# Diskretna matematika 2

## Zadaća 7

March 12, 2025

Borna Gojšić

---

1. Odredite sve Pitagorine trokute sa stranicom duljine:

   a) 35  b) 55  c) 65  d) 77  e) 143

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite parnosti.

a) Budući da je $35 = 5 \cdot 7$, imamo tri mogućnosti:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 35$ jer je $35 \not\equiv 1 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 35$ pa je $m + n = 35$ i $m - n = 1$ ili je $m + n = 7$ i $m - n = 5$. Dakle, $m = 18$ i $n = 17$ ili $m = 6$ i $n = 1$ pa dobivamo trojke (35, 612, 613) i (35, 12, 37).
2. Ako je $d = 5$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 7$ jer je $7 \not\equiv 1 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 7$ pa je $m - n = 7$ i $m + n = 1$. Dakle, $m = 4$ i $n = 3$ pa dobivamo trojku (35, 120, 125).
3. Ako je $d = 7$, onda možemo imati ili $m^2 + n^2 = 5$ ili $m^2 - n^2 = 5$. U prvom slučaju dobijemo $m = 2$ i $n = 1$, a u drugom $m = 3$ i $n = 2$. Dakle, dobivamo dvije trojke: (21, 28, 35) i (35, 84, 91).

b) Budući da je $55 = 5 \cdot 11$, imamo tri mogućnosti:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 55$ jer je $55 \not\equiv 1 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 55$ pa je $m + n = 55$ i $m - n = 1$ ili je $m + n = 11$ i $m - n = 5$. Dakle, $m = 28$ i $n = 27$ ili $m = 8$ i $n = 3$ pa dobivamo trojke (55, 1512, 1513) i (55, 48, 73).
2. Ako je $d = 5$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 11$ jer je $11 \not\equiv 1 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 11$ pa je $m - n = 11$ i $m + n = 1$. Dakle, $m = 6$ i $n = 5$ pa dobivamo trojku (55, 300, 305).
3. Ako je $d = 11$, onda možemo imati ili $m^2 + n^2 = 5$ ili $m^2 - n^2 = 5$. U prvom slučaju dobijemo $m = 2$ i $n = 1$, a u drugom $m = 3$ i $n = 2$. Dakle, dobivamo dvije trojke: (33, 44, 55) i (55, 132, 143).

c) Budući da je $65 = 5 \cdot 13$, imamo tri mogućnosti:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m^2 + n^2 = 65$ ili $m^2 - n^2 = 65$. U prvom slučaju dobijemo $m = 8$ i $n = 1$ ili $m = 7$ i $n = 4$, a u drugom $m = 33$ i $n = 32$ ili $m = 9$ i $n = 4$. Dakle, dobivamo četiri trojke: (63, 16, 65), (33, 56, 65), (65, 2112, 2113) i (65, 72, 97).
2. Ako je $d = 5$, onda imamo $m^2 + n^2 = 13$ ili $m^2 - n^2 = 13$. U prvom slučaju dobijemo $m = 3$ i $n = 2$, a u drugom $m = 7$ i $n = 6$. Dakle, dobivamo dvije trojke: (25, 60, 65) i (65, 420, 425).
3. Ako je $d = 13$, onda imamo $m^2 + n^2 = 5$ ili $m^2 - n^2 = 5$. U prvom slučaju dobijemo $m = 2$ i $n = 1$, a u drugom $m = 3$ i $n = 2$. Dakle, dobivamo dvije trojke: (39, 52, 65) i (65, 156, 169).

d) Budući da je $77 = 7 \cdot 11$, imamo tri mogućnosti:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 77$ jer $77 = 7 \cdot 11$ i $7 \equiv 3 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 77$ pa je $m + n = 77$ i $m - n = 1$ ili je $m + n = 11$ i $m - n = 7$. Dakle, $m = 39$ i $n = 38$ ili $m = 9$ i $n = 2$ pa dobivamo trojke (77, 2964, 2965) i (77, 36, 85).
2. Ako je $d = 7$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 11$ jer $11 \equiv 3 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 11$ pa je $m - n = 11$ i $m + n = 1$. Dakle, $m = 6$ i $n = 5$ pa dobivamo trojku (77, 420, 427).
3. Ako je $d = 11$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 7$ jer $7 \equiv 3 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 7$ pa je $m - n = 7$ i $m + n = 1$. Dakle, $m = 4$ i $n = 3$ pa dobivamo trojku (77, 264, 275).

e) Budući da je $143 = 11 \cdot 13$, imamo tri mogućnosti:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 143$ jer $143 = 11 \cdot 13$ i $11 \equiv 3 \pmod 4$. Dakle, $m^2 - n^2 = 143$ pa je $m + n = 143$ i $m - n = 1$ ili je $m + n = 13$ i $m - n = 11$. Dakle, $m = 72$ i $n = 71$ ili $m = 12$ i $n = 1$ pa dobivamo trojke (143, 10224, 10225) i (143, 24, 145).
2. Ako je $d = 11$, onda imamo $m^2 + n^2 = 13$ ili $m^2 - n^2 = 13$. Dakle, imamo $m = 3$ i $n = 2$ ili $m = 7$ i $n = 6$ pa dobivamo trojke (55, 132, 143) i (143, 924, 935).
3. Ako je $d = 13$, onda imamo $m^2 + n^2 \neq 11$ i $m^2 - n^2 \neq 11$. Dakle, imamo $m = 6$ i $n = 5$ pa dobivamo trojku (143, 780, 793).

2. Odredite sve Pitagorine trokute sa stranicom duljine:

a) 26 b) 28 c) 36 d) 56 e) 116

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite parnosti.

a) Budući da je $26 = 2 \cdot 13$, imamo dvije mogućnosti jer $d$ ne može biti 13 niti 26:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $2mn = 26$ pa je $mn = 13$. Dakle, $m = 13$, $n = 1$, ali onda nisu različite parnosti pa to nije rješenje.
2. Ako je $d = 2$, onda imamo $m^2 + n^2 = 13$ ili $m^2 - n^2 = 13$ pa dobivamo rješenja $m = 3$ i $n = 2$ te $m = 7$ i $n = 6$ pa dobivamo trojke (10, 24, 26) i (26, 168, 170).

b) Budući da je $28 = 2^2 \cdot 7$, imamo tri mogućnosti jer $d$ ne može biti 2, ni 14, niti 28:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo ili $2mn = 28$ ili $m^2 - n^2 = 28$. U prvom slučaju dobivamo $m = 14$ i $n = 1$ te $m = 7$ i $n = 2$, a u drugom $m = 8$ i $n = 6$, ali nisu različite parnosti pa dobivamo samo dvije trojke (195, 28, 197) i (45, 28, 53).
2. Ako je $d = 4$, onda imamo $m^2 - n^2 = 7$ pa je $m = 4$ i $n = 3$ pa dobivamo trojku (28, 96, 100).
3. Ako je $d = 7$, onda imamo $2mn = 4$ pa je $m = 2$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (21, 28, 35).

c) Budući da je $36 = 2^2 \cdot 3^2$, imamo:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo ili $2mn = 36$ ili $m^2 - n^2 = 36$. U prvom slučaju dobivamo $m = 18$ i $n = 1$ ili $m = 9$ i $n = 2$, a u drugom $m = 10$ i $n = 8$ pa dobivamo trojke (323, 36, 325) i (77, 36, 85).
2. Ako je $d = 3$, onda imamo $2mn = 12$ ili $m^2 - n^2 = 12$. U prvom slučaju dobivamo $m = 6$ i $n = 1$ ili $m = 3$ i $n = 2$, a u drugom $m = 4$ i $n = 2$ pa dobivamo trojke (105, 36, 111) i (15, 36, 39).
3. Ako je $d = 4$, onda imamo $m^2 - n^2 = 9$ pa je $m = 5$ i $n = 4$ pa dobivamo trojku (36, 160, 164).
4. Ako je $d = 9$, onda imamo $2mn = 4$ pa je $m = 2$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (27, 36, 45).
5. Ako je $d = 12$, onda imamo $m^2 - n^2 = 3$ pa je $m = 2$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (36, 48, 60).

d) Budući da je $56 = 2^3 \cdot 7$, imamo:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $2mn = 56$ pa imamo $m = 28$ i $n = 1$ ili $m = 7$ i $n = 4$ pa dobivamo trojke (783, 56, 785) i (33, 56, 65).
2. Ako je $d = 2$, onda imamo $2mn = 28$ pa dobivamo $m = 14$ i $n = 1$ ili $m = 7$ i $n = 2$ i dobivamo trojke (390, 56, 394) i (90, 56, 106).
3. Ako je $d = 7$, onda imamo $2mn = 8$ pa dobivamo $m = 4$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (105, 56, 119).
4. Ako je $d = 8$, onda imamo $m^2 - n^2 = 7$ pa je $m = 4$ i $n = 3$ pa dobivamo trojku (56, 192, 200).
5. Ako je $d = 14$, onda imamo $2mn = 4$ pa je $m = 2$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (42, 56, 70).

e) Budući da je $116 = 2^2 \cdot 29$, imamo tri mogućnosti jer $d$ ne može biti 2, ni 58, niti 116:

1. Ako je $d = 1$, onda imamo ili $2mn = 116$ ili $m^2 - n^2 = 116$. U prvom slučaju dobivamo $m = 58$ i $n = 1$ te $m = 29$ i $n = 2$, a u drugom $m = 30$ i $n = 28$, ali nisu različite parnosti pa dobivamo samo dvije trojke (3363, 116, 3365) i (837, 116, 845).
2. Ako je $d = 4$, onda imamo $m^2 - n^2 = 29$ ili $m^2 + n^2 = 29$. U prvom slučaju dobivamo $m = 15$ i $n = 14$, a u drugom $m = 5$ i $n = 2$ pa dobivamo trojke (116, 1680, 1684) i (84, 80, 116).
3. Ako je $d = 29$, onda imamo $2mn = 4$ pa je $m = 2$ i $n = 1$ pa dobivamo trojku (87, 116, 145).

3. Koliko ima primitivnih Pitagorinih trojki čija je hipotenuza manja od 100?

**Rj:** Primitivne Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

gdje su $m$ i $n$ relativno prosti i $m > n$ te su različite parnosti. Neka je $N(m)$ broj brojeva iz skupa $\{1, \ldots, \min\{m - 1, \lfloor\sqrt{100 - m^2}\rfloor\}\}$ koji su relativno prosti s $m$ i različite parnosti od $m$.

Ako je $m \geq 10$, onda je $m^2 + n^2 \geq 100$ za sve $n$, dakle $N(m) = 0$.

$$\sum_{m=2}^{\infty} N(m) = \sum_{m=2}^{9} N(m) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 16$$

Dakle, ima 16 primitivnih Pitagorinih trojki čija je hipotenuza manja od 100.

4. Odredite sve Pitagorine trokute čije stranice čine aritmetički niz.

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti. Ako stranice čine aritmetički niz, onda

$$\begin{aligned} 2dmn &= \frac{d(m^2 - n^2) + d(m^2 + n^2)}{2} \\ 4mn &= 2m^2 \\ 2n &= m \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} d(m^2 - n^2) &= \frac{2dmn + d(m^2 + n^2)}{2} \\ 2(m^2 - n^2) &= 2mn + m^2 + n^2 \\ m^2 - 2mn + n^2 - 4n^2 &= 0 \\ (m - n)^2 - (2n)^2 &= 0 \\ (m - 3n)(m + n) &= 0 \\ m &= 3n \end{aligned}$$

Dakle, svi takvi Pitagorini trokuti imaju duljine stranica oblika $3dn^2$, $4dn^2$ i $5dn^2$ ili oblika $8dn^2$, $6dn^2$, $10dn^2$ što je zapravo isti oblik.

5. Odredite sve Pitagorine trokute kojima je hipotenuza manja od 200 i za 1 je veća od jedne katete.

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite partonsti. Dakle, tražimo sve trojke za koje je

1. $$200 > d(m^2 + n^2) > d(m^2 - n^2) > 2dmn \text{ i } d(m^2 + n^2) = d(m^2 - n^2) + 1$$

   Dakle, onda je $2dn^2 = 1$ što nema rješenja u $\mathbb{N}$.

2.
$$200 > d(m^2+n^2) > 2dmn > d(m^2-n^2) \text{ i } d(m^2+n^2) = 2dmn + 1$$

Dakle, onda je $d(m-n)^2 = 1$. Pa slijedi da je $d = 1$ i $m = n + 1$ i onda imamo

$$200 > n^2 + 2n + 1 + n^2 > 2(n+1)n > n^2 + 2n + 1 - n^2$$
$$200 > 2n^2 + 2n + 1 > 2n^2 + 2n > 2n + 1$$

Dakle, imamo $n \leq 9$ pa imamo trojke (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 112, 113), (17, 144, 145), (19, 180, 181).

6. Odredite sve Pitagorine trokute čiji je opseg 60.

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2-n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2+n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite parnosti. Dakle, opseg Pitagorinog trokuta je

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) + 2dmn + d(m^2+n^2) &= 60 \\ 2dm(m+n) &= 60 \\ dm(m+n) &= 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

1. Ako je $d = 1$, onda imamo $m(m+n) = 30$. Budući da je $m > n$, imamo $m + n > 2n$, tj. $2n^2 < 30$ pa je $n \leq 4$. Ako je $n = 4$, onda imamo $m^2 + 4m = 30$ što nema rješenja u $\mathbb{N}$. Ako je $n = 3$, onda imamo $m^2 + 3m = 30$ što također nema rješenja u $\mathbb{N}$. Ako je $n = 2$, onda također nema rješenja u $\mathbb{N}$. Ako je pak $n = 1$, onda postoji rješenje $m = 5$, ali onda $m$ i $n$ iste parnosti.

2. Ako je $d = 2$, onda imamo $m(m+n) = 15$. Budući da je $m > n$, imamo $m + n > 2n$, tj. $2n^2 < 15$ pa je $n \leq 2$. Ako je $n = 2$, onda imamo $m^2 + 2m = 15$ što ima rješenje $m = 3$ pa dobivamo trojku (10, 24, 26). Ako je $n = 1$, onda nema rješenja u $\mathbb{N}$.

