

# Diskretna matematika 2

## Zadaća 3

March 3, 2025

Borna Gojšić

---

1. Dokažite da je broj  $3^{105} + 4^{105}$  djeljiv sa 7 i 13, a nije djeljiv s 11.

**Rj:** Imamo  $\varphi(7) = 6$ ,  $\varphi(13) = 12$ ,  $\varphi(11) = 10$ . Dakle, imamo

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 3^3 + 4^3 \equiv 27 + 64 \equiv 91 \equiv 0 \pmod{7},$$

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 3^9 + 4^9 \equiv (3^3)^3 + (4^3)^3 \equiv 27^3 + 64^3 \equiv 1^3 + 12^3 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13},$$

pa je  $3^{105} + 4^{105}$  djeljiv s 7 i 13.

2. Odredite ostatak pri dijeljenju broja  $1111^{222} \cdot 33^{444}$  s brojem 19.

**Rj:** Znamo da je  $\varphi(19) = 18$ , pa je

$$1111^{222} \cdot 33^{444} \equiv 13^6 \cdot 14^{12} = (13 \cdot 196)^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 7 \pmod{19}$$

i stoga je ostatak pri dijeljenju broja  $1111^{222} \cdot 33^{444}$  s brojem 19 jednak 7.

3. Odredite ostatak pri dijeljenju broja  $73^{73}$  s brojem 38.

**Rj:**  $\varphi(38) = \varphi(2 \cdot 19) = 18$ , pa je

$$73^{73} \equiv 73^1 \equiv 35 \pmod{38}.$$

i stoga je ostatak pri dijeljenju broja  $73^{73}$  s brojem 38 jednak 35.

4. Odredite ostatak pri dijeljenju broja  $53^{181}$  s brojem 105.

**Rj:** Budući da je  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , imamo

$$53^{181} \equiv 2^{181} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$53^{181} \equiv 3^{181} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$53^{181} \equiv 4^{181} \equiv 4 \pmod{7}$$

Dakle, imamo sustav kongruencija:

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 4 \pmod{7}.$$

Rješavamo sustav kineskom teoremom o ostacima s  $m = 105$  i  $x_0 = 35x_1 + 21x_2 + 15x_3$ , gdje imamo

$$35x_1 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 21x_2 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 15x_3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

$$2x_1 \equiv 2 \pmod{3} \implies x_1 = 1$$

$$x_2 \equiv 3 \pmod{5} \implies x_2 = 3$$

$$x_3 \equiv 4 \pmod{7} \implies x_3 = 4$$

Dakle, imamo  $x_0 = 35 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 158$ , pa je  $53^{181} \equiv 158 \equiv 53 \pmod{105}$ .

5. Odredite ostatak pri dijeljenju broja  $314^{162}$  s brojem 165.

**Rj:** Budući da je  $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ , imamo

$$314^{162} \equiv 2^{162} \equiv 2^0 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$314^{162} \equiv (-1)^{162} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$314^{162} \equiv 6^{162} \equiv 6^2 \equiv 3 \pmod{11}$$

Sada rješavamo sustav kongruencija pomoću CRT:

$$5 \cdot 11x_1 \equiv 1 \implies x_1 \equiv 1 \pmod{3} \implies x_1 = -2$$

$$3 \cdot 11x_2 \equiv 1 \implies 3x_2 \equiv 1 \pmod{5} \implies x_2 = 2$$

$$3 \cdot 5x_3 \equiv 3 \implies 5x_3 \equiv 1 \pmod{11} \implies x_3 = 9$$

Dakle,  $x_0 = -2 \cdot 55 + 2 \cdot 33 + 9 \cdot 15 = 91$ , pa je  $314^{162} \equiv 91 \pmod{165}$ .

6. Odredite ostatak pri dijeljenju  $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5 + 100^5$  s 4.

**Rj:** Budući da je  $\varphi(4) = 2$ ,

$$\sum_{i=1}^{100} i^5 \equiv \sum_{i=1}^{100} i \equiv 25 \sum_{i=1}^4 i = 25 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

pa je ostatak sume pri dijeljenju s 4 jednak 2.

7. Odredite posljednje dvije znamenke broja  $53^{82}$ .

**Rj:** Znamo da je  $\varphi(100) = 40$ , pa je

$$53^{82} \equiv 53^2 \equiv 2809 \equiv 9 \pmod{100}.$$

Dakle, posljednje dvije znamenke broja  $53^{82}$  su 09.

