Diskretna matematika 2

Zadaća 1

February 28, 2025

Borna Gojšić

---

1. Odredite $g = \text{nzd}(a, b)$ i nađite cijele brojeve x i y takve da je $ax + by = g$ ako je:
   a) $a = 2541$, $b = 1134$,
   b) $a = 4379$, $b = 3306$.

Rj: Koristit ćemo prošireni Euklidov algoritam za određivanje g i x, y.

a)

x	y	g	u	v	w	$\left\lfloor \frac{g}{w} \right\rfloor$
1	0	2541	0	1	1134	2
0	1	1134	1	-2	273	4
1	-2	273	-4	9	42	6
-4	9	42	25	-56	21	2
25	-56	21			0	

Dakle, $\text{nzd}(2541, 1134) = 21$ i $2541 \cdot 25 + 1134 \cdot (-56) = 3$.

b)

x	y	g	u	v	w	$\left\lfloor \frac{g}{w} \right\rfloor$
1	0	4379	0	1	3306	1
0	1	3306	1	-1	1073	3
1	-1	1073	-3	4	87	12
-3	4	87	37	-49	29	3
37	-49	29			0	

Dakle, $\text{nzd}(4379, 3306) = 29$ i $4379 \cdot 37 + 3306 \cdot (-49) = 29$.

2. Odredite cijele brojeve m i n takve da je:
   a) $314m + 159n = 1$,
   b) $1245m - 1603n = 1$.

Rj: Ovaj ćemo zadatak također riješiti proširenim Euklidovim algoritmom.

a)

x	y	g	u	v	w	$\left\lfloor \frac{g}{w} \right\rfloor$
1	0	314	0	1	159	1
0	1	159	1	-1	155	1
1	-1	155	-1	2	4	38
-1	2	4	39	-77	3	1
39	-77	3	-40	79	1	3
-40	79	1			0	

Dakle, $314 \cdot (-40) + 159 \cdot 79 = 1$, tj. $m = -40$, $n = 79$.

b)

x	y	g	u	v	w	$\lfloor \frac{g}{w} \rfloor$
1	0	1603	0	1	1245	1
0	1	1245	1	-1	358	3
1	-1	358	-3	4	171	2
-3	4	171	7	-9	16	10
7	-9	16	-73	94	11	1
-73	94	11	80	-103	5	2
80	-103	5	-233	300	1	5
-233	300	1			0	

Dakle, $1603 \cdot (-233) + 1245 \cdot 300 = 1$, tj. $m = 300$, $n = 233$.

3. Provjerite postoje li cijeli brojevi m i n takvi da je:
   a) $654m + 822n = -12$,
   b) $515m + 5005n = 7$.

   Ukoliko takvi brojevi postoje odredite ih, u suprotnom obrazložite zašto takvi brojevi ne postoje.

Rj:

a) Postavit ćemo jednadžbu

$$822n + 654m = -12$$
$$137n + 109m = -2$$

Budući da je $\text{nzd}(137, 109) = 1$, možemo koristiti prošireni Euklidov algoritam na jednadžbi

$$137x + 109y = 1$$

i dobiti rješenje uz $m = -2y$, $n = -2x$.

x	y	g	u	v	w	$\lfloor \frac{g}{w} \rfloor$
1	0	137	0	1	109	1
0	1	109	1	-1	28	3
1	-1	28	-3	4	25	1
-3	4	25	4	-5	3	8
4	-5	3	-35	44	1	3
-35	44	1			0	

Dakle, imamo $137 \cdot (-35) + 109 \cdot 44 = 1$, tj. $m = -88$, $n = 70$.

b) Ako rješenje postoji, to znači da za $g = \text{nzd}(515, 5005)$ vrijedi da $g \mid 7$, ali budući da očito $5 \mid g$, po tranzitivnosti relacija "biti djeljiv" trebali bismo imati $5 \mid 7$, ali to je kontradikcija. Dakle, rješenje ne postoji.

4. Neka je r ostatak pri dijeljenju broja $a \in \mathbb{Z}$ brojem $b \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $\text{nzd}(a, b) = \text{nzd}(b, r)$.

Rj: Neka je $g = \text{nzd}(a, b)$ i $d = \text{nzd}(b, r)$. Budući da je r ostatak pri dijeljenju, imamo $r = a - bq$ za neki $q \in \mathbb{Z}$. Budući da $g \mid a$ i $g \mid b$, imamo $g \mid a - bq = r$ pa imamo i $g \mid d$. S druge strane, $d \mid b$ i $d \mid r$ te imamo $a = bq + r$ pa imamo i $d \mid a$, tj. $d \mid g$. Dakle, budući da je nzd po definciji $\in \mathbb{N}$, imamo $d = g$.