3. Ako je $d = 3$, onda imamo $m(m+n) = 10$. Budući da je $m > n$, imamo $m + n > 2n$, tj. $2n^2 < 10$ pa je $n \leq 2$. Ako je $n = 2$, onda imamo $m^2 + 2m = 10$ što nema rješenja u $\mathbb{N}$. Ako je $n = 1$, onda također nema rješenja u $\mathbb{N}$.

4. Ako je $d = 5$, onda imamo $m(m+n) = 6$. Budući da je $m > n$, imamo $m + n > 2n$, tj. $2n^2 < 6$ pa je $n \leq 1$. Ako je $n = 1$, onda imamo $m^2 + m = 6$ što ima rješenje $m = 2$ pa dobivamo trojku (15, 20, 25).

5. Ako imamo $d \geq 6$, onda imamo $m(m+n) \leq 5$ i budući da je $m > n$, imamo $m + n > 2n$, tj. $2n^2 \leq 5$ pa je $n \leq 1$. Ako je $n = 1$, onda imamo $m^2 + m \leq 5$ što nema rješenja u $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dakle, jedina dva takva trokuta su (10, 24, 26) i (15, 20, 25).

7. Dokažite da ne postoji Pitagorin trokut čija je površina jednaka 82.

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite parnosti. Dakle, ako je površina Pitagorinog trokuta jednaka 82, onda je

$$\frac{1}{2}d(m^2 - n^2)2dmn = 82$$
$$d(m^2 - n^2)mn = 82$$
$$d(m+n)(m-n)mn = 2 \cdot 41$$

Budući da je $m > 1$ i $n \geq 1$ imamo i $m+n > 2$ pa moramo imati $m+n = 41$ i $m = 2$ i $m-n = 1$ što nema rješenja, dakle ne postoji Pitagorin trokut čija je površina jednaka 82.

8. Odredite sve Pitagorine trokute čija je površina manja od 130, a opseg veći od 30.

**Rj:** Sve Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + [2dmn]^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti i različite parnosti. Dakle, ako je površina Pitagorinog trokuta manja od 130, a opseg veći od 30, onda je

$$\frac{1}{2}d(m^2 - n^2)2dmn < 130$$
$$d^2(m+n)(m-n)mn < 130$$

$$d(m^2 + n^2) + 2dmn + d(m^2 - n^2) > 30$$
$$d(2m^2 + 2mn) > 30$$
$$d(m+n)m > 15$$

Dakle, imamo $130 > d^2(m+n)(m-n)mn > 15d(m-n)n$ pa onda i $d(m-n)n \leq 8$.

1. Ako je $d = 1$, budući da je $m \geq n+1$ imamo $(2n+1)(n+1)n \leq 130$. Dakle, $n \leq 3$. Ako je $n = 1$, imamo $(m^2 - 1)m < 130$ i $(m+1)m > 15$. Dakle, $m \leq 5$ i $m \geq 4$ pa imamo trojku (15, 8, 17) jer $m$ mora biti različite parnosti od $n$ pa nema rješenja. Ako je $n = 2$, imamo $2(m^2 - 4)m < 130$ i $(m+2)m > 15$. Dakle, $m \leq 4$ i $m \geq 4$ ali $m$ mora biti različite parnosti od $n$ pa nema rješenja. Ako je $n = 3$, imamo $3(m^2 - 9)m < 130$ i $(m+3)m > 15$. Dakle, $m \leq 4$ i $m \geq 3$ ali $m$ mora biti veći od $n$ pa imamo trojku (7, 24, 25).

2. Ako je $d = 2$, budući da je $m \geq n+1$ imamo $(2n+1)(n+1)n \leq \lfloor \frac{130}{4} \rfloor = 32$. Dakle, $n \leq 2$. Ako je $n = 1$, onda imamo $(m^2 - 1)m \leq 32$ i $2(m+1)m > 15$. Dakle, $m \leq 3$ i $m \geq 3$ pa nema rješenja jer $m$ i $n$ moraju biti različite parnosti. Ako je $n = 2$, onda imamo $2(m^2 - 4)m \leq 32$ i $2(m+2)m > 15$. Dakle, $m \leq 3$ i $m \geq 2$ pa imamo trojku (10, 24, 26).

3. Ako je $d = 3$, budući da je $m \geq n+1$ imamo $(2n+1)(n+1)n \leq \lfloor \frac{130}{9} \rfloor = 14$. Dakle, $n \leq 1$. Dakle, $n = 1$ i imamo $(m^2-1)m \leq 14$ i $3(m+1)m > 15$. Dakle, $m \leq 2$ i $m \geq 2$ pa imamo trojku (9, 12, 15).
4. Ako je $d = 4$, budući da je $m \geq n+1$ imamo $(2n+1)(n+1)n \leq \lfloor \frac{130}{16} \rfloor = 8$. Dakle, $n \leq 1$. Dakle, $n = 1$ i imamo $(m^2-1)m \leq 8$ i $4(m+1)m > 15$. Dakle, $m \leq 2$ i $m \geq 2$ pa imamo trojku (12, 16, 20).
5. Ako je $d \geq 5$, budući da je $m \geq n+1$ imamo $(2n+1)(n+1)n \leq \lfloor \frac{130}{25} \rfloor = 5$. Dakle, $n \leq 0$ pa nema rješenja u $\mathbb{N}$.