8. Odredite posljednje dvije znamenke broja  $71^{245}$ .

**Rj:** Znamo da je  $\varphi(25) = 20$  i  $\varphi(4) = 2$ , pa je

$$\begin{aligned} 71^{245} &\equiv 71^5 \equiv (-4)^5 \equiv -4 \cdot 16^2 \equiv -4 \cdot (-9)^2 \equiv -4 \cdot 81 \equiv -4 \cdot 6 \equiv -24 \equiv 1 \pmod{25} \\ 71^{245} &\equiv (-1)^{245} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

Sada rješavamo sustav kongruencija pomoću CRT:

$$\begin{aligned} 4x_1 &\equiv 1 \pmod{25} \implies x_1 = 19 \\ 25x_2 &\equiv 3 \pmod{4} \implies x_2 \equiv 3 \pmod{4} \implies x_2 = -1 \end{aligned}$$

Dakle,  $x_0 = 4 \cdot 19 + 25 \cdot (-1) = 51$ . Dakle, posljednje dvije znamenke broja  $71^{245}$  su 51.

9. a) Odredite posljednje dvije znamenke broja  $14^{2012}$ .  
b) Odredite posljednje tri znamenke broja  $14^{2012}$ .

**Rj:**

a) Znamo da je  $\varphi(25) = 20$  i  $\varphi(4) = 2$ , pa je

$$\begin{aligned} 14^{2012} &\equiv 14^{12} \equiv 196^6 \equiv (-4)^6 \equiv 16^3 \equiv (-9)^3 \equiv -729 \equiv -4 \pmod{25} \\ 14^{2012} &\equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

Sada rješavamo sustav kongruencija pomoću CRT:

$$\begin{aligned} 4x_1 &\equiv -4 \pmod{25} \implies x_1 = -1 \\ 25x_2 &\equiv 0 \pmod{4} \implies x_2 \equiv 0 \pmod{4} \implies x_2 = 0 \end{aligned}$$

Dakle,  $x_0 = 4 \cdot (-1) + 25 \cdot 0 = -4 \equiv 96 \pmod{100}$ . Dakle, posljednje dvije znamenke broja  $14^{2012}$  su 96.

b) Znamo da je  $\varphi(125) = 100$  i  $\varphi(8) = 4$ , pa je

$$\begin{aligned} 14^{2012} &\equiv 14^{12} \equiv 196^6 \equiv (71)^6 \equiv 5041^3 \equiv 41^3 \equiv 46 \pmod{125} \\ 14^{2012} &\equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}$$

Sada rješavamo sustav kongruencija pomoću CRT:

$$\begin{aligned} 8x_1 &\equiv 46 \pmod{125} \implies x_1 = 37 \\ 125x_2 &\equiv 0 \pmod{8} \implies x_2 = 0 \end{aligned}$$

Dakle,  $x_0 = 8 \cdot 37 + 125 \cdot 0 = 296$ . Dakle, posljednje tri znamenke broja  $14^{2012}$  su 296.

10. Odredite posljednje tri znamenke broja  $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \dots + 1000^{2013}$ .

**Rj:**

$$(1000 - n)^{2013} + n^{2013} \equiv (-n)^{2013} + n^{2013} \equiv 0 \pmod{1000}$$

$$\sum_{i=1}^{1000} i^{2013} \equiv \sum_{i=1}^{1000} i = 1^{499} i^{2013} + 500^3 + \sum_{i=1}^{499} i = 1^{499} (1000 - i)^{2013} \equiv 0 \pmod{1000}$$

Dakle, posljednje tri znamenke su 000.

11. Neka je  $p$  neparan prost broj.

- a) Dokažite da je  $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ .  
 b) Dokažite da je  $1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$ .

**Rj:**

a)

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} 1 \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

b)

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i \equiv \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice da je  $p$  neparan, pa je  $p-1$  paran, pa je  $p \mid \frac{p(p-1)}{2}$ .

12. Neka su  $m$  i  $n$  relativno prosti prirodni brojevi. Dokažite da je tada

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn},$$

gdje je  $\varphi$  Eulerova funkcija.

**Rj:** Budući da imamo  $\text{nzd}(m, n) = 1$ , imamo  $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  i  $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , pa imamo

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{m}$$

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod{n}$$

Sada imamo  $m \mid m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} - 1$  i  $n \mid m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} - 1$ , pa je  $mn \mid m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} - 1$ .

13. Neka je  $p$  prost, te neka su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi takvi da je  $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ . Dokažite da je tada  $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ .

Uputa: Koristite identitet  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Rj:** Po malom Fermatovom teoremu, imamo:  $a^p \equiv a \pmod{p}$  i  $b^p \equiv b \pmod{p}$ . Dakle,

$$a \equiv b \pmod{p}$$

Onda imamo  $a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1} \equiv p \cdot a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ . Dakle, imamo  $p \mid a - b$  i  $p \mid a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1}$ . Stoga  $p^2 \mid (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$ , tj.  $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ .