Diskretna matematika 2

Zadaća 8

March 18, 2025

Borna Gojšić

---

1. Na skupu $\mathbb{R}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći na

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Dokažite da je $(\mathbb{R}, *)$ Abelova grupa.

Rj:

1. **Zatvorenost:** Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$ jer je treći korijen realan broj.
2. **Asocijativnost:** Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$x * (y * z) = x * \sqrt[3]{y^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$$
$$(x * y) * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3} * z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$$

   Dakle, $x * (y * z) = (x * y) * z$.
3. **Neutralni element:** Neka je $e = 0$. Tada je $x * e = \sqrt[3]{x^3 + 0^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$ i $e * x = \sqrt[3]{0^3 + x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$. Dakle, $e = 0$ je neutralni element.
4. **Inverz:** Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je $x * (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} = \sqrt[3]{x^3 - x^3} = \sqrt[3]{0} = 0$ i $(-x) * x = \sqrt[3]{(-x)^3 + x^3} = \sqrt[3]{-x^3 + x^3} = \sqrt[3]{0} = 0$. Dakle, $-x$ je inverz za x.
5. **Komutativnost:** Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x$$

   Dakle, $x * y = y * x$.

Dakle, $(\mathbb{R}, *)$ je Abelova grupa.

2. Na skupu $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \neq 0\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Dokažite da je $(S, *)$ grupa. Je li to Abelova grupa? Obrazložite!

Rj:

1. **Zatvorenost:** Neka su $(a, b), (c, d) \in S$. Tada je $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b) \in S$ jer je $ac \neq 0$.

2. **Asocijativnost:** Neka su $(a, b), (c, d), (e, f) \in S$. Tada je

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (ce, cf + d) = (ace, acf + ad + b)$$
$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac, ad + b) * (e, f) = (ace, acf + ad + b)$$

Dakle, $(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = ((a, b) * (c, d)) * (e, f)$.

3. **Neutralni element:** Neka je $e = (1, 0)$. Tada je $(a, b) * e = (a, b) * (1, 0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a, b)$ i $e * (a, b) = (1, 0) * (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0) = (a, b)$. Dakle, $e = (1, 0)$ je neutralni element.

4. **Inverz:** Neka je $(a, b) \in S$. Tada je

$$(a, b) * \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, a \cdot \frac{-b}{a} + b\right) = (1, 0) = e$$
$$\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) * (a, b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a, \frac{1}{a} \cdot b + \frac{-b}{a}\right) = (1, 0) = e$$

Dakle, $(S, *)$ je grupa. Da bi bila Abelova grupa, mora vrijediti i komutativnost. Neka su $(a, b), (c, d) \in S$. Tada je

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b) \neq (ca, cb + d) = (c, d) * (a, b)$$

Dakle, $(S, *)$ nije Abelova grupa.

3. Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(x, y) * (u, v) = (x + u, 2^u y + v)$$

Dokažite da je $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ grupa. Je li to Abelova grupa? Obrazložite!

Rj:

1. **Zatvorenost:** Neka su $(x, y), (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. Tada je $(x, y) * (u, v) = (x + u, 2^u y + v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ jer je $x + u \in \mathbb{Z}$ i $2^u y + v \in \mathbb{Q}$.

2. **Asocijativnost:** Neka su $(x, y), (u, v), (w, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. Tada je

$$(x, y) * ((u, v) * (w, z)) = (x, y) * (u + w, 2^w v + z) = (x + u + w, 2^{u+w} y + 2^w v + z)$$
$$((x, y) * (u, v)) * (w, z) = (x + u, 2^u y + v) * (w, z) = (x + u + w, 2^w (2^u y + v) + z)$$

Dakle, $(x, y) * ((u, v) * (w, z)) = ((x, y) * (u, v)) * (w, z)$.

3. **Neutralni element:** Neka je $e = (0,0)$. Tada je

$$(x,y) * e = (x,y) * (0,0) = (x+0, 2^0 \cdot y + 0) = (x,y)$$
$$e * (x,y) = (0,0) * (x,y) = (0+x, 2^x \cdot 0 + y) = (x,y)$$

Dakle, $e = (0,0)$ je neutralni element.