9. Odredite sve primitivne Pitagorine trojke čije sve tri stranice leže izmedu 2000 i 3000.

**Rj:** Sve primitivne Pitagorine trojke su dane identitetom:

$$(m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2+n^2)^2$$

gdje su $m$ i $n$ relativno prosti i $m > n$ i različite su parnosti. Dakle, tražimo sve $m$ i $n$ takve da:

$$2000 < m^2 - n^2 < 3000 \implies n^2 < m^2 - 2000 \tag{1}$$

$$2000 < 2mn < 3000 \implies n > \frac{1000}{m} \tag{2}$$

$$2000 < m^2 + n^2 < 3000 \tag{3}$$

Dakle, imamo

$$2000 < m^2 < 3000 \implies 45 \leq m \leq 53$$

$$m^2 - 2000 > n^2 > \frac{1000^2}{m^2} \implies m \geq 50$$

Ako je $m = 50$, onda imamo $500 > n^2 > 400$, tj. $22 > n > 20$, tj. $n = 21$ pa imamo trojku (2059, 2100, 2941). Ako je $m \in \{51, 52\}$, onda imamo $704 > m^2 - 2000 > n^2 > \frac{1000^2}{m^2} > 361$, tj. $26 > n > 19$, ali imamo i $n^2 < 3000 - m^2 < 399$, tj. $n \leq 19$ pa nema rješenja. Ako je pak $m = 53$, imamo $809 = m^2 - 2000 > n^2 > \frac{1000^2}{m^2} > 324$, tj. $28 > n > 18$, ali imamo i $n^2 < 3000 - m^2 = 191$, tj. $n \leq 13$ pa nema rješenja.

10. Razvijte u jednostavni verižni razlomak brojeve $\frac{146}{177}$ i $\frac{341}{129}$

**Rj:** Budući da su ovo racionalni brojevi, onda su njihovi verižni razlomci konačni i računamo ih Euklidovim algoritmom. Imamo:

$$\begin{aligned} 177 &= 1 \cdot 146 + 31 \\ 146 &= 4 \cdot 31 + 22 \\ 31 &= 1 \cdot 22 + 9 \\ 22 &= 2 \cdot 9 + 4 \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{177}{146} = [1; 4, 1, 2, 2, 4]$. Dakle, $\frac{146}{177} = [0; 1, 4, 1, 2, 2, 4]$. Slično, imamo:

$$\begin{aligned} 341 &= 2 \cdot 129 + 83 \\ 129 &= 1 \cdot 83 + 46 \\ 83 &= 1 \cdot 46 + 37 \\ 46 &= 1 \cdot 37 + 9 \\ 37 &= 4 \cdot 9 + 1 \\ 9 &= 9 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dakle, $\frac{341}{129} = [2; 1, 1, 1, 4, 9]$.

11. Razvijte u jednostavni verižni razlomak sljedeće realne brojeve:

a) $\sqrt{58}$ b) $\sqrt{89}$ c) $\sqrt{173}$ d) $\sqrt{185}$

**Rj:** Imamo rekurzije $s_i = a_{i-1}t_{i-1} - s_{i-1}$, $t_i = \frac{d - s_i^2}{t_{i-1}}$ i $a_i = \lfloor \frac{s_i + a_0}{t_i} \rfloor$ te početne vrijednosti $s_0 = 0$, $t_0 = 1$ i $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$.

a)

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 7 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 7 | 7 |
| $t_i$ | 1 | 9 | 6 | 7 | 7 | 6 | 9 | 1 | 9 |
| $a_i$ | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 14 | |

Dakle, $\sqrt{58} = [7; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$.

b)

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 9 | 7 | 8 | 7 | 9 | 9 |
| $t_i$ | 1 | 8 | 5 | 5 | 8 | 1 | 8 |
| $a_i$ | 9 | 2 | 3 | 3 | 2 | 18 | |

Dakle, $\sqrt{89} = [9; \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$.

c)

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 13 | 11 | 2 | 11 | 13 | 13 |
| $t_i$ | 1 | 4 | 13 | 13 | 4 | 1 | 4 |
| $a_i$ | 13 | 6 | 1 | 1 | 6 | 26 | |

Dakle, $\sqrt{173} = [13; \overline{6, 1, 1, 6, 26}]$.

d)

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 13 | 3 | 8 | 3 | 13 | 13 |
| $t_i$ | 1 | 16 | 11 | 11 | 16 | 1 | 16 |
| $a_i$ | 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 26 | |

Dakle, $\sqrt{185} = [13; \overline{1, 1, 1, 1, 26}]$.