5. Dokažite da se razlomak $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ne može skratiti ni za koji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.
Uputa: Koristite Euklidov algoritam.

1. Rj:

a	b	$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$
21n + 4	14n + 3	1
14n + 3	7n + 1	2
7n + 1	1	7n + 1
1	0	

Dakle, $\text{nzd}(21n + 4, 14n + 3) = 1$ pa se razlomak ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

2. Rj: Razlomak se ne može skratiti ako je $g = \text{nzd}(21n + 4, 14n + 3) = 1$. Dakle, ako postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je za sve n vrijedi

$$(21n + 4)x + (14n + 3)y = 1$$
$$(21x + 14y)n + 4x + 3y = 1$$

znamo da $1 \mid g$ pa je $g = 1$. Dakle, moramo imati $21x + 14y = 0$ i $4x + 3y = 1$. Prva jednadžba daje $7(3x + 2y) = 0$, što znači da je $3x + 2y = 0$. Dakle, uvrštavanjem u prvu jednadžbu pomnoženu s 2 imamo

$$\begin{aligned} 8x + 3 \cdot 2y &= 2 \\ 8x + 3 \cdot (-3x) &= 2 \\ 8x - 9x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Dakle, za $x = -2$ i $y = 3$, imamo $g = 1$, tj. razlomak se ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

6. Odredite pomoću Erastotenovog sita sve proste brojeve manje od 200.

Rj: Pomoću Erastotenovog sita odredimo sve proste brojeve manje od 200.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~
~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~
~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~	151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~
157	~~158~~	~~159~~	~~160~~	~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~
~~169~~	~~170~~	~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~	191	~~192~~
193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~				

7. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $n^4 + 4$ prost broj.

Rj:

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (n^2)^2 + 2^2 = (n^2)^2 + 4n^2 + 2^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) \end{aligned}$$

n^4+4 može biti prost ako i samo je jedan od njegovih faktora 1, a drugi prost. Dakle, pogledajmo $n^2 \pm 2n + 2 = 1$.

$$\begin{aligned} n^2 \pm 2n + 1 &= 0 \\ (n \pm 1)^2 &= 0 \\ n \pm 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, $n^4 + 4$ je prost broj samo za $n = 1$.

8. Dokažite da za $n > 3$ brojevi n, $2n+1$, $4n+1$ nisu svi prosti.

Rj: Pretpostavimo da je n prost, inače je tvrdnja trivijalna. Ako je $n > 3$ prost broj onda ga možemo zapisati kao $3k+1$ ili $3k+2$.

1. Ako je $n = 3k+1$, tada je $2n+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$, što nije prost broj.
2. Ako je $n = 3k+2$, tada je $4n+1 = 12k+9 = 3(4k+3)$, što također nije prost broj.

9. Ako je p prost broj veći od 3, dokažite da je broj $p^2 - 1$ djeljiv s 24.
Uputa: Uočite da svaki prost broj veći od 3 mora biti oblika $6k+1$ ili $6k+5$, $k \geq 0$.

Rj:

1. Ako je $p = 6k+1$, onda imamo
$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (6k+1)^2 - 1 = 36k^2 + 12k + 1 - 1 \\ &= 36k^2 + 12k = 12k(3k+1) \end{aligned}$$
Znamo da je k ili paran ili neparan. Ako je neparan, onda je $3k+1$ paran, pa imamo $2 \mid k(3k+1)$. Dakle, imamo i $24 \mid p^2 - 1$.
2. Ako je $p = 6k+5$, onda imamo
$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (6k+5)^2 - 1 = 36k^2 + 60k + 25 - 1 \\ &= 36k^2 + 60k + 24 = 12k(3k+5) + 24 \end{aligned}$$
Slično kao u prošlom slučaju imamo $2 \mid k(3k+5)$, pa $24 \mid p^2 - 1$.

10. Ako su p i $8p-1$ prosti brojevi, dokažite da je $8p+1$ složeni broj.

Rj: Prvo ćemo provjeriti slučajeve $p = 2$ i $p = 3$. Za $p = 2$ imamo $8p - 1 = 15$ što nije prost broj. Za $p = 3$ imamo $8p - 1 = 23$ što je prost broj, a $8p + 1 = 25$ što je složen broj. Dakle, pretpostavimo da je $p > 3$. Sada znamo da možemo pisati $p = 3k+1$ ili $p = 3k+2$.

