p}} + \left(\frac{q-r}{r-p}\right)^{\frac{r-q}{q-p}}\right)^{1/r} \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Cette démonstration reste en annexe car la constante trouvée ne semble pas plus petite que 1. $\square$

Références

[1] Lars V. Ahlfors *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

[2] Loukas Grafakos, *Classical and modern Fourier Analysis*, Pearson Education, 2004.

[3] Elias M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.

[4] Elias M. Stein & Rami Shakarchi, *Real Analysis*, Princeton University Press, 2007.

Mai 2017

Borjan Geshkovski & Charlotte Rodriguez & Margherita Perna, *Master 1 Analyse, EDP, Probabilités, Université de Bordeaux.*