12. a) Razvijte u jednostavni verižni razlomak $\sqrt{n^2 - n}$, $n \geq 2$
 b) Odredite prvih pet konvergenti u razvoju od $\sqrt{n^2 - n}$, $n \geq 2$, u jednostavni verižni razlomak.

**Rj:**

a) Imamo rekurzije $s_i = a_{i-1}t_{i-1} - s_{i-1}$, $t_i = \frac{d - s_i^2}{t_{i-1}}$ i $a_i = \lfloor \frac{s_i + a_0}{t_i} \rfloor$ te početne vrijednosti $s_0 = 0$, $t_0 = 1$ i $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$. Imamo i $d = n^2 - n$ i znamo da vrijedi

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 < n^2 - n < n^2$$

pa je $\lfloor \sqrt{n^2 - n} \rfloor = n - 1$ i imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | $n-1$ | $n-1$ | $n-1$ |
| $t_i$ | 1 | $n-1$ | 1 | $n-1$ |
| $a_i$ | $n-1$ | 2 | $2n-2$ | |

Dakle, $\sqrt{n^2 - n} = [n-1; \overline{2, 2n-2}]$.

b) Za računanje kovergenti imamo rekurzije $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ i $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ te početne vrijednosti $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$ i $q_0 = 1$. Dakle, imamo:

| $i$ | $a_i$ | $p_i$ | $q_i$ |
|---|---|---|---|
| -1 | | 1 | 0 |
| 0 | $n-1$ | $n-1$ | 1 |
| 1 | 2 | $2n-1$ | 2 |
| 2 | $2n-2$ | $4n^2 - 5n + 1$ | $4n - 3$ |
| 3 | 2 | $8n^2 - 8n + 1$ | $8n - 4$ |
| 4 | $2n-2$ | $16n^3 - 28n^2 + 13n - 1$ | $16n^2 - 20n + 5$ |
| 5 | 2 | $32n^3 - 48n^2 + 18n - 1$ | $32n^2 - 32n + 6$ |

Dakle, prvih 5 konvergenti su:

$$\frac{2n-1}{2} \quad \frac{4n^2 - 5n + 1}{4n - 3} \quad \frac{8n^2 - 8n + 1}{8n - 4} \quad \frac{16n^3 - 28n^2 + 13n - 1}{16n^2 - 20n + 5} \quad \frac{32n^3 - 48n^2 + 18n - 1}{32n^2 - 32n + 6}$$

13. Razvijte u jednostavni verižni razlomak sljedeće realne brojeve

a) $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{5}$

**Rj:** Imamo rekurzije $\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$ što je ekvivalentno s $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1}-a_{i-1}}$ i $a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor$ te početne vrijednosti $\alpha_0 = \alpha$ i $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Došli smo do perioda $r$ kada je $\alpha_{k+r} = \alpha_k$ za neki $k < r$. Tada je $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, \dots, a_{k+r-1}}]$.

a)

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{5+\sqrt{17}}{4} \implies a_0 = 2 \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\frac{5+\sqrt{17}}{4} - 2} = \frac{4}{\sqrt{17}-3} = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \implies a_1 = 3 \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\frac{3+\sqrt{17}}{2} - 3} = \frac{2}{\sqrt{17}-3} = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \implies a_2 = 1 \\
\alpha_3 &= \frac{1}{\frac{3+\sqrt{17}}{4} - 1} = \frac{4}{\sqrt{17}-1} = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \implies a_3 = 1 \\
\alpha_4 &= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{17}}{4} - 1} = \frac{4}{\sqrt{17}-3} = \frac{3+\sqrt{17}}{2} = \alpha_1 \implies r = 3, \quad k = 1
\end{aligned}$$

Dakle, $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} = [2; \overline{3, 1, 1}]$.

b)

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1+\sqrt{13}}{5} \implies a_0 = 0 \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{13}}{5}} = \frac{5}{1+\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}-5}{12} \implies a_1 = 1 \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\frac{5\sqrt{13}-5}{12} - 1} = \frac{12}{5\sqrt{13}-17} = \frac{17+5\sqrt{13}}{3} \implies a_2 = 11 \\
\alpha_3 &= \frac{1}{\frac{17+5\sqrt{13}}{3} - 11} = \frac{3}{5\sqrt{13}-16} = \frac{16+5\sqrt{13}}{23} \implies a_3 = 1 \\
\alpha_4 &= \frac{1}{\frac{16+5\sqrt{13}}{23} - 1} = \frac{23}{5\sqrt{13}-7} = \frac{7+5\sqrt{13}}{12} \implies a_4 = 2 \\
\alpha_5 &= \frac{1}{\frac{7+5\sqrt{13}}{12} - 2} = \frac{12}{5\sqrt{13}-17} = \frac{17+5\sqrt{13}}{3} = \alpha_2 \implies r = 3, \quad k = 2
\end{aligned}$$

Dakle, $\dfrac{1+\sqrt{13}}{5} = [0; 1, \overline{11, 1, 2}]$.

