

1. (a) Postoji li prirodan broj $n > 1$ takav da je $\varphi(n) = n$. Obrazložite!
(b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\varphi(n) = n - 1$.
2. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je:
 - (a) $\varphi(n) = 4$
 - (b) $\varphi(n) = 20$
 - (c) $\varphi(n) = 56$
 - (d) $\varphi(n) = 66$
 - (e) $\varphi(n) = 100$
 - (f) $\varphi(n) = 162$.
3. Dokažite da ne postoji prirodan broj n takav da je $\varphi(n) = 14$.
4. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\varphi(n) = 2 \cdot 7^m$.
Uputa: Uočite da je $7^m \equiv 1 \pmod{3}$ za svaki $m \in \mathbb{N}$.
5. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je:
 - (a) $\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{2}{7}$,
 - (b) $\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{4}{11}$.
6. Dokažite da je $\varphi(3n) = \begin{cases} 3\varphi(n), & 3 \mid n \\ 2\varphi(n), & 3 \nmid n \end{cases}$.
7. Odredite sve prirodne brojeve n takve da
 - (a) $\varphi(n) \mid 3n$,
 - (b) $\varphi(3n) \mid n$.
8. Dokažite da je $\sum_{\substack{k=1 \\ \text{nzd}(k,n)=1}}^n k = \frac{n}{2}\varphi(n)$.
Uputa: Zadanoj sumi pribrojite $\sum_{\substack{k=1 \\ \text{nzd}(k,n)=1}}^n n - k$.

9. (a) Izračunajte $\tau(16669800)$
(b) Koliko parnih djelitelja ima broj 16669800?
(c) Koliko djelitelja broja 16669800 su potpuni kvadrati?
10. (a) Dokažite da je $\tau(n^2)$ neparan za svaki $n \in \mathbb{N}$.
(b) Dokažite da je $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Uputa: Promatrajte parove djelitelja d i $\frac{n}{d}$.
11. (a) Dokažite da je $\sigma(n)$ neparan broj ako je n potencija broja 2.
(b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\sigma(n)$ neparan broj.
12. Dokažite da je $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.
Uputa: Uočite da je funkcija $f(n) = \frac{1}{n}$ multiplikativna.

NAPOMENA: U gornjim zadacima φ je oznaka za Eulerovu funkciju, a $\tau(n)$ i $\sigma(n)$ redom označavaju broj i sumu djelitelja prirodnog broja n .