



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Teoria Sterowania**  
**Układy Dyskretne**

Maciej Różewicz

2025

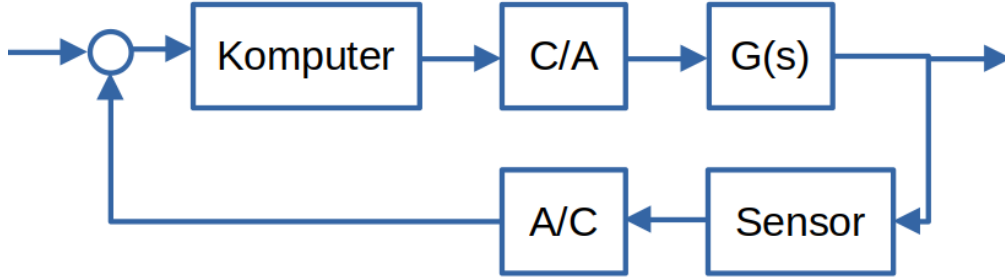
# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z własnościami systemów dynamicznych dyskretnych w czasie. Systemy takie opisuje się zwykle za pomocą równań rekurencyjnych zamiast równań różniczkowych, oraz transmitancji opartej na transformacie  $\mathcal{Z}$  zamiast transformacie Laplace'a. Z modelami takimi można spotkać się w praktyce bardzo często, praktycznie zawsze przy sterowaniu komputerowym i numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych.

Istnieją również przypadki, gdzie opis taki wynika wprost z jego natury.

# 2 Wprowadzenie

Najczęściej dyskretne równania układu regulacji uzyskiwane są w rezultacie cyfrowej realizacji algorytmów sterowania układami ciągłymi. Schemat takiego układu sterowania przedstawiony jest na rysunku (1).



Rysunek 1: Schemat układu regulacji cyfrowej - algorytm regulacji realizowany na komputerze.

Istotnym faktem jest, że w pamięci komputera przechowywane są tylko poszczególne próbki z pomiarów uzyskanych przez przetwornik analogowo-cyfrowy (A/C), zatem nie można mówić o funkcjach czasu, a o szeregach liczbowych. Matematycznie można operację próbkowania sygnału w dziedzinie czasu  $x(t)$  zapisać jako iloczyn tego sygnału z szeregiem impulsów Diraca:

$$x^D(Tk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(Tk) \cdot \delta(t - Tk).$$

## 2.1 Dyskretyzacja

W ogólności będziemy rozważać stacjonarne równania różniczkowe w postaci:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Jednak ponieważ będą nas interesowały jedynie wartości funkcji tylko w dyskretnych chwilach czasowych, możliwe do wyznaczenia na podstawie poprzednich, to możemy posłużyć się ogólną formułą:

$$x(Tk + T) = \int_{Tk}^{Tk+T} f(x(t), u(t)) dt. \quad (1)$$

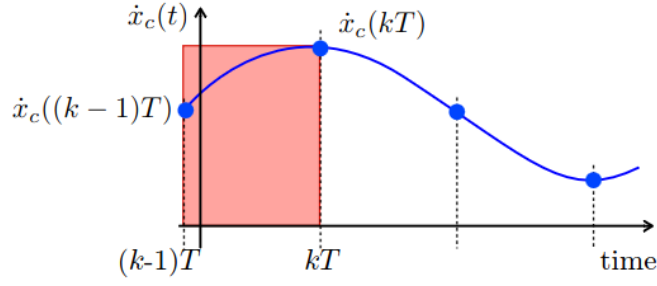
### 2.1.1 Schemat różnicowy

Podana powyżej formuła jest bardzo ogólna, jednak w wielu przypadkach trudna do analitycznego wyznaczenia. Można wówczas wspomagać się pewnymi przybliżeniami. Jedną z opcji jest przybliżenie pochodnej ilorazem różnicowym. Można to zrobić na różne sposoby i otrzymujemy wówczas odpowiednio:

(a) aproksymacja lewostronna (*backward*):

- $\dot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(Tk) - x(Tk - \Delta)}{\Delta} \approx \frac{x[Tk] - x[T(k-1)]}{T},$
- $\ddot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(Tk) - \dot{x}(Tk - \Delta)}{\Delta} \approx \frac{x[Tk] - 2x[T(k-1)] + x[T(k-2)]}{T^2},$
- $\ddot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\ddot{x}(Tk) - \ddot{x}(Tk - \Delta)}{\Delta} \approx \frac{x[Tk] - 3x[T(k-1)] + 3x[T(k-2)] - x[T(k-3)]}{T^3},$

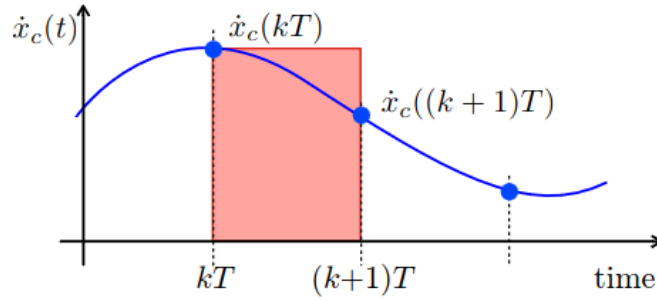
• ...,



Rysunek 2: Aproksymacja lewostronna (*backward*).

(b) aproksymacja prawostronna (*forward*):

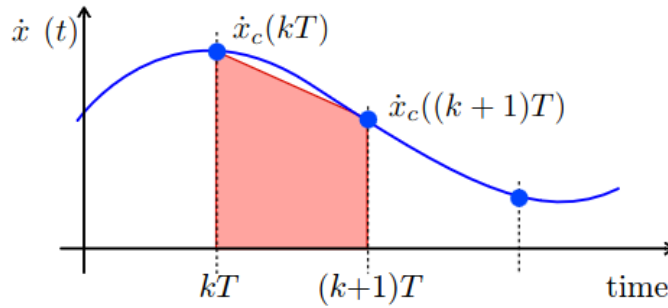
- $\dot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(Tk+\Delta) - x(Tk)}{\Delta} \approx \frac{x[T(k+1)] - x[Tk]}{T},$
- $\ddot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(Tk+\Delta) - \dot{x}(Tk)}{\Delta} \approx \frac{x[T(k+2)] - 2x[T(k+1)] + x[Tk]}{T^2},$
- ...,



Rysunek 3: Aproksymacja prawostronna (*forward*).

