Jednadžbe i nejednadžbe

LINEARNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Proporcionalnost	**Obrnuta proporcionalnost**
Dvije veličine su **proporcionalne** ako vrijedi: koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta poveća (smanji) druga veličina. Koeficijent proporcionalnosti je količnik dviju proporcionalnih veličina: $$\boldsymbol{k = \frac{x}{y}}.$$	Dvije veličine su **obrnuto proporcionalne** ako vrijedi: koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta smanji (poveća) druga veličina. Koeficijent obrnute proporcionalnosti je umnožak dviju obrnuto proporcionalnih veličina: $$\boldsymbol{k = x \cdot y}.$$

Postotak je razlomak s nazivnikom 100, a zapisuje se pomoću znaka $\%$: $\frac{p}{100} = p\%$.
Postotni račun je račun koji se bavi računanjem s postocima. Temeljna formula postotnog računa je

$$y = \frac{p}{100} \cdot x,$$

pri čemu je x osnovica, odnosno vrijednost od koje računamo postotak.

Linearne jednadžbe

Linearne jednadžbe su jednadžbe koje se mogu svesti na oblik $a \cdot x = b,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Riješiti jednadžbu znači odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju jednadžbu.
Dvije jednadžbe su ekvivalentne ako imaju isti skup rješenja.

Sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Rješenje sustava je svaki uređeni par (x, y) koji zadovoljava **obje** jednadžbe sustava.

Metode rješavanja sustava:

Računski	**Grafički**
Metoda supstitucije *Metoda suprotnih koeficijenata* *Metoda komparacije ili uspoređivanja*	Svaku od linearnih jednadžbi u sustavu možemo grafički prikazati kao *pravac*. Kako je rješenje sustava svaki uređeni par (x,y) koji zadovoljava obje jednadžbe, postoje tri moguća slučaja: • pravci imaju različite koeficijente smjera ⇒ pravci se sijeku i sustav ima **jedinstveno rješenje** • pravci imaju iste koeficijente smjera, ali različite odsječke na y osi ⇒ pravci su paralelni i sustav **nema rješenja** • pravci imaju iste koeficijente smjera i iste odsječke na y osi ⇒ pravci se podudaraju i sustav ima **beskonačno mnogo rješenja**

Linearne nejednadžbe

Riješiti nejednadžbu znači odrediti sve vrijednosti realnog broja x koje uvrštene u nejednadžbu umjesto nepoznanice x daju istinitu nejednakost. Pri rješavanju linearnih nejednadžbi provode se računske radnje tako da nejednakost bude očuvana.

Rješenje linearne nejednadžbe može biti **interval realnih brojeva**, može biti **skup svih realnih brojeva**, a može se dogoditi da linearna nejednadžba **nema rješenja**.

Ako pri rješavanju linearne jednadžbe dobijemo nejednakost koja nije istinita, nejednadžba nema rješenja.

Ako pri rješavanju nejednadžbe dobijemo nejednakost koja uvijek vrijedi, tada je rješenje nejednadžbe skup svih realnih brojeva.

Sustav dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom sastoji se od dviju linearnih nejednadžbi. Riješiti sustav nejednadžbi znači odrediti skup svih realnih brojeva koji su rješenja prve i druge nejednadžbe, odnosno odrediti **presjek** skupova rješenja pojedinih nejednadžbi u sustavu.

Zadaci:

1. Koje je rješenje jednadžbe $\frac{x-3}{2} - 2(4-3x) = 2 - x$?

   A. $\frac{23}{15}$ B. $\frac{21}{13}$ C. $\frac{15}{6}$ D. $\frac{25}{9}$
2. Riješite jednadžbu $\sqrt{2-x} = 5$.
3. Riješite jednadžbu $x - [3x - (5+x)] + 8 = 3(x+2) - 1$.
4. Za koje vrijednosti realnoga parametra a je rješenje x jednadžbe $2x(a+3) + a(x-5) = 3ax - 6$ veće od 2?
5. Riješite jednadžbu $px = 2p + 3x$ u ovisnosti o realnome parametru p.
6. Odredite y u rješenju sustava $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 \\ \frac{x}{y} - k = 0 \end{cases}$.
7. Koja od navedenih nejednadžbi ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $2(2x-4) + 3(1-x) > 5x$?

   A. $-4x > -5$ B. $-4x < 5$ C. $4x > 5$ D. $4x < -5$
8. Riješite sustav linearnih nejednadžbi $\begin{cases} 2x + 3 < 5 \\ 4 - x \leq 7 \end{cases}$ i napišite rješenje u obliku intervala.

Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Apsolutna vrijednost nekog realnog broja općenito predstavlja njegovu udaljenost od 0 na brojevnom pravcu.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Rješavanje jednadžbi s apsolutnim vrijednostima:

$\boldsymbol{|x| = a}$	$\boldsymbol{|f(x)| = |g(x)|}$
Razlikujemo tri slučaja: 1. $a < 0 \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja 2. $a = 0 \Rightarrow$ rješavamo jednadžbu $x = 0$ 3. $a > 0 \Rightarrow$ rješavamo jednadžbe $x = -a$ i $x = a$	Razlikujemo dva slučaja: 1. $f(x) = g(x)$ 2. $f(x) = -g(x)$

Rješavanje nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima:

$\boldsymbol{|x| \geq a \ (a \geq 0)}$	$\boldsymbol{|x| \leq a \ (a \geq 0)}$
Rješenje nejednadžbe je **unija** rješenja nejednadžbi $x \leq -a$ i $x \geq a$	Rješenje nejednadžbe je **presjek** rješenja nejednadžbi $x \geq -a$ i $x \leq a$

Zadaci:

1. Koliko je $|x-6y|$ ako je x negativan, a y pozitivan broj?

A. $x-6y$ B. $-x-6y$ C. $x+6y$ D. $-x+6y$

2. Riješite jednadžbu $|3x-2|=x+6$.

3. Kojoj je od navedenih nejednadžbi rješenje interval $\langle -9,3\rangle$?

A. $|x-6|<3$ B. $|x-3|<6$ C. $|x+6|<3$ D. $|x+3|<6$

4. Za koliko cijelih brojeva a vrijedi $9\leq|a|\leq 11$?

KVADRATNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Kvadratne jednadžbe

Kvadratna jednadžba je jednadžba oblika

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}.$$

Realni brojevi a, b i c $(a\neq 0)$ su *koeficijenti kvadratne jednadžbe*. Broj a je koeficijent kvadratnog člana ili **vodeći koeficijent**, broj b je **koeficijent linearnog člana**, a broj c je **slobodni član**.

→ Svaki broj x koji zadovoljava tu jednadžbu njezino je rješenje.

Kvadratne jednadžbe posebnog oblika:

1. Jednadžba oblika $\boldsymbol{ax^2+c=0}$ $(b=0,\ c\neq 0)$

→ jednadžbu možemo zapisati u obliku $x^2=-\frac{c}{a}$

→uvijek ima dva rješenja (mogu biti realni ili imaginarni brojevi)

2. Jednadžba oblika $\boldsymbol{ax^2+bx=0}$ $(b\neq 0,\ c=0)$

→ jednadžbu možemo zapisati u obliku

$x(ax+b)=0$

→ uvijek ima dva rješenja koja su realni brojevi!

3. Jednadžba oblika $\boldsymbol{ax^2=0}$ $(b=0,\ c=0)$

→ $ax^2=0$ vrijedi samo kada je $x=0$

→ jednadžba ima dva rješenja koja su jednaka $x_1=x_2=0$ pa za $x=0$ kažemo da je dvostruko rješenje ove kvadratne jednadžbe

Rješavanje kvadratne jednadžbe svođenjem na potpuni kvadrat:

Primjer. Jednadžbu $x^2-2x-8=0$ riješite svođenjem na potpuni kvadrat.

Rješenje:

$$x^2-2x=8$$
$$x^2-2x+1=8+1$$
$$(x-1)^2=9$$

Stavimo zamjenu $u=x-1$. Dobivamo jednadžbu $u^2=9$, čija su rješenja: $u_1=-3$ i $u_2=3$.

Iz $x=u+1$ slijedi da su odgovarajuće vrijednosti nepoznanice x:

$$x_1=u_1+1=-3+1=2 \text{ i } x_2=u_2+1=3+1=4.$$

Rješavanje kvadratne jednadžbe korištenjem formule:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

DISKRIMINANTA kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ je broj $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$.

Diskriminanta i priroda rješenja kvadratne jednadžbe:

- Ako je $D>0$, jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
- Ako je $D=0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D<0$, jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja.

VIETEOVE FORMULE

Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, onda vrijede Vièteove formule:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

FAKTORIZACIJA KVADRATNOG TRINOMA

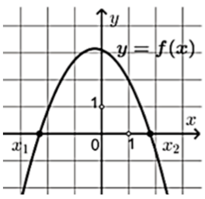
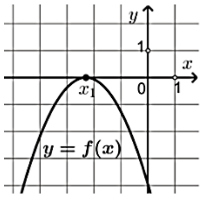
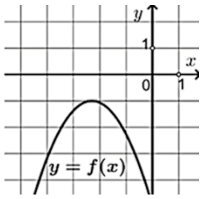
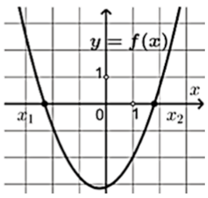
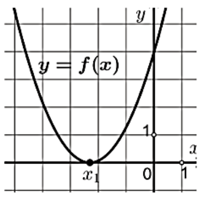
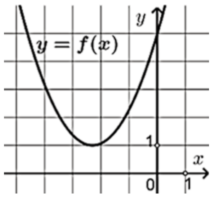
Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Tada se kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ može napisati u obliku

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Kvadratna jednadžba s rješenjima x_1 i x_2 glasi $\boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$, gdje je $a \neq 0$ po volji odabran broj.

Kvadratne nejednadžbe

Rješenje nejednadžbe ovisi o **vodećem koeficijentu** te o broju i prirodi rješenja pripadne kvadratne jednadžbe, odnosno o pripadnoj **diskriminanti**.

