



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Teoria Sterowania**  
**Optymalizacja Parametryczna**

Maciej Różewicz

2025

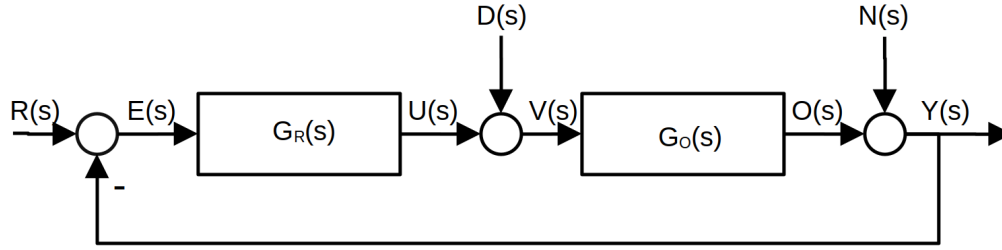
# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z optymalizacją parametryczną układów sterowania. Dotyczy ona problemów, gdzie struktura regulatora i model matematyczny obiektu są stałe, a optymalizowane są jedynie wartości niektórych parametrów. Optymalność tę można rozumieć na różne sposoby, a dobór odpowiedniej funkcji celu, która jest optymalizowana, jest zagadnieniem zasadniczym. Zwykle żąda się, aby układ regulacji możliwie dokładnie i szybko odtwarzał wartość zadaną, z drugiej zaś strony, by był możliwie odporny na sygnały zakłócające. Często wymagania te są sprzeczne i poszukiwać trzeba pomiędzy nimi kompromisu.

## 2 Wprowadzenie

### 2.1 Struktura układu regulacji automatycznej

W czasie realizacji ćwiczenia rozważać będziemy układ regulacji automatycznej (URA), w którym wyróżniamy dynamikę obiektu sterowania  $G_O(s)$  i regulatora  $G_R(s)$ , a także sygnał wartości zadanej  $R(s)$  i dwa nieznane sygnały zakłócające: zakłócenie obciążeniowe  $D(s)$  i zakłócenie pomiarowe  $N(s)$ . Schemat takiego URA pokazano na rysunku (1).



Rysunek 1: Schemat układu regulacji z zaznaczonymi sygnałami:  $R(s)$  - wartość zadana,  $E(s)$  - uchyb regulacji,  $U(s)$  - sterowanie,  $D(s)$  - zakłócenie obciążeniowe (obciążenie),  $V(s)$  - wejście obiektu,  $O(s)$  - wyjście obiektu,  $Y(s)$  - wyjście układu regulacji.

Układ taki opisuje się zwykle kilkoma transmitancjami przedstawionymi w tabeli (1).

Transmitancja	Opis
$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$	Transmitancja wypadkowa - od wartości zadanej do wyjścia układu regulacji.
$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_R(s)G_O(s)}$	Transmitancja uchybowa - od wartości zadanej do uchybu regulacji. Nazywana również funkcją wrażliwości.
$Z_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$	Transmitancja zakłóceniowa - od obciążenia do wyjścia. Nazywana funkcją wrażliwości na obciążenie.
$Z_N(s) = \frac{U(s)}{N(s)} = \frac{G_R(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$	Transmitancja od szumu pomiarowego do sterowania. Nazywana funkcją wrażliwości sterowania na szum pomiarowy.
$G_U(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$	Transmitancja od wartości zadanej do sterowania.
$G_{otwarty}(s) = G_R(s)G_O(s)$	Transmitancja układu otwartego.

Tabela 1: Transmitancje opisujące układ regulacji automatycznej z rysunku (1).

Aby URA był "całościowo" stabilny, każda z tych transmitancji musi być co najmniej stabilna. Ponadto można zauważyć, że  $G(s)$  i  $S(s)$  są komplementarne, tzn.:

$$G(s) + S(s) = \frac{G_R(s)G_O(s)}{1 + G_R(s)G_O(s)} + \frac{1}{1 + G_R(s)G_O(s)} = 1,$$

zatem optymalizując wskaźnik jakości związany z jedną z nich, optymalizujemy automatycznie analogiczny wskaźnik jakości związany z drugą.

## 2.2 Wskaźniki jakości URA

Do oceny działania URA stosuje się różne wskaźniki jakości, zwane również funkcją celu. W zależności od doboru wskaźnika jakości, parametry układu będą dobierane w inny sposób.

### 2.2.1 Całkowe wskaźniki jakości

Jednymi z najczęściej używanych wskaźników jakości są tzw. całkowe wskaźniki jakości:

- (a) całka z kwadratu uchybu sterowania:

$$J_1 = \int_0^\infty e(t)^2 dt, \quad (1)$$

- (b) całka z  $p$ -tej potęgi uchybu regulacji (aby wskaźnik taki miał sens  $p$  musi być parzyste):

$$J_2 = \int_0^\infty e(t)^p dt, \quad (2)$$

- (c) całka z modułu uchybu sterowania:

$$J_3 = \int_0^\infty |e(t)| dt, \quad (3)$$

- (d) całka ważona względem czasu sterowania (aby wskaźnik taki miał sens  $p$  musi być parzyste):

$$J_4 = \int_0^\infty e(t)^p t^q dt, \quad (4)$$

- (e) całka z kwadratu uchybu sterowania i jej pochodnej:

$$J_5 = \int_0^\infty (e(t)^2 + \dot{e}(t)^2) dt, \quad (5)$$

- (f) w przypadku rozpatrywania przestrzeni stanu można rozpatrywać całkę z dodatnio określonej formy kwadratowej stanu:

$$J_6 = \int_0^\infty x^T(t) H x(t) dt, \quad H = H^T > 0, \quad (6)$$

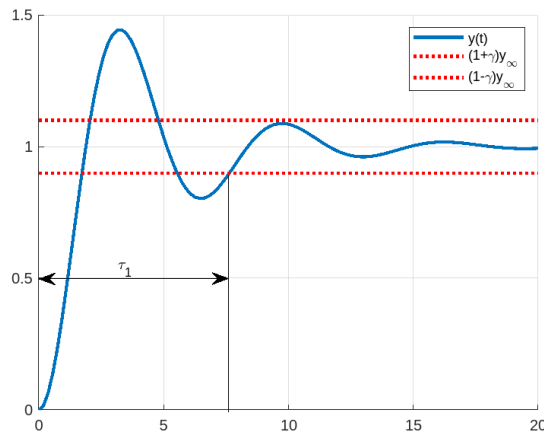
- (g) wskaźnik mieszany uwzględniający koszt sterowania:

$$J_7 = \int_0^\infty (\alpha_1 e(t)^2 + \alpha_2 u(t)^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+. \quad (7)$$

### 2.2.2 Niecałkowe wskaźniki jakości

- (a) czas regulacji  $\tau_r$  - jest to najmniejszy czas, począwszy od którego wartość sygnału wyjściowego obiektu nie różni się od wartości w stanie ustalonej  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  nie bardziej niż zadany procent  $\gamma$ :

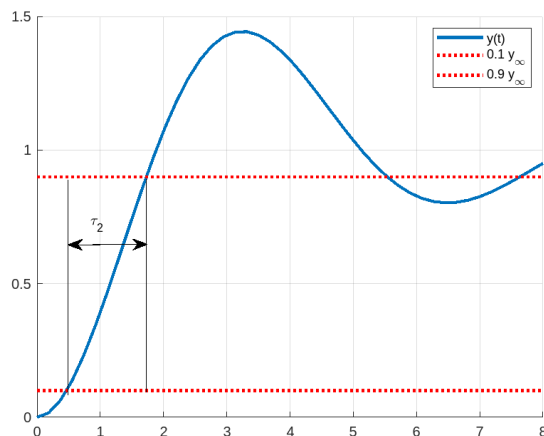
$$\tau_1 = \sup\{t \in [0, \infty) : |y(t) - y_\infty| > \gamma|y_\infty|\},$$



Rysunek 2: Czas regulacji.

- (b) czas narastania  $\tau_n$  - jest to czas, w którym sygnał wyjściowy  $y(t)$  narasta od 10% do 90% wartości w stanie ustalonym  $y_{infty}$ :

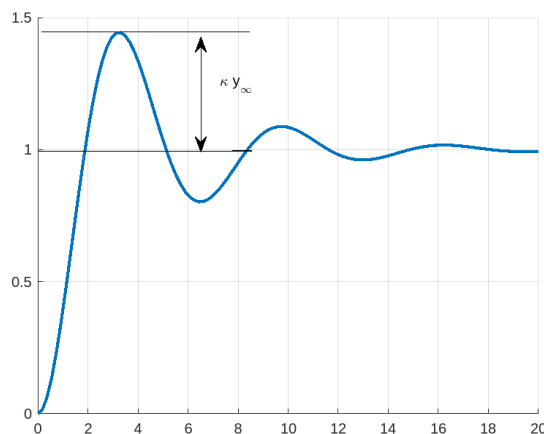
$$\tau_2 = \min\{t \in [0, \infty) : y(t) = 0.9y_\infty\} - \min\{t \in [0, \infty) : y(t) = 0.1y_\infty\},$$



Rysunek 3: Czas narastania.

- (c) przeregulowanie  $\kappa$  - stosunek maksymalnej wartości sygnału wyjściowego  $y_{max}$  do wartości w stanie ustalonym:

$$\kappa = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

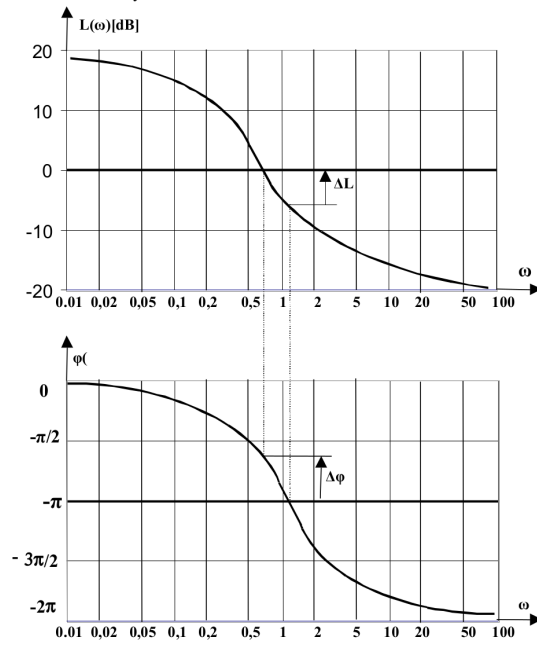


Rysunek 4: Przeregulowanie.

- (d) uchyb ustalony  $e_\infty$  - jest to wartość uchybu regulacji w stanie ustalonym:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

- (e) zapas modułu  $\Delta_L$  - różnica między poziomem modułu równego jeden, a poziomem modułu  $L(\omega_1)$  transmitancji widmowej  $G_{otwarty}(i\omega)$ , gdzie  $\omega_1$  jest pulsacją, dla której faza transmitancji widmowej  $\varphi(\omega_1) = -\pi$ .
- (f) zapas fazy  $\Delta_\varphi$  - jest różnicą między argumentem  $\varphi(\omega_2)$  transmitancji widmowej  $G_{otwarty}(i\omega)$ , dla której moduł  $|G_{otwarty}(i\omega)|$  wynosi 1, a wartością  $-\pi$ .



Rysunek 5: Zapas fazy i modułu.

