EULEROV TEOREM. MALI FERMATOV TEOREM *Zadaća 3.*

1. Dokažite da je broj $3^{105} + 4^{105}$ djeljiv sa 7 i 13, a nije djeljiv s 11.
2. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $1111^{222} \cdot 33^{444}$ s brojem 19.
3. Odredite ostatak pri dijeljenju broja 73^{73} s brojem 38.
4. Odredite ostatak pri dijeljenju broja 53^{181} s brojem 105.
5. Odredite ostatak pri dijeljenju broja 314^{162} s brojem 165.
6. Odredite ostatak pri dijeljenju $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 99^5 + 100^5$ s 4.
7. Odredite posljednje dvije znamenke broja 53^{82}.
8. Odredite posljednje dvije znamenke broja 71^{245}.
9. (a) Odredite posljednje dvije znamenke broja 14^{2012}.
   (b) Odredite posljednje tri znamenke broja 14^{2012}.
10. Odredite posljednje tri znamenke broja $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + 1000^{2013}$.
11. Neka je p neparan prost broj.
    (a) Dokažite da je $1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$.
    (b) Dokažite da je $1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$.
12. Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Dokažite da je tada
$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn},$$
    gdje je φ Eulerova funkcija.
13. Neka je p prost, te neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a^p \equiv b^p \pmod{p}$. Dokažite da je tada $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.
    Uputa: Koristite identitet $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.