Diskretna matematika 2

Zadaća 4

March 5, 2025

Borna Gojšić

---

1. a) Postoji li prirodan broj $n > 1$ takav da je $\varphi(n) = n$. Obrazložite!
   b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\varphi(n) = n - 1$.

Rj:

a) Ne postoji, jer je za svaki prirodan broj $n > 1$, $\text{nzd}(n, n) = n$, pa je onda $\varphi(n) \leq n - 1$.

b) Po prošlom zadtaku, znamo da je $\varphi(n) \leq n - 1$ za sve $n > 1$ te je $\varphi(1) = 1$ pa to može vrijediti samo za n takve nemaju djelitelja $1 < d < n$, a to je točno definicija prostih brojeva.

2. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je:
   a) $\varphi(n) = 4$
   b) $\varphi(n) = 20$
   c) $\varphi(n) = 56$
   d) $\varphi(n) = 66$
   e) $\varphi(n) = 100$
   f) $\varphi(n) = 162$

Rj: Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, tada je $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

a) $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) = 4$. Iz $p_i - 1 \mid 4$ slijedi da je $p_i \in \{2, 3, 5\}$. Ako je $p_i = 2$, onda je $\alpha_i \leq 3$, a ako je $p_i \neq 2$ je $\alpha_i = 1$. Neka je $k = 2^{\alpha_1}$ ili 1, onda imamo mogućnosti:

1. $n = 3 \cdot k \implies \varphi(n) = 2 \cdot \varphi(k) = 4 \implies \varphi(k) = 2^{\alpha_1 - 1} = 2 \implies n = 2^2 \cdot 3 = 12$
2. $n = 5 \cdot k \implies \varphi(n) = 4 \cdot \varphi(k) = 4 \implies \varphi(k) = 2^{\alpha_1 - 1} = 1 \implies n = 5$ ili $n = 10$
3. $n = k \implies \varphi(n) = 2^{\alpha_1 - 1} = 4 \implies n = 8$

b) $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) = 20$. Iz $p_i - 1 \mid 20$ slijedi da je $p_i \in \{2, 3, 5, 11\}$. Ako je $p_i = 2$, onda je $\alpha_i \leq 3$, ako je $p_i = 5$, onda je $\alpha_i \leq 2$, a ako je $p_i \neq 2, 5$ je $\alpha_i = 1$. Neka je $k = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$ ili 1, onda imamo mogućnosti:

1. $n = 3 \cdot k \implies \varphi(n) = 2 \cdot \varphi(k) = 20 \implies \varphi(k) = 10 \implies \emptyset$
2. $n = 11 \cdot k \implies \varphi(n) = 10 \cdot \varphi(k) = 20 \implies \varphi(k) = 2 \implies n = 44$
3. $n = 3 \cdot 11 \cdot k \implies \varphi(n) = 2 \cdot 10 \cdot \varphi(k) = 20 \implies \varphi(k) = 1 \implies n = 33$ ili $n = 66$
4. $n = k \implies \varphi(n) = 20 \implies n = 25$ ili $n = 50$

c) Iz $p_i - 1 \mid 56 = 2^3 \cdot 7$ slijedi da je $p_i - 1 \in \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$, tj. $p_i \in \{2, 3, 5, 29\}$. Nadalje, iz $p_i - 1 \mid 7$ slijedi da je $n = 29 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 2$. Dakle, $m \in \{3, 4, 6\}$, pa je $n \in \{87, 116, 174\}$.

d) Iz $p_i - 1 \mid 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ slijedi da je $p_i - 1 \in \{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66\}$, tj. $p_i \in \{2, 3, 7, 23, 67\}$. Iz $p_i - 1 \mid 11$ slijedi:

1. $p_i = 23 \implies n = 23 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 3$. Ali, ne postoji m za koji je $\varphi(m)$ neparan broj veći od 1.
2. $p_i = 67 \implies n = 67 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 1$. Dakle, $m \in \{1, 2\}$ pa je $n \in \{67, 134\}$.

e) Iz $p_i - 1 \mid 100 = 2^2 \cdot 5^2$ slijedi $p_i - 1 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$, tj. $p_i \in \{2, 3, 5, 11, 101\}$.

1. Ako je $p_i = 101$, onda imamo $n = 101$ ili $n = 202$.
2. Ako je $p_i = 11$, onda imamo $n = 11 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 10$. Ali, to vrijedi samo za $m = 11$ i $m = 22$ pa nema rješenja u tom slučaju.
3. Iz $p_i - 1 \mid 5$ nemamo rješenja. Pa znamo da moramo imate $p_i = 5$. Dakle, $n = 5^3 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 1$. Dakle, $m = 1$ ili $m = 2$ pa je $n = 125$ ili $n = 250$.

f) Iz $p_i - 1 \mid 162 = 2 \cdot 3^4$ slijedi $p_i - 1 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162\}$, tj. $p_i \in \{2, 3, 7, 19, 163\}$.

1. Ako je $p_i = 163$, onda imamo $n = 163$ ili $n = 326$.
2. Ako je $p_i = 19$, onda imamo $n = 19 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 9$, ali 9 je neparan broj veći od 1 pa nemamo rješenja u tom slučaju.
3. Ako je $p_i = 7$, onda imamo $n = 7 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 27$, ali 27 je neparan broj veći od 1 pa nemamo rješenja ni u tom slučaju.
4. Ako je $p_i = 3$, onda imamo $n = 3^5 \cdot m$, gdje je $\varphi(m) = 1$. Dakle, $m = 1$ ili $m = 2$ pa je $n = 243$ ili $n = 486$.

3. Dokažite da ne postoji prirodan broj n takav da je $\varphi(n) = 14$.

Rj: Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, tada je $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$. Iz $p_i - 1 | 14$ slijedi $p_i - 1 \in \{1, 2, 7, 14\}$, tj. $p_i \in \{2, 3\}$. Dakle, imamo $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$, pa je $\varphi(n) = 2^{\alpha_1 - 1} \cdot 1 \cdot 3^{\alpha_2 - 1} \cdot 2 = 14 \implies 2^{\alpha_1 - 1} \cdot 3^{\alpha_2 - 1} = 7$. Desnu stranu jednadžbe dijeli 7, a lijevu ne pa nema rješenja. Analogno se ne dobije rješenje za $n = 2^{\alpha_1}$ i $n = 3^{\alpha_2}$.

4. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\varphi(n) = 2 \cdot 7^m$.
Uputa: Uočite da je $7^m \equiv 1 \pmod 3$ za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Rj: Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Ako $3 \mid n$, onda imamo $3^2 \nmid n$. Preptpostavimo suprotno, onda bismo imali $\varphi(n) \equiv 0 \pmod 3$, ali $2 \cdot 7^m \equiv 2 \pmod 3$ što je kontradikcija. Neka je $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ za $\beta \in \{0, 1\}$. Tada imamo dva različita slučaja (jer $2 \cdot 7^m \not\equiv 0 \pmod 4$):

1. Ako $2 \mid \varphi(n)$, onda imamo

$$(p_1 - 1) \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots (p_k - 1) \cdot p_k^{\alpha_k - 1} = 7^m$$

   Budući da su svi $p_i > 3$, imamo $p_i = 6x_i \pm 1$. Točnije, moramo imati $p_i = 6x_i - 1$ za sve $i \in \{1, \dots, k\}$ jer bi inače 6 dijelo lijevu stranu jednadžbe, ali ne bi dijelio desnu. Ali sada 2 dijeli lijevu stranu, ali ne dijeli desnu, što je kontradikcija. Dakle, nema rješenja u ovom slučaju.

2. Ako $2 \nmid \varphi(n)$, onda imamo $n = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ gdje je $\alpha \in \{0, 1\}$. Tada imamo

$$(p_1 - 1) \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots (p_k - 1) \cdot p_k^{\alpha_k - 1} = 2 \cdot 7^m$$

   Budući da su svi $p_i > 3$, imamo $p_i = 6x_i \pm 1$. Točnije, moramo imati $p_i = 6x_i - 1$ za sve $i \in \{1, \dots, k\}$ jer bi inače 6 dijelo lijevu stranu jednadžbe, ali ne bi dijelio desnu. Sada vidimo da n mora imati samo jedan prosti faktor oblika $6x - 1$ jer bi inače 4 dijelo lijevu stranu, ali ne bi dijelio desnu. Dakle, $\varphi(n) = 2(3x - 1) \cdot (6x - 1)^{\alpha_1} = 2 \cdot 7^m$, tj. $(3x - 1) \cdot (6x - 1)^{\alpha_1} = 7^m$. Dakle, $7 \mid 3x - 1$ i $7 \mid 6x - 1$, tj. $7 \mid 6(3x - 1) - 3(6x - 1) = 3$ što je kontradikcija. Dakle, nema rješenja ni u ovom slučaju.

5. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je:

   a) $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \dfrac{2}{7}$

   b) $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \dfrac{4}{11}$

Rj: Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, tada je $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}} = \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdots \frac{p_k - 1}{p_k}$$

Ako je $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \dfrac{a}{b}$ s $\text{nzd}(a, b) = 1$, i neka je $q_l \mid b$, onda je također $q_l \mid n$. Pretpostavimo da postoji neki $p_j > q_l$. To znači da se p_j skratio s nekim faktorom iz $(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$. Ali $\varphi(p_j) = p_j - 1$ i $p_i - 1 < p_j$ za $i \in \{1, \dots, k\}$ pa se q_j nije mogao skratiti. Došli smo do kontradikcije, pa je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots q_l^{\alpha_l}$. Također, ako za neki $1 < p < p_k$ vrijedi da $\text{nzd}(p, p_j - 1) = 1$ za sve $j \in \{1, \dots, k\}$ i $p \nmid b$, onda $p \nmid n$.

a) Znamo da je 7 najveći mogući prosti broj u rastavu od n. Također $p_i - 1 \in \{1, 2, 4, 6\}$ pa 5 nije prosti faktor od n. Dakle, imamo slučajeve:

   1. $n = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow\Leftarrow$
   2. $n = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow\Leftarrow$
   3. $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$ ✓

   Dakle, $\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{2}{7}$ za $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3}$, gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$.

b) Znamo da je 11 najveći prosti faktor od n. Također, $p_i - 1 \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$ pa 7 nije prosti faktor od n te onda $p_i - 1 \in \{1, 2, 4, 10\}$ pa ni 3 nije prosti faktor od n. Imamo slučajeve:

1. $n = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5}{11} \Rightarrow\!\Leftarrow$
2. $n = 5^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{8}{11} \Rightarrow\!\Leftarrow$
3. $n = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_3} \implies \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{4}{11}$ ✓

Dakle, $\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{4}{11}$ za $n = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_3}$, gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$.

6. Dokažite da je $\varphi(3n) = \begin{cases} 3\varphi(n), & 3 \mid n \\ 2\varphi(n), & 3 \nmid n \end{cases}$

Rj:

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da $3 \mid n$, tj. $n = 3^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. tada imamo
$$\varphi(n) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot (p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot (p_k - 1)$$
pa je
$$\varphi(3n) = \varphi(3^{\alpha+1} \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = 3^{\alpha} \cdot 2 \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot (p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot (p_k - 1) = 3\varphi(n)$$
2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da $3 \nmid n$. Sada je $\text{nzd}(3, n) = 1$, pa je
$$\varphi(3n) = \varphi(3 \cdot n) = 2 \cdot \varphi(n) = 2\varphi(n)$$

7. Odredite sve prirodne brojeve n takve da
   a) $\varphi(n) \mid 3n$
   b) $\varphi(3n) \mid n$

Rj: Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, tada je $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

