



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Teoria Sterowania
Kryterium Koła i Kryterium Popova

Maciej Różewicz

2025

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z dwoma kryteriami badania stabilności: kryterium Popowa i kryterium koła. Obydwa służą do badania globalnej asymptotycznej stabilności tzw. układu Lurie (1). Obydwa kryteria są oparte na badaniu charakterystyki częstotliwościowej części liniowej układu, podobnie do kryterium Nyquista. Jednak pozwalają na rozpatrywanie znacznie szerszej klasy sterowań/części nieliniowych, które mogą być nie tylko nieliniowe i niestacjonarne, ale nawet niejednoznaczne.

2 Wprowadzenie

2.1 Definicje

2.1.1 Układ Lurie

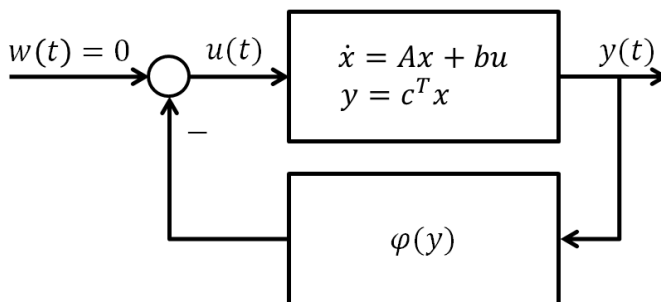
Bardzo często spotykanym w praktyce układem sterowania jest tzw. układ Lurie opisywany równaniem (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \\ u = -\varphi(y) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

- $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$,
- $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b \quad (2)$$



Rysunek 1: Schemat blokowy układu Lurie (1).

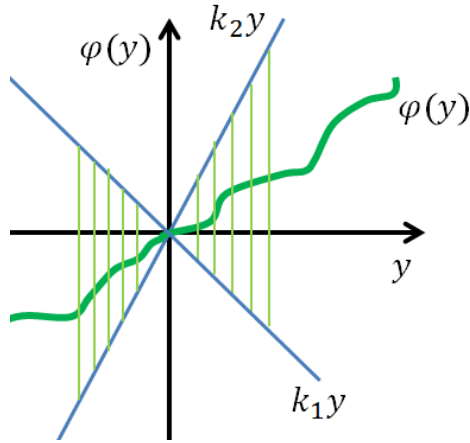
Uwaga: można inaczej przedstawić układ - z dodatnim sprzężeniem zwrotnym. Wtedy odrobinę inaczej sformułowane jest kryterium koła i Popova.

2.1.2 Funkcja sektorowa

Funkcja $\varphi(y, t)$ jest funkcją sektorową należącą do sektora $[k_1, k_2]$, jeśli spełnia warunki:

- $\varphi(0, t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}$,
- $k_1 y \leq \varphi(y, t) \leq k_2 y$.

Graficznie można interpretować warunek ten jako zawieranie się wykresu funkcji $\varphi(x)$ w odpowiednim stożku przedstawionym na rysunku (2).



Rysunek 2: Graficzna interpretacja warunków na funkcję sektorową.

2.1.3 Absolutna stabilność

Układem absolutnie stabilnym nazywamy układ globalnie asymptotycznie stabilny. Istnieje zatem jeden punkt równowagi układu.

Warunki konieczne absolutnej stabilności to:

- istnieje ściśle dodatnio określona, różniczkowalna funkcja $V(x)$,
- $V(x)$ jest radialnie nieograniczona,
- $\dot{V}(x)$ jest ściśle ujemnie określona.

2.1.4 System (ściśle) dodatnio rzeczywisty

Transmitancja $G(s)$ przedstawia tzw. system (ściśle) dodatnio określony (*ang. (S)RP - (Strictly) Positive Real*), jeśli jej część rzeczywista $Re\{P(\omega)\}$ jest zawsze większa lub równa (większa) zeru: $Re(G(s)) \geq (>)0$.

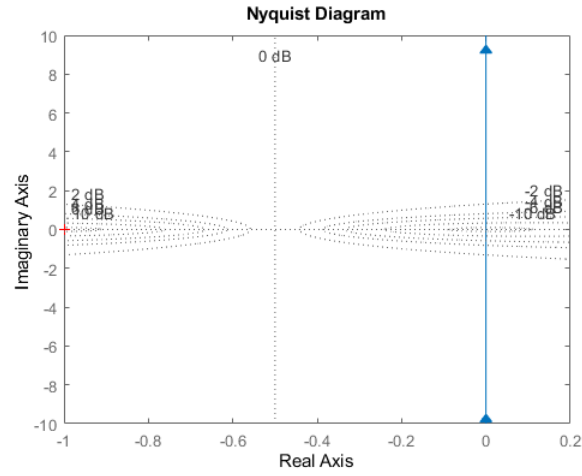
Twierdzenie: Transmitancja $G(s)$ jest ściśle dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $G(s)$ jest stabilna,
- część rzeczywista jest ściśle dodatnia na osi urojonych $i\omega$:

$$\forall \omega \geq 0 \operatorname{Re}\{G(i\omega)\} > 0$$

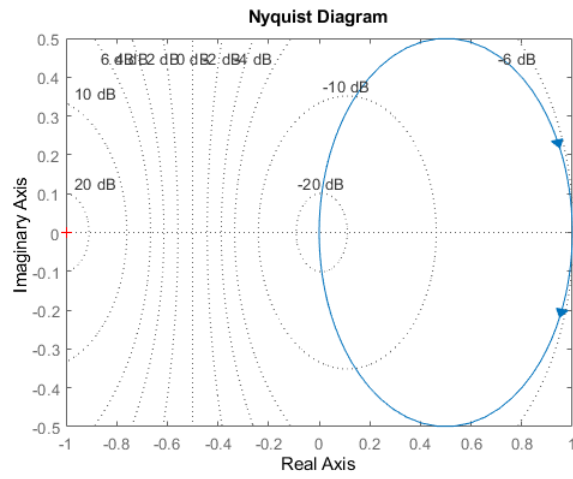
Przykładowo następujące transmitancje:

- $G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G(i\omega) = -\frac{i}{\omega}$ - jest PR (nie jest SPR) - cała charakterystyka leży na osi urojonych - rysunek (3),



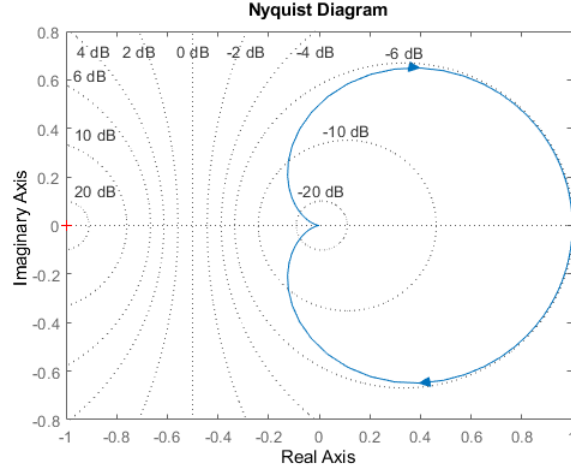
Rysunek 3: Charakterystyka Nyquista dla $G(s) = \frac{1}{s}$.

- $G(s) = \frac{1}{s+\alpha} \rightarrow G(i\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2} - i\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}$, gdzie $\alpha > 0$ - jest SPR - rysunek (4),



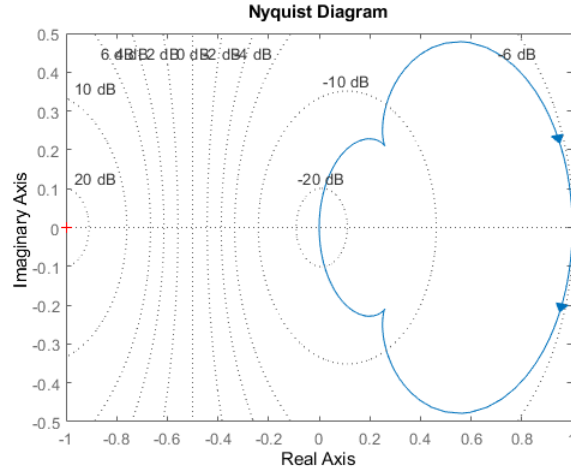
Rysunek 4: Charakterystyka Nyquista dla $G(s) = \frac{1}{s+\alpha}$.

- $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \rightarrow G(i\omega) = -\frac{\omega^2-1}{(\omega^2-1)^2+4\omega^2} - i\frac{2\omega}{(\omega^2-1)^2+4\omega^2}$ - nie jest PR ani SPR - rysunek (5),



Rysunek 5: Charakterystyka Nyquista dla $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + \alpha}$.

- $G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \rightarrow G(i\omega) = \frac{(w^2 - 1)(3w^2 - 1) + w(3w - w^3)}{(3w - w^3)^2 + (3w^2 - 1)^2} + i \frac{(w^2 - 1)(3w - w^3) - w(3w^2 - 1)}{(3w - w^3)^2 + (3w^2 - 1)^2}$ - jest SPR - rysunek (6).



Rysunek 6: Charakterystyka Nyquista dla $G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$.

Jak widać wyrażenia na $P(\omega)$ są dość złożone i niełatwo jest wprost zweryfikować nierówność $P(\omega) > 0$. Dlatego opracowano szereg twierdzeń pozwalających na określenie tego bez konieczności rozwiązywania nierówności. Jednym z najważniejszych jest twierdzenie Kalmana-Yakubovicha.

Twierdzenie (Kalmana-Yakubovitcha)

Jeśli układ, który można przedstawić równaniami:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases},$$

jest sterowalny¹, jego transmitancja mająca postać:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

¹Sterowalność to własność układu sterowania polegająca na tym, że istnieje sterowanie przeprowadzające układ w pewnym skończonym przedziale czasu do zadanego stanu (np. położenia, prędkości, przyspieszenia itp.), przy spełnieniu warunków początkowych. Dla układów liniowych sterowalność można sprawdzić poprzez badanie algebraicznego warunku, rzędu tzw. macierzy Kalmana: $M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ - układ jest sterowalny gdy jest ona pełnego rzędu.

jest ściśle dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie symetryczne dodatnio określone macierze P i Q , że spełnione są jednocześnie równości (3):

$$\begin{cases} A^T P + PA &= -Q \\ Pb &= c \end{cases} \quad (3)$$

Znając powyższe twierdzenie można pokazać, że dla układu Lurie, gdzie część liniowa jest **SRP**, a element nieliniowy jest funkcją sektorową należącą do sektora $[0, +\infty)$, to układ jest absolutnie stabilny. W tym celu przyjmujemy funkcję Lapunowa w postaci (4):

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x, \quad (4)$$

gdzie P spełnia równość (3). Wówczas jej pochodna systemowa ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax - b\varphi(c^T x))^T P x + x^T P (Ax - b\varphi(c^T x)) = \\ &= x^T (A^T P + PA)x - \varphi(c^T x)^T b^T P x - x^T P b \varphi(c^T x) = -x^T Q x - 2x^T P b \varphi(c^T x) = \\ &= -x^T Q x - 2x^T c \varphi(c^T x) \leq -x^T Q x - 2x^T c c^T x = -\|x\|_Q^2 - 2\|x\|_{cc^T}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Jest ona ściśle ujemnie określona, zatem zerowy punkt równowagi $x_e = 0$ jest globalnie asymptotycznie stabilny.