4. **Inverz:** Neka je $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. Tada je

$$(x,y) * (-x, -2^{-x}y) = (x + (-x), 2^{-x}y + (-2^{-x}y)) = (0,0) = e$$
$$(-x, -2^{-x}y) * (x,y) = (-x+x, 2^x(-2^{-x}y) + y) = (0,0) = e$$

Dakle, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ je grupa. Da bi bila Abelova grupa, mora vrijediti i komutativnost. Neka su $(x,y), (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. Tada je

$$(x,y) * (u,v) = (x+u, 2^u y + v) \neq (u+x, 2^x v + y) = (u,v) * (x,y)$$

Dakle, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ nije Abelova grupa.

4. Na skupu $G = \{x \in \mathbb{R}; x > 0, x \neq 1\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način: $x * y = x^{\log_5 y}$.
   a) Dokažite da je $(G, *)$ Abelova grupa.
   b) Je li $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ s operacijom $*$ grupa? Obrazložite!

Rj:

a)
1. **Zatvorenost:** Neka su $x, y \in G$. Tada je $x * y = x^{\log_5 y} > 0$ jer je $x > 0$ i $y > 0$.
2. **Asocijativnost:** Neka su $x, y, z \in G$. Tada je

$$x * (y * z) = x * y^{\log_5 z} = x^{\log_5 y^{\log_5 z}} = x^{\log_5 y \cdot \log_5 z} = 5^{log_5 x \cdot \log_5 y \cdot \log_5 z}$$
$$(x * y) * z = x^{\log_5 y} * z = (x^{\log_5 y})^{\log_5 z} = x^{\log_5 y \cdot \log_5 z} = 5^{log_5 x \cdot \log_5 y \cdot \log_5 z}$$

Dakle, $x * (y * z) = (x * y) * z$.

3. **Neutralni element:** Neka je $e = 5$. Tada je

$$x * e = x * 5 = x^{\log_5 5} = x^1 = x$$
$$e * x = 5 * x = 5^{\log_5 x} = x$$

Dakle, $e = 5$ je neutralni element.

4. **Inverz:** Neka je $x \in G$. Tada je

$$x * 5^{\frac{1}{\log_5 x}} = x^{log_5\left(5^{\frac{1}{\log_5 x}}\right)} = x^{\frac{1}{\log_5 x}} = 5^{log_5 x \cdot \frac{1}{\log_5 x}} = 5 = e$$
$$5^{\frac{1}{\log_5 x}} * x = \left(5^{\frac{1}{\log_5 x}}\right)^{\log_5 x} = 5^{\frac{1}{\log_5 x} \cdot \log_5 x} = 5 = e$$

5. **Komutativnost:** Neka su $x, y \in G$. Tada je

$$x * y = x^{\log_5 y} = 5^{\log_5 x \cdot \log_5 y} = 5^{\log_5 y \cdot \log_5 x} = y^{\log_5 x} = y * x$$

Dakle, $(G, *)$ je Abelova grupa.

b) Neka je $x = 1$. Tada je $x * y = 1 = y * x$ za sve $y \in \mathbb{R}^+$. Ali, onda nemamo jedinstveni inverz za element $1 \in \mathbb{R}^+$ pa $(\mathbb{R}^+, *)$ nije grupa.

5. Na skupu $G = \{x \in \mathbb{Q}; x \neq -1\}$ definirana je binarna operacija $*$ na sljedeći način: $x*y = x+y+xy$.
   a) Dokažite da je $(G, *)$ Abelova grupa.
   b) Je li $(\mathbb{Q}, *)$ grupa? Obrazložite!

Rj:

a)
1. **Zatvorenost:** Neka su $x, y \in G$. Tada je $x*y = x+y+xy \in \mathbb{Q}$ jer je zbroj i umnožak racionalnih brojeva također racionalan broj.
2. **Asocijativnost:** Neka su $x, y, z \in G$. Tada je

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$
$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

   Dakle, $x * (y * z) = (x * y) * z$.
3. **Neutralni element:** Neka je $e = 0$. Tada je

$$x * e = x * 0 = x + 0 + x \cdot 0 = x$$
$$e * x = 0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x$$

   Dakle, $e = 0$ je neutralni element.
4. **Inverz:** Neka je $x \in G$. Tada je

$$x * \frac{-x}{1+x} = x + \frac{-x}{1+x} + x \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{x(1+x) - x - x^2}{1+x} = 0 = e$$
$$\frac{-x}{1+x} * x = \frac{-x}{1+x} + x + \frac{-x}{1+x} \cdot x = \frac{-x + x(1+x) - x^2}{1+x} = 0 = e$$

5. **Komutativnost:** Neka su $x, y \in G$. Tada je

$$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x$$

Dakle, $(G, *)$ je Abelova grupa.

b) Neka je $x = -1$. Tada je $x * y = -1 + y - y = -1 = y * x$ za sve $y \in \mathbb{Q}$. Ali, onda nemamo jedinstveni inverz za element $-1 \in \mathbb{Q}$ pa $(\mathbb{Q}, *)$ nije grupa.

6. Dokažite da skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ čini grupu s obzirom na matrično množenje.

Rj:

1. **Zatvorenost:** Neka su $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^*$ i $\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}^*$. Tada je

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je dobivena matrica traženog oblika.

2. **Asocijativnost:** Neka su $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^*$, $\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}^*$ i $\begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}^*$. Tada je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} yz & yz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xyz & xyz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xy & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dakle, $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Neutralni element:** Neka je $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tada je

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot 1 + x \cdot 0 & x \cdot 1 + x \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot 0 & 1 \cdot x + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot 0 & 0 \cdot x + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je neutralni element.

4. **Inverz:** Neka je $X = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Tada je

$$X \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \frac{1}{x} + x \cdot 0 & x \cdot \frac{1}{x} + x \cdot 0 \\ 0 \cdot \frac{1}{x} + 0 \cdot 0 & 0 \cdot \frac{1}{x} + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \cdot x + \frac{1}{x} \cdot 0 & \frac{1}{x} \cdot x + \frac{1}{x} \cdot 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot 0 & 0 \cdot x + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$$

Dakle, skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^*$ čini grupu s obzirom na matrično množenje.

7. Zadani su skupovi

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$
$$K_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$$
$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

a) Dokažite da je S grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva.

b) Dokažite da je K_n podgrupa od S za svaki $n \in \mathbb{N}$.

c) Je li K podgrupa od S? Sve svoje tvrdnje dokažite!

Rj:

a)
1. **Zatvorenost:** Neka su $z, w \in S$. Tada je $|z| = 1$ i $|w| = 1$. Dakle, $|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1$ pa je $zw \in S$.
2. **Asocijativnost:** Neka su $z, w, u \in S$. Tada je $(zw)u = z(wu)$ jer je množenje kompleksnih brojeva asocijativno.
3. **Neutralni element:** Neka je $e = 1$. Tada je $ze = z \cdot 1 = 1 \cdot z = ez = z$ za svaki $z \in S$.
4. **Inverz:** Neka je $z \in S$. Tada je $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ pa je $\frac{1}{z}$ inverz za z i $\frac{1}{z} \in S$ jer je $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$.

Dakle, S je grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva.

b)
1. **Zatvorenost:** Neka su $z, w \in K_n$. Tada je $z^n = 1$ i $w^n = 1$. Dakle, $(zw)^n = z^n w^n = 1 \cdot 1 = 1$ pa je $zw \in K_n$.
2. **Asocijativnost:** Neka su $z, w, u \in K_n$. Tada je $(zw)u = z(wu)$ jer je množenje kompleksnih brojeva asocijativno.
3. **Neutralni element:** Neka je $e = 1$. Tada je $ze = z \cdot 1 = 1 \cdot z = ez = z$ za svaki $z \in K_n$. Dakle, $e = 1$ je neutralni element.
4. **Inverz:** Neka je $z \in K_n$. Tada je $z \cdot z^{n-1} = z^{n-1} \cdot z = z^n = 1$ pa je z^{n-1} inverz za z i $z^{n-1} \in K_n$.

