

**A G H**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Teoria Sterowania  
Metody Częstotliwościowe**

Maciej Różewicz

2025

# 1 Cel ćwiczenia

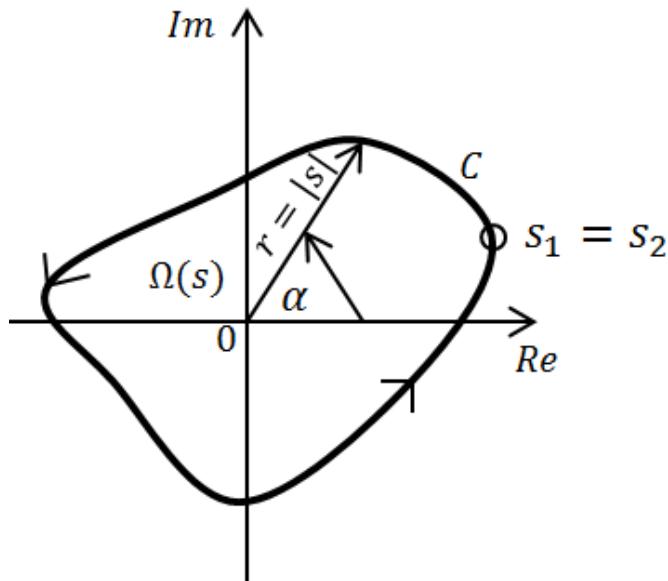
Celem ćwiczenia jest analiza stabilności systemów liniowych stacjonarnych za pomocą metod częstotliwościowych. Będą to dwa kryteria:

- kryterium Michajłowa - pozwala określić liczbę pierwiastków stabilnych i niestabilnych równania charakterystycznego układu na podstawie znajomości jego współczynników,
- kryterium Nyquista - pozwala na określenie stabilności układu zamkniętego na podstawie znajomości charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego (przy czym warto dodać, że kryterium to działa dla układów o parametrach skupionych, jak i rozłożonych [3] oraz dla układów z opóźnieniem) - dodatkowo kryterium Nyquista pozwala na określenie liczby pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie układu zamkniętego.

# 2 Wprowadzenie

Zanim podane zostaną kryteria badania stabilności układów dynamicznych, przedstawione zostaną pewne pojęcia wprowadzające.

**Przyrost argumentu:** niech zmienna zespolona  $s$  opisuje krzywą  $C$  od punktu  $s_1$  do  $s_2$  na płaszczyźnie zespolonej.



Rysunek 1: Krzywa  $C$  z zasadą argumentu.

Niech będzie dana funkcja zmiennej zespolonej  $F(s)$ . Gdy zmienna  $s$  opisuje krzywą  $C$  (przy czym kierunek dodatni obiegu po krzywej  $C$  przyjmuje się jako przeciwny do ruchu wskazówek zegara), to funkcja  $F(s)$  odwzorowuje krzywą  $C$  w krzywą  $K$ . Przyrostem argumentu funkcji  $F(s)$  -  $\Delta_{Carg}F(s)$  - nazywamy kąt opisany przez wektor zaczynający się w początku układu współrzędnych, a którego koniec kreśli krzywą  $K$  od punktu  $F(s_1)$  do punktu  $F(s_2)$ . Niech

$$F(s) = P(s) + iQ(s)$$

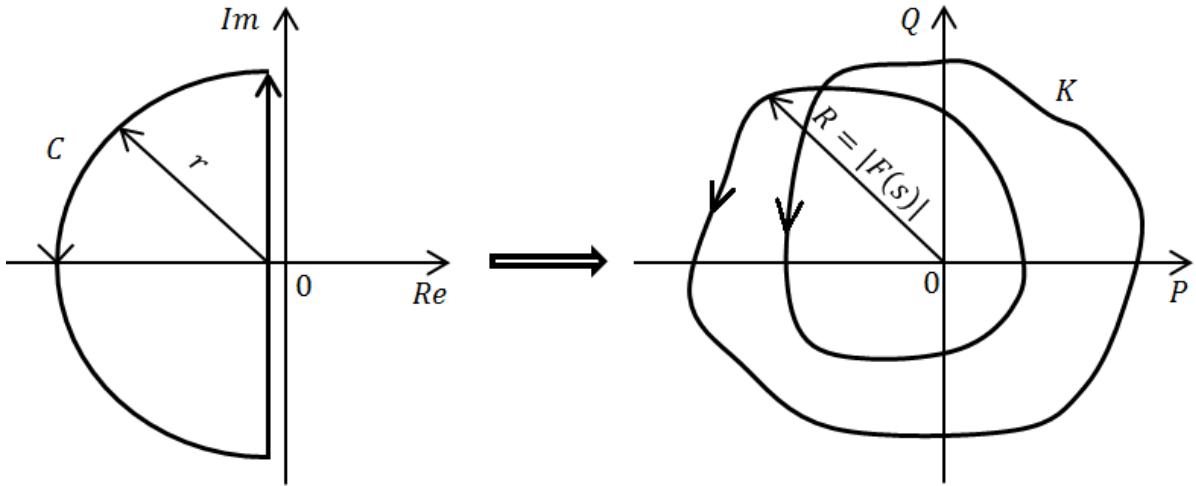
wtedy:

$$\Delta_{Carg}F(s) = \Delta_{Carg} \tan \left[ \frac{Q(s)}{P(s)} \right], \quad s \in (s_1, s_2) \quad (1)$$

**Zasada argumentu:** jeżeli funkcja  $F(s)$ :

- jest meromorficzna<sup>1</sup> we wnętrzu domkniętego obszaru  $\Omega(s)$ , którego brzeg jest pojedynczą krzywą  $C$  (ciągłą, bez przecięć i zamkniętą),

<sup>1</sup>Funkcja  $f$  jest meromorficzna na danym podzbiорze  $D$  płaszczyzny zespolonej, jeśli jest holomorficzna (czyli różniczkowalna w sensie zespolonym) na zbiorze  $D/S$ , gdzie  $S$  jest zbiorem punktów izolowanych, z których każdy jest biegunem funkcji  $f$ .



Rysunek 2: Odwzorowanie krzywej  $C$  w krzywą  $K$ .

- jest ciągła i nie posiada zer ani biegunów na krzywej  $C$  (tj. na brzegu obszaru  $\Omega(s)$ )

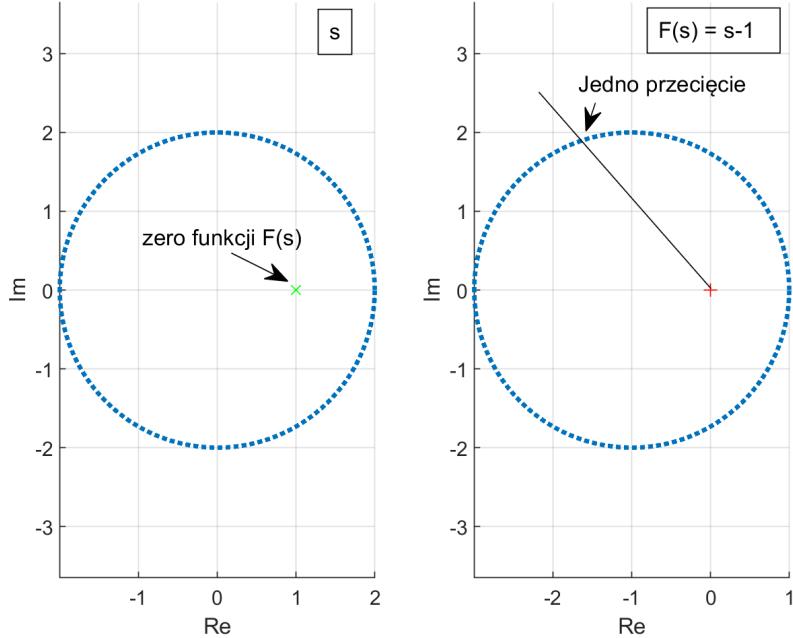
to różnica między ilością zer funkcji  $F(s) - Z_f$  a ilością biegunów funkcji  $F(s) - B_f$  we wnętrzu obszaru  $\Omega(s)$  ograniczonego krzywą  $C$ , liczonych ze swoją krotnością, jest równa przyrostowi argumentu:

$$N = Z_f - B_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C F(s). \quad (2)$$

Aby więc obliczyć  $N$  trzeba wyznaczyć, ile razy krzywa  $K$  obiega początek układu współrzędnych. Dowód można znaleźć np. w [3].

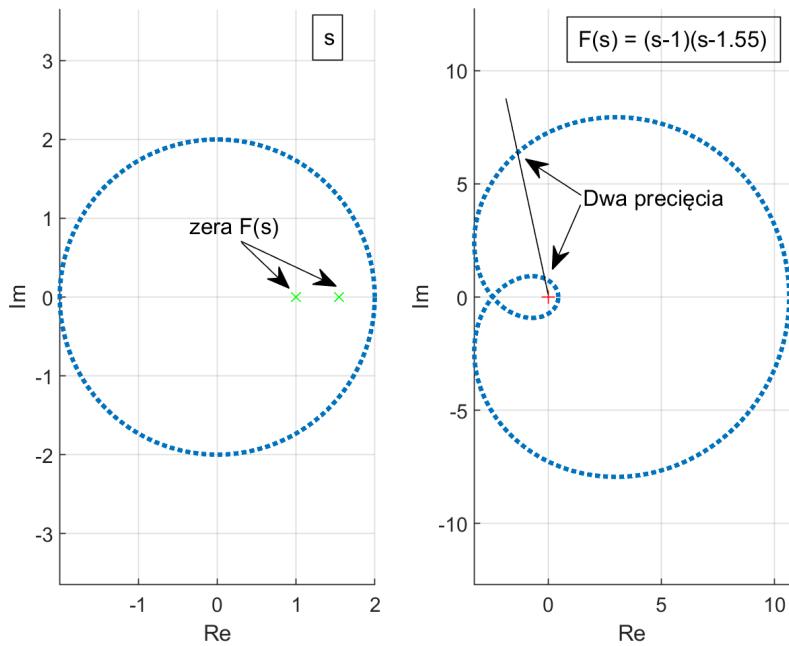
Pokazane zostanie tutaj kilka przykładów dla zobrazowania zasady argumentu:

1.  $F(s) = s - 1$  - jeden pierwiastek w konturze



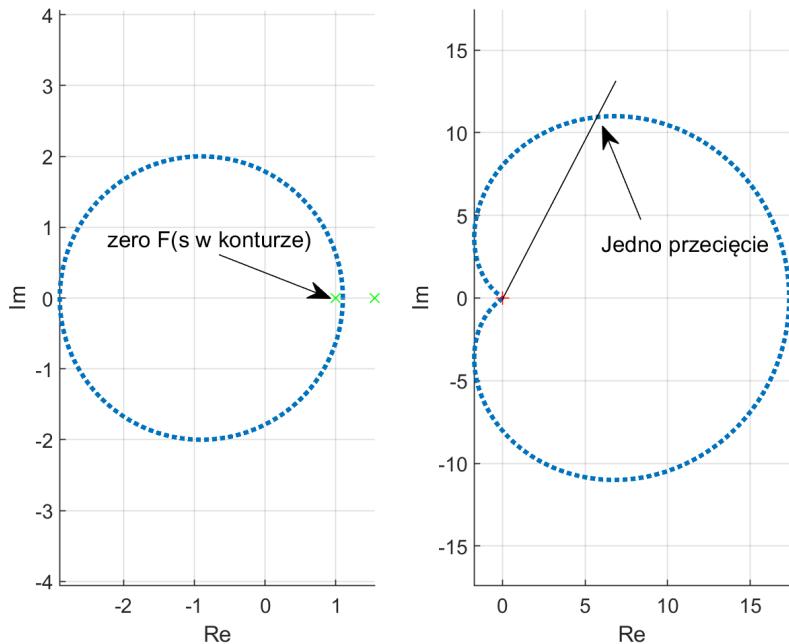
Rysunek 3: Zasada argumentu dla funkcji  $F(s) = s - 1$  i konturu zdefiniowanego jako okrąg o promieniu 2 i środkiem w punkcie  $(0,0)$ .

2.  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  - dwa pierwiastki w konturze



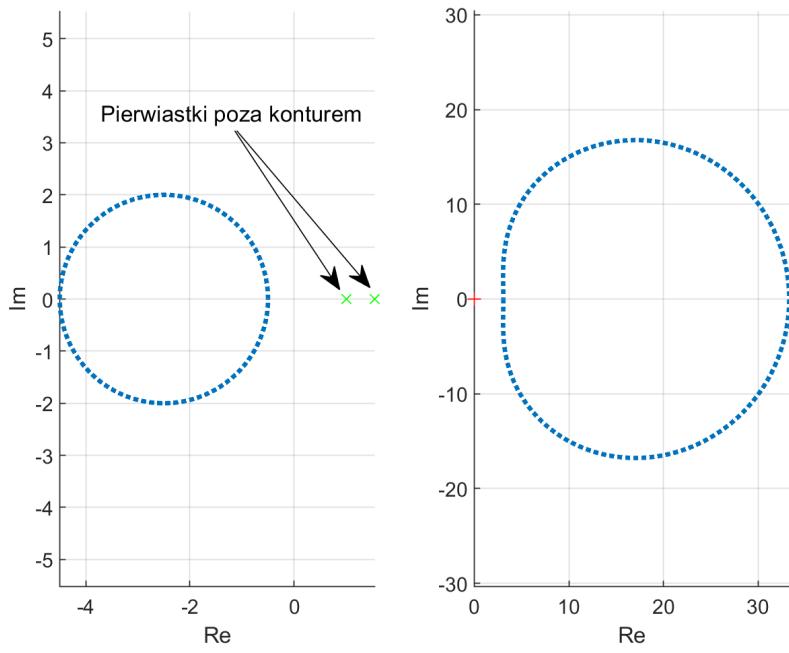
Rysunek 4: Zasada argumentu dla funkcji  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  i konturu zdefiniowanego jako okrąg o promieniu 2 i środkiem w punkcie (0,0).

3.  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  - jeden pierwiastek w konturze



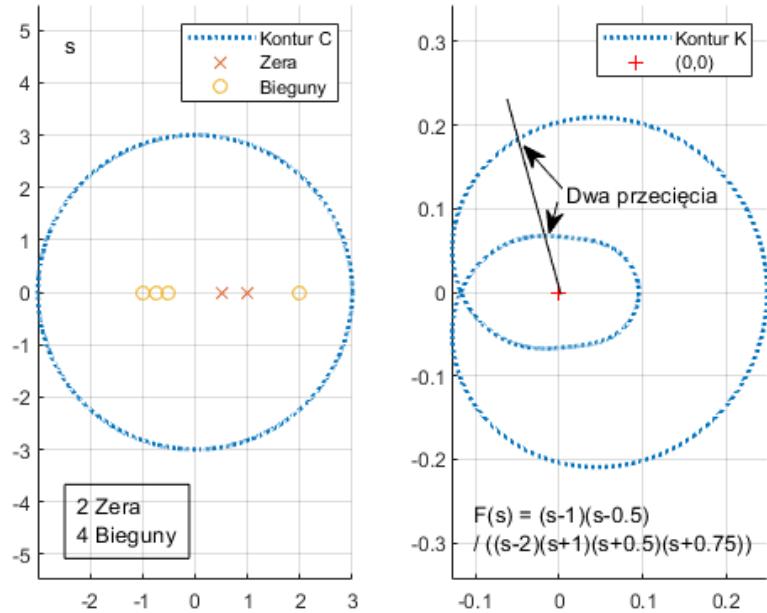
Rysunek 5: Zasada argumentu dla funkcji  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  i konturu zdefiniowanego jako okrąg o promieniu 2 i środkiem w punkcie (-0.9,0).

4.  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  - brak pierwiastków w konturze



Rysunek 6: Zasada argumentu dla funkcji  $F(s) = (s - 1)(s - 1.55)$  i konturu zdefiniowanego jako okrąg o promieniu 2 i środkiem w punkcie  $(-2.5, 0)$ .

5.  $F(s) = \frac{(s-1)(s-0.5)}{((s-2)(s+0.5)(s+1)(s+0.75))}$  - dwa pierwiastki i cztery biegunki w konturze



Rysunek 7: Zasada argumentu dla funkcji  $F(s) = \frac{(s-1)(s-0.5)}{((s-2)(s+0.5)(s+1)(s+0.75))}$  i konturu zdefiniowanego jako okrąg o promieniu 3 i środkiem w punkcie  $(0,0)$ .

## 2.1 Kryterium Michajłowa

Jest to kryterium graficzne, pozwalające na zbadanie ilości stabilnych pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu:

$$H(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Zakłada się, że  $H(s)$  nie posiada zer na osi urojonej (jest to założenie potrzebne do konstrukcji odpowiedniego konturu w zasadzie argumentu).

Aby znaleźć liczbę pierwiastków stabilnych (leżących w lewej półpłaszczyźnie zespolonej) można zastosować zasadę argumentu z obszarem  $\Omega(s)$  zdefiniowanym jak na rysunku (2), gdzie  $r \rightarrow \infty$ , czyli obejmującym całą lewą półpłaszczyznę. Kontur tego obszaru  $\Omega(s)$  można opisać jako:

$$\partial\Omega = \{s \in \mathbb{C} : s = i\omega, \omega \in [-r, r]\} \cup \left\{s \in \mathbb{C} : s = re^{i\varphi}, \varphi \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]\right\}$$

Wówczas, aby sprawdzić liczbę pierwiastków niestabilnych, czy wynosi ona  $m$ , bada się przyrost argumentu  $\Delta_C \arg H(s)$ , który powinien wynosić dokładnie  $2(n - m)\pi$ .

Badanie przyrostu argumentu na krzywej zamkniętej można podzielić na badanie go na każdej z części tej krzywej, zatem:

$$2(n - m)\pi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_C \arg H(s) = \lim_{r \rightarrow \infty} [\Delta_C \arg_{\omega \in (-\infty, \infty)} H(i\omega) + \Delta_C \arg_{s \in \partial\Omega} H(re^{-i\varphi})] \quad (3)$$

Dodatkowo można zapisać:

$$H(re^{i\varphi}) = a_n r^n e^{in\varphi} + \cdots + a_1 r e^{i\varphi} + a_0 = a_n r^n e^{in\varphi} \left\{ 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{r} e^{-i\varphi} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{r^n} e^{-in\varphi} \right\}$$

Wówczas:

$$\Delta_C \arg_{\varphi \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]} \lim_{r \rightarrow \infty} H(re^{i\varphi}) = \Delta_C \arg_{\varphi \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]} \lim_{r \rightarrow \infty} a_n r^n e^{in\varphi} = n[\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi] = n\pi$$

Podstawiając ostatni wynik do (3) otrzymuje się:

$$2(n - m)\pi = \Delta_C \arg_{\omega \in (-\infty, \infty)} H(i\omega) + n\pi \implies \Delta_C \arg_{\omega \in (-\infty, \infty)} H(i\omega) + n\pi = (n - 2m)\pi$$

Ponieważ pierwiastki są symetryczne, możemy rozważać tylko zmianę argumentu od 0 do  $\infty$ .

**Kryterium Michajłowa** - jeżeli  $a_n > 0$ , to warunkiem dostatecznym i koniecznym do tego, aby wielomian  $H(s)$  miał dokładnie  $m$  zer w prawej półpłaszczyźnie zespolonej jest równość:

$$\Delta \arg_{\omega \in (0, \infty)} H(j\omega) = \frac{1}{2}n\pi - m\pi \quad (4)$$

### 2.1.1 Przykłady

**Przykład 1** (z [5]) Dany jest obiekt o transmitancji:

$$G(s) = \frac{0.3s^2 + 2.5s + 65}{0.0024s^4 + 0.05s^3 + 8.03s^2 + 94s + 223}$$

Sprawdzić, czy jest stabilny.