14. Odredite realan broj $\alpha$ čiji je rastav u jednostavni verižni razlomak dan sa:
   a) $\alpha = [3, 2, 1]$
   b) $\alpha = [3, \overline{2, 1}]$
   c) $\alpha = [6, \overline{2, 2, 12}]$.

**Rj:**

a) Po definiciji imamo

$$\alpha = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{2+1} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

b) Po definiciji imamo

$$\alpha = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Definirajmo $x_k = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_{k-1}}}$ za $k > 1$ i $x_1 = 2 + \frac{1}{1}$. Tada imamo:

$$X = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_{k-1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{X}}$$

$$\begin{aligned}
(X-2)(\frac{1}{X} + 1) &= 1 \\
(X-2)(X+1) &= X \\
X^2 - 2X - 2 &= 0 \\
X &= 1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{x_n} = 3 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{1 \pm \sqrt{3}} + \frac{1}{1 \pm \sqrt{3}} = \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{1 \pm \sqrt{3}} \\
&= \frac{(4 \pm 3\sqrt{3})(1 \mp \sqrt{3})}{(1 \pm \sqrt{3})(1 \mp \sqrt{3})} = \frac{(4 \mp 4\sqrt{3} \pm 3sqrt3 - 9)}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{-2} = \frac{5 \mp \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Budući da je $a_0 = 3$, znamo da je $\lfloor \alpha \rfloor = 3$ pa je $\alpha = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

c) Slično kao i u prethodnom zadatku, imamo

$$X = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{X}}} \implies \frac{1}{X-2} = 2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{X}} \implies \frac{1}{\frac{1}{X-2} - 2} = 12 + \frac{1}{X}$$

$$\frac{X(X-2)}{1-2X+4} = 12X + 1 \implies X^2 - 2X = (12X+1)(5-2X)$$
$$X^2 - 2X = -24X^2 + 58X + 5 \implies 25X^2 - 60X - 5 = 0$$

Dakle, $X = \frac{6 \pm \sqrt{41}}{5}$ pa je

$$\alpha = 6 + \frac{1}{X} = 6 + \frac{5}{6 \pm \sqrt{41}} = \frac{36 \pm 6\sqrt{41} + 5}{6 \pm \sqrt{41}} = \frac{41 \pm 6\sqrt{41}}{6 \pm \sqrt{41}} = \sqrt{41}\frac{\sqrt{41} \pm 6}{6 \pm \sqrt{41}} = \pm\sqrt{41}$$

Budući da je $a_0 = 6$, imamo $\alpha = \sqrt{41}$.

15. Odredite najmanja rješenja (ako postoje) u skupu prirodnih brojeva sljedećih jednadžbi:
a) $x^2 - 57y^2 = \pm 1$ b) $x^2 - 95y^2 = \pm 1$ c) $x^2 - 183y^2 = \pm 1$

**Rj:** Za rješavanje jednadžbe oblika $x^2 - dy^2 = 1$ prvo trebamo izračunati jednostavan verižni razlomak od $\sqrt{d}$.

a) Za $d = 57$ imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 7 | 1 | 6 | 6 | 1 | 7 | 7 |
| $t_i$ | 1 | 8 | 7 | 3 | 7 | 8 | 1 | 8 |
| $a_i$ | 7 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 14 | |

Dakle, $\sqrt{57} = [7; \overline{1,1,4,1,1,14}]$. Period $r = 6$ je paran pa nema rješenja jednadžbe $x^2 - 57y^2 = -1$. Za $x^2 - 57y^2 = 1$ imamo fundamentalno rješenje $(x,y) = (p_5, q_5)$.

| $i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | | 7 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| $p_i$ | 1 | 7 | 8 | 15 | 68 | 83 | 151 |
| $q_i$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 9 | 11 | 20 |

Dakle, $(x,y) = (151, 20)$ je najmanje rješenje jednadžbe $x^2 - 57y^2 = 1$.

b) Za $d = 95$ imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 9 | 5 | 5 | 9 | 9 |
| $t_i$ | 1 | 14 | 5 | 14 | 1 | 14 |
| $a_i$ | 9 | 1 | 2 | 1 | 18 | |

Dakle, $\sqrt{95} = [9; \overline{1,2,1,18}]$. Period $r = 4$ je paran pa nema rješenja jednadžbe $x^2 - 95y^2 = -1$. Za $x^2 - 95y^2 = 1$ imamo fundamentalno rješenje $(x,y) = (p_3, q_3)$.

| $i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | | 9 | 1 | 2 | 1 |
| $p_i$ | 1 | 9 | 10 | 29 | 39 |
| $q_i$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 |

Dakle, $(x, y) = (39, 4)$ je najmanje rješenje jednadžbe $x^2 - 95y^2 = 1$.