2.1.5 Systemy dysypatywne

Układ (5)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

nazywany jest dysypatywnym jeśli istnieje ciągła funkcja $V(x, t)$, taka że:

- $V(x, t)$ jest dodatnio określona (tzn. $V(x, t) \geq 0$, $V(0, t) = 0$),
- $\dot{V}(x, t) = y(t)^T u(t) - g(t)$,
- $g(t) \geq 0$.

Fizyczna interpretacja takiej definicji jest taka, że zmiana energii układu ($\dot{V}(x, t)$) równa jest energii dodanej z zewnątrz ($y(t)^T u(t)$) oraz utraconej przez sam układ ($-g(t)$). Układ taki ma ograniczone wyjście przy ograniczonym wejściu.

W przypadku liniowym, gdy układ opisywany jest transmitancją $G(s)$, warunkami jego dysypatywności są:

- wszystkie pierwiastki λ_i równania charakterystycznego transmitancji spełniają warunek $\operatorname{Re} \{\lambda_i\} \geq 0$,
- $\operatorname{Re} \{G(i\omega)\} \geq 0$, $\forall \omega \geq 0$.

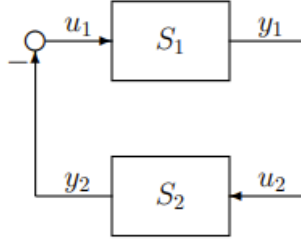
Można pokazać też (na podstawie twierdzenia Kalmana-Yakubovicha-Popova), że wówczas funkcje $V(x)$ i $\dot{V}(x)$ mają postać:

- $V(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$,
- $\dot{V}(x) = y u - x^T Q x$, $Q = Q^T > 0$,

Jeśli połączy się dwa systemy dysypatywne S_1 i S_2 - jak na rysunku (7) - w układzie sprzężenie zwrotnego, z których każdy posiada odpowiednio funkcję $V_1(x)$ i $V_2(x)$, których pochodne wynoszą:

- $\dot{V}_1(x) = y_1^T u_1 - g_1$,
- $\dot{V}_2(x) = y_2^T u_2 - g_2$.

²Oznaczenie: $\|x\|_A = x^T A x$



Rysunek 7: Sprzężenie zwrotne dwóch systemów dysypatywnych S_1 i S_2 .

Wówczas można skonstruować funkcję:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x).$$

Jej pochodna wynosi:

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + \dot{V}_2(x) = y_1^T u_1 + y_2^T u_2 - g_1 - g_2 = y_1^T u_1 - (u_1^T y_1)^T - g_1 - g_2 = y_1^T (u_1 - u_1) - g_1 - g_2 = -g_1 - g_2$$

Zatem jeśli $V(x)$ spełnia odpowiednie warunki, to jest funkcją Lapunowa dla układu przedstawionego na rysunku (7).

2.2 Kryterium Popova

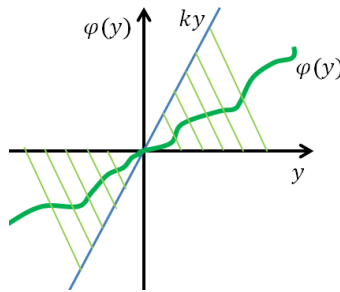
Twierdzenie 1 (Popova): jeżeli układ Lurie opisywany równaniami (1) spełnia warunki:

- (a) macierz A jest hurwitzowska (tzn. widmo macierzy leży w lewej półpłaszczyźnie zespolonej) oraz para (A, b) jest sterowalna,
- (a) nieliniowa funkcja $\varphi(\cdot)$ należy do sektora $[0, k]$,
- (a) istnieje dodatnie α - takie, że dla każdego $\omega \geq 0$ spełniona jest nierówność (6) (nazywana nierównością Popova)

$$\operatorname{Re} \{ (1 + i\alpha\omega)G(i\omega) \} + \frac{1}{k} \geq \epsilon \quad (6)$$

dla dowolnie małego $\epsilon > 0$

to zerowy punkt równowagi $x_e = 0$ jest *globalnie asymptotycznie stabilny*.



Rysunek 8: Sektor Popova

Zmodyfikowana charakterystyka częstotliwościowa występująca w **twierdzeniu 1** $\operatorname{Re} \{ (1 + i\alpha\omega)G(i\omega) \}$, nazywana jest charakterystyką Popova i oznaczana jako $G_P(i\omega)$:

$$G_P(\omega) = P(\omega) + \underbrace{i\omega Q(\omega)}_{Q_P(\omega)} = P_P(\omega) + iQ_P(\omega) \quad (7)$$

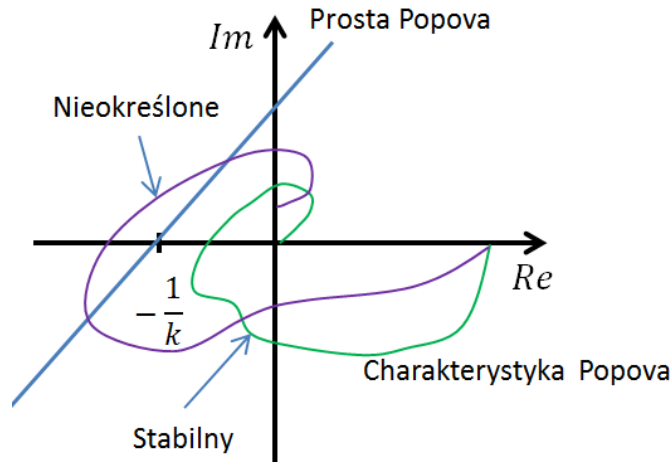
Po wprowadzeniu charakterystyki Popova można równanie (6) zapisać w postaci:

$$P_P(\omega) - \alpha Q_P(\omega) + \frac{1}{k} > 0$$

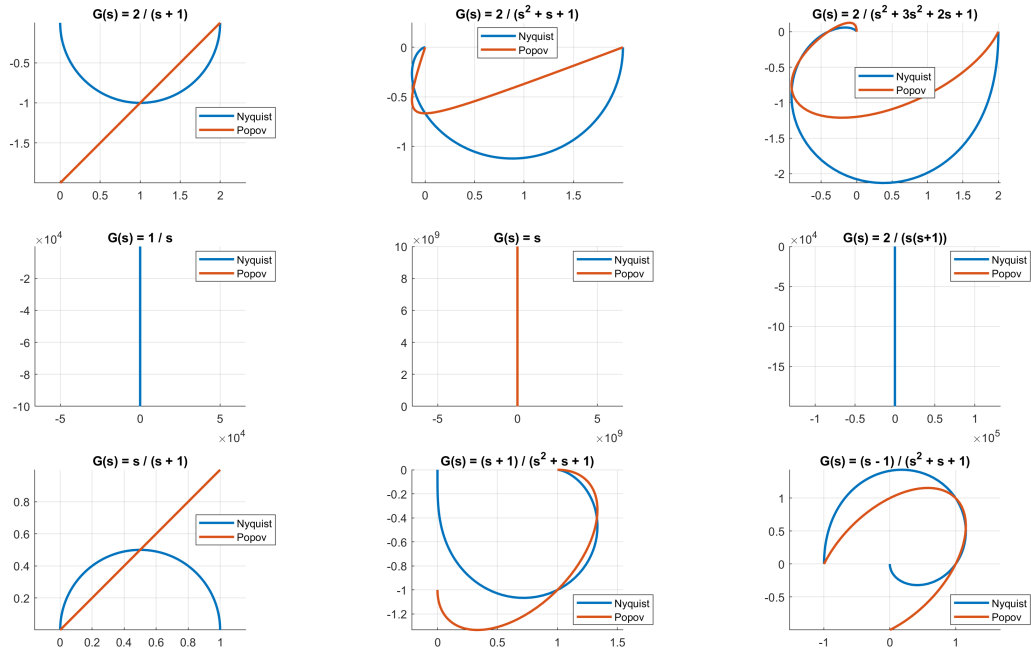
Można zauważyć, że równanie to wyznacza prostą, nazywaną prostą Popova, na płaszczyźnie:

$$P_P(\omega) > \alpha Q_P(\omega) - \frac{1}{k}$$

Co oznacza, że charakterystyka Popova musi leżeć na prawo od prostej Popova - co pokazano na rysunku (9).



Rysunek 9: Interpretacja graficzna nierówności Popova (6).



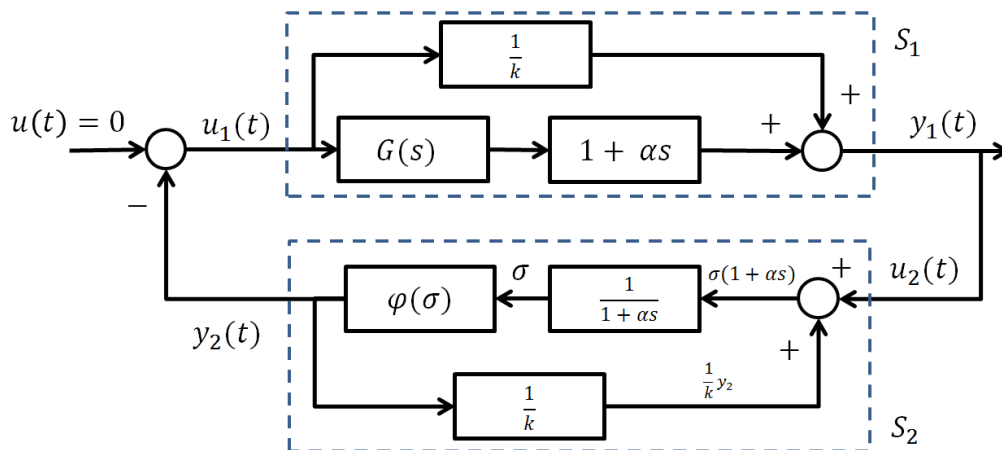
Rysunek 10: Porównanie charakterystyk Nyquista i Popova dla kilku typów transmitancji.