1. Ako je $p = 3k+1$, tada imamo $8p + 1 = 24k + 8 + 1 = 3(8k+3)$, što je složen broj.
2. Ako je $p = 3k+2$, tada imamo $8p - 1 = 24k + 16 - 1 = 3(8k+5)$ što nije prost broj pa uvjet nije zadovoljen.

11. a) S koliko nula završava broj 2013!?

b) S koliko nula završava binomni koeficijent $\binom{4321}{1234}$?

Rj:

a) $\nu_5(2013!) = \lfloor \frac{2013}{5} \rfloor + \lfloor \frac{2013}{25} \rfloor + \lfloor \frac{2013}{125} \rfloor + \lfloor \frac{2013}{625} \rfloor = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$. Dakle, broj 2013! završava s 501 nulom.

b)

$$\begin{aligned}
\nu_5\left(\binom{4321}{1234}\right) &= \nu_5\left(\frac{4321!}{1234!(4321-1234)!}\right) \\
&= \nu_5(4321!) - \nu_5(1234!) - \nu_5(3087!) \\
&= \left\lfloor\frac{4321}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{4321}{25}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{4321}{125}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{4321}{625}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{4321}{3125}\right\rfloor \\
&- \left\lfloor\frac{1234}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1234}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1234}{125}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1234}{625}\right\rfloor \\
&- \left\lfloor\frac{3087}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3087}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3087}{125}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3087}{625}\right\rfloor \\
&= 864 + 172 + 34 + 6 + 1 - 246 - 49 - 9 - 1 - 617 - 123 - 24 - 4 = 4
\end{aligned}$$

Dakle, binomni koeficijent $\binom{4321}{1234}$ završava s 4 nule.

12. a) Je li binomni koficijent $\binom{2013}{35}$ djeljiv s 49? Obrazložite!

b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\frac{2013!}{35^n}$ također prirodan broj.

Rj:

a)

$$\begin{aligned}
\nu_7\left(\binom{2013}{35}\right) &= \nu_7\left(\frac{2013!}{35!(2013-35)!}\right) \\
&= \nu_7(2013!) - \nu_7(35!) - \nu_7(1978!) \\
&= \left\lfloor\frac{2013}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2013}{49}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2013}{343}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{35}{7}\right\rfloor \\
&- \left\lfloor\frac{1978}{7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1978}{49}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1978}{343}\right\rfloor \\
&= 287 + 41 + 5 - 5 - 282 - 40 - 5 = 1
\end{aligned}$$

Dakle, binomni koeficijent $\binom{2013}{35}$ nije djeljiv s 49.

b)

$$\nu_7(2013!) = \left\lfloor\frac{2013}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2013}{49}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2013}{343}\right\rfloor = 287 + 41 + 5 = 333$$

Iz 11.a znamo da je $\nu_5(2013!) = 501$, pa je $\nu_{35}(2013!) = \min\{333, 501\} = 333$. Dakle, $\frac{2013!}{35^n}$ je prirodan broj za $n \leq 333$.

13. Dokažite da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva n takvih da su brojevi $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$ relativno prosti.
Uputa: Dokažite prvo da je $\mathrm{nzd}(2n^2 + 3, n^2 + n + 1) = 1$ ili 7.

Rj: Neka je $g = \mathrm{nzd}(2n^2 + 3, n^2 + n + 1)$. Budući da je $(2n^2 + 3) \cdot (-1) + (n^2 + n + 1) \cdot 2 = -2n^2 - 3 + 2n^2 + 2n + 2 = 2n - 1$, imamo $g \mid 2n - 1$. Nadalje, imamo $g \mid g' = \mathrm{nzd}(n^2 + n + 1, 2n - 1)$. Budući da je $(n^2 + n + 1) \cdot 2 - (2n - 1) \cdot (n + 1) = 2n^2 + 2n + 2 - 2n^2 - n + 1 = n + 3$, imamo $g' \mid n + 3$. Nadalje, imamo $g' \mid g'' = \mathrm{nzd}(2n - 1, n + 3)$ te $(2n - 1) \cdot (-1) + (n + 3) \cdot 2 = -2n + 1 + 2n + 6 = 7$, pa imamo $g'' \mid 7$. Budući da imamo $g|g'$, $g'|g''$ i $g''|7$, imamo $g|7$, tj. $g = 1$ ili $g = 7$. Ako uzmemo $n = 7k$, očito je da $7 \nmid 2n^2 + 3$ pa je $g = 1$. Budući da viškratnika ima beskonačno mnogo, imamo beskonačno mnogo n takvih da su brojevi $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$ relativno prosti.