Aby zbadać stabilność układu liniowego wystarczy zbadać rozłożenie pierwiastków wielomianu charakterystycznego:

$$H(s) = 0.0024s^4 + 0.05s^3 + 8.03s^2 + 94s + 223$$

Wyznaczamy funkcje  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$ :

- $P(\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) = 0.0024\omega^4 - 8.03\omega^2 + 223$

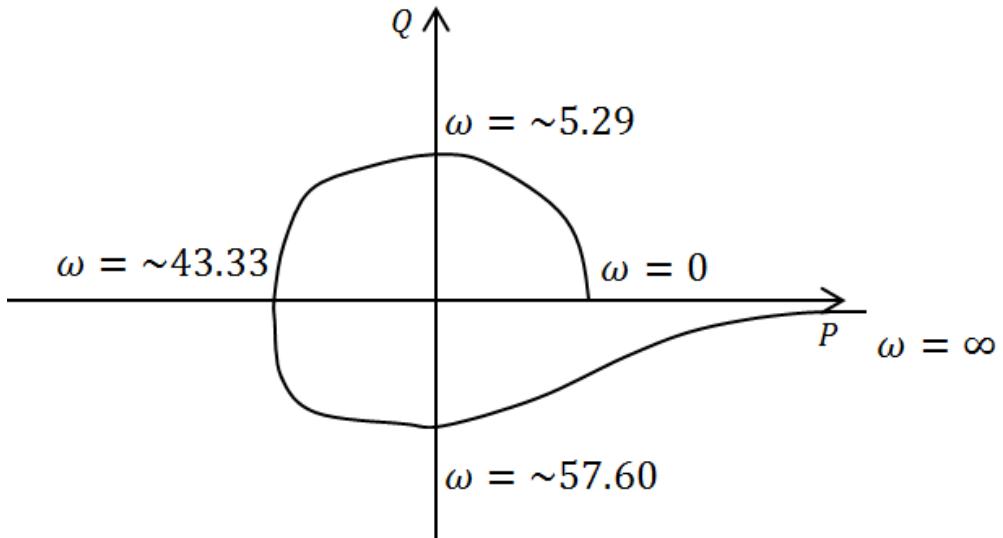
- $Q(\omega) = \operatorname{Im}(H(j\omega)) = -0.05\omega^3 + 94\omega$

Aby móc naszkicować plot Michajłowa wystarczy wyznaczyć miejsca zerowe funkcji  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$  oraz ich znak na odpowiednich przedziałach:

$\omega$	0	$\nearrow$	$\approx 5.29$	$\nearrow$	$\approx 43.33$	$\nearrow$	$\approx 57.60$	$\nearrow$
$P(\omega)$	223	+	0	-	-	-	0	+
$Q(\omega)$	0	+	+	+	0	-	-	-

Tabela 1: Zmiana wartości funkcji  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$  - przykład 1.

Sprawdzić jeszcze należy, jak wielomiany zachowują się dla  $\omega \rightarrow \infty$ , w tym przypadku plot dąży do punktu w nieskończoności o argumentem  $2\pi$ . Zatem zmiana argumentu wynosi  $2\pi = \frac{1}{2}n\pi$ , czyli pierwiastki leżą tylko w lewej półpłaszczyźnie, a więc obiekt stabilny.



Rysunek 8: Szkic plotu Michajłowa dla wielomianu  $H(s) = 0.0024s^4 + 0.05s^3 + 8.03s^2 + 94s + 223$ .

**Przykład 2** Zbadać ilość niestabilnych pierwiastków wielomianu za pomocą kryterium Michajłowa:

$$H(s) = 0.6s^5 + 8s^4 + 21.8s^3 + 18.4s^2 + 4s + 9$$

Jak poprzednio bada się wielomiany  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$ :

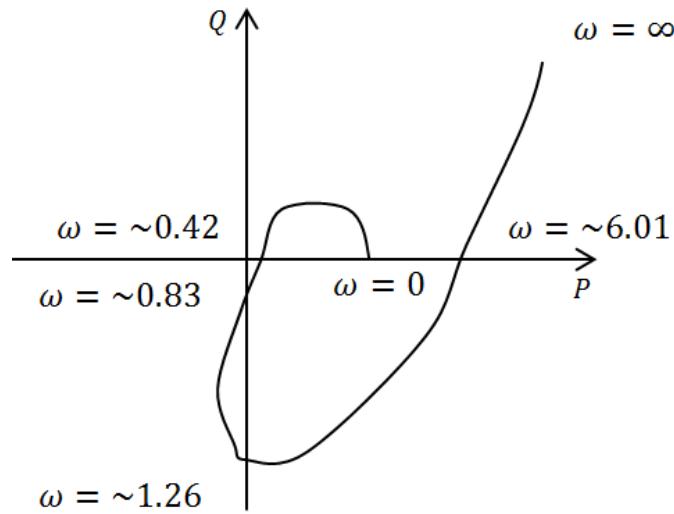
- $P(\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) = 8\omega^4 - 18.4\omega^2 + 9$ ,
- $Q(\omega) = \operatorname{Im}(H(j\omega)) = 0.6\omega^5 - 21.8\omega^3 + 4\omega$ .

Oraz przedziały, na których przyjmują dodatnie lub ujemne wartości:

$\omega$	0	$\nearrow$	$\approx 0.43$	$\nearrow$	$\approx 0.84$	$\nearrow$	$\approx 1.26$	$\nearrow$	$\approx 6.01$	$\nearrow$
$P(\omega)$	9	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$Q(\omega)$	0	+	0	-	-	-	-	-	0	+

Tabela 2: Zmiana wartości funkcji  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$  - przykład 2.

Wyrysujemy plot Michajłowa:



Rysunek 9: Szkic plotu Michajłowa dla wielomianu  $H(s) = 0.6s^5 + 8s^4 + 21.8s^3 + 18.4s^2 + 4s + 9$ .

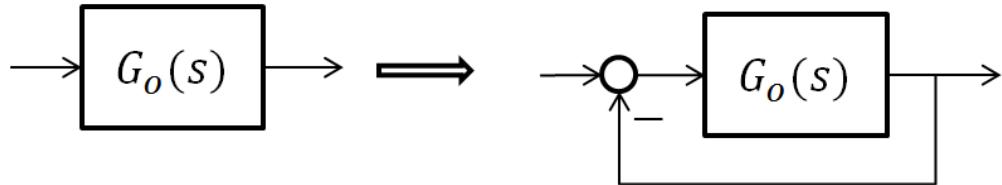
Przyrost argumentu wynosi  $\Delta \arg_{\omega \in (0, \infty)} H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$ , zatem z kryterium Michajłowa otrzymuje się:

$$\Delta \arg_{\omega \in (0, \infty)} H(j\omega) = \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi - m\pi \rightarrow m = 2$$

Zatem wielomian ma 2 pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zespolonej.

## 2.2 Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista dotyczy badania stabilności układu zamkniętego na podstawie znajomości transmitancji  $G_0(s)$  / charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego.



Rysunek 10: Układ otwarty i zamknięty dla kryterium Nyquista.

Transmitancja układu z zamknięta pętlą sprzężenia zwrotnego ma postać:

$$G_z(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (5)$$

Aby zbadać więc stabilność układu zamkniętego konieczne jest sprawdzenie, czy zera mianownika  $G_z(s)$ , czyli  $1 + G_0(s)$ , zlokalizowane są w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

**Kryterium Nyquista** - jeżeli:

- transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{s^k M(s)}$$

gdzie:  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $L, M$  - względnie pierwsze wielomiany rzeczywiste zmiennej zespolonej  $s$ ,

- $M(s)$  ma  $m$  zer w prawej półpłaszczyźnie zespolonej i nie ma zer na osi urojonych,

- stopień licznika transmitancji  $G_0(s)$  jest niższy niż stopień mianownika ( $\deg(L(s)) < \deg(s^k M(s))$ ) oraz

$$\frac{L(0)}{M(0)} \neq 0$$

Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności układu zamkniętego jest, aby charakterystyka częstotliwościowa układu otwartego, czyli wykres  $G(i\omega)$ , przy zmianie częstotliwości  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  okrążyła punkt krytyczny  $(-1, i0)$  w kierunku dodatnim  $m$ -razy. Innymi słowy przyrost argumentu wektora  $G(i\omega)$  względem punktu krytycznego musi wynosić  $2m\pi$ .

Dowód podzielimy na dwa przypadki:

- $G_0(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  - bez astatyzmu (pierwiastki  $M(s)$  nie leżą na osi urojonych):

Przyjmując taką postać transmitancji toru otwartego badana transmitancja (badanie ilości zer)  $1 + G_0(s)$  ma postać:

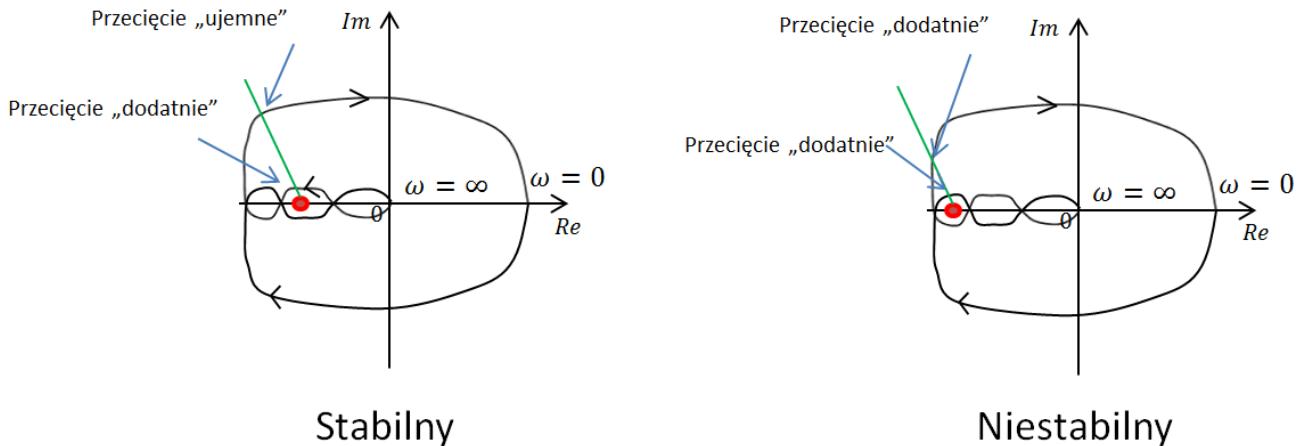
$$1 + G_0(s) = \frac{M(s) + L(s)}{M(s)}$$

Aby  $G_z(s)$  (5) była transmitancją stabilną, wielomian  $M(s) + L(s)$  musi mieć wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Zatem wiedząc, że  $M(s) + L(s)$  i  $M(s)$  są tego samego stopnia, oraz wiedząc, że  $M(s)$  ma  $m$  pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie, to funkcja  $1 + G_0(s)$  musi mieć  $n$  zer w lewej półpłaszczyźnie i  $m$  biegunków w prawej półpłaszczyźnie. Zatem można zastosować **zasadę argumentu** z konturem  $C$  tak skonstruowanym, aby obejmował całą prawą stronę płaszczyzny zespolonej. Kontur ten można skonstruować analogicznie jak do dowodu kryterium Michajłowa.

