

**A G H**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**Teoria Sterowania**  
**Metoda Lapunowa**

Maciej Różewicz

2 stycznia 2026

# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami badania stabilności układów nieliniowych. W czasie zajęć przedstawione i przećwiczone zostaną dwie metody badania stabilności:

- pośrednia metoda Lapunowa - prosta metoda, dająca zadowalające wyniki w wielu praktycznych przypadkach, jednak mająca pewne ograniczenia,
- bezpośrednia metoda Lapunowa - bardzo uniwersalna metoda, pozwalająca zbadać stabilność szerokiej gamy układów (zarówno stacjonarnych, jak i niestacjonarnych).

Ponadto po sprawdzeniu stabilności punktów równowagi układu badany i estymowany będzie obszar przyciągania asymptotycznego za pomocą twierdzenia La Salle'a. Dodatkowo sprawdzana będzie stabilność nie tylko punktów równowagi, ale i cykli granicznych.

## 2 Wprowadzenie

W ćwiczeniu tym rozważamy nieliniowe układy dynamiczne, które mogą być opisane skończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych w postaci:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (1)$$

gdzie:  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definicja 1** Punktem równowagi układu (1) nazywamy każdy stan  $x_e$ , dla którego  $f(t, x_e) = 0$  dla każdego  $t > t_0$ .

**Definicja 2** Punkt równowagi  $x_e$  jest nazywany izolowanym punktem równowagi, jeśli istnieje jego otoczenie, niezawierające żadnych innych punktów równowagi.

**Definicja 3** Jeżeli istnieje zmienne w czasie rozwiązywanie równania (1) spełniające warunek

$$x(t+T) = x(t)$$

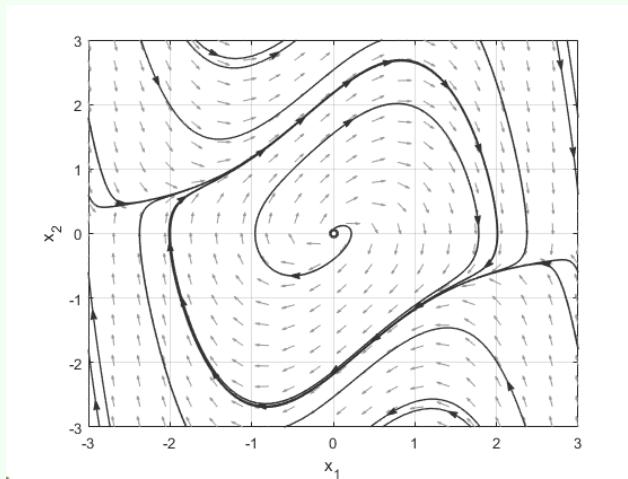
dla pewnego  $T > 0$  i każdego  $t > t_0$ , to nazywamy je cyklem granicznym. Trajektoria w przestrzeni stanów, odpowiadająca cyklowi granicznemu, ma postać zamkniętej krzywej.

### Przykład

Przykładem cyklu granicznego jest tak zwany oscylator Van der Pola:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1)x_2 \end{cases}. \quad (2)$$

Na rysunku (1) przedstawiono portret tego układu, gdzie wyraźnie widoczny jest występujący tam cykl graniczny.



Rysunek 1: Portret fazowy dla oscylatora Van der Pola (równanie 2).

Liczba cykli granicznych nie musi być ograniczona tylko do jednego' lub nawet skończonej liczby - może być ich dowolna ilość, nawet nieskończoność wiele.

### Przykład

Rozważmy układ (3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -[1 + \sin(x_1^2 + x_2^2)]x_2 - x_1 \end{cases}. \quad (3)$$

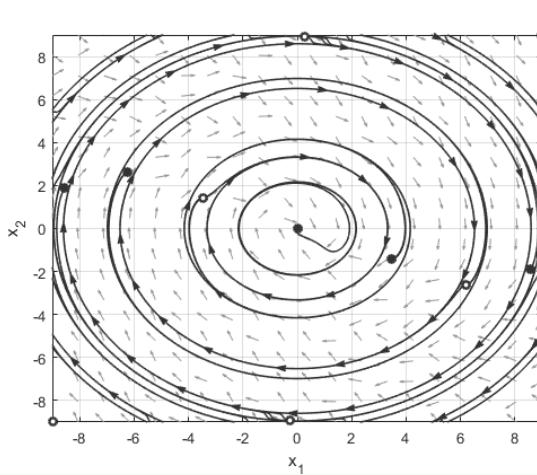
Stosunkowo łatwo zauważać, że cykl graniczny będzie istniał dla każdego  $x_1$  i  $x_2$  spełniającego równanie:

$$1 + \sin(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Zatem musi zachodzić:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi.$$

Portret fazowy tego układu pokazany jest na rysunku (2).



Rysunek 2: Portret fazowy dla układu opisanego układem równań 3.

**Definicja 4** Punkt równowagi  $x_e$  układu (1) nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnych  $t_0 > 0$ ,  $\epsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta_\epsilon > 0$  (może zależeć od  $t_0$  i  $\epsilon$ ) taka, że:

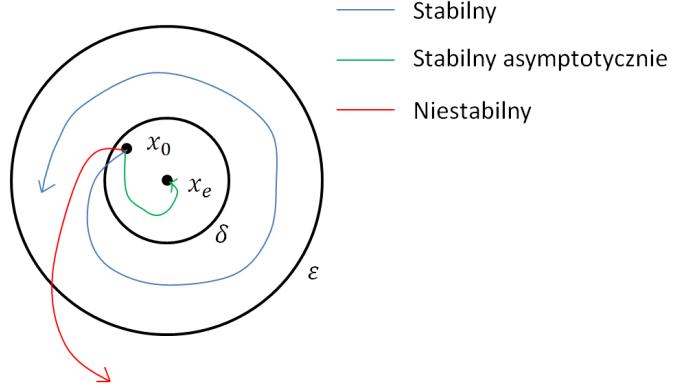
$$\|x_e - x_0\| < \delta_\epsilon(t_0) \implies \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon. \quad (4)$$

**Definicja 5** Punkt równowagi  $x_e$  układu (1) nazywamy niestabilnym, jeśli nie jest stabilny w sensie definicji 4.

**Definicja 6** Punkt równowagi  $x_e$  układu (1) nazywamy jednostajnie stabilnym, jeśli  $\delta_\epsilon$  z definicji 4 jest niezależne od czasu początkowego  $t_0$ .

**Definicja 7** Punkt równowagi  $x_e$  układu (1) nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeśli jest stabilny (w sensie definicji 4) oraz istnieje  $\delta_\epsilon > 0$  takie że:

$$\|x_e - x_0\| < \delta_\epsilon(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0. \quad (5)$$



Rysunek 3: Interpretacja geometryczna definicji stabilności.

**Definicja 8** Punkt równowagi  $x_e$  układu (1) nazywamy stabilnym wykładniczo, jeśli istnieje  $\alpha > 0$  taka, że dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że dla dowolnego  $t \geq t_0$ :

$$\|x_e - x_0\| < \delta_\epsilon(t_0) \implies \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| \leq \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (6)$$

s

**Definicja 9** Zbiór wszystkich takich punktów  $x_0$  w przestrzeni stanów, dla których  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0$  dla pewnego  $t_0 \geq 0$  nazywamy zbiorem przyciągania (obszarem atrakcji) punktu równowagi  $x_e$ .

**Definicja 10** Jeżeli punkt równowagi  $x_e$  jest asymptotycznie stabilny, a jego obszar atrakcji rozciąga się na całą przestrzeń stanów, to punkt równowagi nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym.

**Definicja 11** Funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest nazywana:

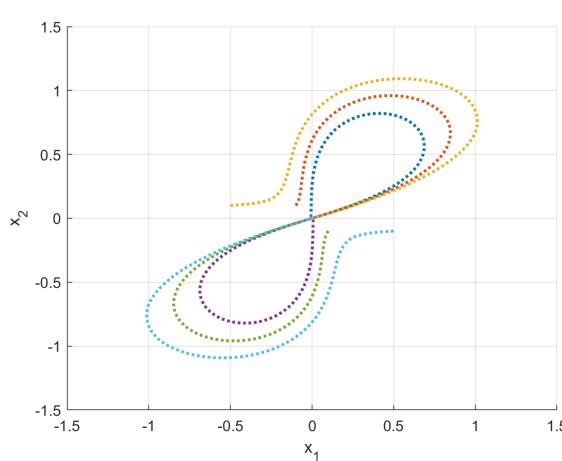
- dodatnio określona, jeśli  $V(0) = 0$  i  $\forall_{x \neq 0} V(x) > 0$ ,
- dodatnio półokreślona, jeśli  $V(0) = 0$  i  $\forall_{x \neq 0} V(x) \geq 0$ ,
- ujemnie określona (półokreślona), jeśli  $-V(x)$  jest dodatnio określona (półokreślona).

## Przykład

Rozważmy układ opisany układem równań (7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Układ ten ma jeden punkt równowagi w początku układu współrzędnych, a jego obszarem atrakcji jest cała płaszczyzna  $\mathbb{R}^2$ , lecz nie jest on stabilny. Ponieważ nie można dobrać takiego  $\delta$ , aby implikacja (4) była spełniona. Kilka jego przykładowych trajektorii okazano na rysunku (6).



Rysunek 4: Przykładowe trajektorie dla układu (7).

Dalsze definicje i twierdzenia odnoszą się do systemów stacjonarnych:

$$\dot{x} = f(x). \quad (8)$$

**Definicja 12** Funkcja  $\dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$  oraz

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

nazywana jest pochodną wzduż trajektorii systemu (8) lub pochodną systemową funkcji  $V$  albo pochodną Lie'go wzduż pola wektorowego  $f$  i oznacza  $\mathcal{L}_f V(x)$ .

**Twierdzenie 1 (Lapunowa)** Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest:

- różniczkowalna w sposób ciągły,
- dodatnio określona w  $D$ ,
- jej pochodna systemowa  $\dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ujemnie półokreślona w  $D$

to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest stabilny. A jeśli pochodna systemowa jest ujemnie określona w  $D$ , to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest asymptotycznie stabilny.

## Ważne

Twierdzenie Lapunowa dostarcza warunek konieczny i wystarczający stabilności punktu równowagi, jednak nie dostarcza żadnej informacji o tym, jak odnaleźć funkcję  $V(x)$ . Odnalezienie tej funkcji jest zasadniczą trudnością w badaniu stabilności. W punkcie 2.1 podano kilka metod poszukiwania funkcji Lapunowa.

**Dowód:** Stabilność: Zgodnie z definicją 4 weźmy liczbę  $\epsilon > 0$ . Założymy, że kula o promieniu  $\epsilon$  zawiera się w zbiorze  $D$ :

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\} \subset D.$$

Niech:

$$\alpha = \min_{\|x\|=\epsilon} V(x).$$

Weźmy liczbę  $\beta$ , taką że  $0 < \beta < \alpha$  i oznaczmy zbiór:

$$\Omega_\beta = \{x \in K_\epsilon : V(x) < \beta\}.$$

Zachodzi więc  $\Omega_\beta \subset K_\epsilon$ . Rozważając dowolną trajektorię  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  układu (8), taką że  $x_0 \in \Omega_\beta$ . Wzdłuż tej trajektorii mamy  $\dot{V}(x) \leq 0$ , więc  $V(x(t)) \leq V(x_0) \leq \beta$ , czyli cała trajektoria  $x(t)$  pozostaje w zbiorze  $\Omega_\beta \subset K_\beta$  dla dowolnego  $t$ . Ponadto z ciągłości funkcji  $V(x)$  wynika, że istnieje  $\delta > 0$  taka, że:

$$\|x\| < \delta \implies V(x) < \beta$$

czyli zachodzi  $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\} \subset \Omega_\beta \subset K_\beta$ . Tak więc, z takim wyborem  $\delta$  implikacja

$$\|x\| < \delta \implies \|x\| < \epsilon$$

jest prawdziwa i zgodnie z definicją 4  $x_e = 0$  jest stabilny w sensie Lapunowa.

*Asymptotyczna stabilność:* Jeżeli pochodna systemowa  $\dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ujemnie określona w  $D$ , to wzdłuż trajektorii  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  układ (8) funkcja  $V(x)$  jest ściśle malejąca i ograniczona od dołu przez 0, więc zbiega do nieujemnej granicy  $c$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = c \geq 0.$$

Jeśli przyjmujemy, że  $c > 0$ , to oznaczałoby to, że cała trajektoria  $x(t)$  pozostaje na zewnątrz zbioru  $\Omega_c = \{x \in K_\epsilon : V(x) \leq c\}$ , a tym samym na zewnątrz dowolnej kuli  $K_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$  zawartej w  $\Omega_c$ . Wtedy wzdłuż trajektorii  $x(t)$

$$\dot{V}(x) \leq \max_{r \leq \|x\| \leq \epsilon} \dot{V}(x) = -v < 0$$

czyli

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(t_0)) - v(t - t_0).$$

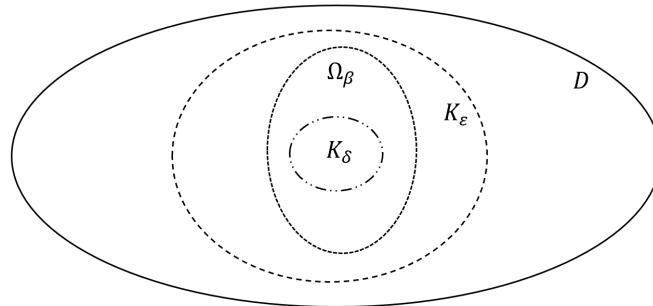
Dla dostatecznie dużego  $t$  funkcja  $V(x(t))$  przyjmowałaby więc wartości ujemne, co jest sprzeczne z założeniami co do funkcji  $V(x)$ . Musi więc zachodzić:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$$

co pociąga za sobą:

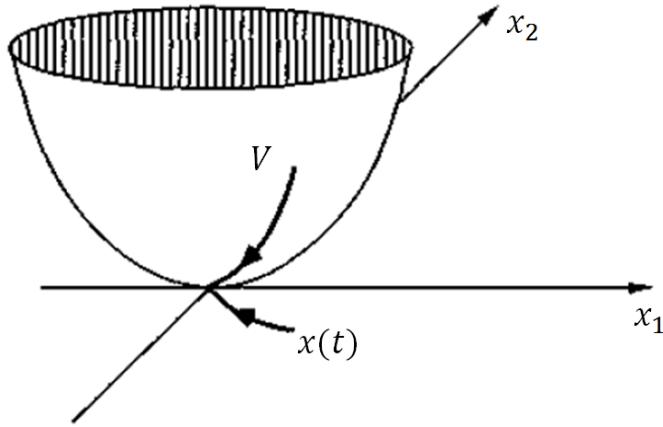
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

i udowadnia asymptotyczną stabilność.



Rysunek 5: Zbiory definiowane w dowodzie twierdzenia Lapunowa o stabilności.

**Definicja 13** Funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  spełniająca założenia twierdzenia Lapunowa jest nazywana funkcją Lapunowa.



Rysunek 6: Graficzna interpretacja funkcji Lapunowa dla  $n = 2$ .

**Twierdzenie 2 (Lapunowa o niestabilności)** Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna w sposób ciągły, dodatnio określona w pewnym otoczeniu punktu równowagi  $x_e = 0$  i taka, że jej pochodna systemowa  $\dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio określona w pewnym zbiorze  $G = \{x \in K_\epsilon : V(x) > 0\}$ , gdzie  $K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\} \subset D$ , to punkt równowagi  $x_e = 0$  jest niestabilny.

Ważne

**Funkcje Lapunowa dla układów liniowych** W przypadku układów liniowych, które mają ścisłe określone struktury:

$$\dot{x} = Ax \quad (9)$$

można wykazać, że jeśli istnieje dodatnio określona i symetryczna macierz  $P \in \mathbb{R}^n$ , która spełnia tzw. równanie Lapunowa:

$$A^T P + PA = -Q \quad (10)$$

gdzie:  $Q = Q^T > 0$ , to dla układu (9) funkcja Lapunowa istnieje i ma postać:

$$V(x) = x^T Px. \quad (11)$$

A jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx \quad (12)$$

Jest to równoważne z położeniem widma macierzy  $A$  w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

**Twierdzenie 3 (pośrednia metoda Lapunowa)** Jeżeli badany układ 8 jest tzw. systemem *słabo-nieliniowym*, tzn. można go zapisać w postaci:

$$\dot{x} = Ax + r(x) \quad (13)$$

gdzie:

- $A \in \mathbb{R}^n$ ,
- $r(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest różniczkowalną, lokalnie lipschitzowską funkcją, która ponadto spełnia warunek:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (14)$$

to stabilność punktu równowagi może być analizowana w oparciu o przybliżenie liniowe, zaniedbujące składnik  $r(x)$ , to znaczy:

$$\dot{x} = Ax.$$

Wówczas stabilność punktu równowagi zależy od widma macierzy  $A$  (jej wartości własne) w następujący sposób:

- Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  spełniają warunek  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , czyli leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, to punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.
- Jeżeli którakolwiek z wartości własnych macierzy  $A$  leży w prawej półpłaszczyźnie zespolonej, to punkt równowagi jest niestabilny.
- Jeżeli wartości własne macierzy  $A$  leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej i choć jeden na osi urojonych, to nie można wnioskować o stabilności punktu równowagi na podstawie przybliżenia liniowego.

#### Uwaga

Możliwość zastosowania analizy układu zlinearyzowanego wynika z twierdzenia Hartmana-Grobmana, które mówi, że w otoczeniu punktu równowagi układ nieliniowy jest topologicznie równoważny z jego przybliżeniem liniowym (możemy znaleźć lokalny homeomorfizm z układu nieliniowego w liniowy), o ile wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają część rzeczywistą różną od zera. Oznacza to, że w takim przypadku zachowanie układu nieliniowego w otoczeniu punktu równowagi jest podobne do zachowania układu liniowego.

#### Przykład

Rozpatrzmy prosty układ pierwszego rzędu:

$$\dot{x} = ax + bx^3.$$

Jego przybliżenie liniowe ma postać:

$$\dot{x} = ax$$

Ponadto  $r(x) = bx^3$  jest ciągła, lipschitzowska i spełnia warunek

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|bx^3\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \rightarrow 0} |b| \|x^2\| = 0.$$

Mamy zatem 3 przypadki:

- $a < 0$  - wówczas układ stabilny,
- $a > 0$  - wówczas układ niestabilny,
- $a = 0$  - wtedy o stabilności decyduje  $r(x) = bx^3$  - jeśli  $b < 0$  to stabilny, a jeśli  $b > 0$  to niestabilny.

Łatwo jest to zweryfikować bezpośrednią metodą Lapunowa, przyjmując funkcję Lapunowa  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

**Definicja 14** Funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest nazywana radialnie nieograniczoną, jeśli  $\|x\| \rightarrow \infty$  implikuje  $V(x) \rightarrow \infty$ .

**Twierdzenie 4 (o globalnej stabilności asymptotycznej)** jeśli istnieje radialnie nieograniczona, ciągłe różniczkowalna, dodatnio określona w  $\mathbb{R}^n$  funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , taka, że jej pochodna systemowa jest ujemnie określona w  $\mathbb{R}^n$ , to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

## Przykład

Rozważmy układ opisany równaniami:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} - x_2 \end{cases},$$

posiadający jededny punkt równowagi w początku układu współrzędnych, dla którego kandydatem na funkcję Lapunowa jest:

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2.$$

$V(x)$  jest dodatnio określona dla wszystkich  $x \neq 0$ , a jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = -\frac{2x_1^2}{(1+x_1^2)^2} - 2x_2^2$$

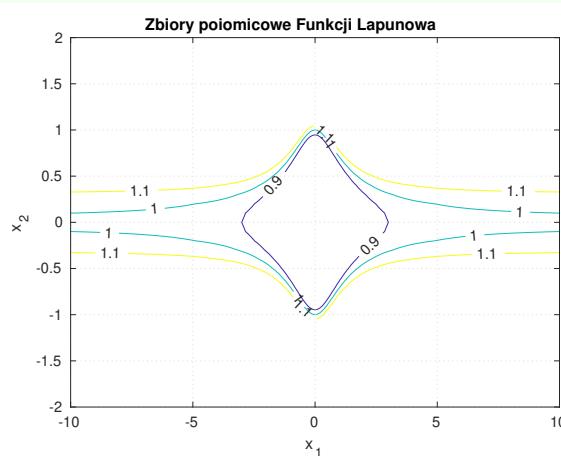
jest ujemnie określona wszędzie poza punktem równowagi systemu.

Sprawdźmy granice. Jeśli  $x_2 = 0$  i  $x_1 \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} V(x_1, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1.$$

Zatem funkcja Lapunowa nie jest radialnie ograniczona, a tym samym nie możemy wnioskować o globalnej stabilności asymptotycznej punktu równowagi. Poziomice  $V(x) = c$  dla  $c < 1$  są krzywymi zamkniętymi. Jednak dla  $c = 1$ , poziomica to  $x_2^2 = 1 - \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = \frac{1}{1+x_1^2}$ , czyli  $x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}$ . Ta krzywa rozciąga się do nieskończoności wzdłuż osi  $x_1$ .

Jeśli warunek radialnej nieograniczoneści nie jest spełniony, nie możemy zagwarantować, że trajektorie startujące z dalekich punktów (gdzie  $V(x) \geq 1$ ) zostaną „ściągnięte” do początku układu. Mogą one uciec do nieskończoności, mimo że ich „energia”  $V$  stale maleje (dąży np. do wartości 1 od góry).



Rysunek 7: Funkcja Lapunowa  $V(x)$  jest radialnie ograniczona - zbiór poziomicowy dla  $V(x) = 1$  jest nieodmknietły.

## Ważne

Aby udowodnić Globalną Stabilność Asymptotyczną (GAS), „miska” potencjału  $V$  musi rosnąć w nieskończoność w każdym kierunku. Jeśli miska ma „krawędź” na skończonej wysokości (tak jak funkcja  $\frac{x_1^2}{1+x_1^2}$ ), trajektoria może się z niej „wylać”, a udowodniona zostanie co najwyżej stabilność lokalna wewnątrz tej „miski”.

**Twierdzenie 5 (o stabilności wykładniczej)** Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna w sposób

ciągły i taka, że dla pewnych dodatnich stałych  $k_1, k_2, k_3, h$  są spełnione na zbiorze  $D$  warunki:

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^h &\leq V(x) \leq k_2 \|x\|^h \\ \dot{V}(x) &\leq -k_3 \|x\|^h \end{aligned} \quad (15)$$

to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest wykładniczo stabilny. Jeżeli  $D = \mathbb{R}^n$ , to punkt równowagi jest globalnie wykładniczo stabilny.

**Definicja 15** Zbiór  $M$  w przestrzeni stanów układu (8) jest nazywany niezmienniczym (invariantnym), jeśli każda trajektoria rozpoczynająca się w  $M$  w nim pozostaje, czyli:

$$x(t_0) \in M \implies \forall_{t > t_0} x(t) \in M. \quad (16)$$

Przykładami zbioru niezmienniczego są: cała przestrzeń stanów, punkt równowagi, cykl graniczny, czy zbiór zdefiniowany jako:

$$\omega_p = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}$$

gdzie  $V(x)$  jest funkcją Lapunowa.

**Definicja 16** Zbiór  $N$  w przestrzeni stanów nazywamy zbiorem granicznym dla trajektorii  $x(t)$  układu (8), jeśli dla dowolnego punktu  $p \in N$  istnieje ciąg  $x(t_n) \rightarrow p$ ,  $t_1 < t_2 < \dots$ .

Zbiorami granicznymi są zatem punkty asymptotycznie stabilnej równowagi i cykle graniczne dla trajektorii z ich obszarów atrakcji.

**Twierdzenie 6 (LaSalle'a)** Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , różniczkowalna w sposób ciągły, która spełnia warunki:

- (a)  $M \subset D$  jest ograniczonym, domkniętym zbiorem niezmienniczym układu (8),
- (b)  $\dot{V}(x) \leq 0$  dla każdego  $x \in M$ ,
- (c)  $E = \{x \in M : \dot{V}(x) = 0\}$ ,
- (d)  $N$  jest największym zbiorem niezmienniczym zawartym w  $E$  (to znaczy każdy zbiór niezmienniczy zawarty w  $E$  jest zawarty w  $N$ ),

to każda trajektoria rozpoczynająca się w zbiorze  $M$  zbiega do zbioru  $N$  dla  $t \rightarrow \infty$ .

*Dowód:* wzduż dowolnej trajektorii  $x(t)$ , rozpoczynającej się w zbiorze  $M$  funkcja  $V(x(t))$  jest nierosnąca (z założenia (b)), ograniczona z dołu (jako funkcja ciągła na zwartym zbiorze  $M$ ), ma więc skończoną granicę  $v$  dla  $t \rightarrow \infty$ .