### 2.3 Wyznaczanie całkowych wskaźników jakości na podstawie transmitancji

- (a)  $J_1 = \int_0^\infty e(t)^2 dt$  : do wyznaczenia całki z kwadratu uchybu sterowania  $e(t)$  na podstawie znajomości jego transformaty  $E(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , gdzie stopień wielomianu  $A(s)$  jest wyższy niż wielomianu  $B(s)$ , można wykorzystać równość, wynikającą z twierdzeń Reileigha i Persevala:

$$J_1 = \int_0^\infty e(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} E(s)E(-s)ds.$$

Dokładne wyprowadzenie zależności na analityczne wyznaczenie tej całki można znaleźć w pracach [1] i [8]. W tej instrukcji ograniczymy się do zaznaczenia, że wyznaczana jest ona poprzez poszukiwanie wielomianu:

$$C(s) = c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0,$$

który spełnia zależność:

$$B(s)B(-s) = A(-s)C(s) + A(s)C(-s).$$

Na podstawie tej równości dostajemy zestaw równań na wartości współczynników  $c_i$ , wynikających z równości odpowiednich współczynników wielomianów z lewej i prawej strony znaku równości. A ostateczną formułą na wskaźnik jakości  $J_1$  jest (8):

$$J_1 = \frac{c_{n-1}}{a_n}. \quad (8)$$

- (b)  $J_4 = \int_0^\infty e(t)^p t^q dt$ : stosunkowo prostą analityczną formę na wskaźnik jakości ważony czasem sterowania można przedstawić dla  $p = 2$  oraz dla  $q = 2$ . Można ją wyznaczyć poprzez podstawienie:

$$\gamma(t) = te(t),$$

wówczas wskaźnik jakości ma postać:

$$J_4 = \int_0^\infty \gamma(t)^2 dt.$$

A ponieważ transformatę  $\gamma(t)$  można przedstawić jako:

$$\Gamma(s) = -\frac{\partial E(s)}{\partial s},$$

to można zastosować procedurę jak dla wskaźnika  $J_1$  tylko z transformatą  $\Gamma(s)$ .

(c)  $J_5 = \int_0^\infty (e(t)^2 + \dot{e}(t)^2) dt$ : całkę tę można rozbić na sumę:

$$J_5 = \int_0^\infty e(t)^2 dt + \int_0^\infty \dot{e}(t)^2 dt = J_1 + \int_0^\infty \dot{e}(t)^2 dt.$$

Część  $J_1$  została już objaśniona, natomiast co do drugiego składnika sumy, to można zauważyć, że jego transformata będzie miała postać:

$$\dot{e}(t) \rightarrow E_p(s) = sE(s).$$

Zatem powtarzamy postępowanie dla  $J_1$ , ale z transformatą  $E_p(s)$ .

## 2.4 Wyznaczanie niecałkowych wskaźników jakości

W ogólności trudno jest wyznaczyć analityczne zależności na przeregulowanie czy czas narastania. Możliwe jest to jednak dla układów drugiego rzędu, i na tych układach się tutaj skupimy. W tym celu przyjmijmy następującą parametryzację obiektu drugiego rzędu:

$$G_{II}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

gdzie:

- $\omega_n$  - pulsacja drgań własnych,
- $\xi$  - współczynnik tłumienia,
- $\sigma$  - tłumienie względne,
- $\omega_d$  - pulsacja drgań tłumionych.

(a) *Czas regulacji* - dla  $\gamma = 0.02$  - dla takiego poziomu uchybu regulacji przybliżony czas regulacji można przedstawić jako:

$$\tau_r = \frac{4}{\xi\omega_n},$$

(b) *Przeregulowanie* - przeregulowanie można określić na podstawie wzoru:

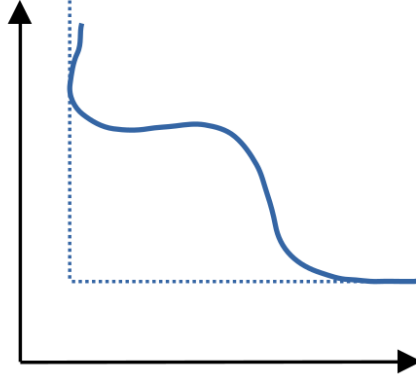
$$\kappa = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}},$$

natomiast czas pierwszego maksimum to:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}.$$

## 2.5 Optymalizacja wielokryterialna

W praktyce inżynierskiej bardzo często spotykane są problemy, które wymagają optymalizacji względem więcej niż jednego kryterium. Nierzadko nie są one wzajemnie przeliczalne, więc nie można ich sprowadzić do pojedynczego skalarnego przypadku. Ponadto bywa, iż kryteria, względem których wykonujemy optymalizację, są wzajemnie sprzeczne - jak np. żądanie jak najszybszej reakcji na zmiany wartości zadanej i minimalizacja energii sterowania. Formalnie można zapisać, że zadanie optymalizacji wielokryterialnej jest poszukiwaniem minimum wektora wskaźników jakości  $F(x) = [F_1 \ \dots \ F_n] \in R^n$ . Jednak problematyczne jest określenie, czym właściwie jest minimum wektora. Gdyż minimum dla każdego z kryteriów osiągane jest zwykle w innym punkcie. Dlatego poszukuje się rozwiązań kompromisowych, na tzw. zbiorze (froncie) Pareto, będącym zbiorem rozwiązań, dla których co najmniej jedno kryterium osiąga lepszy wynik niż dla innych punktów - rysunek (6).



Rysunek 6: Zbiór (front) Pareto.

Nierzadko jednak można zadanie to uprościć i zastosować tzw. metodę skalaryzacji, która polega na przekształceniu zadania optymalizacji wielokryterialnej w zadanie optymalizacji skalarnej poprzez nadanie każdemu ze wskaźników jakości wagi i zsumowanie ich:

$$\mathbf{F} = \nu F = \sum_i^n \nu_i F_i, \nu_i > 0.$$

Można wówczas pokazać, że jeśli  $\hat{\mathbf{F}}$  jest minimum lokalnym, to odpowiadający mu wektor  $F$  leży na zbiorze Pareto.

### 3 Przykłady

#### 3.1 Przykład 1

Rozważmy obiekt o transmitancji:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

w układzie regulacji automatycznej z rysunku (1), z regulatorem:

- (a) typu P:  $G_{R,P}(s) = K_P$ ,
- (b) typu PI:  $G_{R,PI}(s) = K_P(1 + \frac{1}{T_i s})$  zakładając, że  $T_i, K_P > 0$ .

Znaleźć optymalne nastawy względem wskaźnika jakości  $J_1$  i  $J_7$  (dla  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ).

- (a) W celu rozwiązania zadania w pierwszej kolejności wyznaczamy transmitancję zastępczą URA:

$$G(s) = \frac{Ks + K}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K}.$$

Wzmocnienie  $K$  musi stabilizować URA, zatem wyznaczamy zakres wartości  $K$ , dla których układ będzie stabilny, można to zrobić np. za pomocą kryterium Hurwitza:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ K & K+1 & 1 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \implies \Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = K > 0 \implies K > 0.$$

Znając zakres stabilnych  $K$  wyznaczamy transmitancję uchybową:

$$S(s) = \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K}.$$

Ponieważ  $E(s) = S(s)R(s)$ , to transformata odpowiedzi na skok jednostkowy wynosi:

$$E(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K}.$$

Aby wyznaczyć "produkowane" sterowanie wyznaczamy transmitancję:

$$G_U = \frac{K(s^3 + s^2 + s)}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K}.$$

A więc transformata sterowania wynosi:

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K(s^3 + s^2 + s)}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K} = \frac{K(s^2 + s + 1)}{s^3 + s^2 + s(K+1) + K}.$$

Posiadając wyznaczone transformaty sygnałów sterowania i uchybu sterowania można wyznaczyć wskaźniki jakości:

- (1.)  $J_2(K) = \int_0^\infty e(t)^2 dt$  wyznaczamy zgodnie z przedstawioną metodą analitycznego wyznaczania takiej całki na podstawie transformaty Laplace'a  $E(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$  funkcji  $e(t)$ . W tym celu konieczne jest wyznaczenie wielomianu  $C(s) = c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ , który spełnia równanie:

$$B(s)B(-s) = A(-s)C(s) + A(s)C(-s),$$

które po rozpisaniu i pogrupowaniu wyrazów daje następujący układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 2K & 0 & 0 \\ 2 & -2 - 2K & 2K \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2K} \\ \frac{K}{2} + \frac{1}{2K} - \frac{1}{2} \\ \frac{K}{2} + \frac{1}{2K} \end{bmatrix}.$$

Zatem wskaźnik jakości wynosi:

$$J_1(K) = \frac{c_2}{a_3} = \frac{K}{2} + \frac{1}{2K}.$$

Aby więc wyznaczyć optymalną wartość  $K$  mamy do rozwiązania zadanie optymalizacji z ograniczeniem nierównościowym  $-K < 0$ , można je rozwiązać poprzez zastosowanie warunków Khuna-Karusha-Tuckera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_2(K)}{\partial K} + \lambda(-K) = 0 \\ -K < 0 \\ \lambda(-K) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{2K^2} + \lambda(-K) = 0 \\ -K < 0 \\ \lambda(-K) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} K = 1 \\ \lambda = 0 \end{array} \right\}.$$

Zatem optymalna wartość wskaźnika jakości wynosi:

$$J_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

- (2.)  $J_7(K) = \int_0^\infty (e(t)^2 + u(t)^2) dt = \int_0^\infty e(t)^2 dt + \int_0^\infty u(t)^2 dt$  - pierwsza część sumy została wyznaczona w poprzednim przypadku. Natomiast druga część, zależna tylko od sterowania, zostanie wyznaczona tutaj w analogiczny sposób, szukając odpowiedniego wielomianu  $C(s) = c_2^u s^2 + c_1^u s + c_0^u$ , co w tym przypadku prowadzi do układu równań:

$$\begin{bmatrix} 2K & 0 & 0 \\ 2 & -2 - 2K & 2K \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^u \\ c_1^u \\ c_2^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^2 \\ K^2 \\ K^2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_0^u \\ c_1^u \\ c_2^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2}(K^2 - K + 1) \\ \frac{K}{2}(K^2 + 1) \end{bmatrix}.$$

Zatem część wskaźnika jakości związana ze sterowaniem wynosi:

$$J_7^u(K) = \frac{c_2^u}{a_3} = \frac{K}{2}(K^2 + 1).$$

Co daje całościowo wskaźnik jakości w postaci:

$$J_7(K) = K + \frac{1}{2K} + \frac{K^3}{2}.$$

A optymalną wartość  $K$  ponownie odnajdujemy poprzez rozwiązanie problemu KKT:

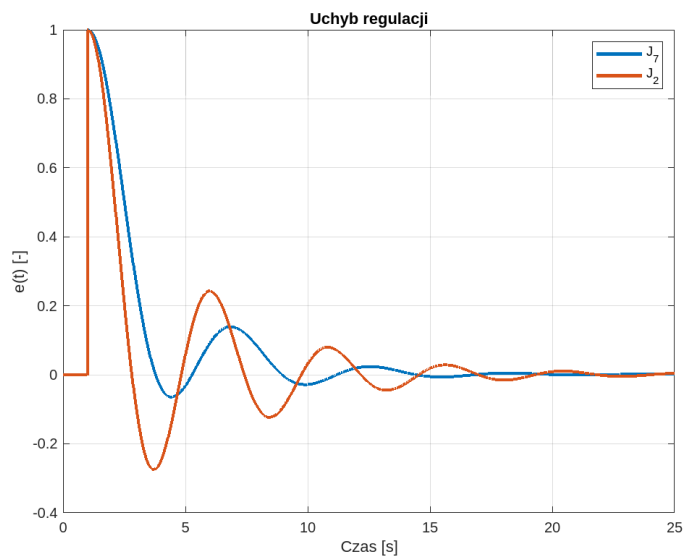
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_7(K)}{\partial K} + \lambda(-K) = 0 \\ -K < 0 \\ \lambda(-K) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}K^2 - \frac{1}{2K^2} + 1 + \lambda(-K) = 0 \\ -K < 0 \\ \lambda(-K) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \lambda = 0 \end{array} \right\}.$$



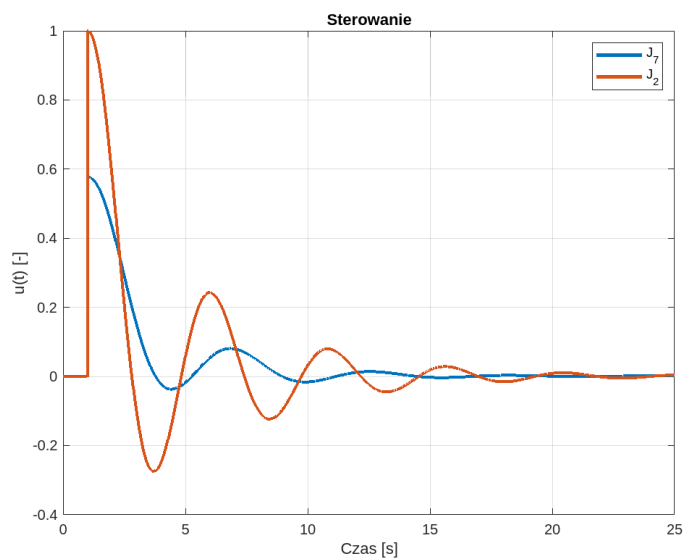
Zatem optymalna wartość wskaźnika jakości wynosi:

$$J_7 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 1.5396.$$

Przebiegi czasowe uzyskanych uchybów regulacji i sterowania pokazano na rysunkach (7) i (9):

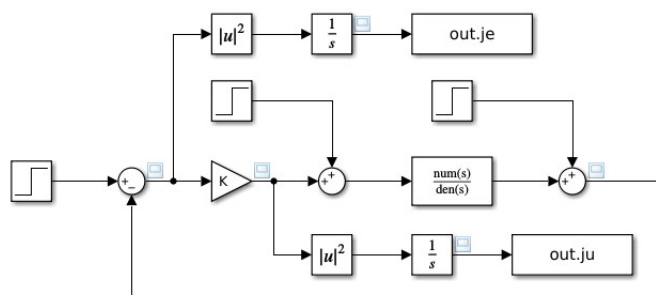


Rysunek 7: Przebiegi czasowe uchybu sterowania dla optymalnych nastaw regulatora względem wskaźnika jakości  $J_2$  i  $J_7$ .



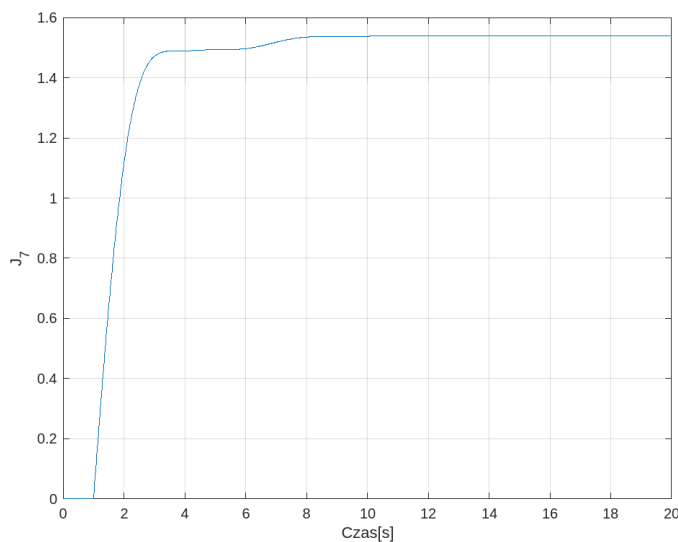
Rysunek 8: Przebiegi czasowe sterowania dla optymalnych nastaw regulatora względem wskaźnika jakości  $J_2$  i  $J_7$ .

Obydwa przypadki, dla wskaźnika  $J_2$ , jak i  $J_7$  można również rozwiązać numerycznie, korzystając z modelu Simulinka, jak na rysunku (9):



Rysunek 9: Model symulacyjny używany do optymalizacji współczynników regulatora.

Na jego podstawie uzyskano praktycznie identyczne wyniki jak w rozwiązaniu analitycznym:



Rysunek 10: Wzrost wskaźnika jakości w czasie symulacji.

- (b) Podobnie jak w przypadku regulatora proporcjonalnego w celu rozwiązania zadania w pierwszej kolejności wyznaczamy transmitancję zastępczą URA z regulatorem proporcjonalno-całkującym:

$$G(s) = \frac{K_P T_I s^2 + (K_P + K_P T_I) s + K_P}{T_I s^4 + T_I s^3 + (T_I + K_P T_I) s^2 + (K_P + K_P T_I) s + K_P}.$$

Parametry  $K_P$  i  $T_D$  muszą stabilizować URA, zatem wyznaczamy zakres tych wartości, dla których układ będzie stabilny, można to zrobić np. z za pomocą kryterium Hurwitza:

$$H = \begin{bmatrix} T_I & K_P + K_P T_I & 0 & 0 \\ T_I & T_I + K_P T_I & K_P & 0 \\ 0 & T_I & K_P + K_P T_I & 0 \\ 0 & T_I & T_I + K_P T_I & K_P \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = T_I, \Delta_2 = T_I^2 - K_P T_I, \Delta_3 = -K_P^2 T_I^2 - K_P^2 T_I + K_P T_I^3, \Delta_4 = -K_P (K_P^2 T_I^2 + K_P^2 T_I - K_P T_I^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_i > 0, K_P < T_I, K_P < \frac{T_I^2}{T_I + 1}.$$

Znając ograniczenia na parametry regulatora wyznaczamy transformaty dla sygnałów sterowania i uchybu sterowania w odpowiedzi na skok jednostkowy -  $R(s) = \frac{1}{s}$ , będą to odpowiednio:

- transformata uchybu:

$$E(s) = \frac{T_I s^3 + T_I s^2 + T_I s}{T_I s^4 + T_I s^3 + (T_I + K_P T_I) s^2 + (K_P + K_P T_I) s + K_P},$$

- transformata sterowania:

$$U(s) = \frac{K_P T_I s^3 + (K_P + K_P T_I) s^2 + (K_P + K_P T_I) s + K_P}{T_I s^4 + T_I s^3 + (T_I + K_P T_I) s^2 + (K_P + K_P T_I) s + K_P}.$$

- (1.)  $J_1(K) = \int_0^\infty e(t)^2 dt$  wyznaczamy metodą analityczną, jak poprzednio, szukając odpowiedniego wielomianu  $C(s) = c_2 s^2 + c_1 s + c_0$ , spełniającego warunek:

$$B(s)B(-s) = A(-s)C(s) + A(s)C(-s).$$

Na podstawie tej równości otrzymuje się układ równań, którego rozwiązanie daje wynik:

$$c_3 = \frac{T_I^2 (K_P^2 T_I + K_P^2 - 2 K_P T_I + T_I^2)}{2 K_P^2 (-T_I^2 + K_P T_I + K_P)}.$$

A zatem wskaźnik jakości przybiera ostatecznie:

$$J_1(K_P, T_I) = \frac{c_3}{a_4} = \frac{T_I^2 (K_P^2 T_I + K_P^2 - 2 K_P T_I + T_I^2)}{2 T_I K_P^2 (-T_I^2 + K_P T_I + K_P)}.$$

- (2.)  $J_7(K) = \int_0^\infty (e(t)^2 + u(t)^2) dt = \int_0^\infty e(t)^2 dt + \int_0^\infty u(t)^2 dt$  - pierwsza część sumy została wyznaczona w podpunkcie wyżej, dlatego tutaj wystarczy wyznaczyć część związaną tylko ze sterowaniem:

$$J_7^u = \frac{-K_P^2 T_I^3 - K_P^2 T_I^2 + K_P^2 T_I + K_P^2 + K_P T_I^3 - 2 K_P T_I + T_I^2}{2 T_I (-T_I^2 + K_P T_I + K_P)}.$$

Są to dość skomplikowane wyrażenia, dlatego analityczne ich wyznaczenie zostanie pominięte.

## 3.2 Przykład 2

Rozważamy obiekt sterowania o transmitancji:

$$G(s) = \frac{1}{s+1},$$

w układzie automatycznej regulacji, jak na rysunku (1). Z regulatorem proporcjonalno-całkującym:

$$G_{R,I}(s) = 1 + \frac{1}{T_I s}.$$

Odnaleźć nastawę regulatora, która zapewnia najlepszą wartość wskaźnika jakości  $J_2$ , przy jednoczesnym minimalizowaniu wpływu zakłócenia obciążeniowego  $D(s)$ . Wskaźnik jakości można zapisać zatem jako sumę:

$$J(T_I) = J_{1,E} + J_{1,D}$$

gdzie:

- $J_{1,E} = \int_0^\infty e(t)^2 dt$  - całka z uchybu sterowania w odpowiedzi na skok jednostkowy na wartości zadanej,
- $J_{1,D} = \int_0^\infty d(t)^2 dt$  - całka z wyjścia w odpowiedzi na skok jednostkowy na obciążeniu.

Podobnie jak poprzednio, zaczynamy od wyznaczenia transmitancji zastępczej i sprawdzenia zakresu wartości  $T_I$ , które stabilizują układ po zamknięciu sprzężenia zwrotnego:

$$G(s) = \frac{T_I s + 1}{T_I s^2 + 2 T_I s + 1}.$$

Łatwo zauważyć, iż wystarczy aby  $T_I > 0$ , aby układ był stabilny.

Kolejno wyznaczamy transmitancje:

- uchybową:

$$S(s) = \frac{T_I s^2 + T_I s}{T_I s^2 + 2 T_I s + 1},$$

- obciążeniową:

$$G_D(s) = \frac{T_I s}{T_I s^2 + 2 T_I s + 1}.$$

A dalej na ich podstawie transformaty odpowiedzi na skok jednostkowy:

- na wartości zadanej:

$$E(s) = \frac{T_I s + T_I}{T_I s^2 + 2 T_I s + 1},$$

- na obciążeniu:

$$Y(s) = \frac{T_I}{T_I s^2 + 2 T_I s + 1}.$$

Znając te transformaty wyznaczamy składniki wskaźnika jakości:

- $J_{1,E} = \frac{T_I}{4} + \frac{1}{4},$
- $J_{1,D} = \frac{1}{4}.$

Sumarycznie otrzymujemy:

$$J(T_I) = \frac{T_I}{4} + \frac{1}{2}.$$

Zatem nie ma minimum, ale współczynnik jakości poprawia się wraz ze zmniejszaniem  $T_I$ .

## 4 Jak to zrobić w MATLABie?

### 4.1 Optymalizacja bez ograniczeń

MATLAB Symbolic Toolbox dostarcza kilka funkcji służących do rozwiązywania problemów optymalizacji bez ograniczeń. Są to np.:

- **fminsearch** - funkcja ta rozwiązuje problem optymalizacji metodami bezgradientowymi, jej przykładowe użycie to:

```
fun = @(x)(x(1)^2 + x(2));      % Uchwyt do minimalizowanej
                                % funkcji
x_0 = [1; 1];                  % Warunek początkowy
x_opt = fminsearch(fun, x_0);   % Uruchomienie procedury
                                % minimalizacyjnej
```

- **fminunc** - funkcja ta rozwiązuje problem optymalizacji metodami gradientowymi, gdzie gradient funkcji celu może być podany analitycznie przez użytkownika, lub w przypadku, gdy jest trudnoosiągalny, może być aproksymowany numerycznie wewnątrz funkcji **fminunc**. Jej przykładowe użycie to:

```
% Definicja minimalizowanej funkcji - może zwracać dodatkowo
% gradient
function [f,g] = rosenbrockwithgrad(x)
% Minimalizowana funkcja
f = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;

% Gradient
if nargin > 1
    g = [-400*(x(2)-x(1)^2)*x(1) - 2*(1-x(1));
          200*(x(2)-x(1)^2)];
end

fun = @rosenbrockwithgrad;      % Uchwyt do minimalizowanej funkcji
x_0 = [1; 1];                  % Warunek początkowy
x_opt = fminsearch(fun, x_0);   % Uruchomienie procedury
                                % minimalizacyjnej
```

## 4.2 Optymalizacja z ograniczeniami

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami, z użyciem metod gradientowych, można rozwiązać w MATLABie za pomocą funkcji `fmincon`, z Optimization Toolbox. Uwzględnia ona następujące ograniczenia:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c(x) \leq 0 & \text{nieliniowe ograniczenia nierównościowe} \\ c_{eq}(x) = 0 & \text{nieliniowe ograniczenia równościowe} \\ Ax \leq b & \text{liniowe ograniczenia nierównościowe} \\ A_{eq}x \leq b_{eq} & \text{liniowe ograniczenia równościowe} \\ x_l \leq x \leq x_u & \text{ograniczenie na dolną i górną wartość} \end{array} \right\}$$

Jeśli minimalizowana funkcja znana jest w postaci analitycznej, to można podać jawnie wartość jej gradientu, jednak gdy nie możemy go jawnie wyznaczyć, to funkcja użyje przybliżenia numerycznego.

Dla przykładu przedstawiona zostanie minimalizacja funkcji Rosenbrocka:

```
function [f,g] = rosenbrockwithgrad(x)
% Minimalizowana funkcja
f = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;

% Gradient
if nargin > 1
    g = [-400*(x(2)-x(1)^2)*x(1) -2*(1-x(1));
         200*(x(2)-x(1)^2)];
end
```

Ustawiamy opcje minimalizacji

```
options = optimoptions("fmincon", ...
    "SpecifyObjectiveGradient", true, ...
    "Display", "iter", ...
    "PlotFcn", @optimplotfval, ...
    "OptimalityTolerance", 1e-8 ...
);
```

Minimalizacja

```
fun = @rosenbrockwithgrad;
x0 = [-1,2];
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb = [-2,-2];
ub = [2,2];
nonlcon = @(x)100*(x(2)-x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;
x = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options);
```

## 4.3 Analityczne rozwiązywanie zadania optymalizacji

Analityczne rozwiązanie zadania optymalizacji może polegać na analitycznym wyznaczeniu wskaźnika jakości w postaci  $J_1 = \frac{c_{n-1}}{a_n}$ , a następnie numerycznej optymalizacji tej funkcji. Może być to zrealizowane tak jak w poniższym skrypcie:

```
% Definicja transmitancji - funkcja tf() nie obsługuje zmiennych
symbolicznych
syms K_P
syms Gr(s) Go(s)
Gr(s) = K_P;
Go(s) = (s+1) / (s^3 + s^2 + s);

Gopen(s) = Gr(s)*Go(s);
```

```

G(s) = Gopen(s) / (1 + Gopen(s));
S(s) = 1 / (1 + Gopen(s));
Gu(s) = Gr(s) / (1 + Gopen(s));

%% Badanie stabilnosci - sprawdzenie warunkow wynikajacych z kryterium
Hurwitza
[~, den_closed] = numden(G);
[den_closed_coeffs, ~] = coeffs(den_closed, s);
den_closed_coeffs_array = den_closed_coeffs(s);

[H, delta] = hurwitz(den_closed_coeffs_array);

solve(delta > 0, K_P)

%% Transformacja uchybowa - wyznaczenie odpowiedzi transmitancji
uchybowej na skok jednostkowy
[num_e, den_e] = numden(S / s);

% Wypisanie formuL LateXa dla mianownika i licznika transformaty e(t)
clc;
[num_e_coeffs, ss] = coeffs(num_e, s);
latex(sum(num_e_coeffs .* ss))

[den_e_coeffs, ss] = coeffs(den_e, s);
latex(sum(den_e_coeffs .* ss))

% Wyznaczenie wielomianu C(s)
syms c0 c1 c2
C(s) = c2*s^2 + c1*s + c0;

left = num_e(s)*num_e(-s);
left_coeffs = coeffs(left, s);
right = den_e(-s)*C(s) + den_e(s)*C(-s);
right_coeffs = coeffs(right, s);

conditions = [ ...
    left_coeffs(1) == right_coeffs(1); ...
    left_coeffs(2) == right_coeffs(2); ...
    left_coeffs(3) == right_coeffs(3) ...
];
c_solved = solve(conditions, [c0,c1, c2]);

% Wyznaczenie wskaznika jakosci J_1
c_2 = c_solved.c2;
latex(c_2)

den_e_array = den_e_coeffs(s);
a3 = den_e_array(1);

J = c_2 / a3;

% Optymalizacja numeryczna wskaznika jakosci
j_numeric_e = @(x)(double(subs(J, {K_P}, x)));

options = optimoptions("fmincon", ...
    "Display", "iter", ...
    "PlotFcn", @optimplotfval, ...

```

```

    "OptimalityTolerance", 1e-4 ...
);

x0 = [5];
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb = [0];
ub = [];
nonlcon = [];
x_opt_e = fmincon(j_numeric_e, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon,
    options);

%% Transformacja obciazeniowa - wyznaczenie odpowiedzi transmitancji
    obciazeniowej na skok jednostkowy
[num_u, den_u] = numden(Gu / s);

% Wypisanie formuL LateXa dla mianownika i licznika transformaty e(t)
clc;
[num_u_coeffs, ss] = coeffs(num_u, s);
latex(sum(num_u_coeffs .* ss))

[den_u_coeffs, ss] = coeffs(den_u, s);
latex(sum(den_u_coeffs .* ss))

% Wyznaczenie wielomianu C(s)
syms c0 c1 c2
C(s) = c2*s^2 + c1*s + c0;

left = num_u(s)*num_u(-s);
left_coeffs = coeffs(left, s);
right = den_u(-s)*C(s) + den_u(s)*C(-s);
right_coeffs = coeffs(right, s);

conditions = [ ...
    left_coeffs(1) == right_coeffs(1); ...
    left_coeffs(2) == right_coeffs(2); ...
    left_coeffs(3) == right_coeffs(3) ...
];
c_solved = solve(conditions, [c0,c1, c2]);

% Wyznaczenie wskaznika jakosci J_1 dla u(t)
c_2 = c_solved.c2;
latex(c_2)

den_e_array = den_e_coeffs(s);
a3 = den_e_array(1);

J = c_2 / a3;

% Optymalizacja numeryczna dla sumy e(t)^2 + u(t)^2
j_numeric_eu = @(x)(j_numeric_e(x) + double(subs(J, {K_P}, x)));

options = optimoptions("fmincon", ...
    "Display", "iter", ...
    "PlotFcn", @optimplotfval, ...

```

```

    "OptimalityTolerance", 1e-4 ...
);

x0 = [5];
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb = [0];
ub = [];
nonlcon = [];
x_opt_eu = fmincon(j_numeric_eu, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon,
    options);

```

#### 4.4 Sumylacyjne rozwiązywanie zadania optymalizacji

W sytuacji, gdy nie znamy analitycznej formuły na wskaźnik jakości, np. z powodu jego znacznego skomplikowania, można posilkować się wynikami symulacyjnymi. Można w tym celu wykorzystać model jak na rysunku (9), w którym wyznaczane są odpowiednie przebiegi i całki. Wówczas można użyć jednej z podanych wyżej funkcji optymalizacyjnych z funkcją celu, zdefiniowaną w MATLABie jako:

```

function j = wskaznik_jakosci(x)
    global KP TI
    KP = x(1);
    TI = x(2);
    output = sim("ura.slx");
    j = output.je.Data(end) + output.ju.Data(end);
end

```

### 5 Przebieg ćwiczenia

Dla każdego z podanych systemów w trakcie analizy należy dla układów 1 i 2:

- utworzyć model symulacyjny układu sterowania w Simulinku (łącznie z wejściami zakłóceń),
- wyznaczyć analitycznie ograniczenia na zakres zmiennych projektowych (w zależności od zadanej struktury regulatora) - zaznaczyć ten obszar na płaszczyźnie,
- wykonać numerycznie optymalizację ze względu na wskaźnik jakości  $J_1$ ,
- wykonać numerycznie optymalizację ze względu na wskaźnik jakości  $J_7$ ,
- wykonać numerycznie optymalizację ze względu na odporność na obciążenie,
- wykonać numerycznie optymalizację ze względu na wskaźniki  $J_1$  i na obciążenie,
- dla każdego zestawu dobranych nastaw regulatora wykonać symulacyjnie:
  - odpowiedź na skok jednostkowy bez zakłóceń (pokazać wartości sterowania),
  - odpowiedź na skok jednostkowy z zakłóceniem obciążeniowym (skok jednostkowy, ale w innej chwili niż wartość zadana)(pokazać wartości sterowania).

#### 5.1 Układ 1

Dla obiektu opisywanego transmitancją:

$$G_O(s) = \frac{2s + 3}{s^3 + 2s^2 + s}, \quad (9)$$

w układzie regulacji automatycznej z rysunku (1), rozważyć do optymalizacji parametrycznej regulatory:

- P:  $G_{R,P}(s) = K_P$ ,
- PD:  $G_{R,PD}(s) = K_P(1 + T_D s)$ .



## 5.2 Układ 2

Dla obiektu opisywanego transmitancją:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}, \quad (10)$$

w układzie regulacji automatycznej z rysunku (1), rozważyć do optymalizacji parametrycznej regulatory:

- P:  $G_{R,P}(s) = K_P$ ,
- PI:  $G_{R,PD}(s) = K_P(1 + \frac{1}{T_D s})$ .

## 5.3 Układ 3

Wyznaczyć optymalny regulator proporcjonalny  $G_R(s) = K$ , dla obiektu (w URA jak z rysunku (1)):

$$G_O(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

minimalizujący czas narastania, przy przeregulowaniu nie przekraczającym 10%.

## Literatura

- [1] Mitkowski, W., Baranowski, J., Hajduk, K., Korytowski, A., Tutaj, A., *Teoria Sterowania: Materiały Pomocnicze do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, AGH Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2007.
- [2] Amborski, K., Marusak, A., *Teoria Sterowania w Ćwiczeniach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [3] Gessing, R., Latarnik, M., Skrzywan-Kossek, A., *Zbiór Zadań z Teorii Nieliniowych Układów Regulacji i Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1981.
- [4] Gibson, J. E., *Nieliniowe Układy Sterowania Automatycznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1968.
- [5] Grabowski P., *Stabilność Układów Lurie*, AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 1999.
- [6] Vukic Z., Kuljaca L., Donlagic D., Tesnjak S., *Nonlinear Control Systems*, Marcel Dekker, 2003.
- [7] Kabziński J., *Teoria Sterowania: Projektowanie Układów Regulacji*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2020.
- [8] Górecki H., *Optymalizacja Systemów Dynamicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1993.