Dakle, K_n je grupa za sve $n \in \mathbb{N}$. Očito je $K_n \subseteq S$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, K_n je podgrupa od S za svaki $n \in \mathbb{N}$.

c) Očito je $K \subseteq S$. Neka je $z \in K_n$ i $w \in K_m$. Tada su $z, w \in K$ i imamo

$$(z \cdot w^{-1})^{mn} = (z^n)^m \cdot (w^m)^{-n} = 1 \implies z \cdot w^{-1} \in K_{mn} \implies z \cdot w^{-1} \in K$$

Dakle, K je podgrupa od S.

8. Neka je X skup svih funkcija $f : S \to G$ sa skupa S u grupu $(G, \circ)$. Na X je definirana binarna operacija $*$ na sljedeći način:

$$(f * g)(s) = f(s) \circ g(s), \quad f, g \in X, s \in S$$

Dokažite da je $(X, *)$ grupa.

Rj:

1. **Zatvorenost:** Neka su $f, g \in X$ i $s \in S$. Tada je $(f * g)(s) = f(s) \circ g(s) \in G$ jer je $f(s), g(s) \in G$ pa je $f * g \in X$.

2. **Asocijativnost:** Neka su $f, g, h \in X$ i $s \in S$. Tada je

$$((f * g) * h)(s) = (f * g)(s) \circ h(s) = (f(s) \circ g(s)) \circ h(s) = f(s) \circ g(s) \circ h(s)$$
$$(f * (g * h))(s) = f(s) \circ (g * h)(s) = f(s) \circ (g(s) \circ h(s)) = f(s) \circ g(s) \circ h(s)$$

Dakle, $((f * g) * h)(s) = (f * (g * h))(s)$.

3. **Neutralni element:** Neka je $e(s) = e \in G$ za svaki $s \in S$. Tada je

$$(f * e)(s) = f(s) \circ e = f(s)$$
$$(e * f)(s) = e \circ f(s) = f(s)$$

Dakle, $e \in X$ je neutralni element.

4. **Inverz:** Neka je $f \in X$. Neka je $g(s) = f(s)^{-1}$ za svaki $s \in S$. Tada je

$$(f * g)(s) = f(s) \circ g(s) = f(s) \circ f(s)^{-1} = e = e(s)$$
$$(g * f)(s) = g(s) \circ f(s) = f(s)^{-1} \circ f(s) = e = e(s)$$

Dakle, $g \in X$ je inverz za f.

Dakle, $(X, *)$ je grupa.

9. Neka su a, b, c realni brojevi te neka je $\otimes$ binarna operacija definirana sa

$$x \otimes y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

a) Za koje vrijednosti parametara a, b, c je $(\mathbb{R}, \otimes)$ polugrupa?
b) Za koje vrijednosti parametara a, b, c je $(\mathbb{R}, \otimes)$ grupa?

Rj:

a)
1. **Zatvorenost:** Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je očito $x \otimes y = ax + by + c \in \mathbb{R}$.
2. **Asocijativnost:** Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes z &= (ax + by + c) \otimes z = a(ax + by + c) + bz + c \\ &= a^2x + aby + bz + ac + c \\ x \otimes (y \otimes z) &= x \otimes (ay + bz + c) = ax + b(ay + bz + c) + c = ax + aby + b^2z + bc + c\end{aligned}$$

Budući da $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ mora vrijediti za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$, imamo sustav:

$$\begin{aligned}a^2 &= a \\ ab &= ab \\ b &= b^2 \\ ac + c &= bc + c\end{aligned}$$

Dakle, imamo $b = a$, $a \in \{0, 1\}$ i $c \in \mathbb{R}$ ili $b \neq a$, $a, b \in \{0, 1\}$ i $c = 0$.

b) Imamo dva slučaja:

1. Ako je $b = a$, $a \in \{0, 1\}$ i $c \in \mathbb{R}$ onda imamo $x \otimes y = a(x + y) + c$
   (a) **Neutralni element:**

$$x \otimes e = a(x + e) + c = x \implies e = -\frac{c}{a}$$
$$e \otimes x = a\left(-\frac{c}{a} + x\right) + c = x \quad \checkmark$$