Niech  $N_x$  będzie zbiorem granicznym trajektorii  $x(t)$ . Oczywiście  $N_x \subset M$ . Zgodnie z definicją 16, dla dowolnego punktu  $p \in N_x$  istnieje ciąg  $x(t_n) \rightarrow p$ . Na mocy ciągłości funkcji  $V : V(p) = v$ , czyli na całym zbiorze  $N_x$ , funkcja  $V$  przyjmuje stałą wartość  $v$ , więc dla  $p \in N_x : \dot{V}(x) = 0$ . Ostatecznie

$$N_x \subset N \subset E \subset M.$$

Jako że  $x(t)$  zbiega do zbioru  $N_x$ , zbiega też do zbioru  $N$ .

**Twierdzenie 7 (wniosek z twierdzenia LaSalle'a)**

1. Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna w sposób ciągły i spełnione są warunki:

- (a)  $V$  jest dodatnio określona na  $D$ ,
- (b)  $\dot{V}(x) \leq 0$  w ograniczonym podzbiorze  $S \subset D$ ,  $0 \in S$ ,
- (c)  $\dot{V}(x)$  nie staje się zerem wzduż żadnej trajektorii  $x(t) \subset S$ , z wyjątkiem  $x(t) \equiv 0$ ,

to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest asymptotycznie stabilny.

2. Jeżeli założenia są spełnione w całej przestrzeni stanów ( $S = \mathbb{R}^n$ ), a funkcja  $V$  jest radialnie nieograniczona, to punkt równowagi  $x_e = 0$  jest globalnie asymptotycznie stabilny.

**Twierdzenie 8 (Barbaszina i Krasowskiego)**

1. Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna w sposób ciągły i spełnione są warunki:

- (a)  $V$  jest dodatnio określona na  $D$ ,

- (b)  $\dot{V}(x) \leq 0$  w ograniczonym podzbiorze  $S \subset D$ ,  $0 \in Int(S)$ ,
- (c)  $E = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$  i żadna trajektoria  $x(t)$  nie zawiera się w zbiorze  $E$ , z wyjątkiem  $x(t) \equiv 0$ ,

to punkt równowagi  $x_e = 0$  układu (8) jest asymptotycznie stabilny.

2. Jeżeli założenia są spełnione w całej przestrzeni stanów ( $S = \mathbb{R}^n$ ), a funkcja  $V$  jest radialnie nieograniczona, to punkt równowagi  $x_e = 0$  jest globalnie asymptotycznie stabilny.

**Twierdzenie 9 (o zbiorze niezmienniczym i zbiorze przyciągania)** Jeżeli istnieje funkcja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna w sposób ciągły i spełnione są warunki:

- (a)  $M \subset D$  jest ograniczonym, domkniętym zbiorem niezmienniczym układu (8) i  $0 \in M$ ,
- (b)  $\dot{V}(x) < 0$  dla  $0 \neq x \in M$ ,  $\dot{V}(0) = 0$ ,

to zbiór  $M$  jest zawarty w zbiorze przyciągania punktu równowagi  $x_e = 0$ .

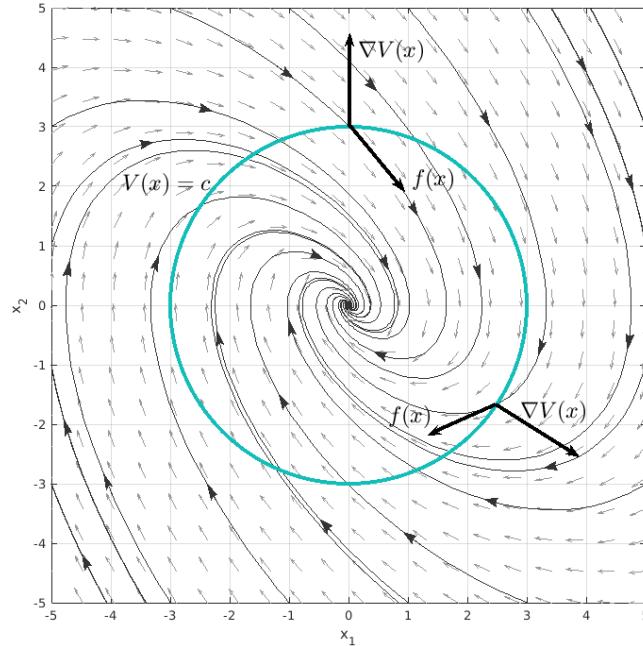
**Twierdzenie 10 (o obszarze przyciągania)** Jeżeli istnieje funkcja Lapunowa  $V(x)$  oraz zachodzą warunki:

- (a) istnieje zbiór  $G = \{x : V(x) < \rho\}$ ,
- (a) dla każdego  $x \in G$  zachodzi  $\dot{V}(x) \leq 0$

to  $G$  jest obszarem atrakcji, a trajektorie zbiegają do maksymalnego zbioru invariantnego zawartego w  $G$ .

### Intuicja

Z twierdzenia tego wynika, iż zbiór poziomowy funkcji Lapunowa jest zbiorem niezmienniczym. Ponieważ warunek  $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  oznacza, że kąt pomiędzy gradientem funkcji Lapunowa a trajektorią systemu należy do przedziału  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , a więc są skierowane do wewnątrz zbioru. Jak pokazano na rysunku 8.



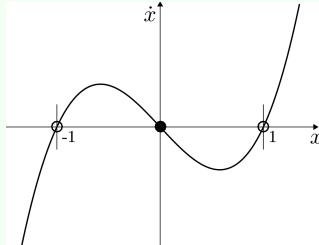
Rysunek 8: Geometryczna interpretacja warunku na invariantność zbioru poziomowego.

### Przykład

Rozważmy prosty układ pierwszego rzędu:

$$\dot{x} = -x + x^3.$$

Graficznie przedstawiono to na rysunku (9):



Rysunek 9: Ilustracja do twierdzenia o obszarze przyciągania.

Dość łatwo zauważać, że obszar pomiędzy  $-1$  a  $1$  jest stabilny - dla dodatnich położień prędkość jest ujemna i ciąga stan do zera, dla ujemnych jest dodatnia i też przyciąga stan do zera. Natomiast poza tym obszarem stan oddala się do nieskończoności - położenia powyżej/ $1/-1$  powodują prędkości odpowiednio dodatnie/ujemne - czyli system oddala się od punktu równowagi.

Można rozważyć funkcję Lapunowa:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Jej pochodna systemowa:

$$\dot{V}(x) = -x^2 + x^4 = x^2(x^2 - 1) \implies \dot{V}(x) \leq 0 \text{ dla } x \in (-1, 1).$$

Zatem  $x \in (-1, 1)$  jest obszarem atrakcji stabilnego punktu równowagi.

**Twierdzenie 11 (Poincare)** Jeżeli cykl graniczny istnieje, to musi okrązać co najmniej jeden punkt równowagi, a do tego zachodzi równość:

$$N = S + 1, \quad (17)$$

gdzie:

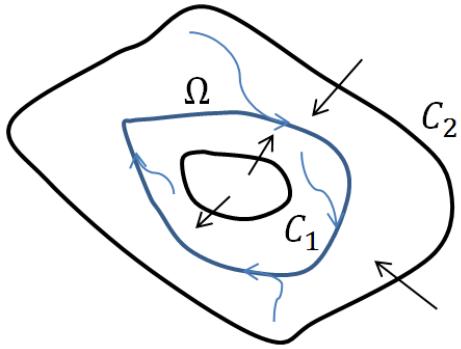
- $N$  - liczba punktów równowagi typu węzeł, ognisko, gwiazda,
- $S$  - liczba punktów równowagi typu siodło.

### Intuicja

Każdy zamknięty kontur posiada tak zwany indeks, czyli liczbę obiegów wektora  $\varphi(x_1, x_2) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}\right)$ . Można pokazać, że dla konturu otaczającego pojedynczy punkt równowagi indeks ten wynosi 1 dla punktów równowagi typu węzeł, ognisko i gwiazda, natomiast dla punktu typu siodło indeks wynosi -1. Dodatkowo można udowodnić, że indeks konturu w przypadku okrążania wielu punktów równowagi jest równy sumie indeksów wszystkich punktów równowagi w konturze. Zatem jeśli ich suma wynosi 1 ( $N - S = 1$ ), to można je traktować poniekąd jak pojedynczy punkt równowagi - jeśli zawiera on stabilny cykl graniczny, to wszystkie trajektorie będą do niego zmierzać - jak do stabilnego punktu równowagi.

**Twierdzenie 12 (Poincare-Bendixona)** Jeżeli trajektorie nieliniowego, stacjonarnego układu drugiego rzędu (8) pozostają w ograniczonym obszarze  $\Omega$ , to wówczas zachodzi jedna z możliwości:

- (a) trajektoria zbiega do punktu równowagi,
- (b) zbiega do cyklu granicznego,
- (c) jest cyklem granicznym.



Rysunek 10: Ilustracja do twierdzenia Poincare-Bendixona.

**Twierdzenie 13 (Bendixona)** Dla układu nieliniowego (8) drugiego rzędu, na obszarze  $\Omega$  nie istnieje żaden cykl graniczny, jeśli  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  nie zmienia na nim znaku ani nie zanika tożsamościowo do zera.

### Przykład

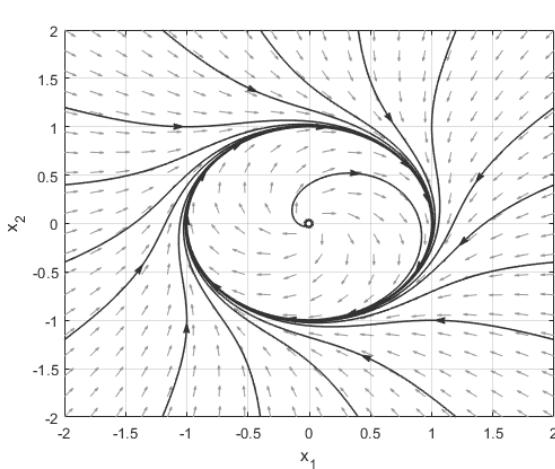
Rozważmy układ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{array} \right\}. \quad (18)$$

Wówczas mamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2 - 4(x_1^2 + x_2^2)$$

suma ta zmienia znak na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Zatem można szukać cyklu granicznego wokół punktu  $(0, 0)$ . Portret fazowy tego układu pokazano na rysunku.



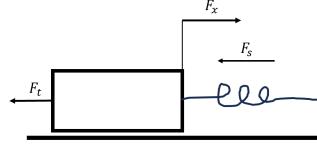
Rysunek 11: Portret fazowy układu (18).

## 2.1 Metody poszukiwania funkcji Lapunowa

Jak wcześniej wspomniano nie istnieje uniwersalna metoda poszukiwania funkcji Lapunowa i odnalezienie jej jest zasadniczym problemem udowodnienia stabilności danego punktu równowagi systemu nieliniowego. Jednak w literaturze można odnaleźć szereg metod, które sugerują pewne obszary i metodologie poszukiwań.

### 2.1.1 Energetyczna

W celu zobrazowania metody energetycznej funkcji Lapunowa wykorzystany zostanie przykład układu masa-sprężyna, jak na rysunku (12).



Rysunek 12: Układ masa-sprężyna.

Wówczas można założyć, że siły tarcia i sprężystości wyrażają się zależnością:

- $F_t = f(x, \dot{x})$ ,
- $F_s = g(x)$ .

Gdzie  $f(x, \dot{x})$  i  $g(x)$  są funkcjami ciągłymi spełniającymi warunki:

- $g(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ ,
- $f(x, \dot{x}) > 0$ .

Ostatecznie więc dynamika układu wyraża się równaniem:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (19)$$

Ponieważ występuje tarcie, to suma energii kinetycznej i potencjalnej powinna maleć. Suma tych energii to:

$$E = E_k + E_p$$

gdzie:

- $E_k = \frac{\dot{x}^2}{2}$  - energia kinetyczna,
- $E_p = \int_0^{x_1} g(z)dz$  - energia potencjalna.

Zatem potencjalnej funkcji Lapunowa można poszukiwać jako sumy energii układu:

$$V(x_1, x_2) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^{x_1} g(z)dz. \quad (20)$$

### 2.1.2 Forma kwadratowa

Często można szukać funkcji Lapunowa w postaci formy kwadratowej w oparciu o przybliżenie liniowe układu nieliiniowego:

$$V(x) = x^T Px$$

gdzie  $P$  jest rozwiązaniem równania Lapunowa.

Bardzo często szuka się też funkcji Lapunowa w postaci sumy kwadratów poszczególnych zmiennych stanu:

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

### 2.1.3 Metoda Krasowskiego

Jeśli dla układu (8) macierz Jacobiego:

$$A(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

spełnia warunek:

$$F = A^T + A < 0.$$

To funkcji Lapunowa można poszukiwać w formie:

$$V(x) = f(x)^T P f(x).$$

Ponieważ:

$$\dot{V}(x) = f^T \dot{f} + \dot{f}^T f = f^T A f + f^T A^T f = f^T F f < 0.$$

#### 2.1.4 Metoda zmiennych gradientów

Metoda zmiennych gradientów jest formalnym podejściem do konstrukcji funkcji Lapunowa. Zakłada ona, że funkcja Lapunowa jest związana z jej nachyleniem  $\nabla V$  przez zależność całkową:

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx \quad (21)$$

gdzie  $\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$ . Żeby uzyskać funkcję skalarną  $V(x)$ , gradient musi spełniać szereg warunków:

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i}, \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

gdzie  $\nabla V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$ . Metoda ta zakłada postać gradientu funkcji Lapunowa w postaci:

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (23)$$

gdzie  $a_{ij}$  są określonymi współczynnikami.

Procedurę te można zalgorytmizować w następujący sposób:

1. Zakładamy, że  $\nabla V$  jest dane z zależności (23).
2. Rozwiążujemy równanie dla współczynników  $a_{ij}$  tak, aby spełniały warunki (22).
3. Obliczamy  $V$  przez całkowanie:

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) + \int_0^{x_2} \nabla V_1(x_1, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_1(x_1, \dots, x_n).$$

4. Sprawdzamy, czy  $V$  jest dodatnio określona.

#### Przykład

Dla zobrazowania tej metody rozważmy układ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1 x_2^2 \end{cases}.$$

Przymajemy, że gradienty funkcji Lapunowa mają postać:

$$\begin{aligned} \nabla V_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

Muszą one spełniać warunek:

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

czyli:

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} = a_{21} + x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}.$$

Współczynniki  $a_{ij}$  można dobrać np. jako:

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$$

Mamy wówczas:

$$\nabla V_1 = x_1, \nabla V_2 = x_2.$$

A funkcja Lapunowa ma postać:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

### 2.1.5 Neuralna

Coraz częściej do poszukiwania funkcji Lapunowa wykorzystuje się metody uczenia maszynowego. Można w tej kategorii wydzielić najogólniej dwie grupy metod:

- aproksymujące funkcję Lapunowa w konkretnych punktach, zakładając odpowiednią gładkość aproksymowanej funkcji,
- wyznaczające funkcję Lapunowa i jej pochodną w postaci analitycznej - w tym podejściu ujemność pochodnej udowadniana jest za pomocą tzw. Satisfiability Modulo Theories - takie podejście pokazane jest między innymi w pracy [10].

## 2.2 Przykłady

### 2.2.1 Przykład 1

Zbadać stabilność punktów równowagi układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}. \quad (24)$$

W celu wyznaczenia punktów równowagi przyrównujemy prawą stronę równania (24) do zera i otrzymujemy dwa punkty równowagi:

1.  $x_e^1 = [0 \ 0]^T$ : Badany układ można zapisać w postaci (13) z **twierdzenia 2**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,
- $r(x) = [x_1^2 \ 0]^T$  i  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{x_1^2}{\|x\|} = 0$ .

Badamy zatem wartości własne macierzy  $A$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Pierwiastki równania mają części rzeczywiste ujemne, zatem  $x_e^1$  jest stabilnym punktem równowagi.

2.  $x_e^2 = [1 \ 1]^T$ : Aby móc zastosować pośrednią metodę Lapunowa przesuwamy punkt równowagi do początku układu współrzędnych:  $z_1 = x_1 - 1$ ,  $z_2 = x_2 - 1$ . Wówczas układ (24) przybiera formę:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 + 2z_1 - z_2 \\ \dot{z}_2 = z_1 - z_2 \end{cases}.$$

Więc badany układ można zapisać w postaci (13) z **twierdzenia 2**:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:

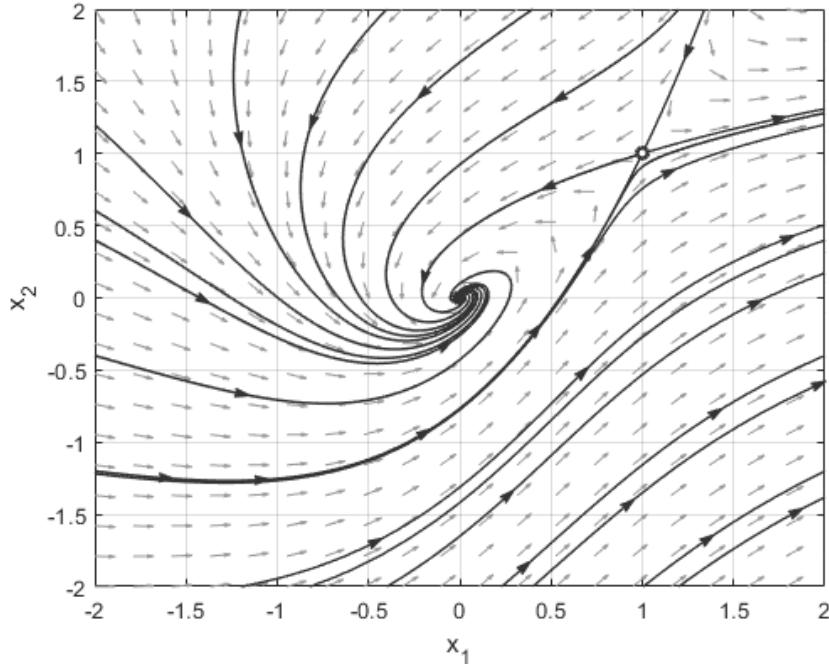
- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,
- $r(z) = [z_1^2 \ 0]^T$  i  $\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|r(z)\|}{\|z\|} = \lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{z_1^2}{\|z\|} = 0$ .

Badamy zatem wartości własne macierzy  $A$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Pierwiastki równania mają części rzeczywiste dodatnie, zatem  $x_e^2$  jest niestabilnym punktem równowagi.

Powyzsze wnioski zobrazowane sa na rysunku (13), przedstawiajacym portret trajektorii badanego ukladu.



Rysunek 13: Portret trajektorii stanu ukladu (24).

### 2.2.2 Przyklad 2

Zbadać stabilność punktów równowagi równania:

$$\ddot{x} + \dot{x} + (x+1)x(x-1) = 0. \quad (25)$$

W celu analizy stabilności przeksztalcamy równanie do układu równań przez wprowadzenie zmiennych:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1.$$

Mamy więc:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + 1)x_1(x_1 - 1) - x_2 \end{cases}. \quad (26)$$

Punkty równowagi szukamy przyrównując prawą stronę układu równań (26) do zera:

1.  $x_e^1 = [0 \quad 0]^T$ : Przybliżenie liniowe można uzyskać poprzez przybliżenie szeregiem Taylora:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_e^1} + r(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,
- $r(x) = [0 \quad x_1^3]^T$  i  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{|x_1^3|}{\|x\|} = 0$ .

Badamy zatem wartości własne macierzy  $A$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

jeden pierwiastek jest dodatni, a drugi ujemny, zatem  $x_e^2$  jest niestabilnym punktem równowagi typu siodło.

2.  $x_e^2 = [1 \ 0]^T$ : Aby móc zastosować pośrednią metodę Lapunowa przesuwamy punkt równowagi do początku układu współrzędnych:  $z_1 = x_1 - 1$ ,  $z_2 = x_2$ . Wówczas układ (24) przybiera formę:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 - z_1^3 - 3z_1^2 - 2z_1 \end{array} \right\}.$$

Więc badany układ można zapisać w postaci (13) z **twierdzenia 2**:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3z_1^2 - z_1^3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ,
- $r(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3z_1^2 - z_1^3 \end{bmatrix}$  i  $\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|r(z)\|}{\|z\|} = 0$ .

Badamy zatem wartości własne macierzy  $A$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Pierwiastki równania mają części rzeczywiste ujemne, zatem  $x_e^2$  jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

3.  $x_e^3 = [-1 \ 0]^T$ : Aby móc zastosować pośrednią metodę Lapunowa przesuwamy punkt równowagi do początku układu współrzędnych:  $z_1 = x_1 + 1$ ,  $z_2 = x_2$ . Wówczas układ (24) przybiera formę:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 - z_1^3 - 3z_1^2 - 2z_1 \end{array} \right\}.$$

Więc badany układ można zapisać w postaci (13) z **twierdzenia 2**:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3z_1^2 - z_1^3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

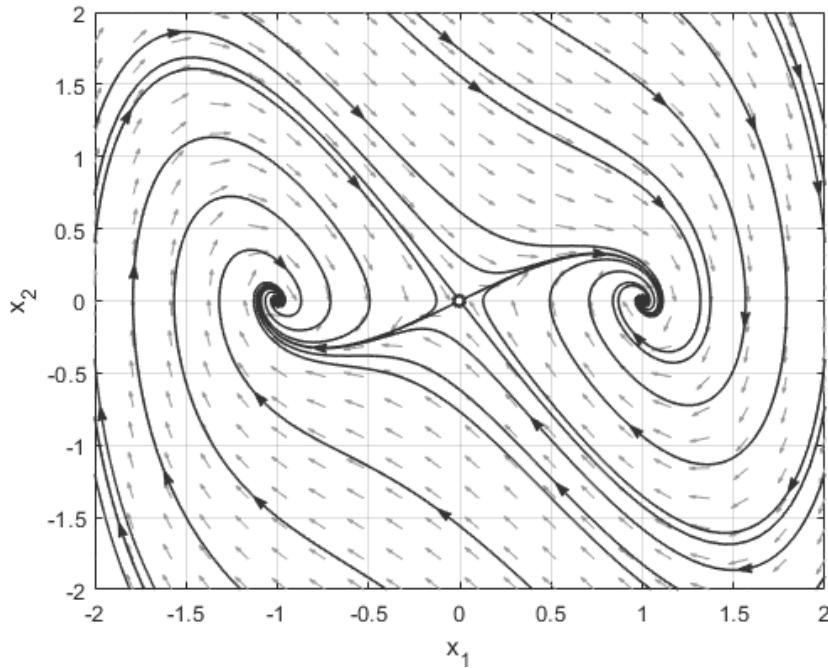
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ,
- $r(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3z_1^2 - z_1^3 \end{bmatrix}$  i  $\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|r(z)\|}{\|z\|} = 0$ .

Badamy zatem wartości własne macierzy  $A$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Pierwiastki równania mają części rzeczywiste ujemne, zatem  $x_e^3$  jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Portret fazowy przedstawiony na rysunku (14) potwierdza powyższe wnioski.



Rysunek 14: Portret fazowy układu (26).

### 2.2.3 Przykład 3

Określić obszary stabilności asymptotycznej wokół stabilnych asymptotycznie punktów równowagi równania:

$$\ddot{x} + \dot{x} + (x+1)x(x-1) = 0. \quad (27)$$

W pierwszej kolejności wprowadzamy zmienne  $x_1 = x$  i  $x_2 = \dot{x}$  i przekształcamy równanie do postaci:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + 1)x_1(x_1 - 1) - x_2 \end{cases}. \quad (28)$$

Jak pokazano w poprzednim przykładzie układ ten ma dwa stabilne punkty równowagi:  $x_e^1 = (-1, 0)$  i  $x_e^3 = (1, 0)$ . Będziemy rozważać każdy z nich osobno.

1.  $x_e^1$ : wprowadzamy nowe zmienne, aby rozważać środek układu współrzędnych jako punkt równowagi:

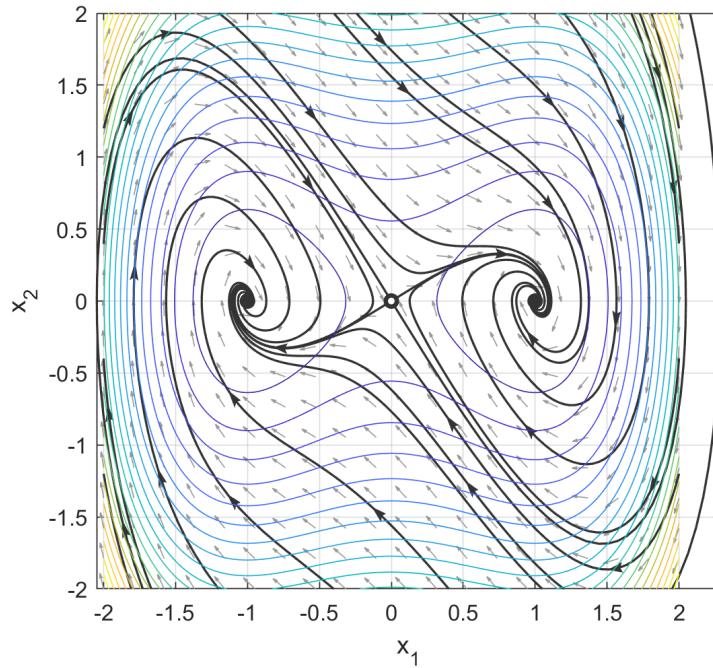
$$z_1 = x_1 + 1, z_2 = x_2.$$

Wówczas uzyskujemy równania:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_2 - z_1(z_1 - 1)(z_1 - 2) \end{cases}.$$

Można przyjąć energetyczną funkcję Lapunowa:

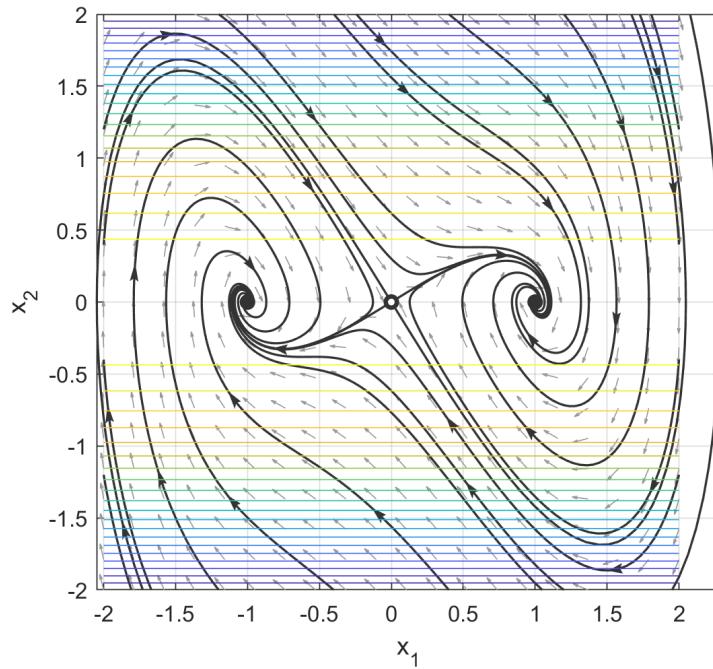
$$V(z) = \frac{z_2^2}{2} + \int_0^{z_1} \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)d\gamma = \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_1^4}{4} - z_1^3 + z_1^2.$$



Rysunek 15: Poziomice funkcji Lapunowa nałożone na portret fazowy układu z przykładu 3.

Jej pochodna systemowa wynosi:

$$V'(z) = -z_2.$$



Rysunek 16: Poziomice pochodnej systemowej funkcji Lapunowa nałożone na portret fazowy układu z przykładu 3.

Jest ona ujemna wszędzie poza osią  $OX$ , a jedynymi zbiorami invariantnymi na niej są punkty równowagi.

Zatem poziomica ograniczająca obszar atrakcji "ociera się" o niestabilny punkt równowagi. Mamy więc:

$$D^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x_1 + 1, x_2) < \frac{1}{4} \right\}.$$

2.  $x_e^3$ : analogicznie postępujemy dla drugiego stabilnego punktu równowagi. Wprowadzamy nowe zmienne:

$$z_1 = x_1 - 1, z_2 = x_2.$$

Wówczas uzyskujemy równania:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_2 - z_1(z_1 + 1)(z_1 + 2) \end{cases}.$$

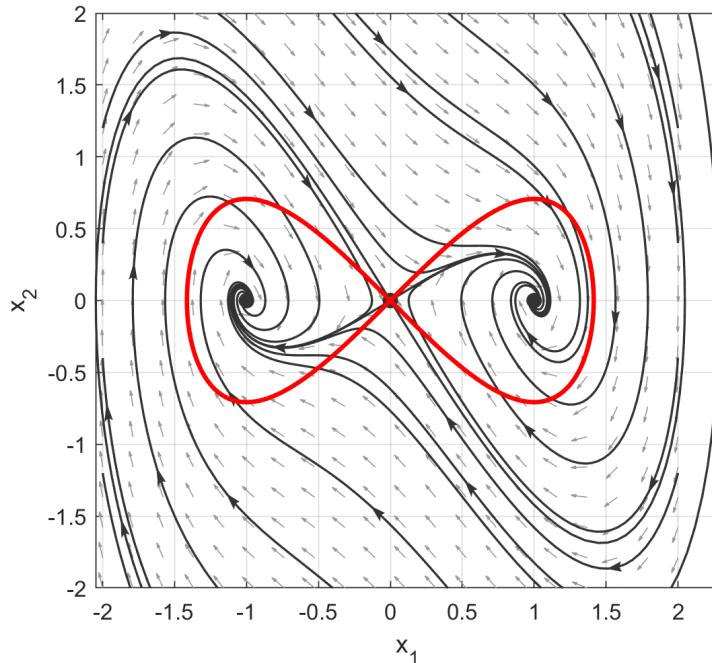
Można przyjąć energetyczną funkcję Lapunowa:

$$V(z) = \frac{z_2^2}{2} + \int_0^{z_1} \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)d\gamma = \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_1^4}{4} + z_1^3 + z_1^2.$$

Jej pochodna systemowa wynosi:

$$\dot{V}(z) = -z_2^2.$$

Zatem obszar atrakcji jest symetryczny do poprzedniego względem osi  $OY$ .



Rysunek 17: Granice estymowanego obszaru atrakcji dla stabilnych punktów równowagi z przykładu 3.

#### 2.2.4 Przykład 4

Rozpatrzmy raz jeszcze układ z **przykładu 1**:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}. \quad (29)$$

Pokazano tam, że punkt równowagi  $x_e^1 = [0 \ 0]^T$  jest asymptotycznie stabilny. Oszacować jego obszar atrakcji.

Rozważmy dwie funkcje Lapunowa:

1. Opartą na przybliżeniu liniowym i rozwiązaniu macierzowego równania Lapunowa:

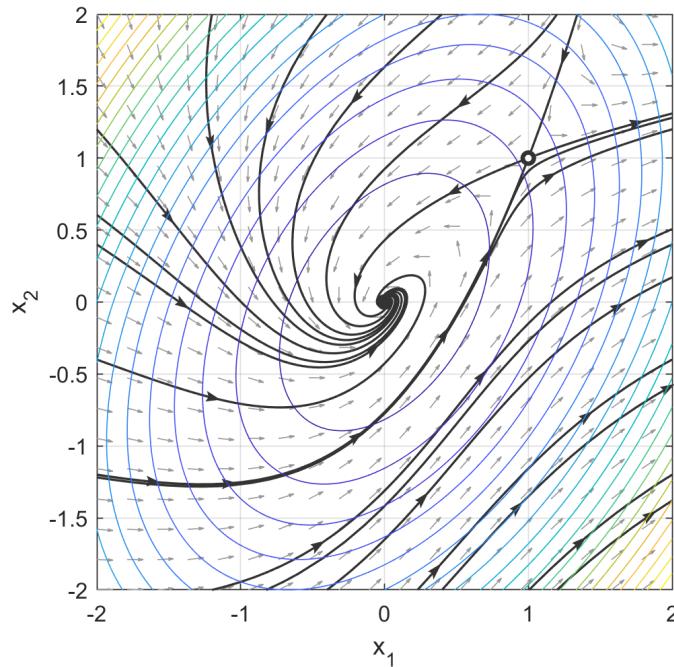
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując macierz  $Q$  w postaci:

$$Q = q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q > 0.$$

Otrzymuje się macierz  $P$ :

$$P = \frac{1}{2}q \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

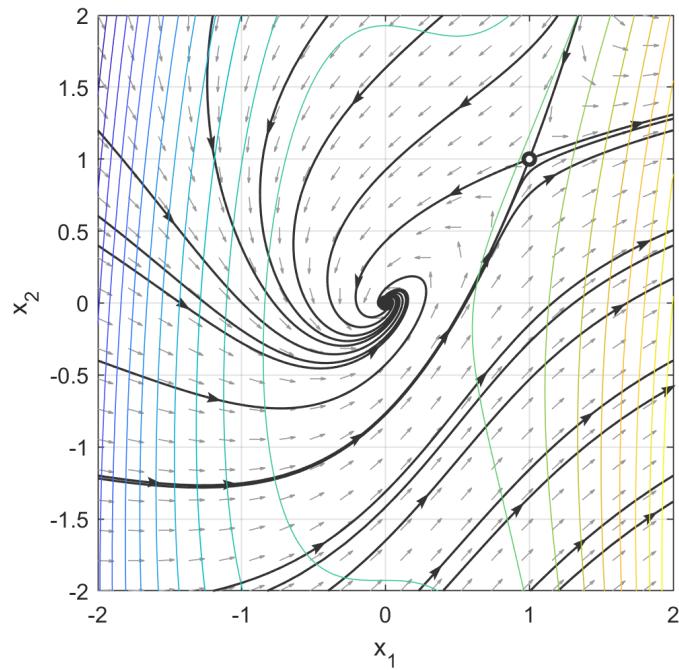


Rysunek 18: Poziomice funkcji Lapunowa na tle portretu fazowego z przykładu 4.

Jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}qx \begin{bmatrix} 6x_1 - 2 & -x_1 \\ -x_1 & -2 \end{bmatrix} x.$$

Można zauważyć, że jej znak nie zależy od wartości parametru  $q$  oraz dla  $x_1 \in (12.36; 0.66)$ .

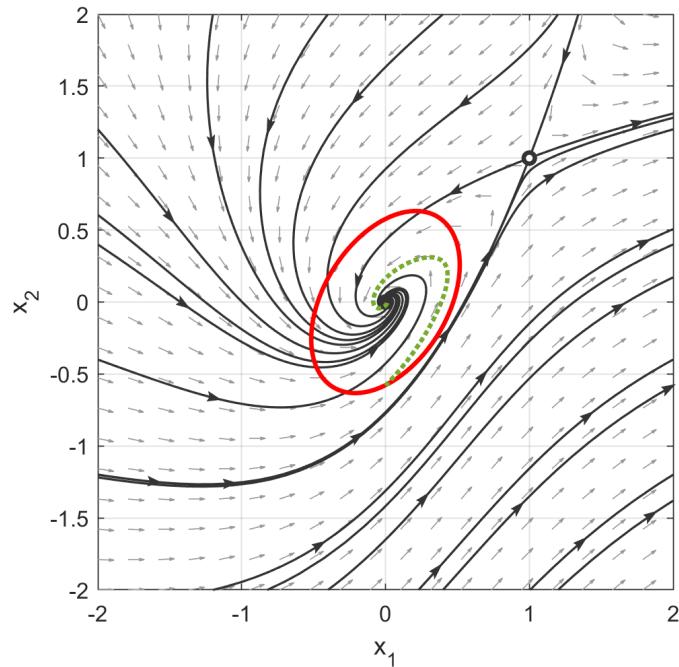


Rysunek 19: Poziomice pochodnej systemowej funkcji Lapunowa na tle portretu fazowego z przykładu 4.

Na tej podstawie wybieramy największy zbiór poziomowy  $V(x)$  spełniający te warunki.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < \frac{4}{9} \right\}.$$

Zbiór ten przedstawiono na rysunku (22).

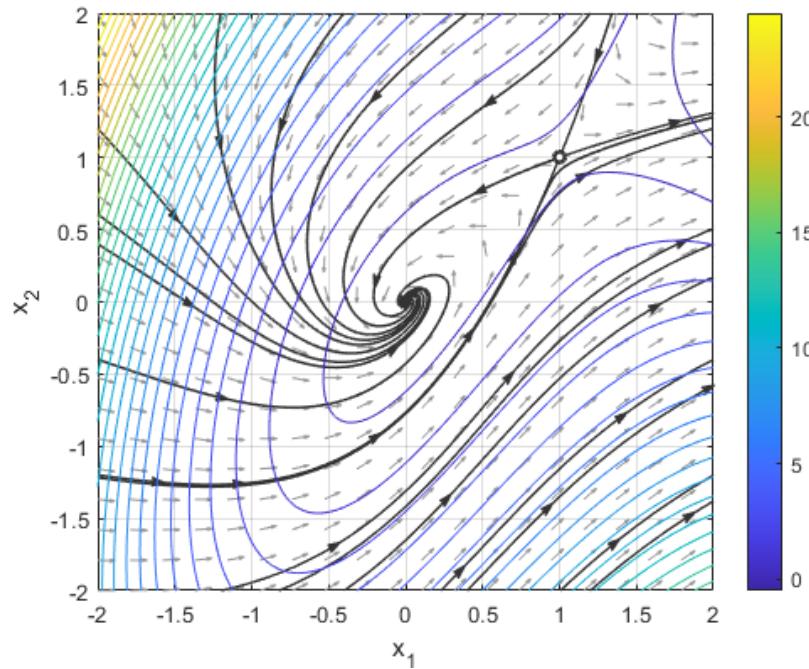


Rysunek 20: Estymata obszaru atrakcji na tle portretu fazowego z przykładu 4.

2. Funkcja Lapunowa w postaci:

$$V(x) = (-x_1 + x_2)^2 + 2 \int_0^{x_1} (-z^2 + z) dz = -\frac{2}{3}x_1^3 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2. \quad (30)$$

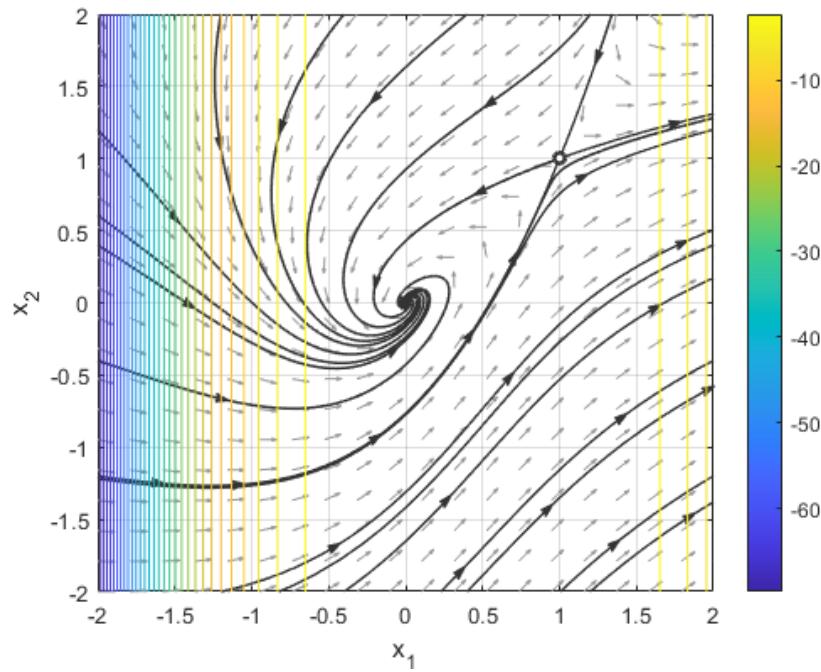
Jest ona dodatnia na pewnym odcinku stabilnego punktu równowagi.



Rysunek 21: Poziomice funkcji Lapunowa (30) na tle portretu fazowego z przykładu 4.

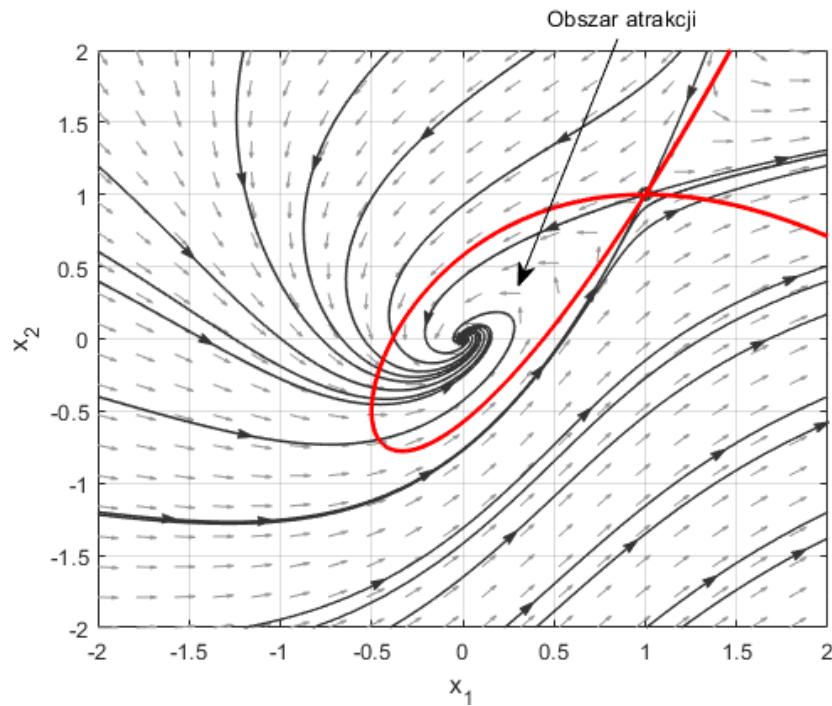
Jej pochodna systemowa wynosi:

$$\dot{V}(x) = -2(x_1 - 1)^2 x_1^2.$$



Rysunek 22: Poziomice pochodnej systemowej funkcji Lapunowa (30) na tle portretu fazowego z przykładu 4.

Jest ona ujemnie określona wszędzie poza prostymi  $x = 0$  i  $x = 1$ . Badając te dwie proste można łatwo zauważać, że tylko znajdujące się na nich punkty równowagi są zbiorami invariantnymi. Zatem dobierając zbiór poziomicki w ten sposób, by "zahaczał" tylko o niestabilny punkt równowagi, uzyskujemy estymatę obszaru asymptotycznego przyciągania stabilnego punktu równowagi. Zbiór ten został przedstawiony na rysunku (23).



Rysunek 23: Estymata obszaru atrakcji na podstawie funkcji Lapunowa (30) na tle portretu fazowego z przykładu 4.

### 2.2.5 Przykład 5

Znaleźć obszar stabilności asymptotycznej wokół punktu równowagi  $x_1 = x_2 = 0$  dla układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}. \quad (31)$$

Również w tym przypadku, dla zobrazowania jak dobrów funkcji Lapunowa wpływa na oszacowanie obszaru atrakcji, rozważymy dwie funkcje  $V(x)$ . Obydwie będą uzyskane na podstawie przybliżenia liniowego układu i równania Lapunowa (10), lecz z innym doborem macierzy  $Q$ . Zatem funkcje Lapunowa będą mieć postać:

$$V(x) = x^T P x.$$

Przed rozpoczęciem poszukiwania funkcji Lapunowa wyznaczmy przybliżenie liniowe systemu (31):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

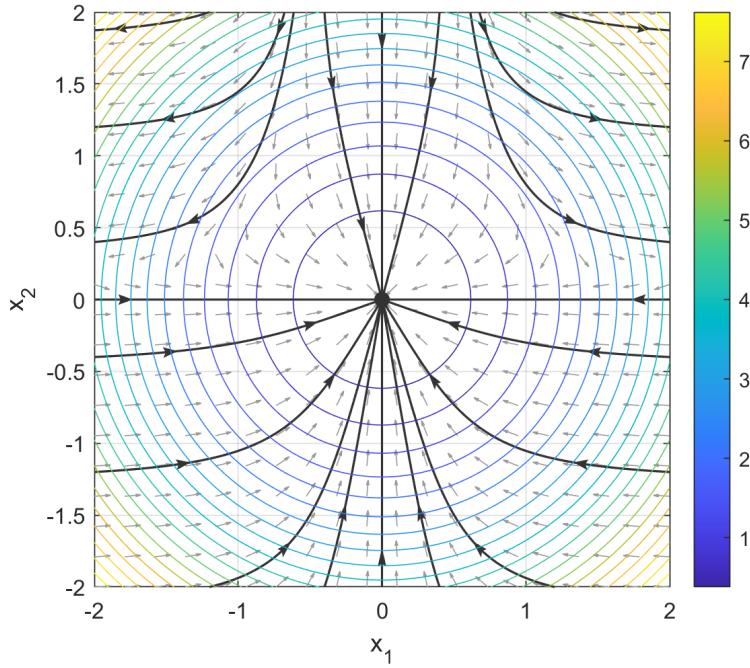
- W pierwszym przypadku macierz  $Q$  dobrana do równania Lapunowa miała postać (32):

$$Q = q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q > 0. \quad (32)$$

Wówczas macierz  $P$  wygląda następująco:

$$P = \frac{q}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykres poziomowy funkcji Lapunowa nałożony na portret fazowy pokazano na rysunku (24).



Rysunek 24: Portret fazowy układu (31) z naniesionymi poziomicami funkcji Lapunowa.

Dla uproszczenia zapisu można układ (31) w postaci pseudoliniowej (33):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2x_1^2x_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \hat{A}x. \quad (33)$$

Pochodną systemową można wyznaczyć następująco:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (\hat{A}x)^T P x + x^T P \hat{A}x = x^T (\hat{A}P + P \hat{A}) x = x^T 2P\hat{A}x = x^T Cx$$

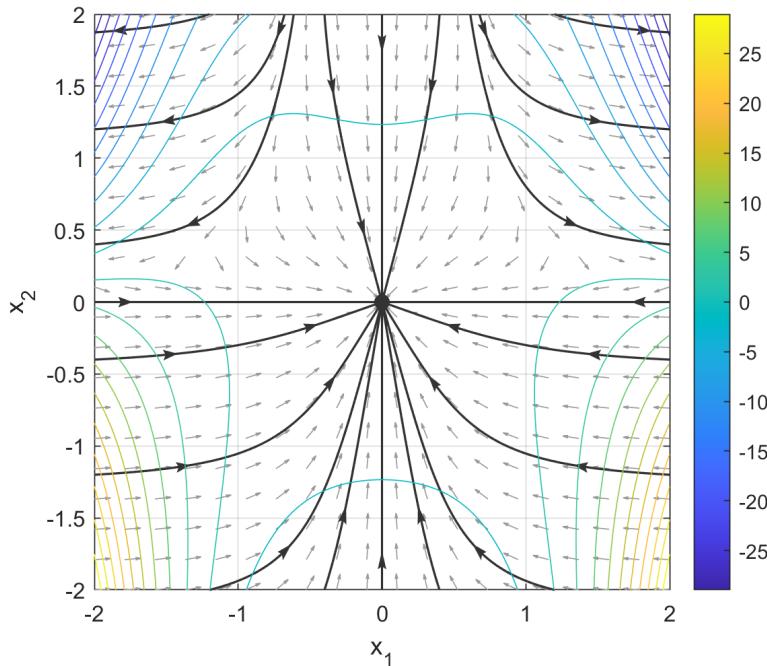
gdzie:

$$C = q \begin{bmatrix} -1 + 2x_1^2 x_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyc, że aby macierz  $C$  była ściśle ujemnie określona wystarczy, żeby spełniona była nierówność:

$$2x_1 x_2 - 1 < 0. \quad (34)$$

Warunek ten jest niezależny od parametru  $q$ , ponadto zauważyc można, że kształt poziomów funkcji  $V(x)$  również nie zależy od tego parametru. Kształt poziomów pochodnej systemowej przedstawiono na rysunku (25)



Rysunek 25: Portret fazowy okładu (31) z naniesionymi poziomami pochodnej systemowej funkcji Lapunowa.

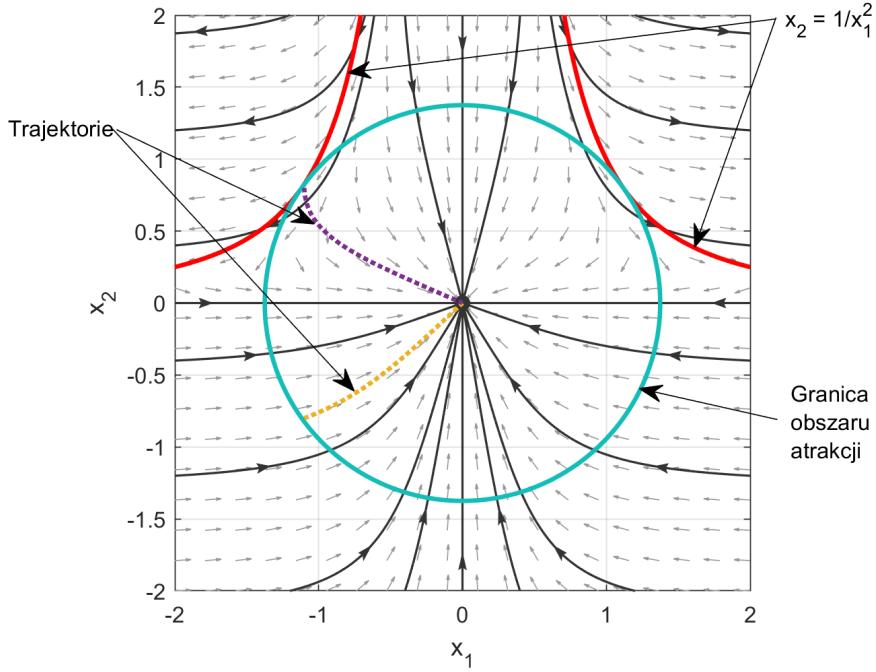
Zbiór  $S$ , w którym pochodna systemowa jest ujemna, można ustalić jako:

$$S = \{(x_1, x_2) : 2x_1^2 x_2 - 1 < 0\}.$$

Szukamy zatem największego zbioru invariantnego  $D$  w  $S$  dla którego zachodzi:

$$D = \{(x_1, x_2) : V(x) < l_{max}\}.$$

Taki obszar zaznaczono na rysunku (26).



Rysunek 26: Portret fazowy układu (31) z obszarem atrakcji, wynikającym z funkcji Lapunowa.

2. Drugą rozpatrywaną formą macierzy  $Q$  jest:

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a > 0.$$

Z równania Lapunowa wynika następująca postać macierzy  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcja Lapunowa natomiast ma postać:

$$V(x) = x^T P x = \frac{1}{2} a x_1^2 + x_2^2.$$

Można więc zauważyć, że jej poziomice będą tworzyły elipsy, gdzie dla  $a > 1$  dłuższa będzie oś wzduż osi  $OY$ , natomiast dla  $a < 1$  dłuższa będzie oś wzduż osi  $OX$ .

Jej pochodna systemowa ma formę:

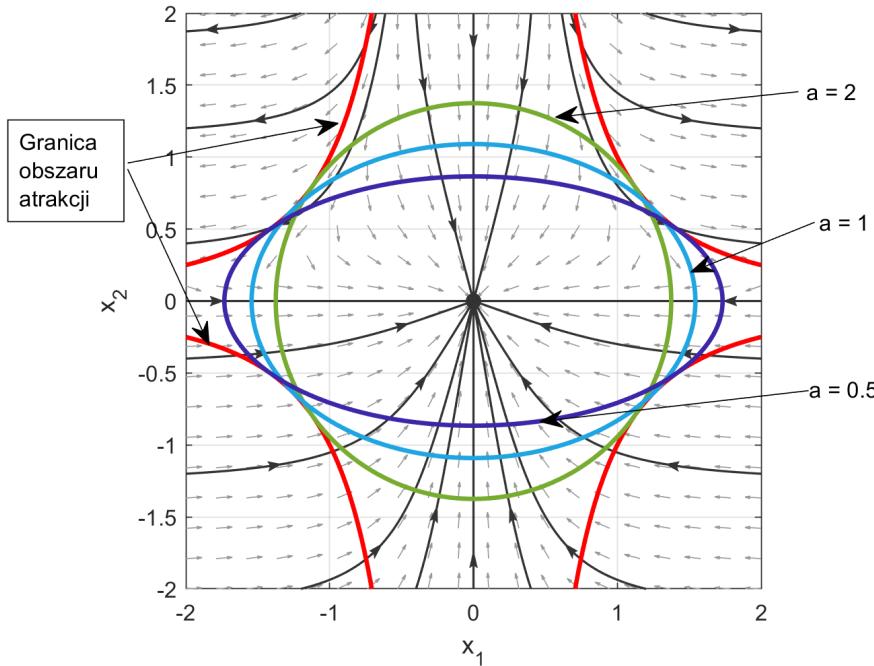
$$\dot{V}(x) = x^T (\hat{A}^T P + P \hat{A}) x = x^T \begin{bmatrix} a(-1 + 2x_1^2 x_2) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Identycznie jak poprzednio widać, że zbiór  $S$ , w którym pochodna systemowa funkcji Lapunowa jest ujemna, jest identyczny i nie zależy od parametru  $a$ .

Ponieważ dla różnych  $a$  różne elipsy utworzą różne obszary atrakcji:

$$D_a = \{(x_1, x_2) : V(x) < l_{a,max}\}$$

rozpatrując całą ich rodzinę - sumę tych obszarów, uzyskamy jeden większy obszar przyciągania asymptotycznego. Obszar ten zaznaczono na rysunku (27).



Rysunek 27: Portret fazowy układu (31) z obszarem atrakcji wynikającym z funkcji Lapunowa

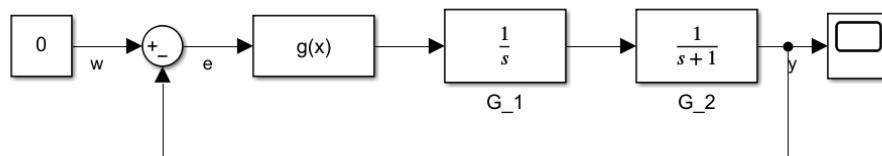
Poza obszarem atrakcji ograniczonym przez czerwone linie na rysunku (27) pozostaje do rozważenia obszary:

- *powyżej* - z warunku na ujemny znak pochodnej - równanie (34) - jest to obszar niestabilny,
- *poniżej* - pochodna systemowa funkcji  $V(x)$  jest tutaj ujemna, można więc sprawdzić jakie zachowanie wynika z równania dynamiki układu. A mianowicie widać, że  $\dot{x}_2 = -x_2$ , zatem wszystkie trajektorie się tam zaczynające schodzą w kierunku osi  $OX$ , zatem wpadają ostatecznie przez obszar ograniczony liniami czerwonymi. Wnioskujemy więc, że obszar ten jest obszarem przyciągania punktu równowagi.

### 2.2.6 Przykład 6

Dla układu regulacji automatycznej, przedstawionego na rysunku (28), określić obszar stabilności asymptotycznej wokół stabilnego asymptotycznie punktu równowagi. Nieliniowy element statyczny ma charakterystykę:

$$g(e) = -e(e + 1)(e - 1).$$



Rysunek 28: Schemat układu regulacji z przykładu 6.

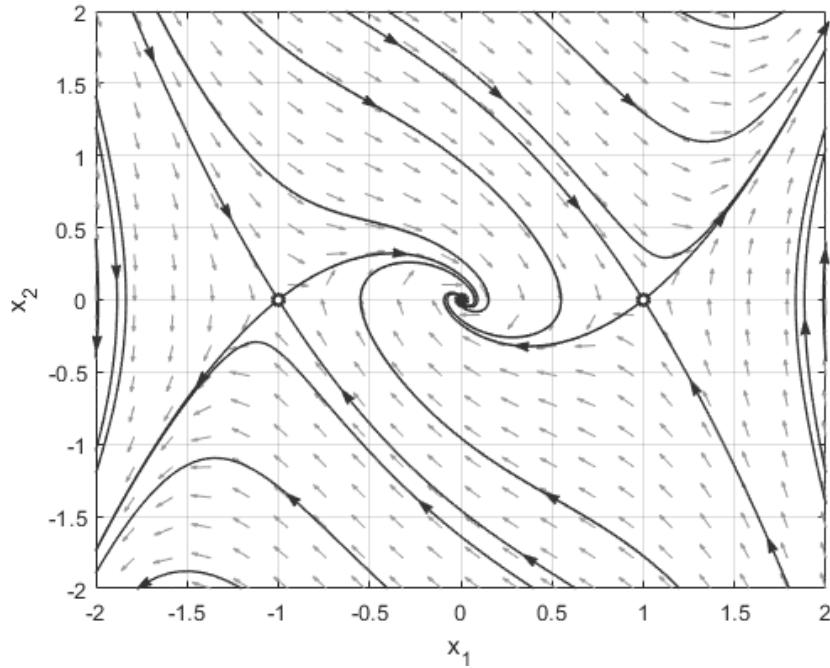
Na podstawie podanego schematu układu sterowania można wyznaczyć równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} + \dot{x} - (x + 1)x(x - 1) = 0.$$

A dalej, wprowadzając zmienne  $x_1 = x$  i  $x_2 = \dot{x}$ , mamy układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + (x_1 + 1)x_1(x_1 - 1) \end{array} \right\}. \quad (35)$$

Powyzszy układ ma 3 punkty równowagi:  $x_e^1 = [-1 \ 0]^T$ ,  $x_e^2 = [0 \ 0]^T$ ,  $x_e^3 = [1 \ 0]^T$ . Na podstawie pośredniego kryterium Lapunowa łatwo stwierdzić, że tylko  $x_e^2$  jest stabilnym punktem. Portret fazowy rozważanego układu pokazany jest na rysunku (29).



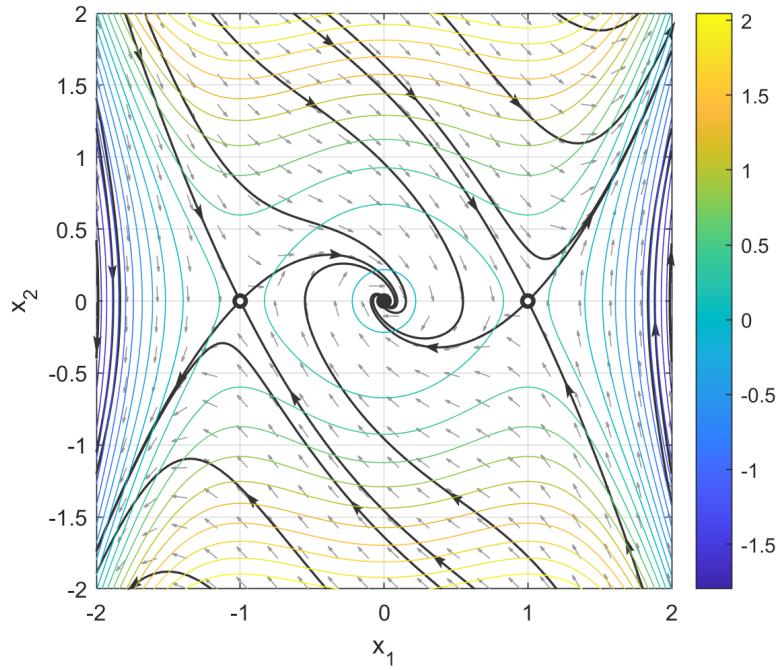
Rysunek 29: Portret fazowy układu z przykładu 6.

Aby znaleźć obszar stabilności rozważamy funkcję Lapunowa dla systemu. Podobnie jak poprzednio rozważane będą dwa przypadki.

1. Funkcja Lapunowa uzyskana na interpretacji energetycznej:

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} [-(z-1)z(z+1)] dz = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^2}{2}. \quad (36)$$

Poziomice tej funkcji nałożone na portret fazowy przedstawiono na rysunku:

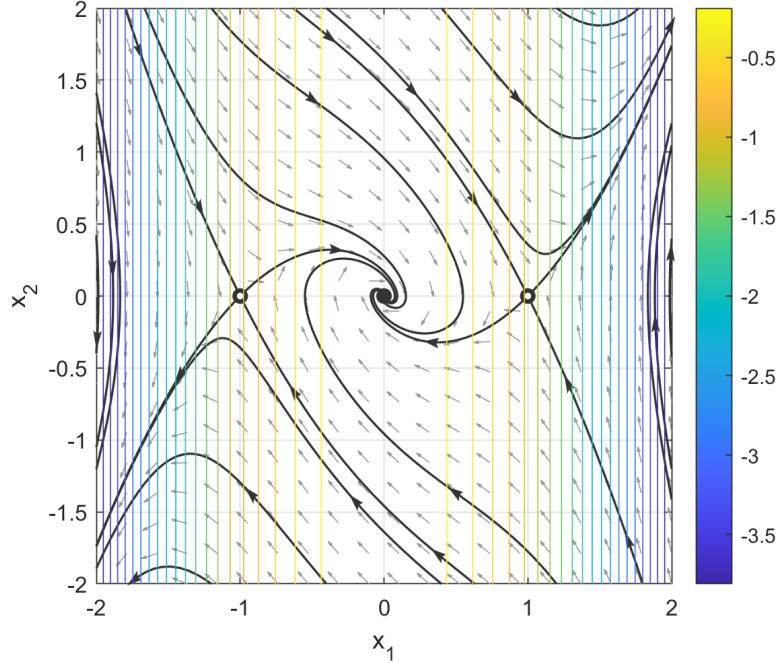


Rysunek 30: Portret fazowy układu (35) z naniesionymi poziomicami funkcji Lapunowa (35).

Jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = -x_1^2. \quad (37)$$

Funkcja ta jest ujemna wszędzie poza całą osią  $OX$ . Dlatego konieczne jest sprawdzenie istnienia zbiorów invariantnych na niej - łatwo zauważyć, że jest to tylko punkt równowagi układu.