Porównując ploty Nyquista i Popova można zauważyć, że:

- ploty $G(i\omega)$ i $G_P(i\omega)$ przecinają oś rzeczywistych w tym samym miejscu,
- dla całego zakresu wartości $\omega \in (-\infty, +\infty)$ charakterystyka Popova, w przeciwieństwie do charakterystyki Nyquista, nie jest symetryczna względem osi rzeczywistych,

- jeśli $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(i\omega) = 0$, to $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_P(i\omega)$ może być równe lub różne od 0.

Szkic dowodu można przedstawić z pomocą schematu z rysunku (7). Gdzie blok S_1 jest transmitancją części liniowej $G(s)$, natomiast s_2 odpowiada części nieliniowej $\varphi(\cdot) \in [0, k]$. Jeśli obydwa elementy są dysypatywne, to dowód jest zakończony. W przeciwnym przypadku można wprowadzić dodatkowe, wzajemnie się redukujące przekształcenia w obydwu elementach układu. Przykładowe przekształcenie pokazano na rysunku (11).



Rysunek 11: Schemat przekształceń dla kryterium Popova.

Wówczas, aby zapewnić stabilność, obydwie systemy zaznaczone niebieską przerywaną linią S_1 i S_2 powinny być dysypatywne:

 S_1

Transmitancja części S_1 liniowej wynosi:

$$G_{S_1}(s) = (1 + \alpha s)G(s) + \frac{1}{k}$$

Zatem, aby była ona dysypatywna musi spełniać warunki:

- pierwiastki równania charakterystycznego $Re\{\lambda_1\} \geq 0$,
- część rzeczywista transmitancji widmowej musi być większa od 0:

$$Re \left\{ (1 + i\alpha\omega)G(i\omega) + \frac{1}{k} \right\} \geq 0$$

 S_2

W przypadku części nieliniowej S_2 należy pokazać, że istnieje funkcja V_2 , której pochodna wynosi:

$$\dot{V}_2 = \xi^T u_1 - g_2$$

W tym celu rozpisujemy schemat blokowy na równanie różniczkowe i otrzymujemy:

$$u_2 = \sigma + \alpha \dot{\sigma} + \frac{1}{k} y_2$$

$$u_2 = \sigma + \alpha \dot{\sigma} + \frac{1}{k} \varphi(\sigma)$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{\alpha}\sigma - \frac{1}{k\alpha}\varphi(\sigma) + u_2$$

Wówczas definiujemy równanie wyjścia jako:

$$y = \varphi(\sigma)$$

Dla tak zdefiniowanego układu można podać funkcję V_2 postaci:

$$V_2(\sigma) = \alpha \int_0^\gamma \varphi(\gamma) d\gamma > 0.$$

A jej pochodna wynosi:

$$\dot{V}_2(\sigma) = \alpha \varphi(\sigma) \dot{\sigma} = \alpha \varphi(\sigma) \left(-\frac{1}{\alpha} \sigma - \frac{1}{k\alpha} \varphi(\sigma) + u_2 \right) = -\sigma \varphi(\sigma) - \frac{1}{k} \varphi(\sigma)^2 + \varphi(\sigma) u_2 = y_2 u_2 - g_2(\sigma)$$

gdzie: $g_2(\sigma) = \sigma \varphi(\sigma) + \frac{1}{k} \varphi(\sigma)^2 > 0$ dla $\varphi(\cdot) \in [0, k]$.

Zatem S_2 jest systemem dysypatywny, układ sterowania jest stabilny, a funkcja Lapunowa, którą można zastosować to:

$$V(x) = x^T P x + \alpha \int_0^{c^T x} \varphi(\gamma) d\gamma$$

2.3 Kryterium Koła

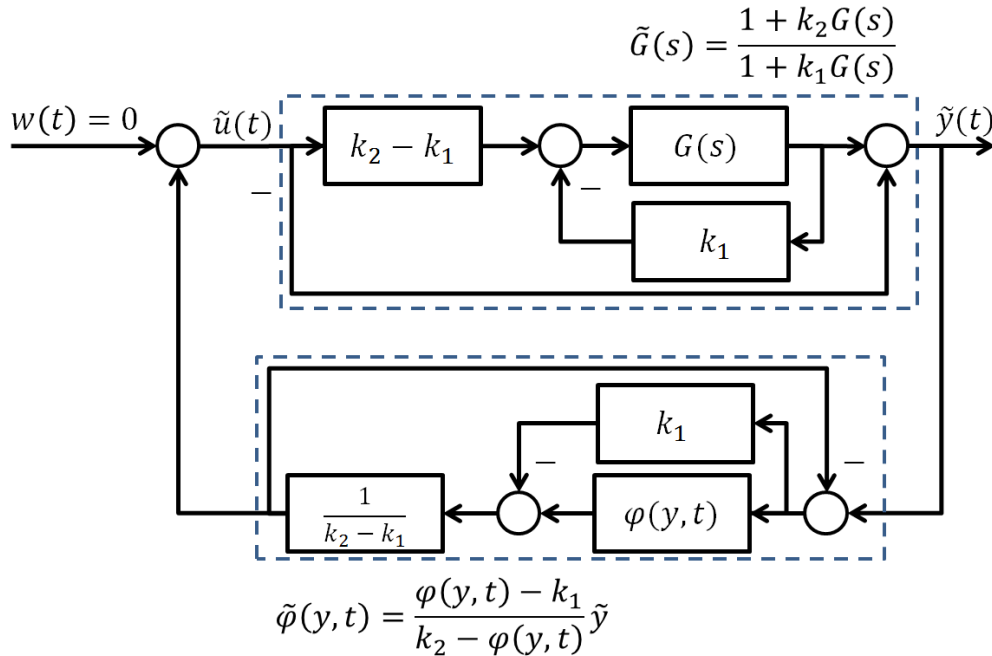
Twierdzenie (Kryterium Koła): jeżeli układ Lurie opisywany równaniem (1), gdzie:

- macierz stanu A nie posiada wartości własnych na osi urojonych,
- element nieliniowy może być niestacjonarny, tzn. $u = -\varphi(y, t)$,
- funkcja $\varphi(y, t)$ należy do sektora $[k_1, k_2]$,
- istnieje $k_0 \in [k_1, k_2]$, takie że $\text{Re} \{ \lambda(A - b k_0 c^T) \} < 0$,
- spełniona jest nierówność:

$$\text{Re} \left\{ [1 + k_1 G(i\omega)] \overline{[1 + k_2 G(i\omega)]} \right\} > 0$$

to zerowy punkt równowagi jest absolutnie stabilny.

Szkic dowodu: podobnie jak w przypadku kryterium Popova można dokonać wzajemnie się znoszących transformacji części liniowej i nieliniowej. Można ich dokonać tak jak przedstawiono na rysunku (12).



Rysunek 12: Schemat modyfikacji układu Lurie dla $\varphi(y, t) \in [k_1, k_2]$.

Rozważamy wówczas wirtualną transmitancję $\tilde{G}(s) = \frac{1+k_2G(s)}{1+k_1G(s)}$ oraz funkcję nieliniową $\tilde{\varphi}(y, t) = \frac{\varphi(y, t) - k_1}{k_2 - \varphi(y, t)} y \in [0, \infty]$. Wykorzystując zatem informacje z punktu 2.1.4 można pokazać, że nowa wirtualna transmitancja $\tilde{G}(s)$ musi być SPR, zatem spełniony jest warunek:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + k_2 G(s)}{1 + k_1 G(s)} \right\} > 0.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie można uzyskać warunek:

$$\operatorname{Re} \left\{ [1 + k_1 G(i\omega)] \overline{[1 + k_2 G(i\omega)]} \right\} > 0.$$

Co po rozpisaniu daje warunek:

$$1 + (k_1 + k_2)P(\omega) + k_1 k_2 (P(\omega)^2 + Q(\omega)^2) > 0,$$

a dalej:

$$\left(P(\omega) + \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \right)^2 + Q(\omega)^2 > \frac{1}{4} \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1^2 k_2^2}.$$

Oznacza to zatem, że charakterystyka Nyquista części liniowej:

- dla $m \geq 0$ oraz $m < 0$ i $M < 0$ nie przecina ani nie obejmuje koła o środku w punkcie $\left(-\frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2} \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} \right|$,
- dla $m < 0$ i $M > 0$ leży wewnątrz wskazanego koła.

3 Przykłady

3.1 Przykład 1

Na podstawie kryterium Popova określić warunki wystarczające globalnej asymptotycznej stabilności dla układu (rysunek) $L = 1$

$$(a) \quad G(s) = \frac{k}{Ts+1},$$

$$(a) \quad G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Znaleźć maksymalną wartość L , dla której będą spełnione warunki twierdzenia Popova.

