

1. Napišite tablice množenja i zbrajanja u polju $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$.
2. (a) Izračunajte $3(2^3 + 5)^{-1} + 6$ u polju $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$.
(b) Riješite jednačbu $(2x + 9)(3x + 1)^{-1} = 7$ u polju $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$.
(c) Riješite jednačbu $x^2 + 4(x^{-1} + 2x + 1) = 2$ u polju $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$.
3. Na skupu racionalnih brojeva definirane su operacije \triangle i \square na sljedeći način:

$$x \triangle y = x + y + 1, \quad x \square y = xy + x + y.$$

Dokažite da je $(\mathbb{Q}, \triangle, \square)$ prsten.

4. Neka su $a \oplus b = a + b - 1$ i $a \otimes b = -\frac{ab}{2}$ binarne operacije na skupu \mathbb{R} . Ispitajte ima li $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ strukturu prstena.
5. Dokažite da matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, gdje su a i b racionalni brojevi, uz uobičajeno zbrajanje i množenje matrica čine polje.
6. Zadan je skup $T = \{a + b\sqrt{10} ; a, b \in \mathbb{Q}\}$.
 - (a) Dokažite da je skup T polje uz uobičajeno zbrajanje i množenje realnih brojeva.
 - (b) Je li polje T izomorfno polju racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$?
 - (c) Odredite inverz elementa $x = -3 + 2\sqrt{10}$ s obzirom na množenje.
7. Dokažite da je skup $P = \{a + bi ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ prsten uz uobičajeno zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva. Je li skup P polje? Obrazložite!
8. (a) Dokažite da je skup $P = \{a + bi ; a, b \in \mathbb{Q}\}$ polje uz uobičajeno zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva.
(b) Je li polje P izomorfno standardnom polju racionalnih brojeva? Obrazložite!
9. Je li je skup $T = \{a + b\sqrt[4]{2} ; a, b \in \mathbb{Q}\}$ prsten uz uobičajeno zbrajanje i množenje realnih brojeva? Obrazložite!
10. Je li prsten $(\mathbb{Z}_{143}, +_{143}, \cdot_{143})$ integralna domena? Ukoliko jest, dokažite tu tvrdnju, a ukoliko nije navedite odgovarajući kontraprimjer.
11. Dokažite da je skup

$$P = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

prsten uz uobičajeno zbrajanje i množenje realnih brojeva. Je li taj skup polje? Detaljno obrazložite!