   (b) **Inverz:**

$$x \otimes x^{-1} = a(x + x^{-1}) + c = e = -\frac{c}{a}$$
$$x^{-1} = -\frac{\frac{c}{a} + c}{a} - x = -\frac{ac + c}{a^2} - x$$

$$x^{-1} \otimes x = a\left(-\frac{ac + c}{a^2} - x + x\right) + c = -c - \frac{c}{a} + c = -\frac{c}{a} = e \quad \checkmark$$

   Dakle, u ovom slučaju imamo $a = b = 1$ i $c \in \mathbb{R}$.
2. Ako je $b \neq a$, $a, b \in \{0, 1\}$ i $c = 0$ imamo $x \otimes y = x$ ili $x \otimes y = y$. Ni u jednom slučaju nemamo jedinstveni inverz pa u ovom slučaju $(\mathbb{R}, \otimes)$ nije grupa.

Dakle, $(\mathbb{R}, \otimes)$ je grupa ako je $a = b = 1$ i $c \in \mathbb{R}$.

10. Odredite red
   a) elementa $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ u grupi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   b) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$.
   c) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17})$.
   d) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot_{13})$.
   e) elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot_{17})$.

Rj: Red elementa a u grupi $(G, \circ)$ je najmanji pozitivni cijeli broj r takav da je $a^r = e_G$.

a) Znamo da je $e = 1 = e^{2\pi i}$ neutralni element u grupi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ i da je $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$. Dakle, red elementa $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ je 8.

b) Red elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ je najmanji prirodni broj r takav da je $10r \equiv 0 \pmod{15}$, tj. $2r \equiv 0 \pmod 3$. Dakle, red elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ je 3.

c) $10r \equiv 0 \pmod{17}$, tj. $r \equiv 0 \pmod{17}$. Dakle, red elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17})$ je 17.

d)
$$10^2 = 100 \equiv 9, \quad 10^4 \equiv 81 \equiv 3, \quad 10^6 \equiv 9 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{13}$$

Dakle, red elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot_{13})$ je 6.

e)
$$10^2 \equiv 100 \equiv 15, \quad 10^4 \equiv 225 \equiv 4, \quad 10^8 \equiv 16 \equiv -1, \quad 10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

Dakle, red elementa 10 u grupi $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot_{17})$ je 16, tj. 10 je primitivni korijen modulo 17.

11. a) Odredite sve elemente reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_{12}$.
   b) Odredite sve elemente reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

Rj:

a) Ovo je ekvivalnetno nalaženju x za koje je $12x \equiv 0 \pmod{12}$, ali $mx \not\equiv 0 \pmod{12}$ za svaki $m < 12$. Dakle, znamo da x mora biti relativno prost s 12, tj. $x \in \{1, 5, 7, 11\}$. Pretpostavimo da za neki od ovih x postoji $m < 12$ takav da je $mx \equiv 0 \pmod{12}$. To znači da je $mx = 12k$, dakle moramo imati $x \mid \frac{12}{\text{nzd}(12,m)}$, ali budući da svi ovi x relativno prosti sa svakim djeliteljem od 12 to nije moguće. Dakle, svi elementi reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_{12}$ su $1, 5, 7, 11$.

b) Ako je $x = (a, b)$ element reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, onda moramo imati to da je a element reda 3 u grupi $\mathbb{Z}_3$ i b element reda 4 u grupi $\mathbb{Z}_4$. Dakle, svi elementi reda 12 u grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ su $(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$.

12. a) Odredite podgrupu od $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ generiranu elementom -1.
   b) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_7, +_7)$ generiranu elementom 4.
   c) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ generiranu elementom 6.
   d) Odredite podgrupu od $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot_{17})$ generiranu elementom 13.

Rj:

a)

$$\langle -1 \rangle = \{(-1)^n ; n \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\}$$

b)

$$\langle 4 \rangle = \{4n ; n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 4, 1, 5, 2, 6, 3\} = \mathbb{Z}_7$$

c)

$$\langle 6 \rangle = \{6n ; n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 6, 4, 2\}$$

d)

$$\langle 13 \rangle = \{13^n ; n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 13, 16, 4, 1\}$$

13. a) Napišite sve elemente simetrične grupe S_3 stupnja 3.
   b) Neka je $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$. Dokažite da je H podgrupa od S_3, ali nije normalna podgrupa od S_3.