a) Imamo $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ pa imamo $\varphi(1) \mid 3 \cdot 1$ i $\varphi(2) \mid 3 \cdot 2$. Neka je $n > 2$, onda imamo $2 \mid \varphi(n) \implies 2 \mid n$. Dakle, $p_1 = 2$. Sada imamo $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Pretpostavimo sad da n ima 2 neparna prosta faktora, p_i i p_j. Tada imamo $2 \mid p_i - 1$ i $2 \mid p_j - 1$. Dakle, imamo $2^{\alpha_1 - 1} \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\alpha_1 + 1} \mid 2^{\alpha_1 - 1}(p_i - 1)(p_j - 1)$, što je kontradikcija, jer bismo onda imali $2^{\alpha_1 + 1} \mid 3n$. Dakle, $n = 2^{\alpha_1} p^{\alpha_2}$ gdje je p neparan prost broj. Dakle, imamo $\varphi(n) = 2^{\alpha_1 - 1} \cdot (p - 1) \cdot p^{\alpha_2 - 1} \mid 3 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot (p - 1) \cdot p^{\alpha_2}$. Dakle, imamo $p - 1 \mid 3 \cdot 2 \cdot p$, tj. $6p \equiv 6 \equiv 0 \pmod{p-1}$, tj. $p - 1 \mid 6$ pa imamo $p - 1 \in \{1, 2, 3, 6\}$. Dakle, $p \in \{3, 7\}$. Neka je $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, tada imamo $\varphi(n) = 2^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 3^{\beta-1} = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta-1} \mid 3 \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$ što vrijedi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Neka je sad $n = 2^{\alpha} \cdot 7^{\gamma}$, tada imamo $\varphi(n) = 2^{\alpha-1} \cdot 6 \cdot 7^{\gamma-1} = 2^{\alpha} \cdot 3 \cdot 7^{\gamma-1} \mid 3 \cdot 2^{\alpha} \cdot 7^{\gamma}$ što vrijedi za sve $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$. Dakle, općenito rješenje su svi $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta s} \cdot 7^{\gamma(1-s)}$ za $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ i $s \in \{0, 1\}$.

b) Imamo 2 slučaja:

1. Ako je $\text{nzd}(3,n)=1$, tada je $\varphi(3n)=2\varphi(n)\mid n$ pa imamo $2\mid n$, tj. $n=2^\alpha\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_2}$. Onda imamo $\varphi(3n)=2^\alpha\cdot(p_1-1)\cdot p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_k^{\alpha_2-1}\cdot(p_k-1)\mid 2^\alpha\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_2}=n$. To znači da $(p_1-1)\cdots(p_k-1)\mid p_1\cdots p_k$. Budući da su svi $p_i>3$ znamo da se mogu zapisati kao $6x_i\pm 1$. Dakle, imamo
$$(6x_1\pm 1)\cdots(6x_k\pm 1)=(6x_1\pm 1-1)\cdots(6x_k\pm -1)\cdot m \tag{1}$$
Ako je neki p_i oblika $6x_i+1$, onda je $p_i-1=6x_i$ pa 6 dijeli desnu stranu, ali ne dijeli lijevu. Dakle, to je nemoguće. Ako je neki p_i oblika $6x_i-1$, onda je $p_i-1=6x_i-2$ pa 2 dijeli desnu stranu, ali ne dijeli lijevu. Dakle, to je nemoguće pa je $n=2^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}$.
2. Ako $3\mid n$, onda imamo $2\mid\varphi(3n)\mid n$ pa je $n=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ i $\varphi(3n)=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot(p_1-1)\cdot p_1^{\alpha_1-1}\cdots(p_k-1)\cdot p_k^{\alpha_k-1}\mid 2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, tj. imamo $(p_1-1)\cdots(p_k-1)\mid p_1\cdots p_k$ te analogno prvom slučaju dobijemo da je $n=2^\alpha\cdot 3^\beta$ za $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.

Dakle, općenito rješenja su svi $n=2^\alpha\cdot 3^\beta$ za $\alpha\in\mathbb{N}$ i $\beta\in\mathbb{N}_0$.

8. Dokažite da je $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} k=\frac{n}{2}\varphi(n)$.

Uputa: Zadanoj sumi pribrojite $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} n-k$.

Rj:
$$\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} k+\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} n-k=\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} n=\varphi(n)\cdot n$$
Ako je $k\in\mathbb{N}$ takav da je $\text{nzd}(k,n)=1$, tada je i $\text{nzd}(n-k,n)=1$, pa je
$$2\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} k=\varphi(n)\cdot n\implies\sum_{\substack{k=1\\ \text{nzd}(k,n)=1}} k=\frac{n}{2}\cdot\varphi(n)$$

9. a) Izračunajte $\tau(16669800)$.
   b) Koliko parnih djelitelja ima broj 16669800?
   c) Koliko djelitelja broja 16669800 su potpuni kvadrati?