Ad. (a):

W pierwszej kolejności wyznaczamy charakterystykę Nyquista części liniowej badanego układu:

$$G(i\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + i \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Na jej podstawie wyznaczamy charakterystykę Popova:

$$G_P(i\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + i \frac{-k\omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Posiadając tę charakterystykę zapisać można nierówność Popova:

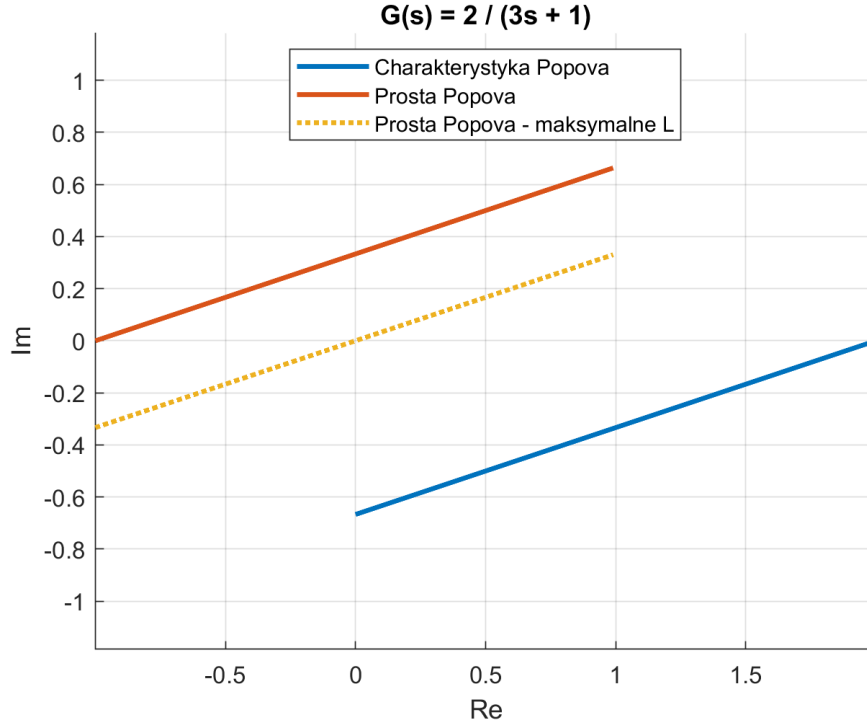
$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + q \frac{k\omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2} \right\} > 0$$

Zgodnie z kryterium Popova wystarczy, iż istnieje jedna wartość $q > 0$, taka, że spełniona jest nierówność Popova - wygodnie jest więc przyjąć sobie konkretną wartość q . Zwykle dogodnym wyborem jest współczynnik kierunkowy stycznej do charakterystyki Popova w najbardziej wysuniętym na lewo przecięciu z osią rzeczywistych. W rozważanym przypadku przyjmując za tą regułą $q = T$, otrzymuje się:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \frac{k(1 + \omega^2 T^2)}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{L} + k > 0$$

Ponieważ L i k są dodatnie, to nierówność jest spełniona.

Interpretacja geometryczna uzyskanego wyniku pokazana jest na rysunku (13).



Rysunek 13: Charakterystyka i prosta Popowa dla punktu (a) przykładu 1.

Dość łatwo z niej zauważyć, że dla dowolnych $L > 0$ i $q \in (0, \infty)$ nierówność Popova będzie spełniona.

Ad. (b)

Również w tym przypadku rozpoczynamy od wyznaczenia charakterystyki Nyquista:

$$G(i\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} + \frac{-k\omega(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

Następnie na jej podstawie określamy charakterystykę Popova:

$$G_P(i\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} + \frac{-k\omega^2(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie nierówności Popova:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{k(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} + q \frac{k\omega^2(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} \right\} > 0$$

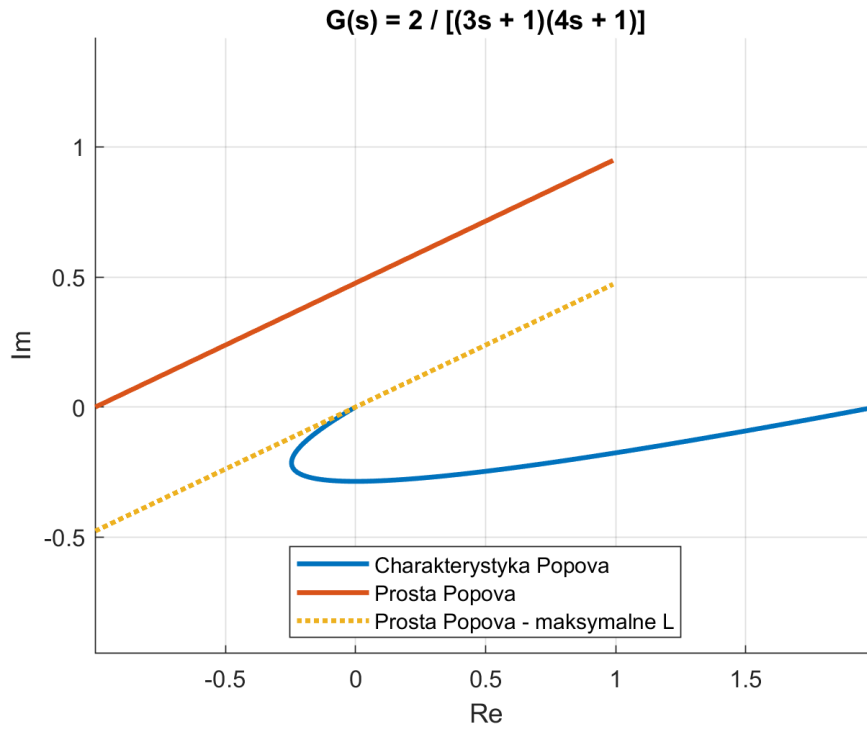
Przyjmując wartość q , zgodnie z poprzednio określoną regułą, otrzymuje się:

$$q = \frac{1}{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{Q_P(\omega)}{P_P(\omega)}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

A więc nierówność Popova upraszcza się do postaci:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{k}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} \right\} = \frac{1}{L} > 0$$

Ponieważ $L > 0$, to nierówność jest zawsze spełniona. Jej interpretacja geometryczna pokazana jest na rysunku (14).



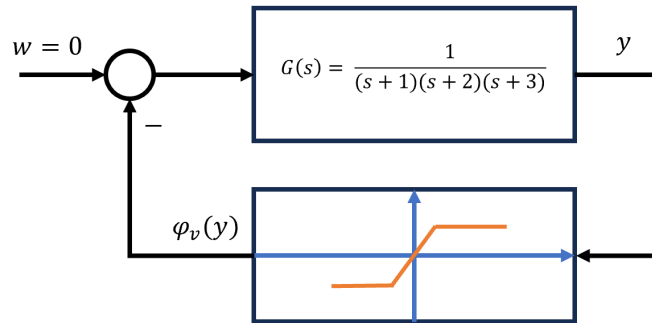
Rysunek 14: Charakterystyka i prosta Popowa dla punktu (b) przykładu 1.

Ponieważ prosta Popowa przechodzi przez $(0,0)$, to układ jest stabilny dla każdego $L > 0$.

3.2 Przykład 2

Na podstawie kryterium Popowa określić zakres nasycenia $B > 0$, dla którego układ przedstawiony na rysunku (15) pozostaje globalnie asymptotycznie stabilny. Gdzie część nieliniowa opisywana jest równaniem:

$$\varphi(y) = \begin{cases} B, & y > B \\ 20y, & |y| \leq B \\ -B, & y < -B \end{cases} \quad (8)$$



Rysunek 15: Układ sterowania z przykładu 2.

W pierwszej kolejności wyznaczamy charakterystykę Nyquista:

$$G(i\omega) = \frac{-6\omega^2 + 6}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} + i \frac{-11\omega + \omega^3}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2}$$

Następnie na jej podstawie określamy charakterystykę Popova - pokazaną na rysunku (16):

$$G_P(i\omega) = \frac{-6\omega^2 + 6}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} + i \frac{-11\omega^2 + \omega^4}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2}$$

Oraz nierówność Popova:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{-6\omega^2 + 6}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} + q \frac{11\omega^2 - \omega^4}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} \right\} > 0$$

Podobnie jak poprzednio, wartość q można dobrać jako odwrotność nachylenia stycznej do charakterystyki Popova w punkcie przecięcia z osią rzeczywistych:

$$q = \frac{\frac{\partial P_P(\omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial Q_P(\omega)}{\partial \omega}} = \frac{6}{11}$$

Można sprawdzić, że rozważane wyrażenie dla tak dobranego q przyjmuje infimum dla $\omega \rightarrow \infty$:

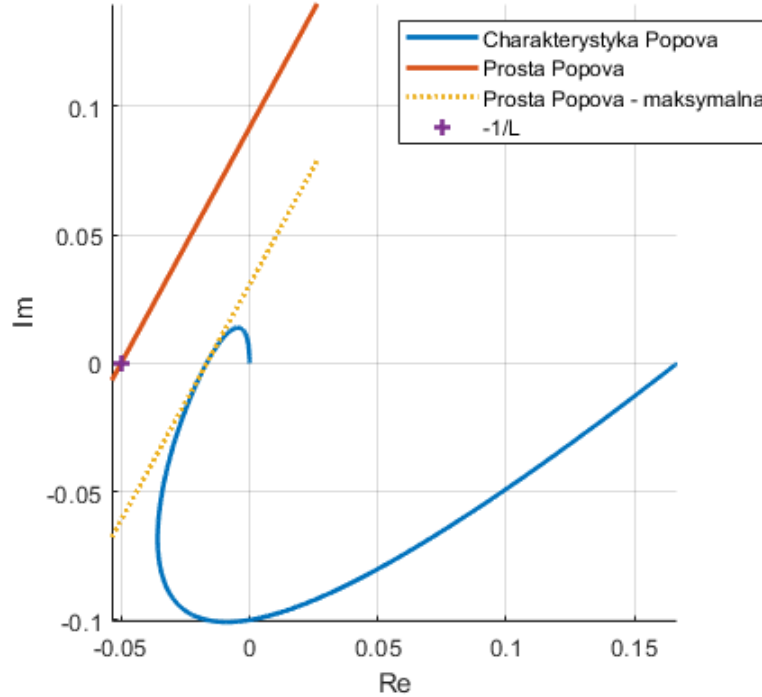
$$\inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{-6\omega^2 + 6}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} + \frac{6}{11} \frac{-11\omega^2 + \omega^4}{(11\omega - \omega^3)^2 + (6\omega^2 - 6)^2} \right\} = -\frac{1}{60}$$

Zatem dla tak dobranego q nierówność Popova ma postać:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{60} > 0,$$

nierówność ta jest spełniona dla $L < 60$. Geometryczną interpretację pokazano na rysunku (16).

Maksymalny obszar Popova można odnaleźć też graficznie, przesuwając prostą Popova do charakterystyki Popova.



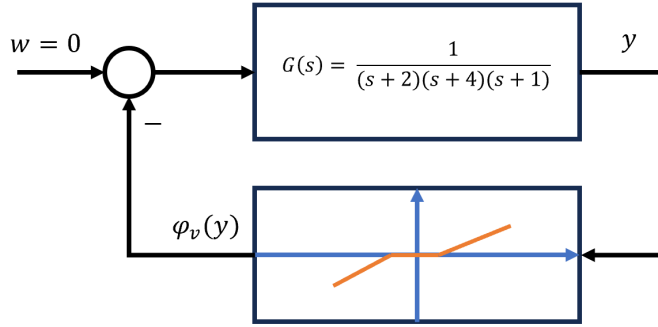
Rysunek 16: Charakterystyka układu z przykładu 2 z zaznaczoną prostą Popova i maksymalnym zakresem obszaru Popova.

3.3 Przykład 3

Na podstawie kryterium Popova określić, czy układ przedstawiony na rysunku (17) jest globalnie asymptotycznie stabilny dla nieliniowości określonej równaniem (9):

$$\varphi(y) = \begin{cases} -y + 1 & y < -1 \\ 0 & |y| \leq 1 \\ y - 1 & y > 1 \end{cases} \quad (9)$$

Znaleźć maksymalny sektor Popova dla części liniowej.



Rysunek 17: Układ sterowania z przykładu 3.

Podobnie jak poprzednio, rozpoczynamy od wyznaczenia charakterystyki Nyquista:

$$G(i\omega) = -\frac{7\omega^2 - 8}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2} + i\frac{-14\omega + \omega^3}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2}.$$

Następnie wyznaczamy charakterystykę Popova - przedstawioną na rysunku :

$$G(i\omega) = -\frac{7\omega^2 - 8}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2} + i\frac{-14\omega^2 + \omega^4}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2},$$

i nierówność Popova:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ -\frac{7\omega^2 - 8}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2} + q \frac{14\omega^2 - \omega^4}{(14\omega - \omega^3)^2 + (7\omega^2 - 8)^2} \right\} > 0$$

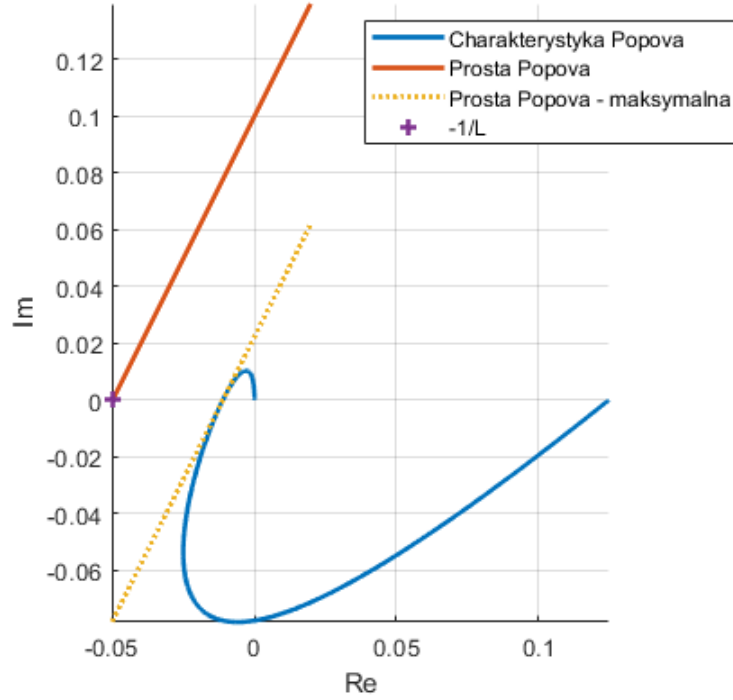
Również tym razem q można wyznaczyć jako odwrotność nachylenia stycznej do charakterystyki Popova w punkcie przecięcia z osią rzeczywistych:

$$q = \frac{\frac{\partial P_P(\omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial Q_P(\omega)}{\partial \omega}} = \frac{1}{2}.$$

Dla tak dobranego q nierówność Popova ma postać:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{90} > 0,$$

zatem maksymalny sektor Popova wyznacza $L < 90$. Więc przedstawiony układ sterowania jest stabilny.



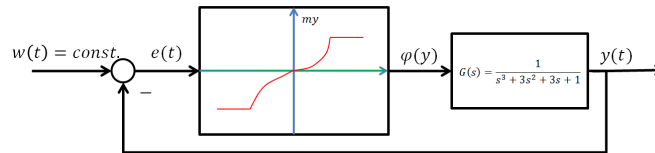
Rysunek 18: Charakterystyka układu z przykładu 3 z zaznaczoną prostą Popova i maksymalnym zakresem obszaru Popova.

3.4 Przykład 4

Znaleźć maksymalną wartość U zapewniającą globalną stabilność dla układu przedstawionego na rysunku (19). Gdzie wartość zadana jest równa w , która jest stała i różna od 0. Jeśli element nieliniowy ma następującą charakterystykę:

$$\varphi(e) = \begin{cases} U & , \quad e > \sqrt{U} \\ e^2 \operatorname{sgn}(e) & , \quad |e| \leq \sqrt{U} \\ -U & , \quad e < -\sqrt{U} \end{cases} .$$

Wyznaczyć uchyb ustalony układu w zależności od w .



Rysunek 19: Układ sterowania z przykładu 4.

Ponieważ $w \neq 0$, to środek układu współrzędnych nie będzie punktem równowagi układu. Dlatego w pierwszej kolejności należy wyznaczyć nowy punkt równowagi, a dopiero potem badać stabilność, po przesunięciu układu współrzędnych.

Punktu równowagi szukamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 0 &= A\tilde{x} + b\tilde{u} \\ \tilde{u} &= \varphi(w - y) = \varphi(w - \tilde{x}_3) \end{aligned} ,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wówczas:

- $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$,
- $\tilde{x}_3 = \begin{cases} -U & , \quad w > -U + \sqrt{U} \\ -2|w| + 1 - \sqrt{1 - 4|w|} & , \quad |w| \leq -U + \sqrt{U} \\ U & , \quad w < U + \sqrt{U} \end{cases}$.

Nowy układ współrzędnych uzyskujemy poprzez transformację:

- $p = x - \tilde{x}$
- $u_p = u - \tilde{u}$.

A system przyjmuje równania:

- $\dot{p} = Ap + bu_p$,
- $u_p = \varphi(w - \tilde{x}_3 - p_3) - \tilde{u} = \varphi_p(-p_3)$.

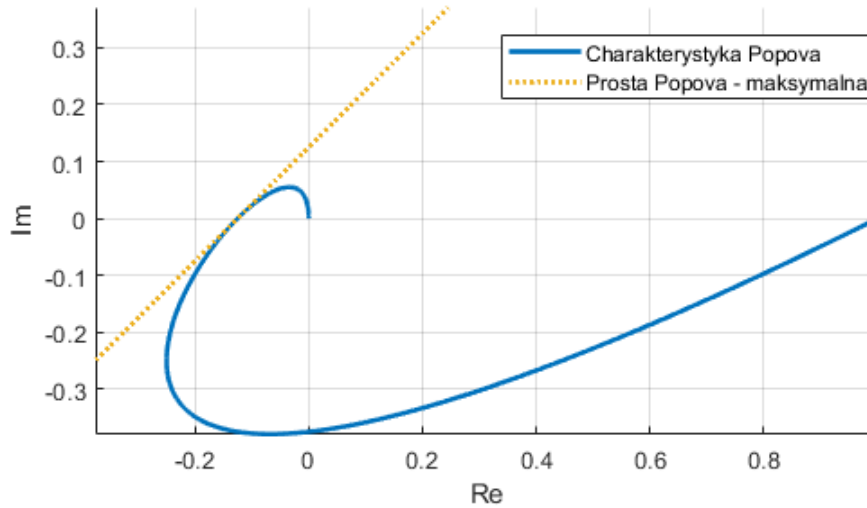
Charakterystyka elementu nieliniowego może być więc ograniczona w następujący sposób:

$$0 \leq (-p_3)\varphi_p(-p_3) \leq Lp_3^2$$

przy czym L jest największym nachyleniem stycznej do tej charakterystyki:

$$L = \max_{-\sqrt{U} \leq e \leq \sqrt{U}} \frac{du}{de} = 2\sqrt{U}.$$

Maksymalny dopuszczalny zakres odczytujemy z charakterystyki Popova - rysunek (20). Na tej podstawie określamy, że maksymalne dopuszczalne $L = 8$. Zatem $U_{max} = 16$.



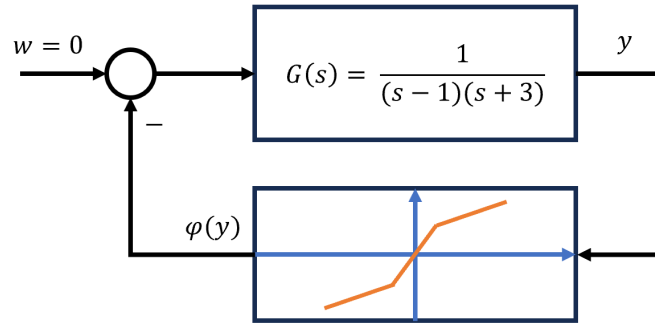
Rysunek 20: Charakterystyka Popova dla układu z przykładu 4.

Uchyb ustalony wynosi:

$$e_u = w - \tilde{x}_3.$$

3.5 Przykład 5

Na podstawie kryterium Popova zbadać stabilność układu regulacji przedstawionego na rysunku (21):

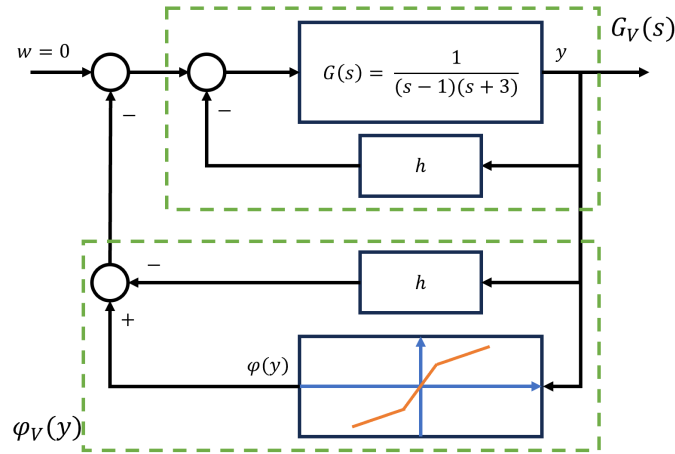


Rysunek 21: Układ sterowania z przykładu 5.