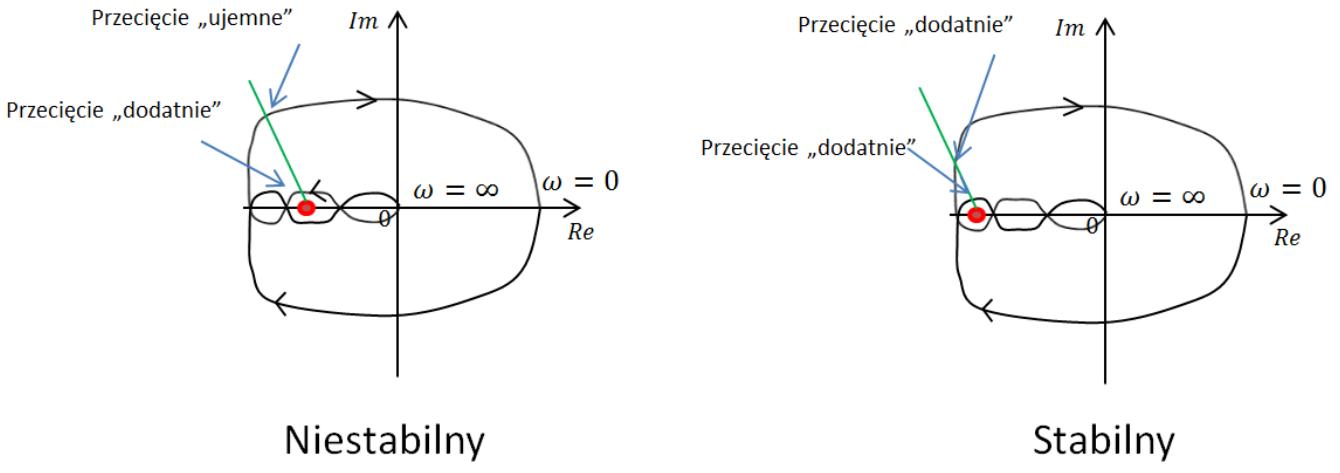
Widać zatem, że przyrost argumentu musi wynosić:

$$\Delta \arg_{\omega \in (-\infty, \infty)} [1 + G_0(s)] = 2m\pi$$

Formalnie badamy więc transmitancję  $1 + G_0(s)$ , ale dodanie jedynki do transmitancji toru otwartego powoduje tylko "przesunięcie jej o jeden" w prawo, zatem zamiast badać przyrost argumentu względem punktu  $(0, 0)$  transmitancji  $1 + G_0(s)$  można badać przyrost argumentu transmitancji  $G_0(s)$  wokół punktu  $(-1, 0)$ . Jest to bardzo praktyczne podejście, gdyż zwykle posiadamy jedynie zdjętą eksperymentalnie charakterystykę obiektu  $G(s)$ .



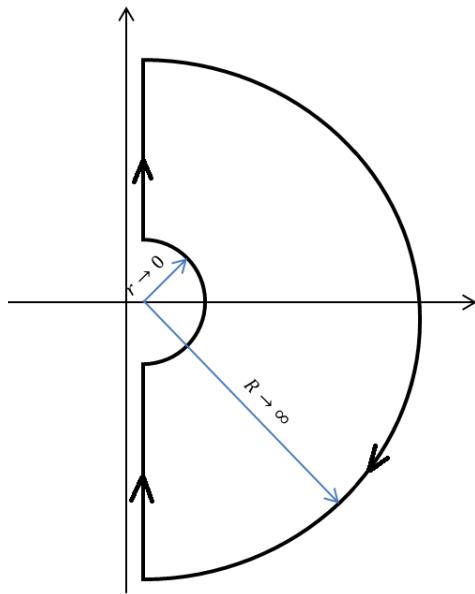
Rysunek 11: Ilustracja kryterium Nyquista dla stabilnego  $G_0(s)$ .



Rysunek 12: Ilustracja kryterium Nyquista dla niestabilnego  $G_0(s)$  - jeden pierwiastek niestabilny.

2.  $G_0(s) = \frac{L(s)}{s^k M(s)}$  - posiada astatyzm  $k$ -tego rzędu:

W tym przypadku dowód wygląda bardzo podobnie, jednak z powodu istnienia biegunów na osi urojonej konieczne jest zmodyfikowanie konturu  $C$ , tak by nie zawierał żadnych zer ani biegunów transmitancji  $1+G_0(s)$ . Robi się to dodając półokrąg o promieniu  $r \rightarrow 0$ , jak na rysunku (13).



Rysunek 13: Kontur wykorzystywany do dowodu kryterium Nyquista z astatyzmem.

Można zatem zapisać:

$$2m\pi = \Delta_{\arg} \int_{\omega \in (-\infty, \infty)} [1 + G_0(s)] = \lim_{r \rightarrow 0} \Delta_{\arg} \int_{\omega \in (\infty, r)} [1 + G_0(i\omega)] + \sum_{\varphi \in [\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]} \Delta_{\arg} \int_{\omega \in (\infty, r)} [1 + G_0(re^{i\varphi})] + \\ + \Delta_{\arg} \int_{\omega \in (-r, -\infty)} [1 + G_0(i\omega)] + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{\arg} \int_{\omega \in (\infty, R)} [1 + G_0(i\omega)]$$

Można zauważyc, że "małe" półkole jest odwzorowywane w tor o kierunku ujemnym i promieniu dążącym do nieskończoności, ponieważ:

$$1 + G_0(re^{i\varphi}) = \frac{L(re^{i\varphi}) + r^k e^{ik\varphi} M(re^{i\varphi})}{r^k e^{ik\varphi} M(re^{i\varphi})}$$

Czyli przechodząc do granicy otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} [1 + G_0(re^{i\varphi})] &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{L(re^{i\varphi})}{M(re^{i\varphi})} e^{-ik\varphi} \right] r^{-k} \left\{ 1 + \frac{M(re^{i\varphi} r^k e^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} \right\} = \\ &= \infty \frac{L(0)}{M(0)} e^{-k\varphi} = \frac{L(0)}{M(0)} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^k} e^{-k\varphi} \end{aligned}$$

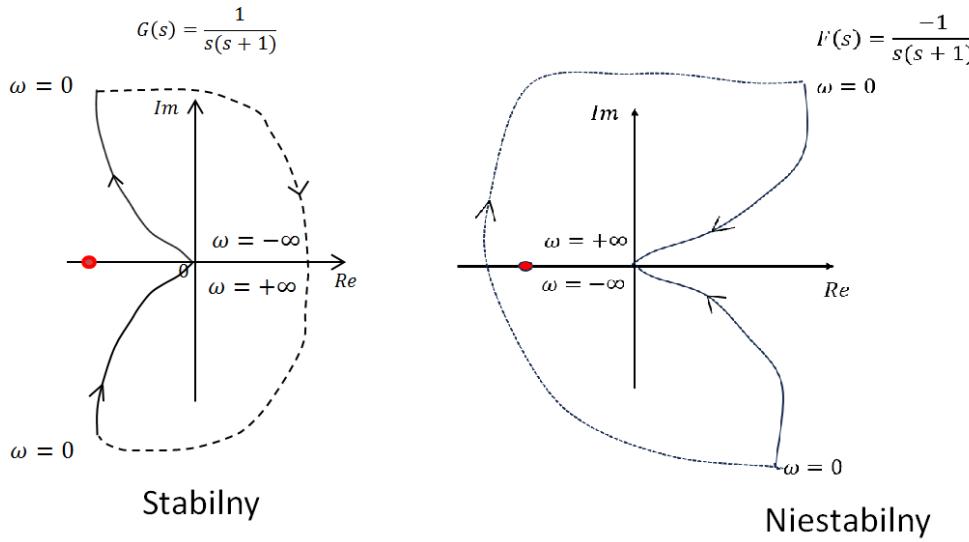
Zatem tor ten rozpoczyna się w punkcie w nieskończoności o argumencie:

$$\arg \frac{L(0)}{M(0)} + k \frac{1}{2}\pi = \begin{cases} k \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \frac{L(0)}{M(0)} > 0 \\ k \frac{1}{2}\pi - \pi & \text{dla } \frac{L(0)}{M(0)} < 0 \end{cases}$$

a kończy na argumencie:

$$\arg \frac{L(0)}{M(0)} - k \frac{1}{2}\pi = \begin{cases} -k \frac{1}{2}\pi & \text{dla } \frac{L(0)}{M(0)} > 0 \\ -k \frac{1}{2}\pi - \pi & \text{dla } \frac{L(0)}{M(0)} < 0 \end{cases}$$

Ostatecznie więc bada się plot  $G(i\omega)$  uzupełniony o tor w nieskończoności.