c) Za $d = 183$ imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 13 | 1 | 12 | 12 | 1 | 13 | 13 |
| $t_i$ | 1 | 14 | 13 | 3 | 13 | 14 | 1 | 14 |
| $a_i$ | 13 | 1 | 1 | 8 | 1 | 1 | 26 | |

Dakle, $\sqrt{183} = [13; \overline{1, 1, 8, 1, 1, 26}]$. Period $r = 6$ je paran pa nema rješenja jednadžbe $x^2 - 183y^2 = -1$. Za $x^2 - 183y^2 = 1$ imamo fundamentalno rješenje $(x, y) = (p_5, q_5)$.

| $i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | | 13 | 1 | 1 | 8 | 1 | 1 |
| $p_i$ | 1 | 13 | 14 | 27 | 230 | 257 | 487 |
| $q_i$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 17 | 19 | 36 |

16. Nadite sva rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - 146y^2 = 1$ za koja vrijedi $1 < x < 100000$.

**Rj:** Imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | 12 | 12 | 12 |
| $t_i$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $a_i$ | 12 | 12 | 24 | |

Dakle, $\sqrt{146} = [12; \overline{12, 24}]$. Budući da je period $r = 2$, imamo $(x_1, y_1) = (p_1, q_1)$.

| $i$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $a_i$ | | 12 | 12 |
| $p_i$ | 1 | 12 | 145 |
| $q_i$ | 0 | 1 | 12 |

Dakle, $(x_1, y_1) = (145, 12)$ je fundamentalno rješenje. Sada imamo rekurzije $x_i = 2x_1x_{i-1} - x_{i-2}$ i $y_i = 2x_1y_{i-1} - y_{i-2}$ te početne vrijednosti $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 145 | 42049 | 12194065 |
| $y_i$ | 0 | 12 | 3480 | |

Dakle, postoje samo 2 rješenja s $1 < x < 100000$ i to su $(x, y) = (145, 12)$ i $(x, y) = (42049, 3480)$.

17. Neka je $n$ fiksiran prirodan broj
   a) Razvijte u jednostavni verižni razlomak broj $\sqrt{n^2+2}$.
   b) Nađite barem dva prirodna broja $x$ (izražena pomoću $n$) takva da je $(n^2+2)x^2+1$ kvadrat prirodnog broja.
   c) Postoji li prirodan broj $x$ takav da je $(n^2+2)x^2-1$ kvadrat prirodnog broja? Obrazložite.

**Rj:**

a) Imamo rekurzije $s_i = a_{i-1}t_{i-1} - s_{i-1}$, $t_i = \frac{d-s_i^2}{t_{i-1}}$ i $a_i = \lfloor \frac{s_i+a_0}{t_i} \rfloor$ te početne vrijednosti $s_0 = 0$, $t_0 = 1$ i $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$. Imamo i $d = n^2 - n$ i znamo da vrijedi

$$n^2 < n^2 + 2 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

pa je $\lfloor \sqrt{n^2+2} \rfloor = n$ i imamo:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $s_i$ | 0 | $n$ | $n$ | $n$ |
| $t_i$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $a_i$ | $n$ | $n$ | $2n$ | |

Dakle, $\sqrt{n^2+2} = [n; \overline{n, 2n}]$.

b) Imamo $(n^2+2)x^2 + 1 = y^2$ pa je $y^2 - (n^2+2)x^2 = 1$. Uzmimo oznake $X = y$, $Y = x$ i $d = n^2 + 2$. Sada imamo jednadžbu $X^2 - dY^2 = 1$. Budući da je period $r = 2$ paran, fundamentalno rješenje $(X_1, Y_1) = (p_1, q_1)$.

| $i$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $a_i$ | | $n$ | $n$ |
| $p_i$ | 1 | $n$ | $n^2+1$ |
| $q_i$ | 0 | 1 | $n$ |

Dakle, fundamentalno rješenje je $(X_1, Y_1) = (n^2+1, n)$. Iduće rješenje možemo dobiti rekurizijama $X_i = 2X_1X_{i-1} - X_{i-2}$ i $Y_i = 2X_1Y_{i-1} - Y_{i-2}$ te početnim vrijednostima $X_0 = 1$, $Y_0 = 0$. Dakle, imamo:

$$X_2 = 2X_1^2 - X_0 = 2(n^2+1)^2 - 1 = 2n^4 + 4n^2 + 1$$
$$Y_2 = 2X_1Y_1 - Y_0 = 2(n^2+1)n = 2n^3 + 2n$$

Dakle, imamo $x_1 = n$, $x_2 = 2n^3 + 2n$.

c) Imamo $(n^2+2)x^2 - 1 = y^2$ pa je $y^2 - (n^2+2)x^2 = -1$. Uzmimo oznake $X = y$, $Y = x$ i $d = n^2 + 2$. Sada imamo jednadžbu $X^2 - dY^2 = -1$. Budući da je period $r = 2$ paran, ova jednadžba nema rješenja.