1. Na skupu $\mathbb{R}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je $(\mathbb{R}, *)$ Abelova grupa.

2. Na skupu $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \neq 0\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b).$$

Dokažite da je $(S, *)$ grupa. Je li to Abelova grupa? Obrazložite svoj odgovor.

3. Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(x, y) * (u, v) = (x + u, 2^u y + v).$$

Dokažite da je $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ grupa. Je li to Abelova grupa? Obrazložite!

4. Na skupu $G = \{x \in \mathbb{R}; x > 0, x \neq 1\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način: $x * y = x^{\log_5 y}$.

   (a) Dokažite da je $(G, *)$ Abelova grupa.

   (b) Je li skup $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ s operacijom $*$ grupa? Obrazložite!

5. Na skupu $G = \{x \in \mathbb{Q}; x \neq -1\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način: $x * y = x + y + xy$.

   (a) Dokažite da je $(G, *)$ Abelova grupa.

   (b) Je li skup $\mathbb{Q}$ s operacijom $*$ grupa? Obrazložite!

6. Dokažite da skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, čini grupu s obzirom na matrično množenje.

7. Zadani su skupovi

$$\begin{aligned} S &= \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \\ K_n &= \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\},\ n \text{ prirodan broj} \\ K &= \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \end{aligned}$$

   (a) Dokažite da S grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva.

   (b) Dokažite da je K_n podgrupa od S za svaki prirodan broj n.

   (c) Je li K podgrupa od S? Sve svoje tvrdnje dokažite!

8. Neka je X skup svih funkcija $f : S \to G$ sa skupa S u grupu $(G, \circ)$. Na X je definirana binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(f * g)(s) = f(s) \circ g(s), \qquad f, g \in X, s \in S.$$

Dokažite da je $(X, *)$ grupa.

9. Neka su a, b, c realni brojevi te neka je $\otimes$ binarna operacija definirana sa

$$x \otimes y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Za koje vrijednosti parametara a, b, c je $(\mathbb{R}, \otimes)$ polugrupa?
   (b) Za koje vrijednosti parametara a, b, c je $(\mathbb{R}, \otimes)$ grupa?

10. Odredite red

   (a) elementa $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ u grupi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$,
   (b) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$,
   (c) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17})$,
   (d) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot_{13})$,
   (e) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot_{17})$.

11. (a) Odredite sve elemente reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_{12}$.
   (b) Odredite sve elemente reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

12. (a) Odredite podgrupu od $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ generiranu elementom -1.
   (b) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_7, +_7)$ generiranu elementom 4.
   (c) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ generiranu elementom 6.
   (d) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_{17}^*, +_{17})$ generiranu elementom 13.

13. (a) Napišite sve elemente simetrične grupe S_3 stupnja 3.
   (b) Neka je $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$. Dokažite da je H podgrupa od S_3, ali nije normalna podgrupa od S_3.

14. Odredite podgrupu od S_7 generiranu

   (a) ciklusom $c = (1234)$. Koliki je red ciklusa c?
   (b) permutacijom $p = (123)(57)$. Koliki je red permutacije p?

15. Neka su H i K podgrupe grupe G. Dokažite da je $HK = \{hk;\ h \in H, k \in K\}$ podgrupa grupe G ako i samo ako je $HK = KH$.

16. Neka je H normalna podgrupa grupe G te neka su $a, b \in G$. Dokažite da vrijedi

$$ab \in H \Leftrightarrow ba \in H.$$

17. Neka je G grupa te neka je $Z(G) = \{g \in G;\ gh = hg, \forall h \in G\}$. Dokažite da je $Z(G)$ podgrupa od G. Mora li $Z(G)$ biti normalna podgrupa od G?

18. Neka je $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ multiplikativna grupa racionalnih brojeva različitih od nule, te neka je $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ preslikavanje zadano sa $\varphi(x) = x^2$. Dokažite da je φ homomorfizam grupa te mu odredite jezgru i sliku.

19. Je li grupa iz zadatka 6. izomorfna multiplikativnoj grupi realnih brojeva $\mathbb{R}^*$? Ukoliko jest, konstruirajte odgovarajući izomorfizam. Sve svoje tvrdnje dokažite!

20. Jesu li grupe $(\mathbb{Z}, +)$ i $(2\mathbb{Z}, +)$ izomorfne? Sve svoje tvrdnje dokažite!

21. (a) Dokažite da grupe $(\mathbb{Q}, +)$ i $(\mathbb{Z}, +)$ nisu izomorfne.
    (b) Dokažite da grupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ i $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nisu izomorfne.

22. (a) Jesu li grupe $\mathbb{Z}_{12}$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ izomorfne? Obrazložite!
    (b) Jesu li grupe $\mathbb{Z}_8$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ izomorfne? Obrazložite!

23. Neka je $(G, *)$ konačna grupa i $f : (G, *) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ homomorfizam grupa sa svojstvom da postoji $x_0 \in G$ takav da je $f(x_0) \neq 1$.

    (a) Dokažite da je funkcija $g : G \to R$ definirana sa $g(x) = x_0 * x$ bijekcija.
    (b) Služeći se tvrdnjom iz a) dijela zadatka, izračunajte

    $$\sum_{x \in G} f(x) \quad \text{i} \quad \sum_{x \in G \setminus \{e\}} f(x),$$

    pri čemu je e neutralni element u grupi G.