Rysunek 14: Ilustracja kryterium Nyquista dla obiektów z astatyzmem.

Można również udowodnić kryterium Nyquista dla transmitancji w postaci:

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{(s^2 + \alpha^2)M(s)}, \alpha \in \mathbb{R}$$

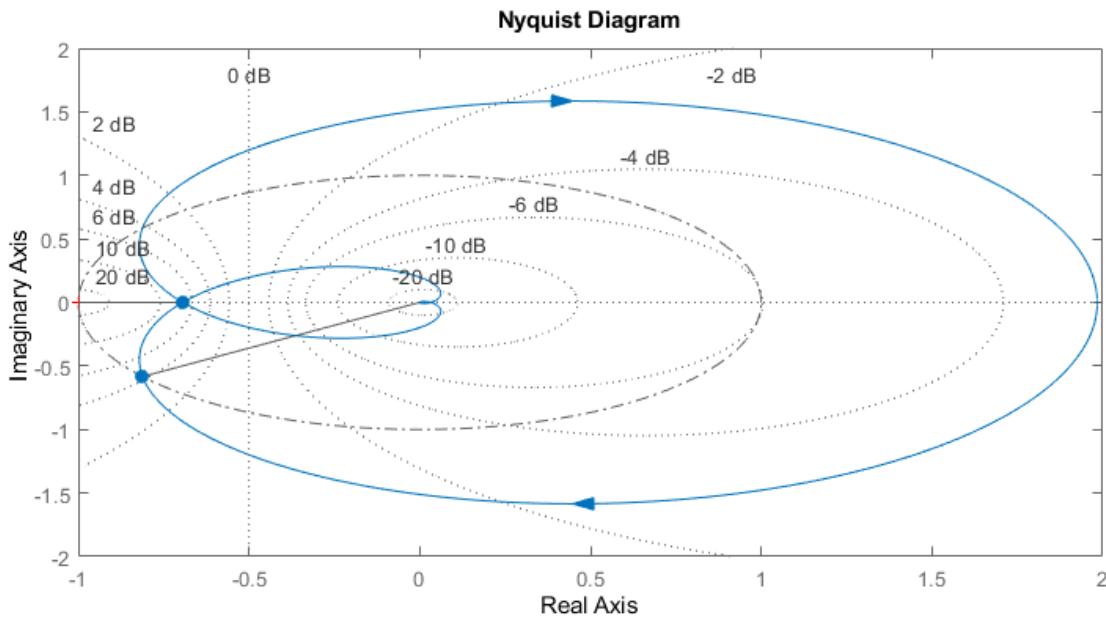
czyli z pierwiastkami na osi urojonej, ale różnymi od 0. Dowód można znaleźć np. w [5].

### 2.2.1 Przykłady

**Przykład 3** W pierwszej kolejności rozpatrzmy przypadek, gdy transmitancja układu otwartego jest stabilna:

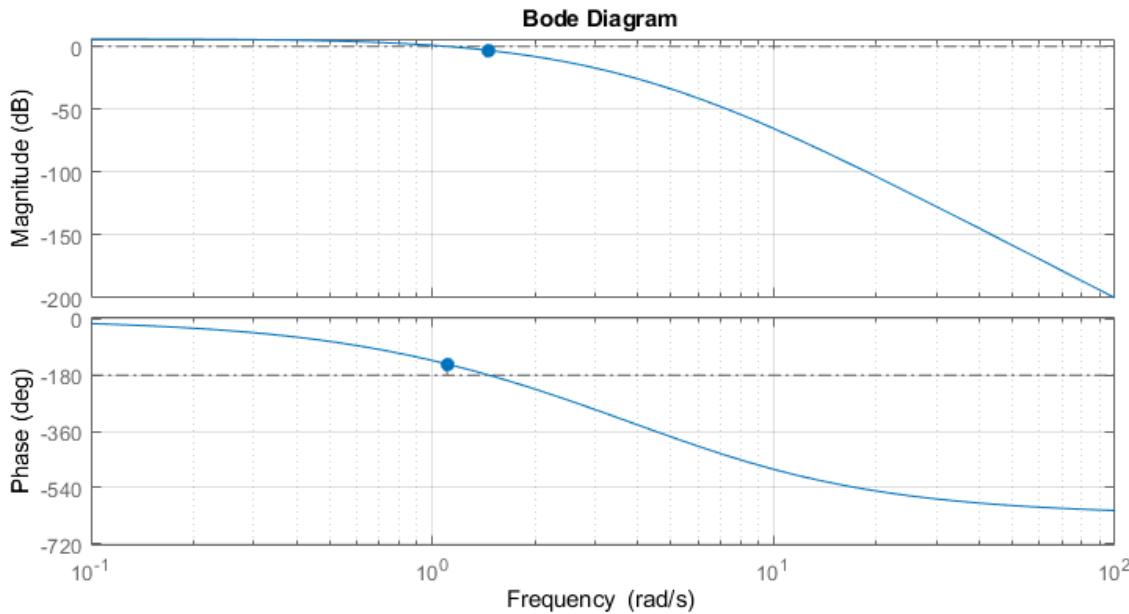
$$G_0(s) = \frac{10^4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)(s+7)} \quad (6)$$

Zgodnie z podanym kryterium Nyquista, aby układ zamknięty był stabilny, plot Nyquista nie może ani razu otaczać punktu  $(-1, i0)$  (zmiana argumentu musi wynosić 0) - ponieważ liczba pierwiastków niestabilnych układu otwartego wynosi 0. Na rysunku (15) przedstawiono plot Nyquista danej transmitancji. Łatwo zauważać, iż ani razu nie okrąża ona punktu krytycznego, zatem po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego układ regulacji automatycznej będzie stabilny.



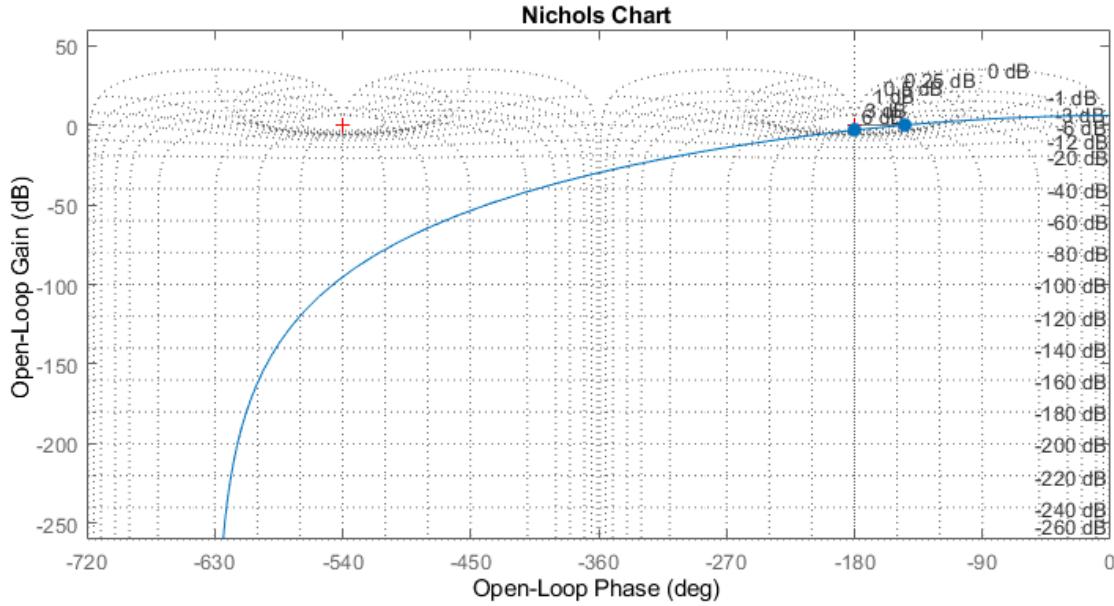
Rysunek 15: Charakterystyka Nyquista dla układu z przykładu 3.

Warto zauważyc, że w przypadku gdy  $G_0(s)$  jest stabilne, to potrzebne informacje o kształcie charakterystyki częstotliwościowej uzyskać można również tylko na podstawie charakterystyki Bodego. Należy wówczas sprawdzić czy dla fazy  $-180$  stopni magnituda jest mniejsza od 0.



Rysunek 16: Charakterystyka Bodego dla układu z przykładu 3.

Innym użytecznym typem wykresu jest tak zwany plot Nicholasa. Przedstawia on fazę i magnitudę na jednym wykresie. Aby system był stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego, plot ten musi okrążać punkt  $(-180, 0)$  z prawej strony.

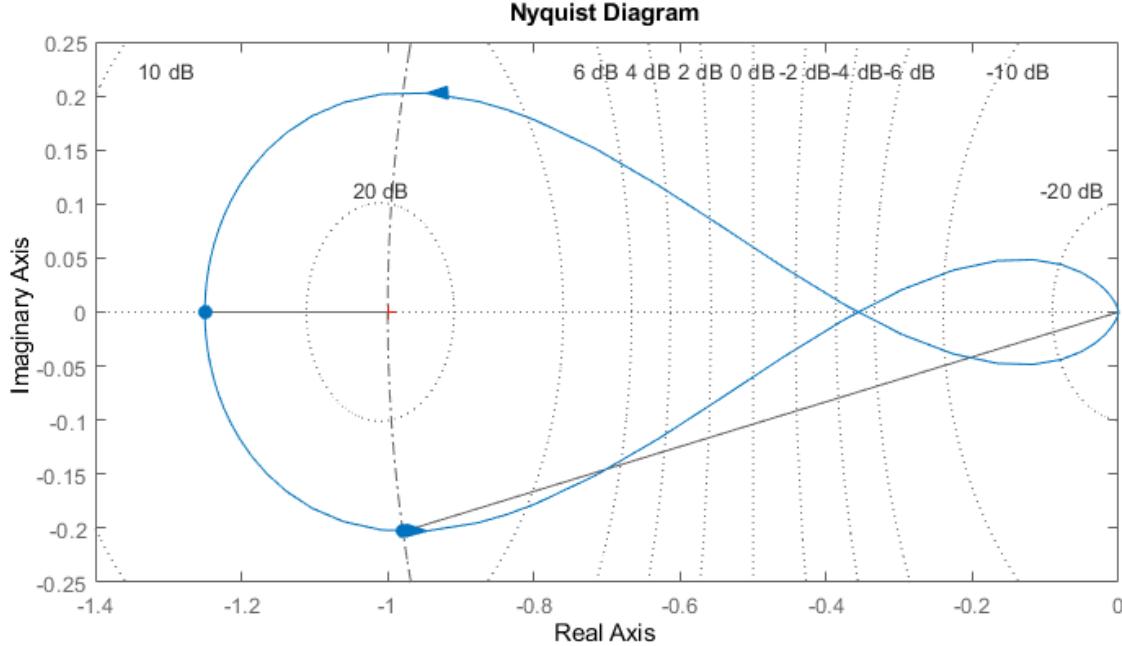


Rysunek 17: Charakterystyka Nicholса dla układu z przykładu 3.