(c) aproksymacja symetryczna:

- $\dot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(Tk+\Delta) - x(Tk-\Delta)}{\Delta} \approx \frac{x[T(k+1)] - x[T(k-1)]}{T},$
- $\ddot{x}(Tk) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(Tk+\Delta) - \dot{x}(Tk-\Delta)}{\Delta} \approx \frac{x[T(k+2)] - 2x[Tk] + x[T(k-2)]}{T^2},$
- .....



Rysunek 4: Aproksymacja symetryczna.

**Przykład:** rozważmy równanie różniczkowe w postaci:

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_1 \dot{u} + b_0 u.$$

Stosując pokazane powyżej przybliżenia pochodnych, uzyskujemy odpowiednio:

(a) aproksymacja lewostronna:

$$a_2 \frac{x[Tk] - 2x[T(k-1)] + x[T(k-2)]}{T^2} + a_1 \frac{x[Tk] - x[T(k-1)]}{T} + a_0 x[Tk] = b_1 \frac{u[Tk] - u[T(k-1)]}{T} + b_0 u[Tk],$$

a po grupowaniu odpowiednich próbek sygnałów  $x$  i  $u$ :

$$\left(\frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T} + a_0\right) x[Tk] - \left(\frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T}\right) x[T(k-1)] + \frac{a_2}{T^2} x[T(k-2)] = \left(\frac{b_1}{T} + b_0\right) u[T(k-1)] + b_0 u[Tk],$$

(b) aproksymacja prawostronna:

$$a_2 \frac{x[T(k+2)] - 2x[T(k+1)] + x[Tk]}{T^2} + a_1 \frac{x[T(k+1)] - x[Tk]}{T} + a_0 x[Tk] = b_1 \frac{u[T(k+1)] - u[Tk]}{T} + b_0 u[Tk],$$

a po grupowaniu odpowiednich próbek sygnałów  $x$  i  $u$ :

$$\frac{a_2}{T^2} x[T(k+2)] + \left(\frac{a_1}{T} + \frac{a_2}{T^2}\right) x[T(k+1)] + \left(\frac{a_2}{T^2} - \frac{a_1}{T} + a_0\right) x[Tk] = \frac{b_1}{T} u[T(k+1)] + \left(b_0 - \frac{b_1}{T}\right) u[Tk].$$

Widać zatem, że postać uzyskanych równań różnicowych istotnie zależy od przyjętej aproksymacji. Zatem nie można bezproblemowo przejść z układu dyskretnego na ciągły nie wiedząc o zastosowanej metodzie aproksymacji.

### 2.1.2 Równania rekurencyjne

W przypadku układów liniowych w postaci

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

wyrażenie (1) ma analityczne rozwiązanie.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Zakładając, że chwila początkowa  $t_0$  będzie początkiem  $k+1$ -tego okresu próbkowania  $t_0 = Tk$ , można wyznaczyć dokładną wartość na jego końcu  $x[T(k+1)]$ :

$$x[T(k+1)] = e^{A(T(k+1)-Tk)} x(Tk) + \int_{Tk}^{T(k+1)} e^{A(T(k+1)-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Można dokonać podstawienia  $\xi = T(k+1) - \tau$ , które implikuje  $d\tau = -d\xi$  oraz zmianę granic całkowania:

$$\tau = Tk \rightarrow \xi = T, \tau = T(k+1) \rightarrow \xi = T - \tau$$

Zakładamy, że sterowanie jest stałe na przedziale próbkowania, dlatego można  $u[\tau]$  wyciągnąć poza całkę:

$$x[T(k+1)] = e^{AT} x[Tk] + \left\{ \int_{T-\tau}^T e^{A\xi} B d\xi \right\} u[Tk]$$

Jeżeli  $\tau = T$ , to całkowanie obejmuje przedział  $[0, T]$ . Równanie przyjmuje więc postać równania różnicowego, opisującego dyskretną postać  $n$ -tego rzędu:

$$x[T(k+1)] = A_D x[Tk] + B_D u[Tk] \quad (2)$$

Zapisując skrótowo  $x_k = x[Tk]$ , mamy postać:

$$x_{k+1} = A_D x_k + B_D u_k,$$

gdzie:

- $A_D = e^{AT}$ ,

- $B_D = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$ .

Macierze te można wyznaczyć np. w następujący sposób:

1.  $A_D = e^{AT} = P e^{JT} P^{-1}$ , gdzie:

- $P$  - macierz modalna macierzy  $A$  - złożona z wektorów głównych macierzy  $A$ ,
- $J$  - postać Jordana macierzy  $A$ ,

2.  $B_D = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = A^{-1} (e^{AT} - I) B$ .