Gdzie element nieliniowy opisywany jest następującym równaniem:

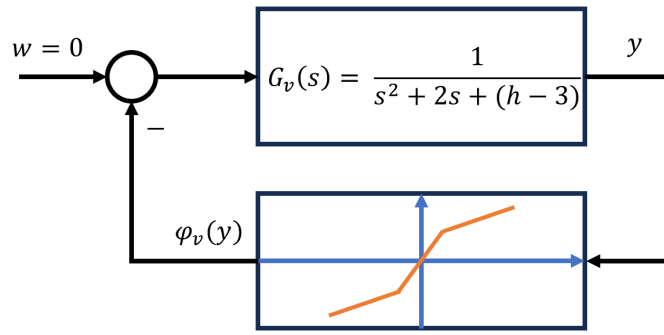
$$\varphi(y) = \begin{cases} 4(y + \frac{1}{4}), & y > 1 \\ 5y, & |y| \leq 1 \\ 4(y - \frac{1}{4}), & y < -1 \end{cases} \quad (10)$$

Element liniowy układu sterowania jest w tym przypadku niestabilny, zatem nie spełnia on założeń kryterium Popova. Jednak można "obejść" to ograniczenie poprzez dodanie bezinercyjnego sprzężenia zwrotnego h do elementu liniowego oraz ten sam zabieg na elemencie nieliniowym $\varphi(\cdot)$, jak na rysunku (22). Z wartością h dobraną tak, by układ liniowy z dodanym sprzężeniem zwrotnym był stabilny i spełniał założenia kryterium Popova.



Rysunek 22: Układ sterowania z przykładu 5 - zmodyfikowany.

Gdzie zaznaczone na zielono elementy tworzą nowe, "wirtualne" układ liniowy i nieliniowość. Analizując ten schemat łatwo zauważyć, że dodane w ten sposób elementy wzajemnie się znoszą, ale pozwalają na wydzielenie "wirtualnych" elementów. Jak na rysunku (23).



Rysunek 23: Układ sterowania z przykładu 5 - "wirtualny".

Posiadając taki "wirtualny" układ spełniający założenia kryterium Popova, gdzie:

- $G_v = \frac{1}{s^2 + 2s + (h-3)}$,
- $\varphi_v(y) = \begin{cases} (4-h)(y + \frac{1}{4-h}), & y > 1 \\ (5-h)y, & |y| \leq 1 \\ (4-h)(y - \frac{1}{4-h}), & y < -1 \end{cases}$,

możemy zweryfikować stabilność układu wyjściowego.

Wówczas jak w poprzednich przypadkach najpierw wyznaczamy charakterystykę Nyquista:

$$G(i\omega) = \frac{(h-3) - \omega^2}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2} + i \frac{-2\omega}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2}$$

Następnie charakterystykę Popova:

$$G_P(i\omega) = \frac{(h-3) - \omega^2}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2} + i \frac{-2\omega^2}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2}$$

Na jej podstawie wyznaczamy nierówność Popova:

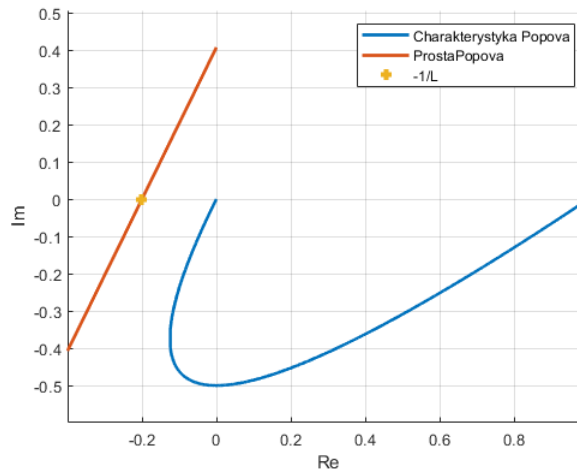
$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left\{ \frac{(h-3) - \omega^2}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2} + q \frac{2\omega^2}{[(h-3) - \omega^2]^2 + 4\omega^2} \right\} > 0$$

Mamy więc warunek:

$$0 \leq \varphi_v(y)y = \varphi(y)y - hy^2 \leq Ly^2$$

To jest:

$$hy^2 \leq \varphi(y)y \leq (L+h)y^2$$



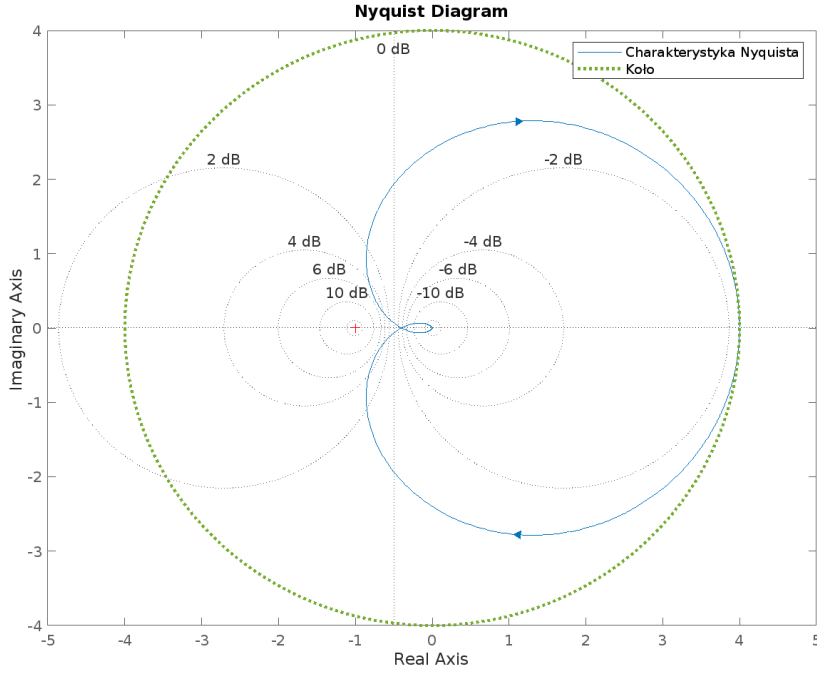
Rysunek 24: Charakterystyka układu "wirtualnego" z przykładu 5.

3.6 Przykład 6

Odnaleźć sektor dopuszczalny wynikający z kryterium koła dla układu Lurie, o części liniowej opisywanej transmitancją:

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$$

Charakterystykę Nyquista rozważanej transmitancji przedstawiono na rysunku (25):



Rysunek 25: Charakterystyka Nyquista i odpowiednie koło dla przykładu 6.

Pokazano tam też również, iż można charakterystykę tę zamknąć w kole o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 4. Zatem sektor wynikający z kryterium koła to:

$$\varphi(\cdot) \in (-0.25, 0.25).$$

3.7 Przykład 7

Dla układu Lurie, gdzie część liniowa opisana jest równaniami (11):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma & -\beta & -\alpha \end{bmatrix},$
- $b = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$
- $c^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$
- $\gamma = 16, \beta = 16.8, \alpha = 1.8.$

Znaleźć sektor Popova dla statycznego regulatora nieliniowego.

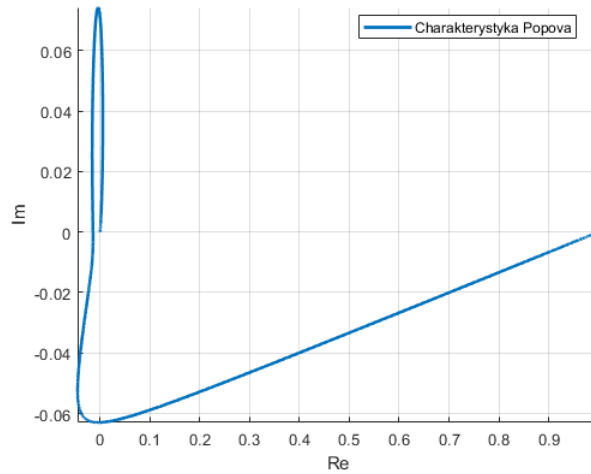
Transmitancja części liniowej ma postać:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma)}$$

Widać, że jest to obiekt astatyczny, zatem niestabilny, możemy więc zastosować metodę wykorzystaną w **przykładzie 5**, gdzie dodano wirtualne statyczne sprzężenie zwrotne. Możemy założyć, że wartość tego sprzężenia będzie wynosić $h = 1$, wówczas transmitancja "wirtualna" ma postać:

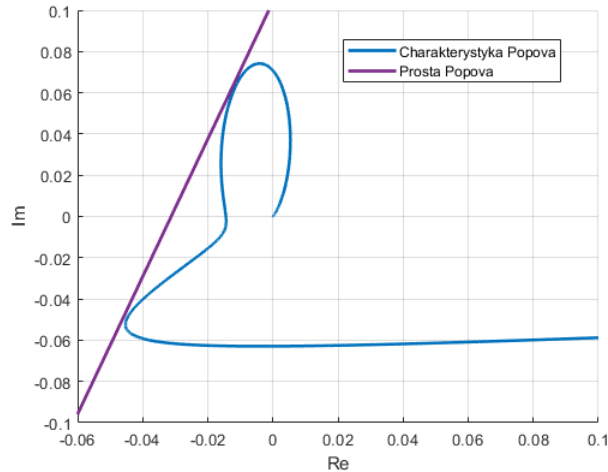
$$G_v(s) = \frac{1}{s^4 + \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1}$$

Charakterystyka Popova przedstawiona została na rysunku (26).



Rysunek 26: Charakterystyka Popova układu z przykładu 7.

Kształt tej charakterystyki nie pozwala poszukiwać wartości L i q jak poprzednio. W ogólności poszukiwanie analityczne może być dość skomplikowane, jednak można dokonać takiego dopasowania prostej Popova graficznie. W tym przykładzie można dobrać wartości $L = 32$ oraz $q = 0.3$ - rysunek (27).

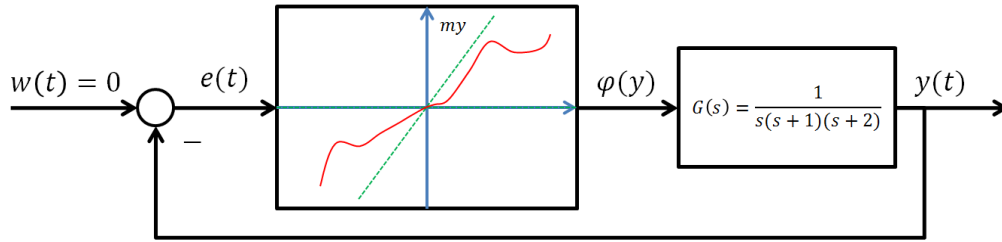


Rysunek 27: Charakterystyka Popova układu z przykładu 7 z prostą Popova.

Zatem estymowany sektor Popova to $[0, 32]$.

3.8 Przykład 8

Dla układu sterowania przedstawionego na rysunku (28) określić warunki wystarczające stabilności absolutnej.



Rysunek 28: Schemat układu regulacji z przykładu 8.