**Przykład 4** Kolejnym przykładem jest transmitancja niestabilna z jednym pierwiastkiem dodatnim.

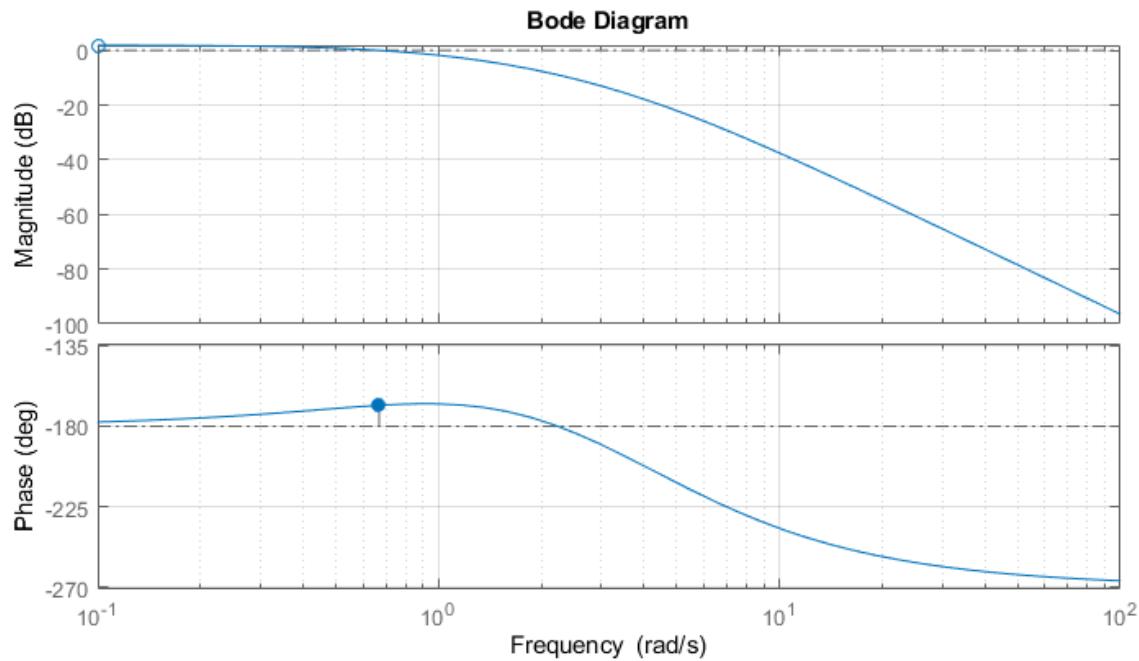
$$G_0(s) = \frac{15}{(s-1)(s+3)(s+4)}$$

W takim przypadku plot  $G_0(i\omega)$  musi okrążać punkt  $(-1, i0)$  dokładnie jeden raz. Na rysunku 18 widać, że plot Nyquista okrąża punkt krytyczny 1 raz, zatem układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego jest stabilny.



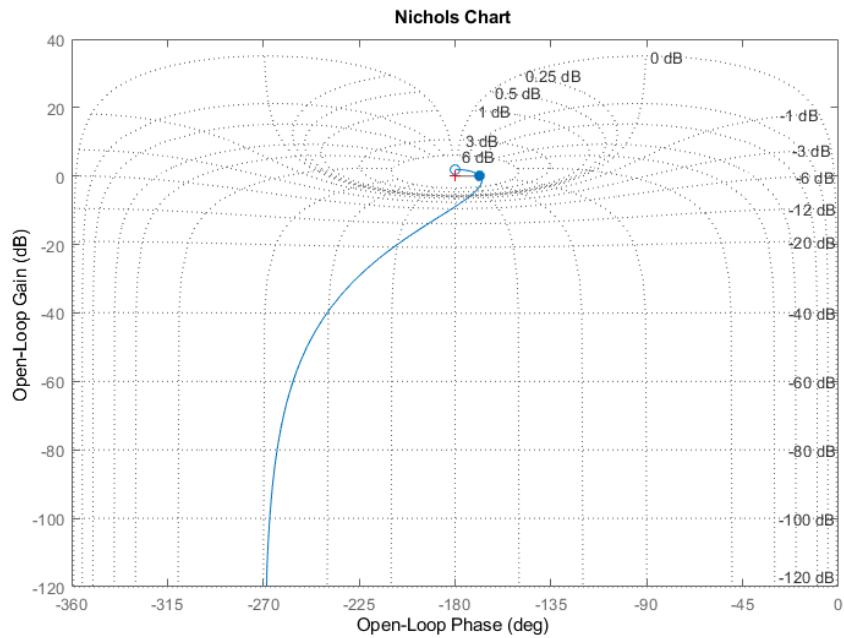
Rysunek 18: Charakterystyka Nyquista dla układu z przykładu 3.

W tym przypadku, gdy plot Nyquista przecina oś rzeczywistych kilkukrotnie, to użycie wykresów Bodego nie jest tak oczywiste jak w poprzednim przypadku.



Rysunek 19: Charakterystyka Bodego dla układu z przykładu 3.

Natomiast na podstawie plotu Nicholsa możemy również stwierdzić stabilność układu zamkniętego, ponieważ okrąża punkt krytyczny z prawej strony.

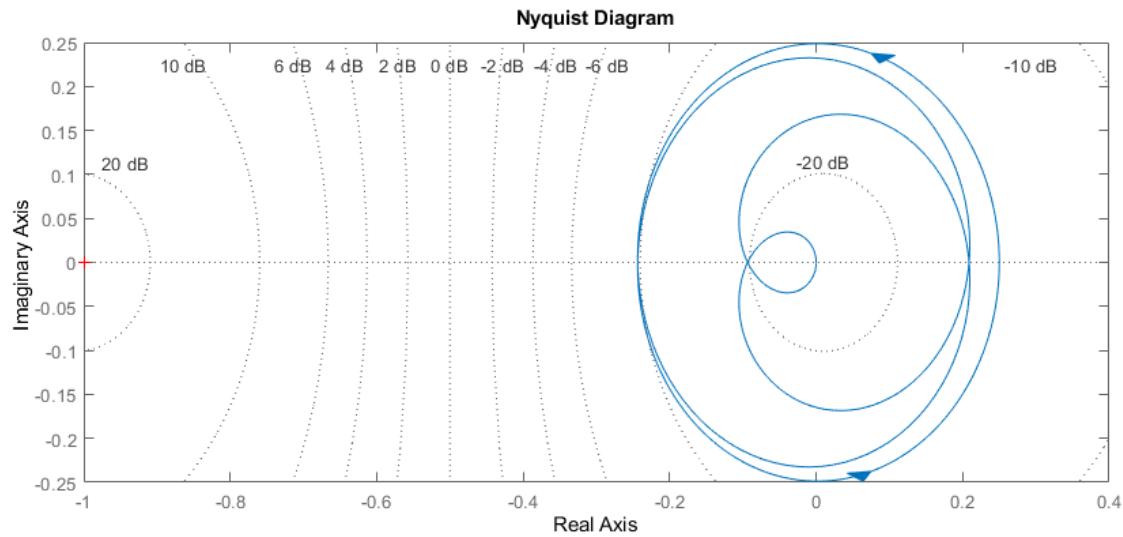


Rysunek 20: Charakterystyka Nicholsa dla układu z przykładu 3.

**Przykład 5** W przykładzie tym rozpatrujemy transmitancję  $G_0(s)$ , która posiada jedynie niestabilne pierwiastki.

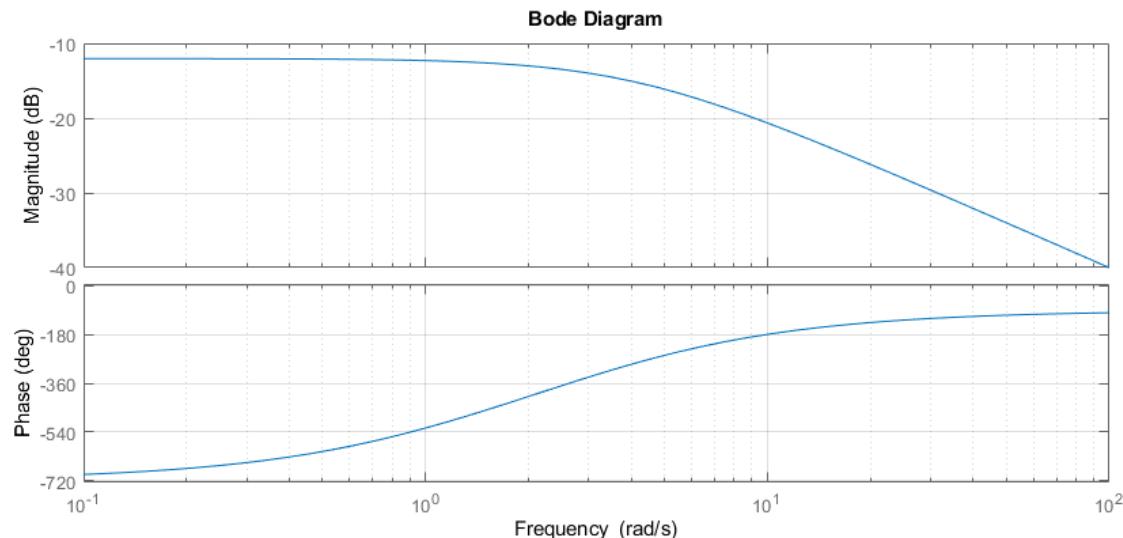
$$G_0(s) = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}$$

Zatem punkt  $(-1, i0)$  musi być okrążony 4-krotnie przez ploty Nyquista.