Jak wygląda rozwiązanie?

$$\begin{aligned} x_1 &= A_D x_0 + B_D u_0 \\ x_2 &= A_D x_1 + B_D u_1 = A_D (A_D x_0 + B_D u_0) + B_D u_1 = A_D^2 x_0 + A_D B_D u_0 + B_D u_1 \\ &\vdots \\ x_n &= A_D^n x_0 + \begin{bmatrix} A_D^{n-1} B_D & A_D^{n-2} B_D & \dots & A_D B_D & B_D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Przykład:** rozważmy układ:

$$\ddot{y} + \dot{y} = u,$$

który przekształcamy do postaci macierzowej prze podstawienie  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

Macierze układu dyskretnego wynoszą:

- $A_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$ ,
- $B_D = \begin{bmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$

### 2.1.3 Transformata $\mathcal{Z}$

Układ z idealnym impulsatorem daje sterowanie

$$u^D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u[Tk] \delta(t - Tk).$$

Transformata Laplace'a:

$$U^{D(s)} = \int_0^{\infty} [u[Tk] \delta(t - Tk)] e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} u[Tk] \cdot \int_0^{\infty} \delta(t - Tk) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} u[Tk] e^{-Tks}.$$

Robiąc podstawienie  $z = e^{Ts}$  otrzymuje się:

$$U^{D(s)}|_{e^{Ts}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} u[Tk] \cdot z^{-k} \quad (3)$$

Niektóre właściwości transformaty  $\mathcal{Z}$ :

1.  $y_k = w_k + x_k \rightarrow Y(z) = W(z) + X(z)$  - transformata sumy jest sumą transformat,
2.  $\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} \mathcal{Z}\{x(n)\} = z^{-k} X(z)$  - opóźnienie sygnału o  $k$  próbek odpowiada przemnożeniu sygnału o  $z^{-k}$ ,
3.  $\mathcal{Z}\{y_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{n-m}\} = \mathcal{Z}\{x_n\} \cdot \mathcal{Z}\{y_n\} = X(z)Y(z)$  - transformata splotu jest iloczynem transformat,

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z)$

Oryginał	Transformata $\mathcal{L}$	Transformata $\mathcal{Z}$ bez członu ZOH	Transformata $\mathcal{Z}$ z członem ZOH
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{T}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$1(t)\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{Tz(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^3(z^2+4z+1)}{3(z-1)^3}$
$1(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})}$
$1(t)\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\omega \sin \omega T}{z^2-2z \cos(\omega T)+1}$	$\frac{(z+1)(1-\cos(\omega T))}{z^2-2z \cos(\omega T)+1}$

Tabela 1: Transformaty  $\mathcal{Z}$  wybranych sygnałów.

Można zauważyć, że z podstawienia zastosowanego do transformaty  $\mathcal{Z}$  wynika:

$$z = e^{Ts} = e^{T(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha T} e^{iT\beta} = e^{\alpha T} (\cos(T\beta) + i \sin(T\beta))$$

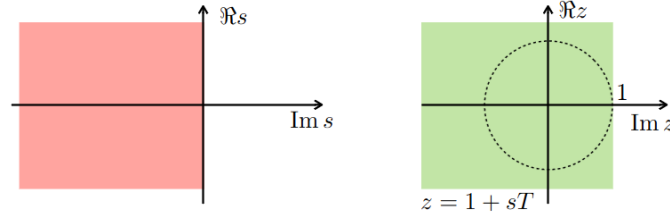
zatem  $z$  jest punktem na okręgu o promieniu  $e^{T\alpha}$  na płaszczyźnie zespolonej. Można więc zauważyć, że dla  $\alpha < 0$ , czyli lewej półpłaszczyzny zespolonej,  $z$  będzie leżało w okręgu jednostkowym. Oznacz to, że przekształcenie to przekształca lewą półpłaszczyznę w okrąg jednostkowy.

#### 2.1.4 Aproksymacja transmitancji dyskretnej

Przy wprowadzaniu transformaty  $\mathcal{Z}$  wprowadzone zostało podstawienie  $z = e^{Ts}$ , zatem aby transmitancję  $G(s)$  przekształcić w transmitancję dyskretną w dziedzinie operatora  $z$  wystarczy wykonać podstawienia za  $s$ . Niestety nie istnieje wygodna do użycia dokładna wartość  $s$  wyznaczana z  $z$ , dlatego wprowadzono kilka wygodnych aproksymacji:

(a) metoda całkowania "do przodu" (*forward*)

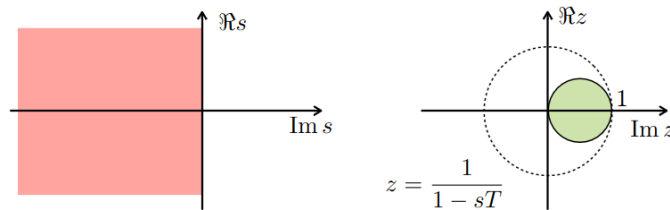
$$z = e^{sT} = 1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2} + \dots \approx 1 + sT \implies s = \frac{z-1}{T}$$



Rysunek 5: Przekształcenie lewej półpłaszczyzny dla aproksymacji *forward*.

(b) metoda całkowania "do tyłu" (*backward*):

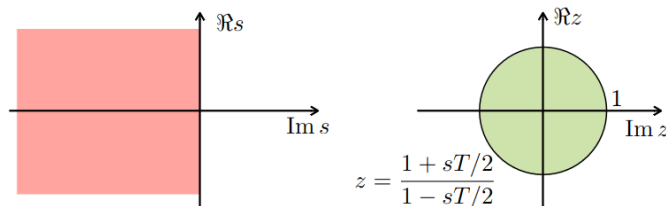
$$z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT} \implies s = \frac{z-1}{Tz}$$



Rysunek 6: Przekształcenie lewej półpłaszczyzny dla aproksymacji *backward*.

(c) całkowania metodą trapezów (metoda *Tustina*):

$$z = e^{sT} = \frac{1 + e^{sT}}{1 + e^{-sT}} \approx \frac{2 + sT}{2 - sT} \Rightarrow s = \frac{2z - 1}{Tz + 1}$$



Rysunek 7: Przekształcenie lewej półpłaszczyzny dla aproksymacji Tustina.