Zadanie to można wykonać analogicznie jak zadanie z **przykładu 7**, wprowadzając wirtualne bezinercyjne sprzężenie zwrotne. Można jednak skorzystać z pewnej modyfikacji kryterium Popova dla układów astatycznych. Wówczas warunkami wystarczającymi absolutnej stabilności są:

- (a) wszystkie bieguny transmitancji $G(s)$ mają ujemne części rzeczywiste, poza biegunem zerowym,
- (b) charakterystyka elementu nieliniowego spełnia ograniczenie:

$$0 < \epsilon \leq \frac{\varphi(y)}{y} \leq m$$

dla dowolnie małej dodatniej liczby ϵ .

- (c) istniała liczba rzeczywista q , że:

$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} [\operatorname{Re} \{(1 + i\omega q)G(i\omega)\}] > 0,$$

- (d) część urojona charakterystyki amplitudowo-fazowej $G(i\omega)$ zmierza do $-\infty$ przy $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0, \omega \geq 0} \operatorname{Im} \{G(i\omega)\} = -\infty.$$

Łatwo zauważyć, że rozważana transmitancja spełnia warunki tego kryterium: ma jeden biegun zerowy oraz dwa rzeczywiste ujemne. Zatem spełniony jest warunek (a).

Zakładana charakterystyka elementu nieliniowego spełnia warunek (b).

Charakterystyka Nyquista ma postać:

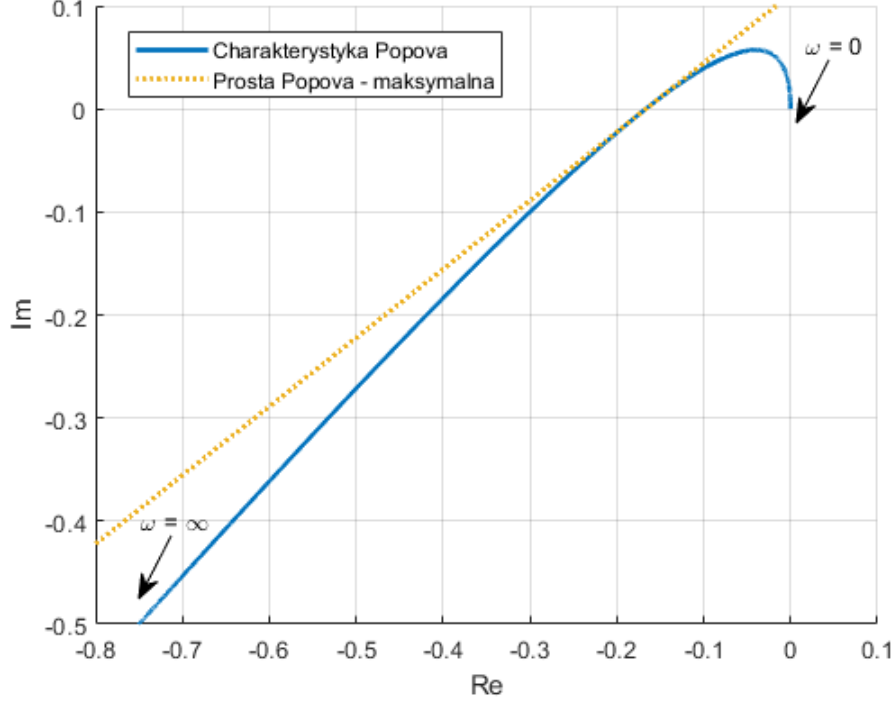
$$G(i\omega) = \frac{-3\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4} + i \frac{\omega^3 - 2\omega}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4},$$

a na jej podstawie wyznaczamy charakterystykę Popova:

$$G(i\omega) = \frac{-3\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4} + i \frac{\omega^4 - 2\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4}.$$

Widać zatem, że zachodzi warunek (4):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0, \omega \geq 0} \frac{\omega^4 - 2\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4} = -\infty.$$



Rysunek 29: Charakterystyka i prosta Popova dla przykładu 9.

Szukamy zatem maksymalnej wartości L i q , takich że prosta Popova będzie powyżej charakterystyki Popova. W tym celu możemy znaleźć jak poprzednio wartość ω , dla której charakterystyka przecina oś rzeczywistych i wartość nachylenia stycznej do charakterystyki, stąd mamy wartość q :

$$q = \frac{\frac{\partial P_p}{\partial \omega}}{\frac{\partial Q_p}{\partial \omega}} = \frac{3}{2}.$$

Zatem nierówność z punktu (3) ma postać:

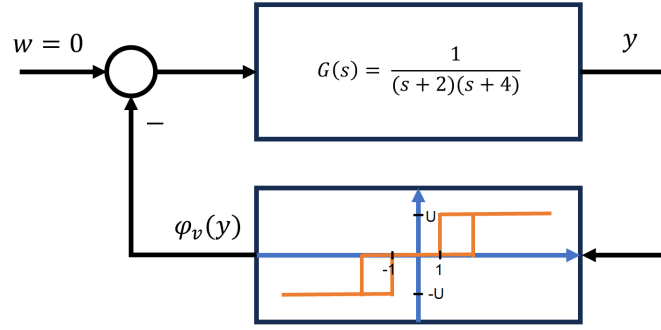
$$\frac{1}{L} + \inf_{\omega \geq 0} \left[\frac{-3\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4} - \frac{3}{2} \frac{\omega^4 - 2\omega^2}{(2\omega - \omega^3)^2 + 9\omega^4} \right] > 0$$

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{6} > 0 \implies L < 6$$

Ostatecznie więc układ będzie stabilny dla $m < 6$.

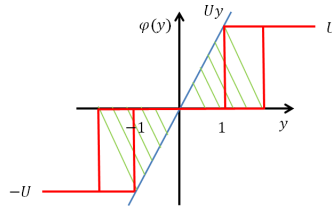
3.9 Przykład 9

Dla jakiego zakresu wartości U układ przedstawiony na rysunku (30) będzie absolutnie stabilny?



Rysunek 30: Schemat układu regulacji z przykładu 9.

W pierwszej kolejności można zauważyć, że nieliniowość w układzie spełnia założenia kryterium koła i mieści się w sektorze $[m_1, m_2] = [0, U]$ - rysunek (31).



Rysunek 31: Nieliniowość z przykładu 9 z zaznaczonym sektorem.

Kryterium koła mówi nam, że warunkiem wystarczającym stabilności jest, aby charakterystyka Nyquista nie zawierała się w kole wyznaczanym przez wartości m_1 i m_2 w następujący sposób:

- środek koła: $\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), 0\right)$,
- promień koła: $\frac{1}{2} \left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right|$.

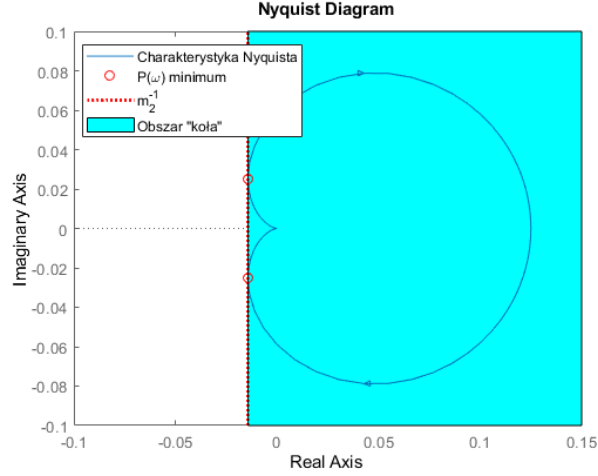
W rozważanym przypadku $m_1 = 0$, więc koło przekształca się w półpłaszczyznę położoną na lewo od prostej $x = -\frac{1}{m_2}$. Aby znaleźć więc wartość graniczną parametru m_2 należy znaleźć najmniejszą wartość $P(\omega)$:

$$-\frac{1}{m_2} = \min_{\omega \geq 0} P(\omega) = \min_{\omega \geq 0} \frac{8 - \omega^2}{(\omega^2 - 8)^2 + 36\omega^2} \approx -0.0142977.$$

Zatem wartość graniczna m_2 a więc i U wynosi:

$$m_2 = U \approx 69.9413.$$

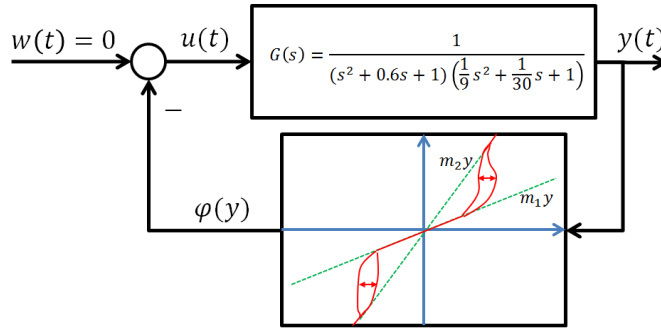
Interpretacja graficzna przedstawiona została na rysunku (32).



Rysunek 32: Obszar dopuszczalny wynikający z kryterium koła dla przykładu 9.

3.10 Przykład 10

Korzystając z kryterium koła określić przedział wartości współczynnika m_2 , dla którego układ z rysunku (33) jest globalnie asymptotycznie stabilny. Dla $m_1 = 0.763$.



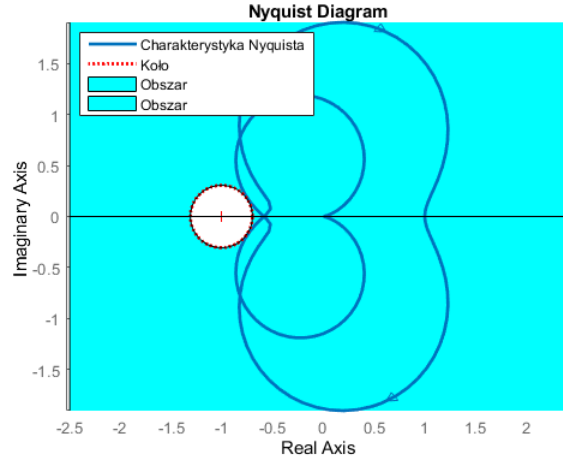
Rysunek 33: Schemat układu regulacji z przykładu 10.

Kryterium koła mówi nam, że warunkiem wystarczającym stabilności jest, aby charakterystyka Nyquista nie zawierała się w kole wyznaczanym przez wartości m_1 i m_2 w następujący sposób:

- środek koła: $\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), 0\right)$,
- promień koła: $\frac{1}{2} \left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right|$.

