EUKLIDOV ALGORITAM. PROSTI BROJEVI

Zadaća 1.

1. Odredite $g = \text{nzd}(a, b)$ i nađite cijele brojeve x i y takve da je $ax + by = g$ ako je:
   (a) $a = 2541$, $b = 1134$,
   (b) $a = 4379$, $b = 3306$.

2. Odredite cijele brojeve m i n takve da je:
   (a) $314m + 159n = 1$,
   (b) $1245m - 1603n = 1$.

3. Provjerite postoje li cijeli brojevi m i n takvi da je:
   (a) $654m + 822n = -12$,
   (b) $515m + 5005n = 7$.

   Ukoliko takvi brojevi postoje odredite ih, u suprotnom obrazložite zašto takvi brojevi ne postoje.

4. Neka je r ostatak pri dijeljenju cijelog broja a prirodnim brojem b. Dokažite da je $\text{nzd}(a, b) = \text{nzd}(b, r)$.

5. Dokažite da se razlomak $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ne može skratiti ni za koji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.
   Uputa: Koristite Euklidov algoritam.

6. Odredite pomoću Erastotenovog sita sve proste brojeve manje od 200.

7. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $n^4 + 4$ prost broj.

8. Dokažite da za $n > 3$ brojevi n, $2n + 1$, $4n + 1$ nisu svi prosti.

9. Ako je p prost broj veći od 3, dokažite da je broj $p^2 - 1$ djeljiv s 24.
   Uputa: Uočite da svaki prost broj veći od 3 mora biti oblika $6k + 1$ ili $6k + 5$, $k \geq 0$.

10. Ako su p i $8p - 1$ prosti brojevi, dokažite da je $8p + 1$ složeni broj.

11. (a) S koliko nula završava broj 2013!
    (b) S koliko nula završava binomni koeficijent $\dbinom{4321}{1234}$?

12. (a) Je li binomni koeficijent $\dbinom{2013}{35}$ djeljiv s 49? Obrazložite!
    (b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\dfrac{2013!}{35^n}$ također prirodan broj.

13. Dokažite da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva n takvih da su brojevi $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$ relativno prosti.
    Uputa: Dokažite prvo da je $\text{nzd}(2n^2 + 3, n^2 + n + 1) = 1$ ili 7.