**Przykład:** rozważmy transmitancję obiektu inercyjnego pierwszego rzędu:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

- metoda *forward*:

$$G_{D,F}(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a} = \frac{aT}{z - 1 + aT}$$

- metoda *backward*:

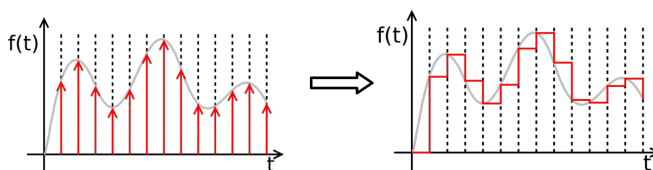
$$G_{D,B}(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a} = \frac{aTz}{z(1 + aT) - 1}$$

- metoda *Tustina*:

$$G_{D,T}(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{aT(z+1)}{z(2 + aT) - 2 + aT}$$

### 2.1.5 Ekstrapolator zerowego rzędu

Przedstawiona w poprzednim punkcie metoda analizuje sygnał jako *de facto* ciąg impulsów. O ile jest to prawda w przypadku pomiaru, gdzie faktycznie otrzymujemy wartości sygnału zmierzone w konkretnych chwilach czasu, to w przypadku sterowania nie jest to już prawdą. Ponieważ sterowanie w zdecydowanej większości praktycznych przypadków nie jest podawane jako seria impulsów, lecz jako stała wartość podtrzymywana przez okres próbkowania - tzw. ekstrapolacja zerowego rzędu (ang. *zero order hold* - **ZOH**). Co pokazano na rysunku (9).

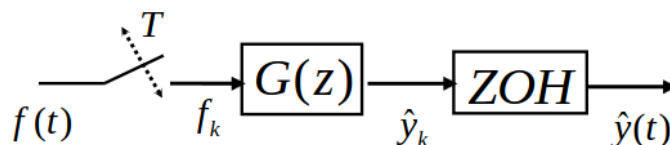


Rysunek 8: Ekstrapolacja zerowego rzędu.

matematycznie można to osiągnąć poprzez wykonanie splotu funkcji impulsowej z funkcją prostokątną:

$$h(s) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s} - e^{-Ts} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \approx \frac{T}{s}, \text{ dla } T \approx 0.$$

Zatem w schemacie blokowym można dodać dodatkowy blok **ZOH**, który realizuje transmitancję  $H(s)$ :



Rysunek 9: Ekstrapolacja zerowego rzędu - schemat blokowy.

Zatem transmitancja dyskretna wynosi:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right\} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \{g(kT)\},$$

gdzie  $g(kT)$  jest ciągiem próbek.

## 2.2 Dyskretna wersja twierdzenia Lapunowa

Rozważamy dyskretny system dynamiczny opisywany równaniem (4):

$$\begin{cases} x(k+1) &= f[x(k)] \\ x(0) &= x_0 \end{cases}, \quad (4)$$

przy czym bez straty ogólności możemy założyć, że  $f(0) = 0$ . To jeśli istnieje ciągła, dodatnio określona na pewnym otoczeniu zerowego punktu równowagi  $D$  funkcja  $V(x)$  która spełnia warunki:

- $V(x) > 0 \forall x \in D - \{0\}$ ,
- $\Delta V(x) = V(f[x]) - V(x) \leq 0, \forall x \in D$ ,

to punkt 0 jest stabilny, a funkcję  $V$  nazywamy dyskretną funkcją Lapunowa.

**Przykład:** rozważmy równanie różniczkowe:

$$\dot{x} = -ax,$$

które jest stabilne dla  $a > 0$ , a które można przekształcić do postaci dyskretniej za pomocą

(a) aproksymacji schematami różnicowymi:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T} = -ax_k \implies x_{k+1} = (1 - aT)x_k = f[x_k], T > 0.$$

Możemy przyjąć funkcję Lapunowa w postaci:

$$V(x_k) = x_k^2,$$

a jej  $\Delta$  wynosi:

$$\Delta V(x_k) = V(f[x_k]) - V(x_k) = (1 - aT)^2 x_k^2 - x_k^2 = x_k^2 aT(1 - 2aT).$$

Zatem, żeby była ona ujemna musi zachodzić warunek:

$$aT \in (0, 2) \implies a > 0, a < \frac{2}{T} \implies a > 0 \text{ gdy } T \rightarrow 0.$$

widać zatem, że przybliżenie schematem różnicowym zawęża zakres stabilności wraz ze wzrostem okresu dyskretyzacji  $T$ ,

(b) równaniami różnicowymi:

$$x_{k+1} = A_D x_k, \text{ gdzie } A_D = e^{-aT}.$$

Funkcję Lapunowa zakładamy jak poprzednio, zatem w tym przypadku jej  $\Delta$  wynosi:

$$\Delta V(x_k) = V(f(x_k)) - V(x_k) = e^{-2aT} x_k^2 - x_k^2 = x_k^2 (e^{-2aT} - 1) < 0, \text{ dla } a > 0,$$

zatem widać, iż taka metoda wyznaczania równania dyskretnego nie jest obciążona błędem jak aproksymacja schematami różnicowymi.

Podobnie jak w przypadku ciągłym nie istnieje uniwersalna metoda wyznaczania funkcji Lapunowa. Jednak również i tym razem dla szczególnego przypadku, równania liniowego:

$$x_{k+1} = A x_k \quad (5)$$

**Twierdzenie:** jeśli dla równania dyskretnego, liniowego (5) istnieje rozwiązanie  $P = P^T > 0$  dyskretnego równania Lapunowa (6)

$$A^T P A - P = -Q, \quad (6)$$

gdzie  $Q = Q^T > 0$ , to układ (5) jest globalnie asymptotycznie stabilny, a  $V(x) = x^T P x$  jest jego funkcją Lapunowa. A jej delta na trajektoriach systemu ma postać:

$$\Delta V(x_k) = V(Ax_k) - V(x_k) = (Ax_k)^T P (Ax_k) - x_k^T P x_k = x_k^T A^T P A x_k - x_k^T P x_k = x_k^T (A^T P A - P) x_k < 0$$



## 2.3 Kryteria stabilności

Mówimy, że wielomian dyskretny

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (7)$$

jest stabilny asymptotycznie, gdy jego pierwiastki leżą w kole jednostkowym. Do stwierdzenia, czy jego pierwiastki spełniają ten warunek bez ich bezpośredniego wyznaczania, można użyć np. jednego z poniższych kryteriów.

### 2.3.1 Kryterium stabilności I

Znając współczynniki  $a_i$  wielomianu  $w(z)$  możemy wyznaczyć tzw. macierz symetryczną Schura-Cohna w postaci:

$$P = S_1^T S_1 - S_2^T S_2, \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bullet S_1 &= \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & a_n & \dots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}, \\ \bullet S_2 &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podstawiając macierze  $S_1$  i  $S_2$  do równania (8) otrzymuje się wyrażenie na element  $p_{ij}$  macierzy  $P$ :

$$p_{ij} = \sum_{t=0}^{i-1} (a_{n-i+t} a_{n-j+t+1} - a_{i-1-t} a_{j-1-t}), \quad j \geq 0. \quad (9)$$

Wówczas:

1. Wielomian (7) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $P$  (równanie (8)) jest dodatnio określona, czyli zachodzą warunki:

- $P_1 = p_{11} > 0$ ,
- $P_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0$ ,
- $\vdots$
- $P_n = |P| > 0$ .

2. Jeżeli  $P_i \neq 0$  dla  $i = 1, \dots, n$ , to wielomian (7) ma  $k$  pierwiastków wewnątrz koła jednostkowego oraz  $n - k$  na zewnątrz koła jednostkowego, przy czym zachodzi równość:

$$k = n - V(1, P_1, \dots, P_n), \quad (10)$$

gdzie  $V(e_0, e_1, \dots, e_n)$  oznacza liczbę zmian znaku ciągu  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

### 2.3.2 Kryterium stabilności II

Znając współczynniki  $a_i$  wielomianu (7) można wyznaczyć tablicę:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n+1} \\ d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,n+1} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & \dots & c_{2,n-1} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & \dots & d_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1,1} & & & \\ d_{n+1,1} & & & \end{array} \right\}, \quad (11)$$

gdzie:

- $c_{1,j+1} = a_{n-j}$ ,  $d_{1,j+1} = a_j$ , dla  $j = 0, 1, \dots, n$ ,
- $c_{ij} = \begin{vmatrix} c_{i-1,1} & c_{i-1,j+1} \\ d_{i-1,1} & d_{i-1,j+1} \end{vmatrix}$ , dla  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ ,
- $d_{ij} = c_{n-i,j+i-3}$ .

Wówczas:

1. Wielomian (7) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy elementy  $d_{i,1}$  pierwszej kolumny tablicy (11) spełniają warunki:

$$d_{2,1} > 0, d_{i,1} < 0, \text{ dla } i = 3, \dots, n+1.$$

2. Jeżeli  $d_{i,1} \neq 0$  dla  $i = 1, \dots, n+1$  to wielomian (7) ma  $k$  pierwiastków wewnątrz koła jednostkowego i  $n-k$  poza kołem jednostkowym, przy czym  $k$  jest liczbą ujemnych iloczynów ciągu:

$$d_k = (-1)^k \cdot d_{2,1} \cdot d_{3,1} \cdot \dots \cdot d_{k+1,1}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

## 2.4 Kryteria niestabilności

Mówimy, że wielomian dyskretny

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

jest niestabilny gdy jego pierwiastki leżą poza kołem jednostkowym. Do stwierdzenia czy jego pierwiastki spełniają ten warunek bez ich bezpośredniego wyznaczania można użyć np. jednego z poniższych kryteriów.

### 2.4.1 Kryterium niestabilności I

Wielomian (7) jest niestabilny jeżeli zachodzi warunek:

$$w(1) = \sum_{k=0}^n a_k \begin{cases} > 0 & \text{dla } a_n > 0 \\ < 0 & \text{dla } a_n < 0 \end{cases},$$

lub

$$(-1)^n w(-1) = \begin{cases} > 0 & \text{dla } a_n > 0 \\ < 0 & \text{dla } a_n < 0 \end{cases}.$$

### 2.4.2 Kryterium niestabilności II

Liniowy układ dyskretny opisany równaniem

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$
- $x_i \in \mathbb{R}^n$ .

jest niestabilny asymptotycznie, jeżeli:

$$\sum_{i=1}^n |a_{ii}| \geq n$$

## 2.5 Dobór okresu próbkowania

Podstawowym twierdzeniem dotyczącym doboru okresu próbkowania/dyskretyzacji jest tzw. twierdzenie Shannona. Mówi ono nam, że aby sygnał ciągły mógł być jednoznacznie odtworzony z dyskretnych próbek, musi być on próbkowany z częstotliwością  $f_p$  co najmniej dwa razy większą niż maksymalna częstotliwość widma sygnału  $f_g$ , zatem:

$$f_p > 2f_g.$$

W przypadku układów sterowania, gdzie nie mamy z góry zadanego sygnału wyjściowego, zatem i jego częstotliwości, to graniczna wartość częstotliwości może być wyznaczona jako częstotliwość odcięcia (czyli częstotliwość, dla której tłumienie staje się większe od 3 dB), odczytana z charakterystyki Bodego obiektu sterowania.

Nie bez znaczenia w przypadku sterowania cyfrowego jest też minimalny czas konieczny na realizację sterowania. Czyli czas wykonywania pomiaru, przesłania z czujnika do układu mikroprocesorowego, czas wyznaczenia sterowania oraz czas konieczny na przesłanie sygnału sterującego do elementu wykonawczego.

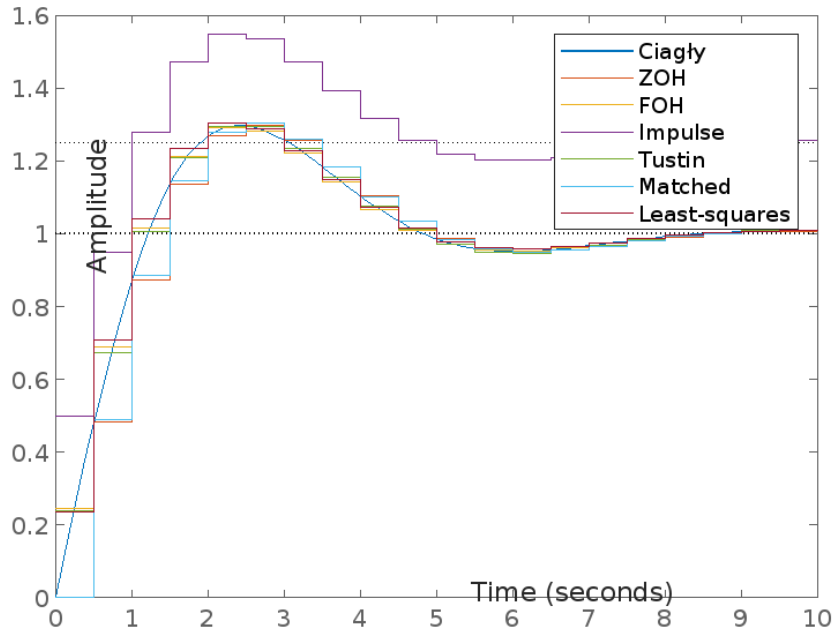
## 3 Przykłady

### 3.1 Przykład 1

Rozważamy układ o transmitancji:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}.$$

Sprawdźmy realizację różnych metod dyskretyzacji dostępnych w MATLABie na podstawie odpowiedzi skokowej układu po dyskretyzacji. Wyniki przedstawiono na rysunku (10).



Rysunek 10: Realizacja różnych metod dyskretyzacji.

### 3.2 Przykład 2

Rozważmy ciągły układ liniowy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases},$$

Z regulatorem liniowym:

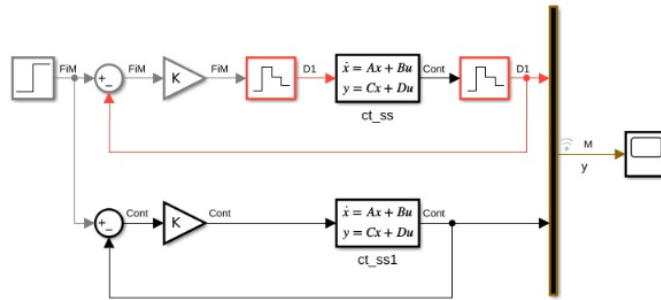
$$u = Ky.$$

Można zauważyć, np. korzystając z kryterium Nyquista, że układ ten będzie stabilizowany, dla każdego  $K > 0$ , dla ustalenia uwagi przyjmijmy  $K = 5$ .

Założmy, że czas próbkowania w układzie sterowania cyfrowego wynosi  $T = 0.1$ , wówczas macierze układu zdyskretyzowanego mają postać:

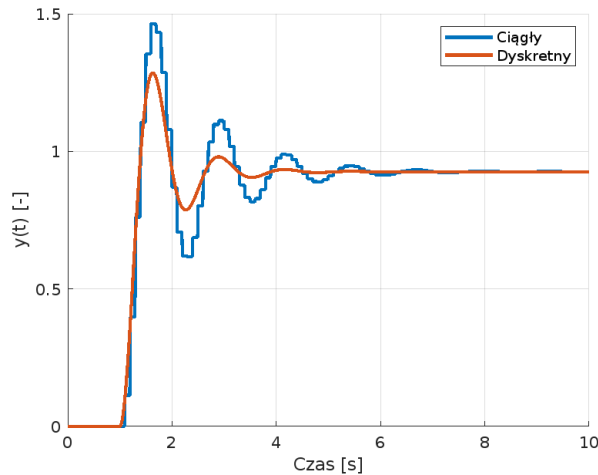
- $A_D = \begin{bmatrix} e^{-T} & 5e^{-T} - 5e^{-2T} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} |_{T=0.1} = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0.4305 \\ 0 & 0.8187 \end{bmatrix},$
- $B_D = \begin{bmatrix} \frac{5e^{-2T}}{2} - 5e^{-T} + \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-2T}}{2} \end{bmatrix} |_{T=0.1} = \begin{bmatrix} 0.0226 \\ 0.0906 \end{bmatrix},$
- $C_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$
- $D_D = 0.$

Budujemy model symulacyjny, w którym jednocześnie wykonamy symulację układu ciągłego i dyskretnego:



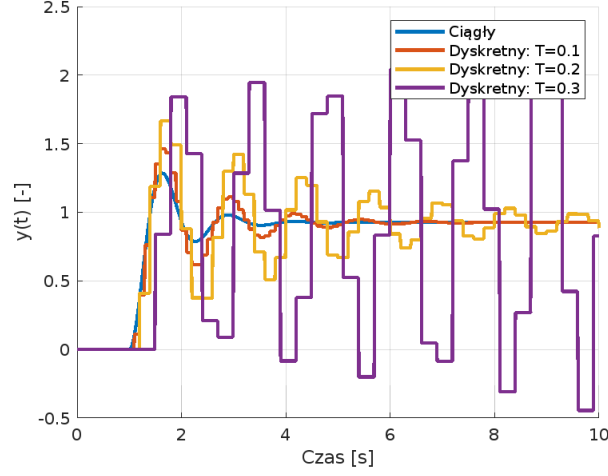
Rysunek 11: Model symulacyjny dla przykładu 2.

Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku(12).



Rysunek 12: Wyjście układu sterowania z czasem ciągłym i dyskretnym dla przykładu 2.

Na wykresie tym widać znaczące rozbieżności między przebiegiem układu z czasem ciągłym i dyskretnym. Wynikają one z dyskretyzacji i faktu, że sterowanie podawane jako stała wartość na przedziale inaczej wpływa na układ. Ogólnie można zauważyć, iż wraz ze wzrostem czasu dyskretyzacji różnice te będą się powiększać. A przy odpowiednio dużym okresie dyskretyzacji może powodować destabilizację układu sterowania, co pokazano na rysunku (13).



Rysunek 13: Wyjście układu sterowania z czasem ciągłym i dyskretnym, z różnymi okresami dyskretyzacji, dla przykładu 2.

### 3.3 Przykład 3

Rozważmy ciągły układ liniowy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases},$$

Z regulatorem liniowym:

$$u = Ky.$$

Czyli ten sam układ co poprzednio, jednak tym razem regulator nie będzie projektowany dla układu ciągłego lecz dla układu po dyskretyzacji. Oznacz to, że będziemy poszukiwać  $K$  zapewniającego, iż wartości własne macierzy

$$A_z = A_D - B_D K C_D = \begin{bmatrix} e^{-T} - K \left( \frac{5e^{-2T}}{2} - 5e^{-T} + \frac{5}{2} \right) & 5e^{-T} - 5e^{-2T} \\ +K \left( \frac{e^{-2T}}{2} - \frac{1}{2} \right) & e^{-2T} \end{bmatrix}.$$

będą leżeć wewnątrz koła jednostkowego.

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać:

$$w(z) = z^2 + \left( -\frac{e^{-3T} (2e^{2T} + 2e^T + 5Ke^T - 10Ke^{2T} + 5Ke^{3T})}{2} \right) z - \frac{e^{-3T} (5K - 10Ke^T + 5Ke^{2T} - 2)}{2}.$$

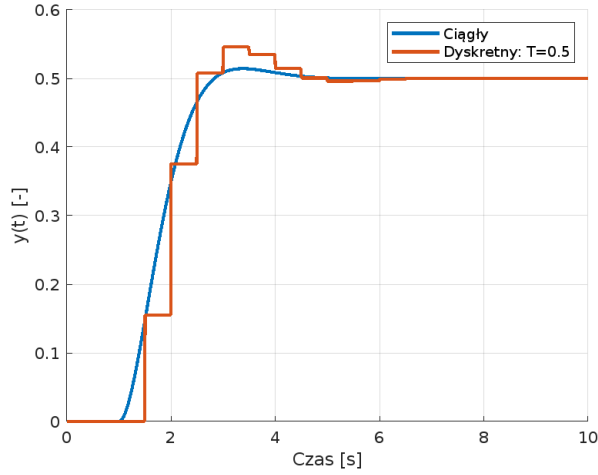
Do znalezienia zakresu  $K$  stabilizującego układ zamknięty możemy wykorzystać pierwsze z podanych kryteriów, zatem wyznaczamy:

- $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{e^{-3T} (2e^{2T} + 2e^T + 5Ke^T - 10Ke^{2T} + 5Ke^{3T})}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$
- $S_2 = \begin{bmatrix} -\frac{e^{-3T} (5K - 10Ke^T + 5Ke^{2T} - 2)}{2} & -\frac{e^{-3T} (2e^{2T} + 2e^T + 5Ke^T - 10Ke^{2T} + 5Ke^{3T})}{2} \\ 0 & -\frac{e^{-3T} (5K - 10Ke^T + 5Ke^{2T} - 2)}{2} \end{bmatrix},$
- $P = S_1^T S_1 - S_2^T S_2$

Niestety warunki stają się skomplikowane i trudno wyznaczyć ogólny warunek na  $K$  w zależności od czasu dyskretyzacji  $T$ . Dlatego skupimy się na konkretnym czasie  $T = 0.5$ , który destabilizował układ regulacji przy  $K$  dobranym dla układu z czasem ciągłym. Wówczas mamy:

$$A_z = \begin{bmatrix} 0.3870 \cdot K + 0.6065 & 1.1933 \\ 0.3161 \cdot K & 0.3679 \end{bmatrix}$$

Na tej podstawie otrzymujemy warunek  $K < 3.3093$ , a przykładowe przebiegi pokazano na rysunku.



Rysunek 14: Przykładowe przebiegi dla układu z przykładu 3.

### 3.4 Przykład 4

Rozważmy układ liniowy:

$$x_{k+1} = Ax_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & -0.6 & -3.2 \end{bmatrix} x_k.$$

Sprawdzić czy układ jest niestabilny?

1. **Kryterium I:** wielomian charakterystyczny ma postać:

$$w(z) = \det(Iz - A) = \begin{vmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0.3 & 0.6 & z + 3.2 \end{vmatrix} = z^3 + 3.2z^2 + 0.6z + 0.3$$

. Zgodnie z kryterium sprawdzamy:

$$w(1) = 5.1 > 0,$$

zatem ponieważ  $a_n > 0$ , to układ jest niestabilny.

2. **Kryterium II:** zgodnie z kryterium sprawdzamy odpowiednią sumę:

$$\sum_{i=1}^3 |a_{ii}| = 3.2 > 3,$$

zatem również na podstawie tego kryterium stwierdzamy niestabilność.

### 3.5 Przykład 5

Wyznaczyć liczbę pierwiastków znajdujących się wewnątrz koła jednostkowego wielomianu

$$w(z) = z^3 - z^2 + 2z + 3.$$

Zgodnie z **kryterium stabilności I** wyznaczamy macierze:

- $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$
- $S_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$
- $P = S_1^T S_1 - S_2^T S_2 = \begin{bmatrix} -8 & -7 & 5 \\ -7 & -11 & -7 \\ 5 & -7 & -8 \end{bmatrix}.$

Minory główne macierzy  $P$  wynoszą:

- $P_1 = -8,$
- $P_2 = 39,$
- $P_3 = 845.$

Zatem ciąg  $1, P_1, P_2, P_3$  ma dwie zmiany znaku, a z tego wynika, że liczba pierwiastków wewnątrz koła jednostkowego wynosi:

$$k = n - V(1, -8, 39, 845) = 1.$$

## 4 Jak to zrobić w MATLABie?

### 4.1 Dyskretyzacja systemu liniowego

Control System Toolbox MATLABa posiada funkcję `c2d`, która służy do przejścia z modelu czasem ciągłym na model z czasem dyskretnym z zadaniem czasem dyskretyzacji i podaną metodą. Funkcja ta działa z modelem ciągłym podanym w postaci równań stanu jak i transmitancji.

```
%% Systemm ciagly
% Ddefinicja rownan stanu systemu liniowego
A = [-1 2; 0.1 -1];
B = [0;1];
C = [1, 0];
D = 0;
ct_ss = ss(A, B, C, D);
% Wyznaczenie transmitancji
[num, den] = ss2tf(A, B, C, D);
ct_tf = tf(num, den);

%% Dyskretyzacja
T = 1;
dt_ss = c2d(ct_ss, T, 'zoh');
dt_tf = c2d(ct_tf, T, 'tustin');
```

Funkcja ta obsługuje następujące metody dyskretyzacji:

- `zoh`,
- `foh`,
- `impulse`,
- `tustin`,
- `matched`,
- `least-squares`,
- `damped`.

## 4.2 Analityczne wyznaczenie macierzy układu dyskretnego

Funkcja `c2d` wyznacza numeryczne wartości układu dyskretnego. Wartości symboliczne dla równania (2) można wyznaczać w następujący sposób:

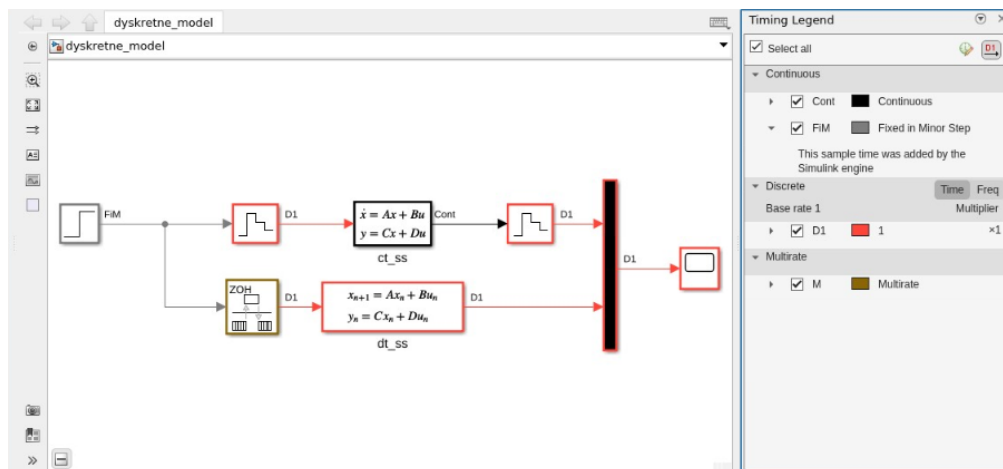
```
A = [-1 1; 0 -1];  
B = [0;1];  
C = [1, 0];  
D = 0;  
  
[P,J] = jordan(A);  
syms T  
  
Ad = P * expm(J*T) * inv(P);  
Bd = inv(A) * (expm(A*T) - eye(size(A))) * B;  
Cd = C;  
Dd = D;
```

## 4.3 Łączenie czasu dyskretnego i ciągłego w jednej symulacji

W przypadku gdy chcemy w jednym modelu Simulinka połączyć symulację działania obiektu ciągłego wraz z naszym projektowanym regulatorem realizowanym cyfrowo działającym z czasem dyskretnym możemy stosować 2 bloki:

- ZOH - ekstrapolator zerowego rzędu, wówczas "obudowując" model takimi blokami zapewniamy, że symulacja modelu będzie wykonywana w czasie ciągłym, natomiast na zewnątrz czas może być dyskretny,
- Rate-Transition - blok ten pozwala ustalać czasy symulacji z jakimi będą wykonywane otoczone nim elementy modelu, jest to bardziej ogólna metoda niż ZOH, pozwala na ustawianie wielu różnych bloków czasowych w modelu.

Przykład użycia tych bloków pokazano na rysunku (15).



Rysunek 15: Zastosowanie bloków ZOH i Rate-Transition w modelu Simulinka

## 5 Przebieg ćwiczenia

W trakcie realizacji ćwiczeń należy dla każdego z przykładów:

- wyznaczyć regulator proporcjonalny stabilizujący układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego,
- wyznaczyć maksymalny okres dyskretyzacji wynikający z charakterystyki częstotliwościowej,
- zamodelować układ w Simulinku - użyć modelu ciągłego i "obudować" go blokami ZOH,



- wyznaczyć odpowiedź na wymuszenie skokowe układu ciągłego i dyskretnego - wyznaczyć analitycznie lub symulacyjnie maksymalny okres próbkowania, dla którego regulator wyznaczony dla układu ciągłego zapewni stabilność przy sterowaniu dyskretnym,
- dokonać dyskretyzacji układu ciągłego - metodą z punktu 2.1.2 dla układu danego w postaci równań stanu, metodą Tustina dla układów danych w postaci transmitancji,
- wyznaczyć dyskretny regulator proporcjonalny stabilizujący układ sterowania,
- wyznaczyć odpowiedź na wymuszenie skokowe układu ciągłego i dyskretnego,
- wyznaczyć model dyskretny dla różnych metod dyskretyzacji dostępnych w metodzie c2d, porównać odpowiedzi na skok jednostkowy układu ciągłego i układów dyskretnych, porównać zakres  $K$  stabilizujących dla różnych metod dyskretyzacji.

### 5.1 System 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

### 5.2 System 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

### 5.3 System 3

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

### 5.4 System 3

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

## Literatura

- [1] Mitkowski, W., Baranowski, J., Hajduk, K., Korytowski, A., Tutaj, A., *Teoria Sterowania: Materiały Pomocnicze do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, AGH Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2007.
- [2] Amborski, K., Marusak, A., *Teoria Sterowania w Ćwiczeniach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [3] Gessing, R., Latarnik, M., Skrzywan-Kossek, A., *Zbiór Zadań z Teorii Nieliniowych Układów Regulacji i Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1981.
- [4] Gibson, J. E., *Nieliniowe Układy Sterowania Automatycznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1968.
- [5] Grabowski P., *Stabilność Układów Lurie*, AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 1999.
- [6] Byrski W., *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*, Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne AGH, 2007.
- [7] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1993.