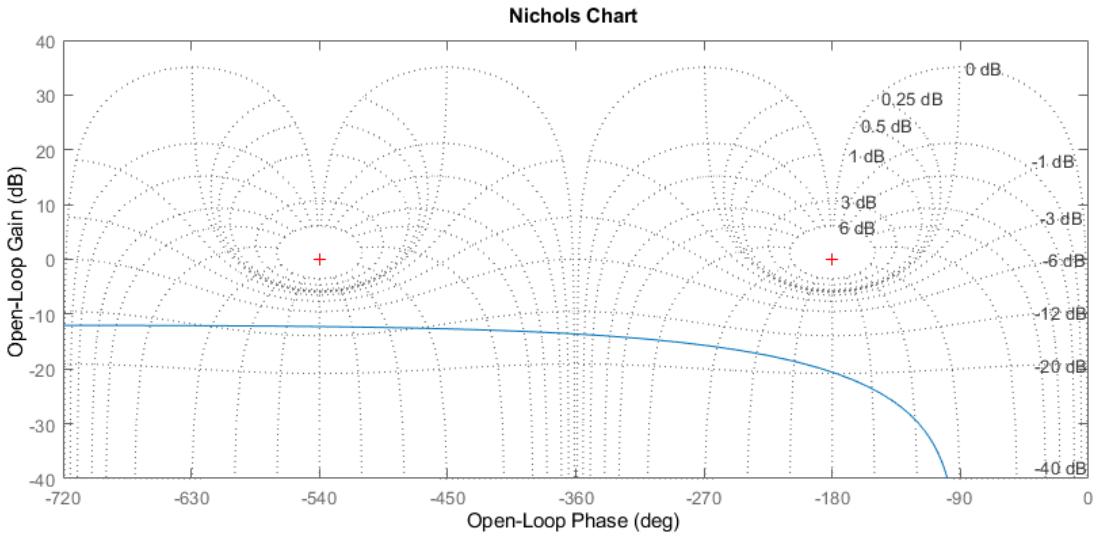
Rysunek 21: Charakterystyka Nyquista dla układu z przykładu 4.

Na podstawie plotu Nyquista łatwo zauważyc, że punkt krytyczny nie jest okrążany przez charakterystykę  $G_0(i\omega)$  ani razu, zatem układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie niestabilny.



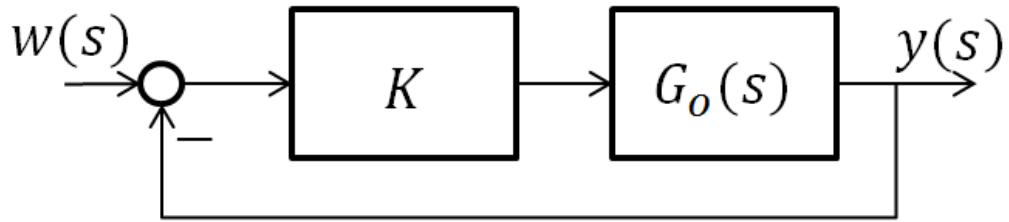
Rysunek 22: Charakterystyka Bodego dla układu z przykładu 4.

Z plotu Nicholsa widać, iż charakterystyka obiega punkt krytyczny od lewej strony, zatem układ będzie niestabilny.



Rysunek 23: Charakterystyka Nicholsa dla układu z przykładu 4.

Jak można ustabilizować układ zamknięty? Czy można zapewnić stabilizację regulatorem proporcjonalnym?



Rysunek 24: Zamknięty układ regulacji.

Po dodaniu regulatora proporcjonalnego transmitancja toru otwartego ma postać:

$$G_{0R}(s) = K \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}$$

Zamiast rozpatrywać całą rodzinę plotów Nyquista, dla każdego  $K$  można badać ilość obrotów wokół punktu  $(-\frac{1}{K}, i0)$ . W tym przypadku zauważmy, że charakterystyka częstotliwościowa okrążać będzie punkt  $(-\frac{1}{K}, i0)$  od  $K = 10.6878$ .

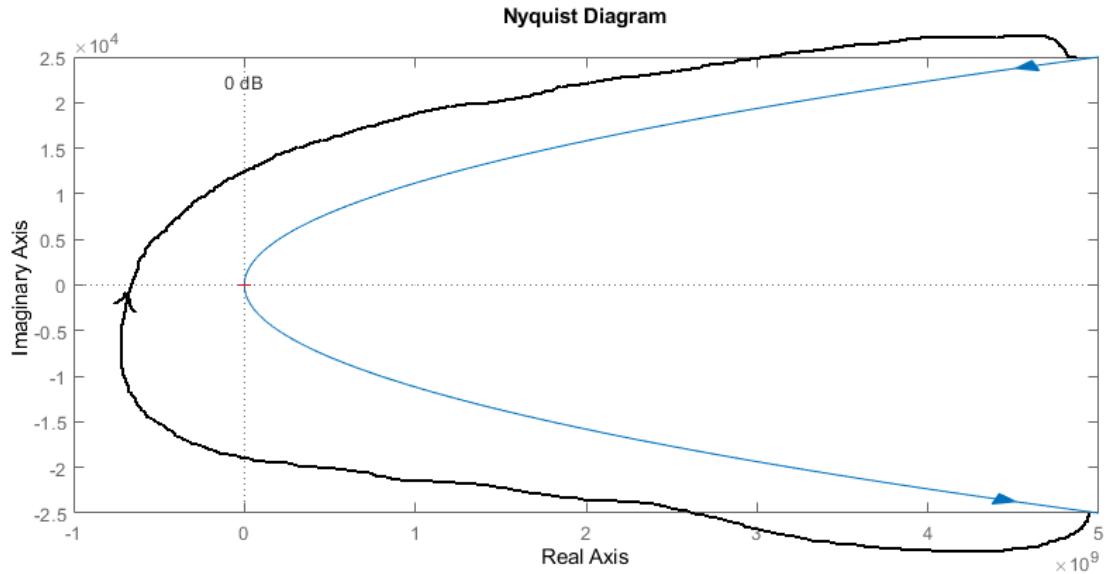
Znacznie łatwiej w tym przypadku odczytać tę informację z plotu Nicholsa, ponieważ dodanie wzmacnienia oznacza przesunięcie plotu w pionie, a więc sprawdzić o ile trzeba przesunąć wykres w góre, by plot okrążał punkt krytyczny z prawej strony.

**Przykład 6** Kolejnym przykładem jest obiekt astatyczny z jednym niestabilnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3(s-2)}$$

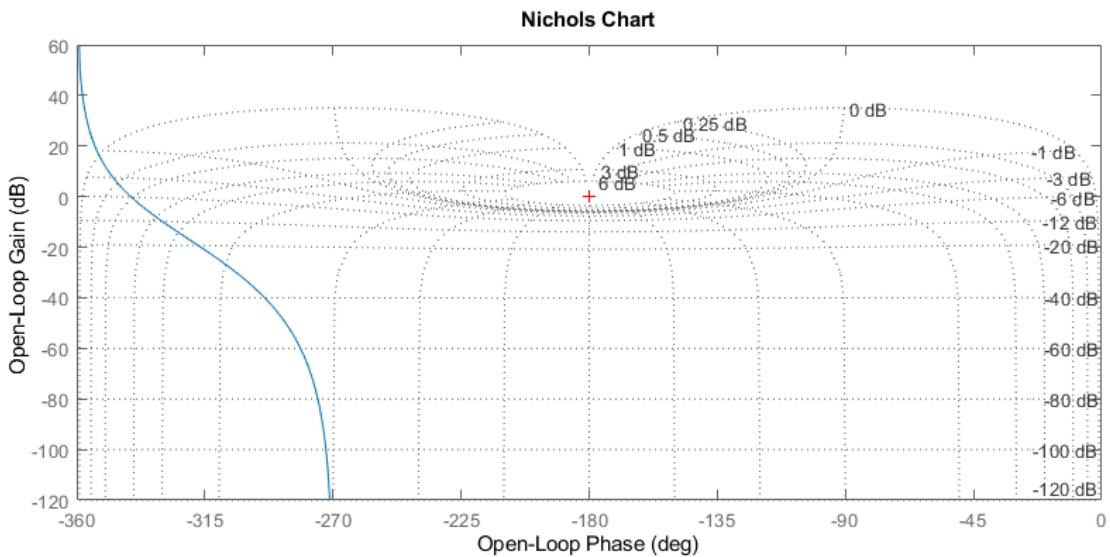
Ponieważ obiekt jest astatyczny, to plot Nyquista posiada uzupełnienie w nieskończoności. Niestety Matlab nie wyrysowuje tego, dlatego trzeba samemu pamiętać o uzupełnieniu.

W tym przypadku zaczyna się w argumencie 0, a kończy na  $2\pi$ . Zatem układ jest niestabilny po zamknięciu sprzężenia zwrotnego.



Rysunek 25: Charakterystyka Nyquista dla układu z przykładu 6.

Identyczne wnioski łatwo wyciągnąć z plotu Nicholsa, gdyż charakterystyka obiega punkt krytyczny z lewej strony.