$\boldsymbol{a < 0, D > 0}$	$\boldsymbol{a < 0, D = 0}$	$\boldsymbol{a < 0, D < 0}$
		
$\boldsymbol{a > 0, D > 0}$	$\boldsymbol{a > 0, D = 0}$	$\boldsymbol{a > 0, D < 0}$
		

Nejednadžba oblika $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ekvivalentna je nejednadžbi $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ uz uvjet $g(x) \neq 0$.

Zadaci:

1. Odredite zbroj rješenja jednadžbe $x^2 + x - 6 = 0$.

2. Kvadratna jednadžba $x^2 + bx + c = 0$ ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = -5$. Koliki je koeficijent b te kvadratne jednadžbe?

3. Odredite sva tri rješenja jednadžbe $x^3 + ax^2 - x - a = 0$.

4. Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $10(x^2 - 1) = 21x$?

5. Riješite jednadžbu $x - \frac{6}{x} = 5$.

6. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva.

7. Riješite jednadžbu $\sqrt{x^2 + 1} = 4 - x$.

8. Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + mx + 2m + 3 = 0$ jednak je 10. Kojemu od navedenih intervala pripada realan broj m?

A. $\langle -4, -2 \rangle$ B. $\langle -2, 0 \rangle$ C. $\langle 0, 2 \rangle$ D. $\langle 2, 4 \rangle$

9. Rastavite izraz $(x - 7)^2 - 10(x - 7) + 24$ na linearne faktore s cjelobrojnim koeficijentima.

10. Za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 - kx + k - 3 = 0$ vrijedi da je $x_1^2 + x_2^2 = 14$. Odredite vrijednosti realnog broja k.

11. Riješite nejednadžbu $\frac{x+5}{x-2} < 0$ i napišite rješenje pomoću intervala.
12. Riješite nejednadžbu $(2x-1)^2 + 3(2x-1) + 2 > 0$ i napišite rješenja uz pomoć intervala.
13. Riješite nejednadžbu $4(x-1)^2 < 9$ i rješenje napišite uz pomoć intervala.
14. Riješite nejednadžbu $x^2 - 676 \leq 0$. Zapišite rješenje uz pomoć intervala.

EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE JEDNADŽBE

Eksponencijalna jednadžba je jednadžba koja se može svesti na oblik $a^x = b$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ i $a \neq 1$.

Logaritamska jednadžba je jednadžba koja se može svesti na oblik $\log_a x = b$, gdje je $a > 0, a \neq 1$ i $x > 0$.

Logaritam pozitivnog realnog broja b po bazi a, pri čemu je $a > 0, a \neq 1$, je eksponent kojim treba potencirati bazu da bi se dobio b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Vrijedi: $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$
$\log_a a^x = x$ i $a^{\log_a b} = b$

Pravila za računanje s logaritmima:

Logaritam umnoška	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Logaritam kvocijenta	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
Logaritam potencije	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Pravilo za promjenu baze:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$$

Vrijedi: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ i $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

Zadaci:

1. Riješite jednadžbu $4^{x+1} = 12$.
2. Riješite jednadžbu $3^x \cdot 5^{x+2} = 5625$.
3. U kojem intervalu se nalazi rješenje jednadžbe $8 \cdot 100^{x+2} = 0.008$?
A. $\langle -\infty, -3 \rangle$ B. $\langle -3, -1 \rangle$ C. $\langle -1, 3 \rangle$ D. $\langle 3, +\infty \rangle$
4. Riješite jednadžbu $\log_x \frac{1}{64} = 3$.
5. Riješite jednadžbu $\log_3 \log_2(x-5) = 1$.
6. Čemu je jednako x ako je $y = 3^x + 5$?
A. $x = \log_3(y-5)$ B. $x = \log_3(y+5)$ C. $x = \log_3 y - \log_3 5$ D. $x = \log_3 y + \log_3 5$

TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE

Jednadžba $\sin x = a, a \in \mathbb{R}$ ima rješenja ako vrijedi $a \in [-1, 1]$. Skup svih rješenja jednadžbe je $\{x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu je $x_0 = \sin^{-1} a$ jedno rješenje jednadžbe.

Jednadžba $\cos x = a, a \in \mathbb{R}$ ima rješenja ako vrijedi $a \in [-1, 1]$. Skup svih rješenja jednadžbe je $\{x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, odnosno $\{\pm x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu je $x_0 = \cos^{-1} a$ jedno rješenje jednadžbe.

Skup svih rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$ je skup $\{x_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu je $x_0 = \operatorname{tg}^{-1} a$ jedno rješenje jednadžbe.

Skup svih rješenja jednadžbe $c\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$ je skup $\{x_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu je $x_0 = \operatorname{ctg}^{-1} a$ jedno rješenje jednadžbe.

Zadaci:

1. Odredite $\alpha \in [90°, 180°]$ za koji je $\sin \alpha = 0.8$.
2. Odredite $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ za koji je $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$.
3. Riješite jednadžbu $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.
4. Odredite sva rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{tg} x} = 4$.
5. Odredite sva rješenja jednadžbe $\cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = 1$.
6. Napišite sva rješenja jednadžbe $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.