KVADRATNI OSTATCI

Zadaća 6.

1. Odredite sve kvadratne ostatke modulo 29.

2. Ako je p neparan prost broj, dokažite da je

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0.$$

3. Izračunajte Legendreove simbole
(a) $\left(\frac{-35}{97}\right)$ (b) $\left(\frac{111}{991}\right)$ (c) $\left(\frac{160}{163}\right)$ (d) $\left(\frac{164}{167}\right)$ (e) $\left(\frac{435}{683}\right)$.

4. Izračunajte Jacobijeve simbole $\left(\frac{40}{403}\right)$ i $\left(\frac{907}{1455}\right)$.

5. (a) Izračunajte Jacobijeve simbole $\left(\frac{-60}{377}\right)$ i $\left(\frac{-60}{323}\right)$.
   (b) Je li -60 kvadratni ostatak modulo 377? Detaljno obrazložite odgovor!
   (c) Je li -60 kvadratni ostatak modulo 323? Detaljno obrazložite odgovor!

6. Odredite sve neparne proste brojeve p takve da je:
(a) $\left(\frac{6}{p}\right) = 1$, (b) $\left(\frac{-60}{p}\right) = -1$, (c) $\left(\frac{40}{p}\right) = -1$.

7. (a) Odredite sve neparne proste brojeve p takve da je $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$.
   (b) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $6k + 1$.

8. Izračunajte
(a) $\left(\frac{17}{p}\right)$, (b) $\left(\frac{19}{p}\right)$ za sve neparne proste brojeve p.

9. Odredite sve neparne proste brojeve p takve da kongruencija $x^2 + 45 \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenja.

10. Neka je p neparan prost broj s primitivnim korijenom g te neka je a cijeli broj takav da je $\mathrm{nzd}(a, p) = 1$. Dokažite da je a kvadratni ostatak modulo p ako i samo ako je indeks $\mathrm{ind}_g a$ paran.

11. Neka je q prost broj oblika $q = p^2 + 4a^2$ gdje je p neparan prost broj te a cijeli broj. Dokažite da je $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.
Uputa: Koristite Gaussov zakon reciprociteta.

12. Neka je a neparan prost broj te neka je b cijeli broj takav da je $p = a^2 + 5b^2$ prost. Dokažite da je a kvadratni ostatak modulo p ako i samo ako je $p \equiv 1 \pmod{5}$.

13. Riješite sustav kongruencija

$$x^2 \equiv 21 \pmod{67}$$
$$x^2 \equiv 44 \pmod{83}.$$

Uputa: Uočite da je $67 \equiv 83 \equiv 3 \pmod{4}$.