Rj:

a) Imamo $16669800=2^3\cdot 2083725=2^3\cdot 3^5\cdot 8575=2^3\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 343=2^3\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^3$. Dakle, $\tau(16669800)=(3+1)\cdot(5+1)\cdot(2+1)\cdot(3+1)=4\cdot 6\cdot 3\cdot 4=288$.

b) Broj neparnih djelitelja broja 16669800 je broj djelitelja broja 2083725, tj. $\tau(2083725)=(5+1)\cdot(2+1)\cdot(3+1)=6\cdot 3\cdot 4=72$. Dakle, broj parnih djelitelja je $288-72=216$. To smo mogli dobiti i tako da moramo ukljičiti bar jedan faktor 2 u svaki djelitelj, pa imamo $3\cdot 6\cdot 3\cdot 4=216$.

c) Broj djelitelja koji su potpuni kvadrati je $\lfloor \frac{3+1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{5+1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{2+1}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{3+1}{2} \rfloor = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

10. a) Dokažite da je $\tau(n^2)$ neparan za svaki $n \in \mathbb{N}$.
    b) Dokažite da je $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Uputa: Promatrajte parove djelitelja d i $\frac{n}{d}$.

Rj:

a)

$$\tau(n^2) = \sum_{d|n^2} 1 = \sum_{\substack{d|n^2 \\ d<n}} 1 + 1 + \sum_{\substack{d|n^2 \\ d>n}} 1 = 2\tau(n) + 1 \equiv 1 \pmod 2$$

b) Ako je $n = m^2$, imamo

$$\prod_{d|n} d = \prod_{\substack{d|n \\ d<m}} d \cdot m \cdot \prod_{\substack{d|n \\ d>m}} d = \prod_{\substack{d|n \\ d<m}} d \cdot m \cdot \prod_{\substack{d|n \\ d<m}} \frac{n}{d} = m \cdot \prod_{\substack{d|n \\ d<m}} n = m \cdot n^{\frac{\tau(n)-1}{2}} = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Ako pak n nije potpuni kvadrat, imamo:

$$\prod_{d|n} d = \prod_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} d \cdot \prod_{\substack{d|n \\ d>\sqrt{n}}} d = \prod_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} d \cdot \prod_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} \frac{n}{d} = \prod_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} n = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

11. a) Dokažite da je $\sigma(n)$ neparan broj ako je n potencija broja 2.
    b) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $\sigma(n)$ neparan broj.

Rj:

a) Neka je $n = 2^k$, tada je

$$\sigma(n) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1 \equiv 1 \pmod 2$$

b) Ako je p neparan prost broj, onda je $\sigma(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k \equiv \sigma(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} 1 \equiv \alpha + 1 \pmod 2$. Dakle, $\sigma(p^\alpha)$ je neparan ako je α paran, tj. p^α je potpuni kvadrat. Stoga, općenito $\sigma(n)$ je neparan ako i samo ako je n potpuni kvadrat ili dvostruki potpuni kvadrat.

12. Dokažite da je $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.

Uputa: Uočite da je funkcija $f(n) = \frac{1}{n}$ multiplikativna.

Rj: Očito je $f(1) = 1$, a ako imamo $m, n \in \mathbb{Z}$ takve da je $\text{nzd}(m, n) = 1$, tada je

$$f(mn) = \frac{1}{mn} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = f(m) \cdot f(n)$$

pa je $f(n)$ multiplikativna funkcija. Sada je i $\sum_{d|n} f(n)$ multiplikativna funkcija. Stoga je dovoljno provjeriti tvrdnju za $n = p^k$, gdje je p prost broj. Imamo

$$\sum_{d|p^k} \frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k} = \frac{1 - \frac{1}{p^{k+1}}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p^{k+1} - 1}{p^k(p-1)} = \frac{1}{p^k} \cdot \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = \frac{1}{p^k} \cdot \sigma(p^k) = \frac{\sigma(p^k)}{p^k}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.