Rj:

a) Svi elementi simetrične grupe S_3 stupnja 3 su:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) H je očito posdkup od S_3 i oba elementa su sami svoji inverzi. Dakle, za svaki par $A, B \in H$, imamo $A \circ B^{-1} \in H$ pa je $H \leq S_3$. Neka je $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ koja je sama sebi inverz. Tada je

$$\begin{aligned} C \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \notin H \end{aligned}$$

Dakle, H nije normalna podgrupa od S_3.

14. Odredite podgrupu od S_7 generiranu
    a) ciklusom $c = (1234)$. Koliki je red ciklusa c?
    b) permutacijom $p = (123)(57)$. Koliki je red permutacije p?

Rj:

a)

$$\langle c\rangle = \{(1234)^n; n \in \mathbb{Z}\} = \{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$$

Dakle, red ciklusa c je 4.

b)

$$\langle p\rangle = \{((123)(57))^n\,; n \in \mathbb{Z}\} = \{e, (123)(57), (132), (57), (123), (132)(57)\}$$

Dakle, red permutacije p je 6.

15. Neka su H i K podgrupe grupe G. Dokažite da je $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$ podgrupa od G ako i samo ako je $HK = KH$.

Rj: Ako su H i K podgrupe grupe G, tada je su H i K podskupovi od G. Dakle, HK je podskup od G. Ako je $HK = KH$, onda za svaki $a = hk \in HK$ postoji $a^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$, tj. postoji inverz u HK. Neka je $a = hk \in HK$ i $b = k'h' \in HK$ vrijedi:

$$ab^{-1} = hk \cdot (h'k')^{-1} = hk \cdot k'^{-1}h'^{-1} = hkk'^{-1}h'^{-1} \in HKH = HHK = HK$$

budući da je $K^2 = K$ jer jer K podgrupa. Dakle, HK je podgrupa od G. Ako pak $HK \neq KH$, onda postoji $a = hk \in HK$ za koji ne postoji $a^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in HK$ jer je $k^{-1}h^{-1} \in KH$ i $HK \triangle KH \neq \emptyset$. Dakle, HK nije podgrupa od G.

16. Neka je $H \trianglelefteq G$ te neka su $a, b \in G$. Dokžite da vrijedi:

$$ab \in H \iff ba \in H$$

Rj: Neka je $H \trianglelefteq G$. Neka je i $ab = h \in H$. Dakle, $a = hb^{-1}$. Budući da je $b \in G$, imamo i $b^{-1} \in G$ pa je $a = hb^{-1} \in HG \subseteq H$ jer je $H \trianglelefteq G$. Analogno, $b = a^{-1}h \in HG \subseteq H$ pa je $a^{-1} \in H$, Budući da su $a^{-1}, b^{-1} \in H$ i H je podgrupa, imamo $a, b \in H$. Dakle imamo i $ba \in H$.

17. Neka je G grupa te neka je $Z(G) = \{g \in G; gh = hg, \forall h \in G\}$ centar grupe G. Mora li $Z(G)$ biti normalna podgrupa od G?

Rj: Neka su je $a \in Z(G)$. Tada je i $a^{-1} \in Z(G)$ jer je $aa^{-1} = a^{-1}a$. $Z(G)$ je očito posdkup od G. Neka su $a, b \in Z(G)$. Tada je također $ab^{-1} \in Z(G)$ pa je $Z(G) \leq G$. Neka je $g \in G$ i neka je $z \in Z(G)$. Budući da je $gz = zg$, imamo i $gzg^{-1} = z$, tj. $gZ(G)g^{-1} \subseteq Z(G) \quad \forall g \in G$. Dakle, $Z(G)$ je normalna podgrupa od G.

18. Neka je $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ multiplikativna grupa racionalnih brojeva različitih od nule, te neka je $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ preslikavanje zadano sa $\varphi(x) = x^2$. Dokažite da je φ homomorfizam grupa te mu odredite jezgru i sliku.

Rj: Neka su $x, y \in \mathbb{Q}^*$. Tada je $\varphi(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ pa je φ homomorfizam grupa. Jezgra od φ je

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{Q}^*; \varphi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{Q}^*; x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$

a slika od φ je

$$\text{Im } \varphi = \{y \in \mathbb{Q}^*; y = \varphi(x), x \in \mathbb{Q}^*\} = \{y \in \mathbb{Q}^*; y = x^2, x \in \mathbb{Q}^*\} = \left\{\frac{a^2}{b^2}; a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}\right\}.$$

19. Je li grupa iz 6. zadatka izomorfna multiplikativnoj grupi realnih brojeva $\mathbb{R}^*$? Ukoliko jest, konstruirajte odgovarajući izomorfizam. Sve svoje tvrdnje dokažite!

Rj: Definirajmo funkciju $\varphi : \left(\left\{\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}^*\right\}, \cdot\right) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ sa:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x$$

Prvo ćemo dokazati da je ovo homomorfizam:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} xy & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = xy = x \cdot y = \varphi\left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dakle, φ je homomorfizam. Sada ćemo izračunati jezgru od φ:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \left\{\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}^*, \varphi\left(\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}^*, x = 1\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \{e\} \end{aligned}$$

Dakle, φ je injekcija. Sada ćemo dokazati da je φ surjekcija. Neka je $y \in \mathbb{R}^*$. Tada je $\varphi\left(\begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = y$. Dakle, φ je injekcija i surjekcija pa je φ bijekcija, tj. izomorfizam grupa pa su one izomorfne.

20. Jesu li grupe $(\mathbb{Z},+)$ i $(2\mathbb{Z},+)$ izomorfne? Sve svoje tvrdnje dokažite!

Rj: Definirajmo funkciju $\varphi : (\mathbb{Z},+) \to (2\mathbb{Z},+)$ sa $\varphi(x) = 2x$. Sada ćemo dokazati da je φ homomorfizam:

$$\varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Dakle, φ je homomorfizam. Sada ćemo izračunati jezgru od φ:

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{Z}; \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Z}; 2x = 0\} = \{0\} = \{e\}$$

Dakle, φ je injekcija. Sada ćemo dokazati da je φ surjekcija. Neka je $y \in 2\mathbb{Z}$. Tada je $y = 2x$ za neki $x \in \mathbb{Z}$. Dakle, $\varphi(x) = y$. Dakle, φ je injekcija i surjekcija pa je φ bijekcija, tj. izomorfizam grupa pa su grupe $(\mathbb{Z},+)$ i $(2\mathbb{Z},+)$ izomorfne.

21. a) Dokažite da grupe $(\mathbb{Q},+)$ i $(\mathbb{Z},+)$ nisu izomorfne.
    b) Dokažite da grupe $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ i $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ nisu izomorfne.

Rj:

a) Pretpostavimo da postoji izmorfizam $\varphi : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$. Neka je $\varphi(1) = a \in \mathbb{Z}$. Uzmimo $b \in \mathbb{Z}$ takav da je $\text{nzd}(a,b) = 1$. Tada vrijedi:

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{b \text{ puta}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{b}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{b}\right)}_{b \text{ puta}} = b \cdot f\left(\frac{1}{b}\right) = a$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

Budući da je $\text{nzd}(a,b) = 1$, znamo da $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$ pa φ nije izomorfizam. Dakle, grupe $(\mathbb{Q},+)$ i $(\mathbb{Z},+)$ nisu izomorfne.

b) Pretpostavimo da postoji izomorfizam $\varphi : (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$. Znamo da se neutralni element preslikava u neutralni element u izomorfizmu pa je $\varphi(1) = 1$. Neka je $\varphi(-1) = a + bi$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Tada imamo:

$$\varphi(1) = \varphi(-1 \cdot (-1)) = \varphi(-1) \cdot \varphi(-1) = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 1$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 1 \\ 2ab &= 0 \end{aligned}$$

Budući da je φ izomorfizam, onda je $a = -1$ i $b = 0$. Budući da je φ izomorfizam, postoji $x \in \mathbb{R}^*$ takav da je $\varphi(x) = i$. Tada imamo:

$$\varphi(x^4) = (\varphi(x))^4 = i^4 = 1 = \varphi(1) \implies x^4 = 1$$

Dakle, imamo $x^4 = 1$ pa je $x \in -1, 1$, ali to je nemoguće jer je φ funkcija. Dakle, grupe $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ i $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ nisu izomorfne.

22. a) Jesu li grupe $\mathbb{Z}_{12}$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ izomorfne?
    b) Jesu li grupe $\mathbb{Z}_8$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ izomorfne?

Rj: Neka su G i H izomorfne grupe. Tada je $k = k(G) = k(H)$. Neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam. Neka je red elementa $g \in G$ jednak k. Tada je red elementa $\varphi(g) \in H$ također jednak k. To možemo iz činjenice da je $\langle g \rangle = G$ pa je $\langle \varphi(g) \rangle = \varphi(\langle g \rangle) = \varphi(G) = H$. Ako u G imamo m elemenata reda $k(G)$, a u H imamo n elemenata reda $k(H)$ te ako je $m \neq n$ onda G i H nisu izomorfne. To je jer se red elemenata invarijanta nad izomorfizmom.

a) Svi elementi reda 12 u $\mathbb{Z}_{12}$ su $1, 5, 7, 11$. Svi elementi reda 12 u $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ su $(1,1)$ i $(1,5)$ jer da bi (a,b) bio reda 12 u $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ mora vrijediti $\text{nzd}(a,2) = 1$ i $\text{nzd}(b,6) = 1$. Dakle svi elementi reda 12 u $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ su $(1,1)$ i $(1,5)$ pa ove dvije grupe nisu izomorfne.

b) Svi elementi reda 8 u $\mathbb{Z}_8$ su $x \in \mathbb{Z}_8$ takvi da je $\text{nzd}(x,8) = 1$. To su $1, 3, 5, 7$. Da bi $(a,b,c) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ bio reda 8, mora vrijediti $\text{nzd}(a,2) = 1$, $\text{nzd}(b,2) = 1$ i $\text{nzd}(c,2) = 1$. Dakle, jedini element reda 8 u $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je $(1,1,1)$. Dakle, ove dvije grupe nisu izomorfne.

23. Neka je $(G, *)$ konačna grupa i $f : (G, *) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ homomorfizam grupa sa svojstvom da postoji $x_0 \in G$ takav da je $f(x_0) \neq 1$.
    a) Dokažite da je funkcija $g : G \to G$ definirana sa $g(x) = x_0 * x$ bijekcija.
    b) Služeći se tvrdnjom iz a) dijela zadatka, izračunajte

$$\sum_{x \in G} f(x) \text{ i } \sum_{x \in G \setminus \{e\}} f(x)$$

pri čemu je e neutralni element u grupi G.

Rj:

a) Neka su $x_1, x_2 \in G$ i neka je $g(x_1) = g(x_2)$. Tada je

$$\begin{aligned} x_0 * x_1 &= x_0 * x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Dakle, g je injekcija. Neka je $y \in G$. Pretpostavimo da postoji $x_y \in G$ takav da je $g(x_y) = y$. Tada je

$$g(x_y) = y \implies x_0 * x_y = y \implies x_y = x_0^{-1} * y$$

Dakle, g je i surjekcija pa je bijekcija.

b) Budući da je g bijekcija i f homomorfizam, imamo

$$\sum_{x \in G} f(x) = \sum_{x \in g(G)} f(x) = \sum_{x \in G} f(g(x)) = \sum_{x \in G} f(x_0 * x) = \sum_{x \in G} f(x_0) \cdot f(x)$$

$$\sum_{x \in G} f(x) = f(x_0) \cdot \sum_{x \in G} f(x) \implies (f(x_0) - 1) \cdot \sum_{x \in G} f(x) = 0 \implies \sum_{x \in G} f(x) = 0$$

Sada imamo i

$$\sum_{x \in G \setminus \{e\}} f(x) = \sum_{x \in G} f(x) - f(e) = 0 - f(e) = -1$$