Ponieważ m_1 i m_2 są dodatnie, to okrąg ten będzie przecinał oś rzeczywistych w punktach $(0, \frac{1}{m_1})$ i $(0, \frac{1}{m_2})$. Zadanie to można rozwiązać graficznie, wyrysowując okręgi tworzone przez przesuwanie punktu $(0, \frac{1}{m_2})$ coraz bardziej w kierunku dodatnim, aż okrąg będzie styczny do charakterystyki Nyquista. Wynik przedstawiono na rysunku (34). A uzyskana wartość wynosi:

$$m_2 = 1.43.$$



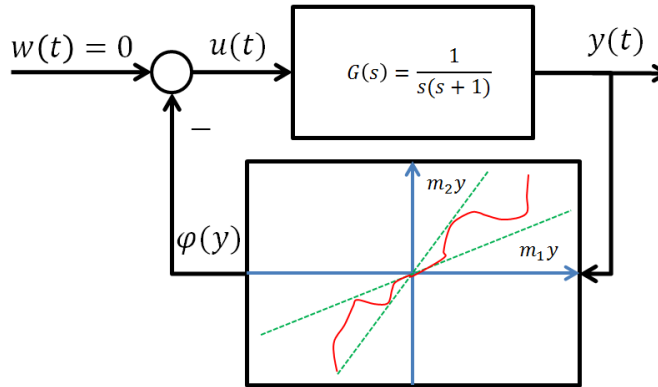
Rysunek 34: Obszar dopuszczalny wynikający z kryterium koła dla przykładu 10.

3.11 Przykład 11

W układzie regulacji przedstawionym na rysunku (35) wzmocnienie k regulatora nieliniowego jest ciągle i zmienne w czasie w granicach:

$$m_1 \leq k \leq m_2.$$

Zakładając $m_1 = 2$, znaleźć graniczną wartość m_2 wykorzystując kryterium koła.



Rysunek 35: Schemat układu regulacji z przykładu 11.

Transmitancja części liniowej posiada pierwiastek na osi urojonej, zatem nie spełnia ona wymogów kryterium koła. Aby móc je zastosować, można wykorzystać przekształcenie identyczne jak w przykładzie 5. A wartość h można przyjąć jako 1.

Wówczas badamy transmitancję:

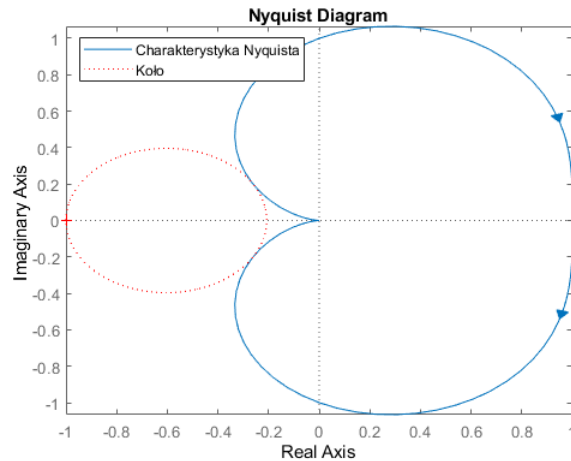
$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

a zmienne wzmocnienie regulatora ma ograniczenia:

$$1 \leq k - 1 \leq m_2 - 1.$$

Zatem zadanie możemy rozwiązać analogicznie jak w przypadku poprzednim - rozwiązanie przedstawione jest na rysunku (36), a wartość graniczna wynosi:

$$m_2 = 7.83.$$



Rysunek 36: Obszar dopuszczalny wynikający z kryterium koła dla przykładu 11.

4 Jak to zrobić w MATLABie?

4.1 Wyznaczenie charakterystyki Popova - numeryczne

Do graficznego wyznaczenia granicy sektora Popova konieczna jest znajomość charakterystyki Popova. MATLAB nie posiada wbudowanej funkcji do wyznaczenia tej charakterystyki, jednak można wyznaczyć ją na podstawie charakterystyki Nyquista w następujący sposób:

```
G = tf(1, [1 1 1 1]);

w = logspace(-5, 5, 1000);
[Pn, Qn, w_output] = nyquist(G, w);

Pp = squeeze(Pn);
Qp = squeeze(Qn) .* w_output;

figure();
hold on;
grid on;
axis equal;
xlim("Re");
ylim("Im");
plot(Pp, Qp, "LineWidth", 2);
```

4.2 Wyznaczenie charakterystyki Popova - symboliczne

W celu analitycznego wyznaczenia obszaru Popova potrzebna jest znajomość wzorów na charakterystykę częstotliwościową części liniowej. Można uzyskać je za pomocą Symbolic Toolbox MATLABa w następujący sposób:

```
syms s complex % zdefiniowanie zmiennej zespolonej s
syms w h real positive % zdefiniowanie zmiennych rzeczywistych

num = k; % licznik transmitancji
den = sum(conv(conv([1, T1], [1, T2]), [1, T3]) .* [s^3 s^2 s 1]); %
mianownik transmitancji

Gs = num / den; % definicja transmitancji operatorowej
Gw = subs(Gs, {s}, {1i * w}); % podstawiamy za s i*w aby uzyskac
transmitancje widmowa
```

```

Pn = real(Gw); % czesc rzeczywista transmitancji operatorowej
Qn = imag(Gw); % czesc urojona transmitancji operatorowej

% wyznaczamy charakterystyke Popova
Pp = Pn;
Qp = w * Qn;

```

4.3 Wyznaczenie kąta nachylenia stycznej do charakterystyki Popova - symboliczne

```

w0 = solve(Qp == 0); % wyznaczenie czestotliwosci, dla ktorej
    charakterystyka przecina os rzeczywistych

diff_Pp = diff(Pp, w); % wyznaczenie pochodnej P(w)
diff_Qp = diff(Qp, w); % wyznaczenie pochodnej Q(w)

one_over_q = subs(diff_Qp, {w}, {w0}) / subs(diff_Pp, {w}, {w0}); %
    obliczenie stosunku pochodnych dla w0
q = 1 / one_over_q; % wyznaczenie q

```

4.4 Wyznaczenie maksymalnego obszaru Popova

```

S = Pp - q*Qp;
diff_S = diff(S, w);
w_max = solve(diff_S == 0);
minus_one_over_L = subs(S, {w}, {w_max});

```

4.5 Wyznaczenie transmitancji

Posiadając daną macierz tranzykcji A , sterowania b i obserwacji c^T można wyznaczyć transmitancję układu liniowego w postaci:

$$G(s) = c^T(sI - A)b.$$

W MATLABie można wyznaczyć to za pomocą funkcji `ss2tf` w następujący sposób:

```

A = [-2 3; 1 0]; % macierz tranzykcji
b = [1; 0]; % macierz sterowania
c = [0; 1]; % macierz obserwacji
d = 0; % macierz bezposredniego sterowania

[num, den] = ss2tf(A, b, c', d);
G = tf(num, den);

```

4.6 Realizacja transmitancji

W przypadku odwrotnym, posiadając transmitancję, można wyznaczyć jej realizację, czyli macierze A, b, c za pomocą funkcji `tf2ss` w następujący sposób:

```

licznik = [1]; % licznik transmitancji G(s)
mianownik = [1, 2, -3]; % mianownik transmitancji G(s)

[A, b, c, d] = tf2ss(licznik, mianownik);

```

5 Przebieg ćwiczenia

Dla każdego z podanych systemów w trakcie analizy należy:

- wyznaczyć transmitancję widmową - charakterystykę Nyquista,
- charakterystykę Popova (jeśli można stosować kryterium Popova),
- nierówność Popova (jeśli można stosować kryterium Popova),
- wyrysować charakterystykę Popova i odpowiednią prostą Popova (jeśli można stosować kryterium Popova),
- wyrysować charakterystykę Nyquista i odpowiednie "koło",
- wyznaczyć sektor Popova, sektor dopuszczalny z kryterium koła,
- porównać wyniki z obydwu kryteriów,
- zamodelować układ w Simulinku i zweryfikować symulacyjnie uzyskane wyniki.

5.1 System 1

Wyznaczyć największy sektor dopuszczalny w kryterium Popova i kryterium koła dla układu opisanego transmitancją (12) oraz nieliniowym elementem $\varphi(\cdot)$.

$$G_1(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)} \quad (12)$$

5.2 System 2

Dany jest system dynamiczny:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c^T = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (14)$$

System ten objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pomocą nieliniowego, statycznego, stacjonarnego elementu o charakterystyce:

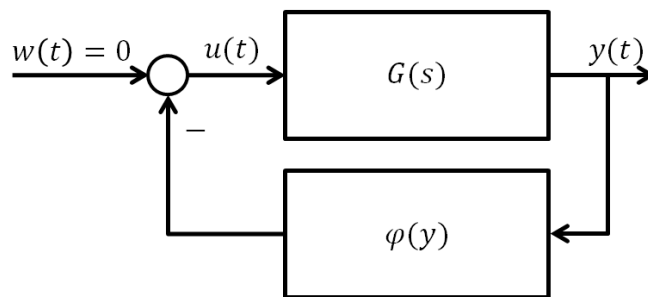
$$u = M \arctan y, M > 0. \quad (15)$$

Określić możliwie największą wartość parametru M , przy której charakterystyka elementu nieliniowego mieści się jeszcze w sektorze Popova oraz sektorze dopuszczalnym dla kryterium koła.

5.3 System 3

Zbadać asymptotyczną stabilność globalną układu regulacji przedstawionego na rysunku (37). Zakładamy, że w układzie może występować dozwolony element nieliniowy o charakterystyce $u = \varphi(y)$ spełniającej warunek $0 \leq y\varphi(y) \leq Ly^2$, dla $L = \frac{1}{2}$ i $L = 2$. Gdzie transmitancja wynosi:

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 1}$$



Rysunek 37: Układ dla zadania 3.

Literatura

- [1] Mitkowski, W., Baranowski, J., Hajduk, K., Korytowski, A., Tutaj, A., *Teoria Sterowania: Materiały Pomocnicze do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, AGH Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2007.
- [2] Amborski, K., Marusak, A., *Teoria Sterowania w Ćwiczeniach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [3] Gessing, R., Latarnik, M., Skrzywan-Kossek, A., *Zbiór Zadań z Teorii Nieliniowych Układów Regulacji i Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1981.
- [4] Gibson, J. E., *Nieliniowe Układy Sterowania Automatycznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1968.
- [5] Grabowski P., *Stabilność Układów Lurie*, AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 1999.
- [6] Vukic Z., Kuljaca L., Donlagic D., Tesnjak S., *Nonlinear Control Systems*, Marcel Dekker, 2003.