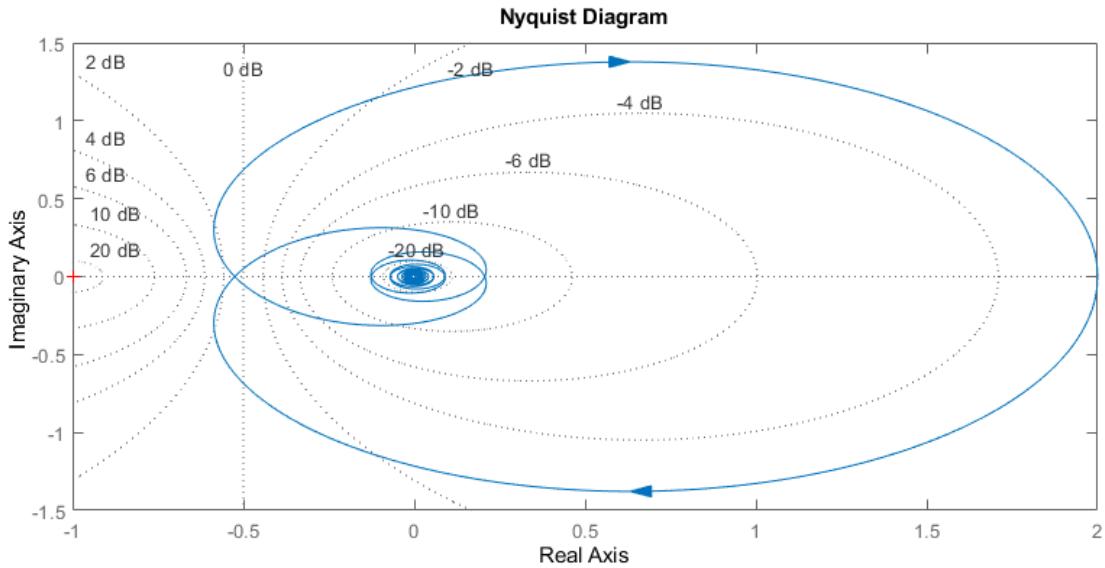


Rysunek 26: Charakterystyka Nicholsa dla układu z przykładu 6.

**Przykład 7** Ostatnim rozważanym przypadkiem jest transmitancja z członem opóźniającym. Nie wpasowuje się ona dokładnie w kształt transmitancji podanej przy sformułowaniu kryterium Nyquista - mimo to jest ono wciąż stosowalne, lecz czasem nazywa się je metodą Cypkina dla tego typu transmitancji.

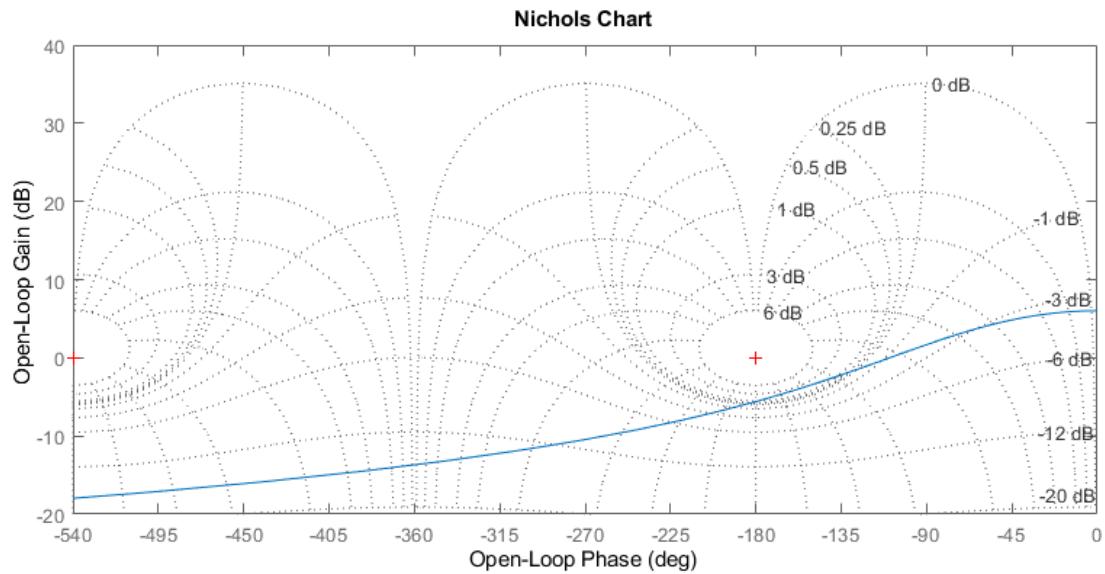
$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)} e^{-s}$$

Mimo innego kształtu transmitancji metoda postępowania jest identyczna - sprawdza się czy plot okrąża punkt krytyczny odpowiednią ilość razy. W rozważanym przypadku (rysunek 27), nie posiadającym niestabilnych pierwiastków, łatwo zauważać, że plot nie okrąża go ani razu, zatem układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego będzie stabilny.



Rysunek 27: Charakterystyka Nyquista dla układu z przykładu 7.

Równie łatwo można dojść do tego samego wniosku analizując plot Nicholsa.



Rysunek 28: Charakterystyka Nicholsa dla układu z przykładu 7.

### 3 Jak to zrobić w MATLABie?

Transmitancję w postaci:

$$G_0(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Można zdefiniować w MATLABie za pomocą funkcji:

```
G0 = tf([bm bm_1 bm_2 .. b1 b0], [1 an_1 an_2 .. a1 a0])
```

Na tak zdefiniowanych transmitancjach można wykonywać działania:  $G_1(s) \pm G_2(s)$ ,  $G_1(s) \cdot G_2(s)$ ,  $G_1(s)/G_2(s)$  i sprzężenie zwrotne  $\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$  w następujący sposób:

```

G1 = tf([bm1 b1m_1 b1m_2 .. b11 b10], [1 a1n_1 a1n_2 .. a11 a10]);
G2 = tf([bm2 b2m_1 b2m_2 .. b21 b20], [1 a2n_1 a2n_2 .. a21 a20]);

G_sum = G1 + G2;
G_prod = G1 * G2;
G_div = G1 / G2;
G_feedback = feedback(G1, G2);

```

Jeśli potrzebne jest dodanie opóźnienia - czyli:

$$G_{delay}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} e^{-s\tau}$$

to można to również wykonać za pomocą funkcji `tf`:

```
G_delay = tf([bm bm_1 bm_2 .. b1 b0], [1 an_1 an_2 .. a1 a0], "OutputDelay", tau)
```

Można również zdefiniować zmienną  $s$  i później definiować transmitancje już bezpośrednio z jej użyciem, np.:

```
s = tf("s");
G = (s+1) / (s^2 + 2*s + 1) * exp(-2*s);
```

Posiadając zdefiniowaną transmitancję, można wykonać jej ploty: Bodego, Nyquista i Nicholsa:

```
bode_plot = figure();
bode(s);
grid on;

nyquist_plot = figure();
nyquist(s);
grid on;

nichols_plot = figure();
nichols(s);
grid on;
```

Jeśli interesuje nas konkretny zakres częstotliwości przedstawianych na plotach, to można je podać bezpośrednio do funkcji plotujących (najlepiej zdefiniować je funkcją `logspace` - zwracającą  $n$  punktów rozłożonych w skali logarytmicznej między  $10^{x_1}$  a  $10^{x_2}$ ):

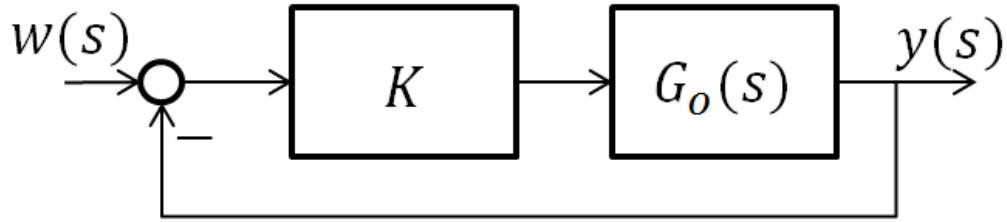
```
omega = logspace(x1, x2, n);

bode(s, omega);
nyquist(s, omega);
nichols(s, omega);
```

## 4 Przebieg ćwiczenia

- Rozważamy układ zamknięty z regulatorem proporcjonalnym  $G_R(s) = K$ , przedstawiony na rysunku (29), gdzie transmitancja obiektu sterowanego wynosi:

$$G_0(s) = \frac{s + 1}{0.01s^4 + 0.5s^3 + 3s^2 - 10s + 10}$$



Rysunek 29: Zamknięty układ regulacji.

W czasie laboratorium:

- stosując kryterium Michajłowa wyznaczyć ilość niestabilnych biegunów transmitancji  $G_O(s)$ ,
- stosując kryterium Nyquista określić wartości współczynnika  $K \in \mathbb{R}_+$ , dla których układ zamknięty będzie stabilny,
- wyrysować charakterystykę Bodego i Nicholsa, zaznaczyć zapas fazy i wzmacnienia.

2. Dany jest układ otwarty o transmitancji:

$$G(s) = \frac{4}{s+1} e^{-0.5s}$$

W czasie laboratorium:

- zbadać stabilność układu zamkniętego za pomocą kryterium Nyquista,
- sprawdzić, dla jakich wartości  $K \in \mathbb{R}_+$  regulatora proporcjonalnego układ będzie stabilny,
- sprawdzić, dla jakiego opóźnienia układ przestanie być stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego.

## Literatura

- [1] Mitkowski W., Baranowski J., Hajduk K., Korytowski A., Tutaj A., *Teoria Sterowania: Materiały Pomocnicze do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, AGH Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2007.
- [2] Amborski K., Marusak A., *Teoria Sterowania w Ćwiczeniach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [3] Górecki H., *Optymalizacja Systemów Dynamicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
- [4] Górecki H., *Analiza i Synteza Układów Regulacji z Opóźnieniem*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1971.
- [5] Grabowski P., *Podstawy Teorii Sterowania w Problemach i Zadaniach*, Wydawnictwo AGH, 2022.
- [6] Nowakowski J., Suchomski P., *Teoria Sterowania w Zadaniach*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 1999.
- [7] Rojtberg J. N., *Teoria Sterowania*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.