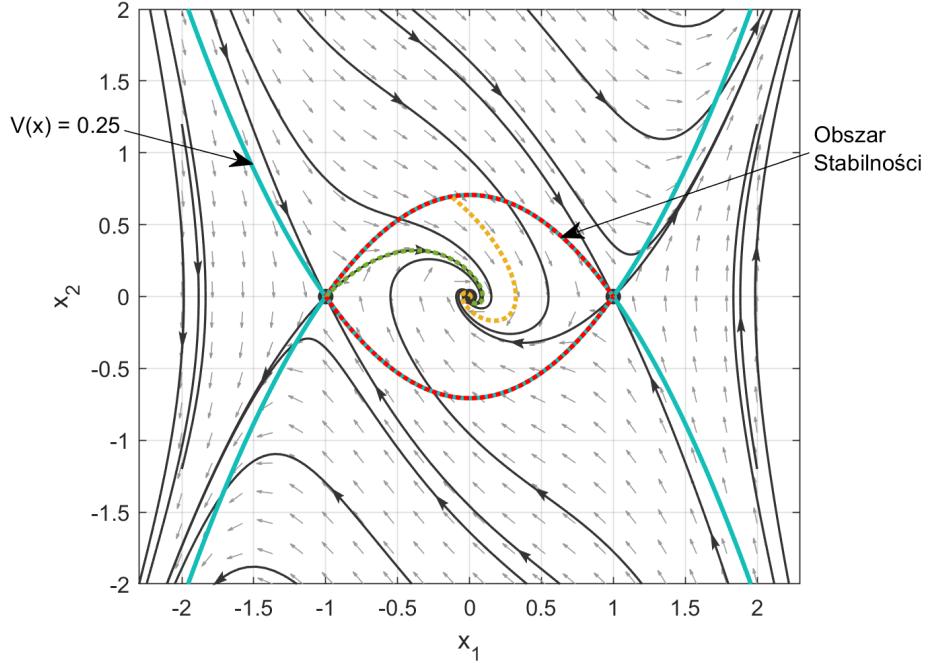


Rysunek 31: Portret fazowy układu (35) z naniesionymi poziomicami pochodnej systemowej funkcji Lapunowa (35).

Dla wszystkich punktów równowagi wartości  $V(x)$  są dodatnie, a  $\dot{V}(x)$  równe 0. Dlatego ograniczamy zakres po-

szukiwań obszaru atrakcji do tych poziomów funkcji Lapunowa, które sięgają niestabilnych punktów równowagi, zatem:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < \frac{1}{4}, |x_1| < 1 \right\}.$$



Rysunek 32: Portret fazowy układu (35) z naniesionym obszarem atrakcji stabilnego punktu równowagi (obszar zaznaczony czerwoną przerywaną linią).

2. Funkcja Lapunowa uzyskana na podstawie przybliżenia liniowego.

### 2.2.7 Przykład 7

Określić obszar atrakcji dla układu z przykładu 6, przy założeniu, że element nieliniowy ma charakterystykę:

$$g(e) = e(e - 1)^2.$$

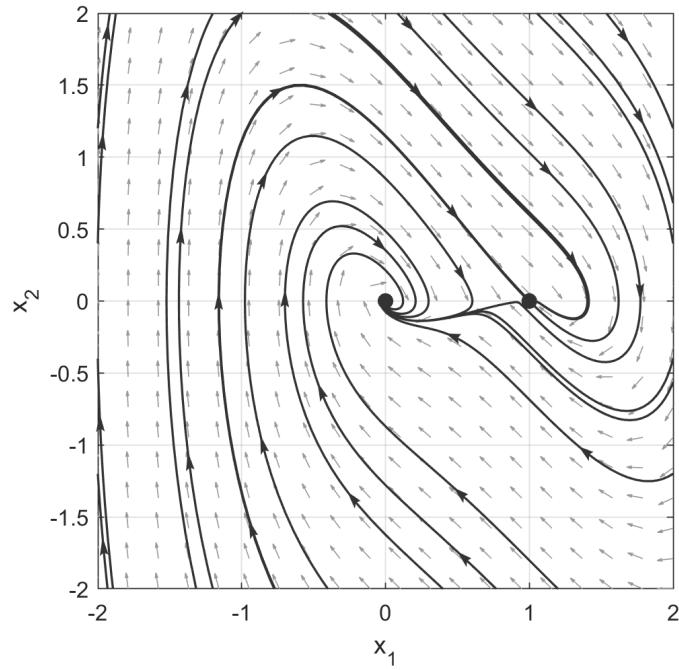
Analogicznie jak w **przykładzie 6** wyznaczamy równanie różniczkowe, opisujące układ:

$$\ddot{x} + \dot{x} - x(x - 1)^2 = 0$$

oraz wprowadzamy zmienne  $x_1 = x$  i  $x_2 = \dot{x}$ , uzyskując układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1(x_1 - 1)^2 \end{cases} \quad (38)$$

Z czego wynikają dwa punkty równowagi:  $x_e^1 = [1 \ 0]^T$ ,  $x_e^2 = [0 \ 0]^T$ . Z czego na podstawie pośredniej metody Lapunowa wynika, iż tylko  $x_e^2$  jest stabilny. Portret fazowy układu przedstawiono na rysunku (33).

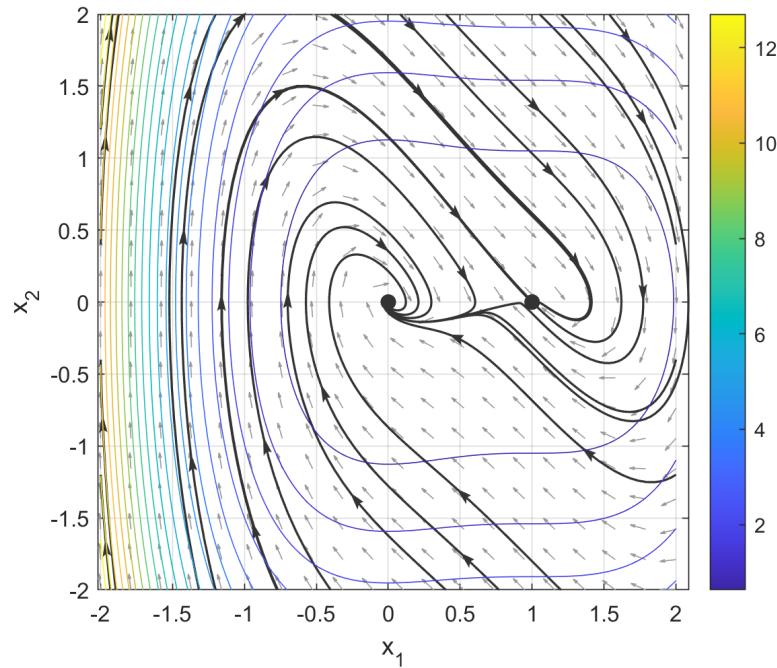


Rysunek 33: Portret fazowy układu (38).

Również tym razem można przyjąć energetyczną funkcję Lapunowa:

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} z(z-1)dz = \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} - \frac{2x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} \quad (39)$$

Jej wykres poziomowy naniesiony na portret fazowy pokazano na rysunku (36).

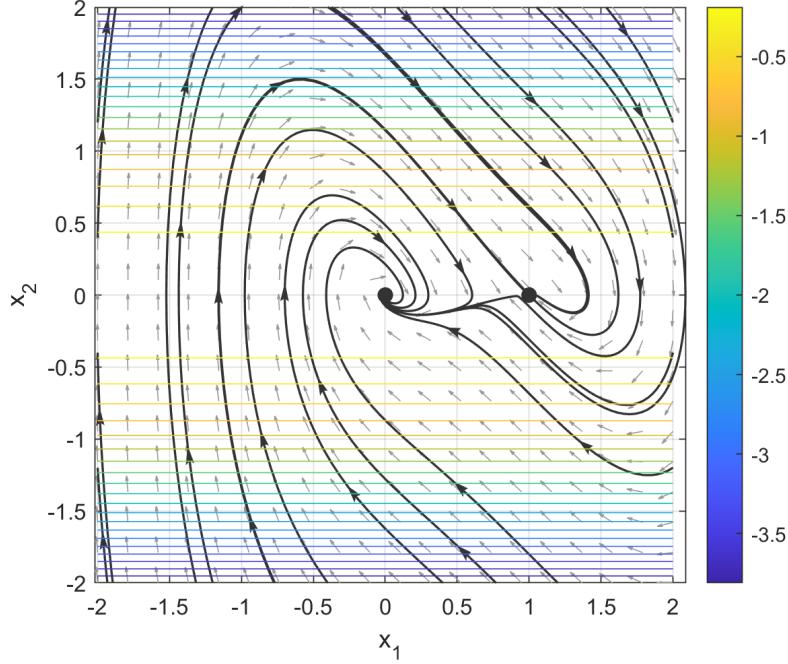


Rysunek 34: Portret fazowy układu (38) z naniesionymi poziomicami funkcji Lapunowa (39).

Jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = -x_2^2. \quad (40)$$

Jej wykres naniesiony na portret fazowy został przedstawiony na rysunku (36).



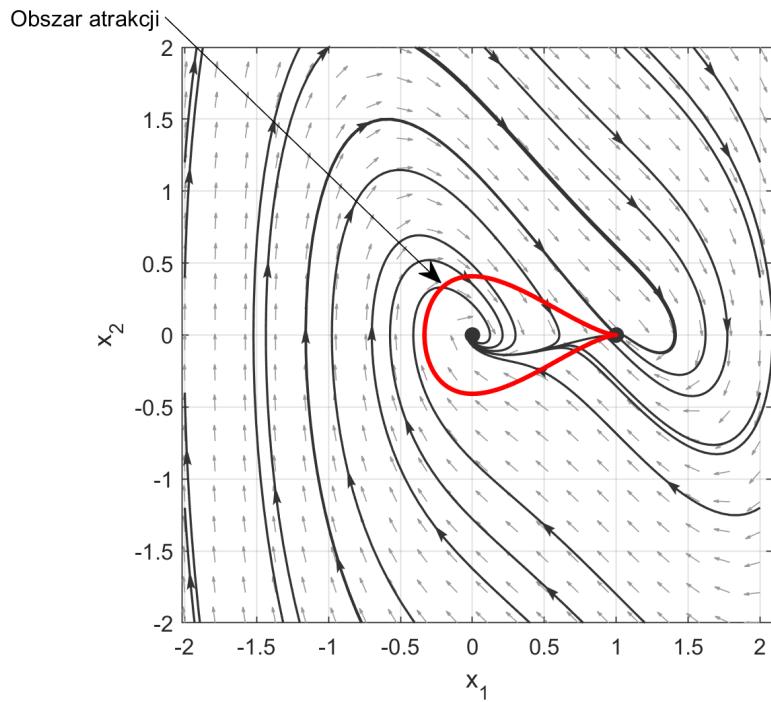
Rysunek 35: Portret fazowy układu (38) z naniesionymi poziomicami pochodnej systemowej funkcji Lapunowa (39).

Pochodna systemowa (40) zeruje się na osi  $OX$ , dlatego sprawdzamy, jak na niej zachowują się trajektorie systemu. Z tej analizy wynika, że zbiór inwariantny zawiera tylko punkty równowagi.

Zatem obszar atrakcji jest ograniczony przez poziomice funkcji Lapunowa, sięgające do niestabilnego punktu równowagi. Otrzymujemy więc:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < \frac{1}{12} \right\}.$$

Obszar ten został przedstawiony na rysunku (36).



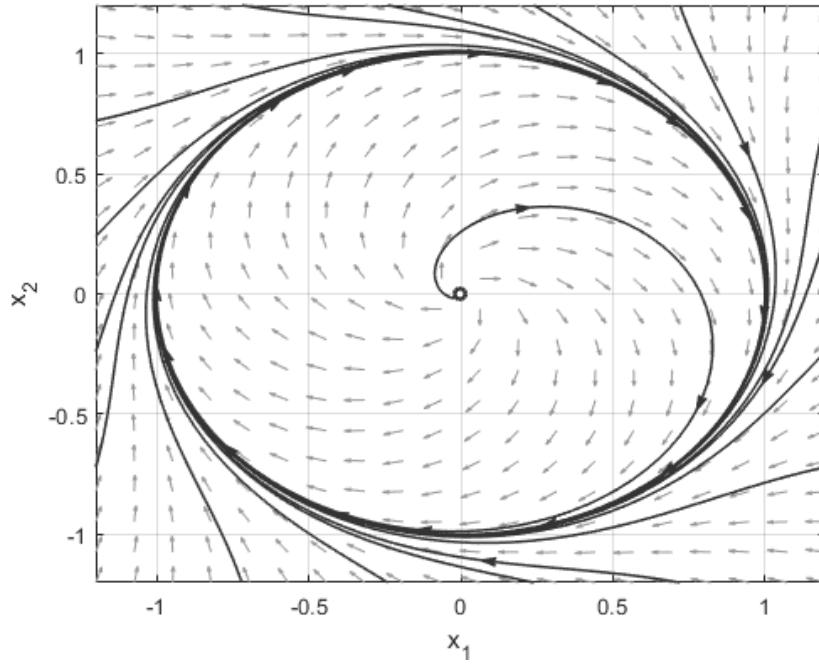
Rysunek 36: Portret fazowy układu (38) z naniesionym obszarem atrakcji stabilnego punktu równowagi (obszar zaznaczony czerwoną przerywaną linią).

### 2.2.8 Przykład 8

Znaleźć cykl graniczny i zbadać jego stabilność dla układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{array} \right\}. \quad (41)$$

Jest to ten sam układ, co w przykładzie dla zobrazowania kryterium Bendixona. Zatem wiemy, że istnieje cykl graniczny - portret fazowy pokazany na rysunku (37).



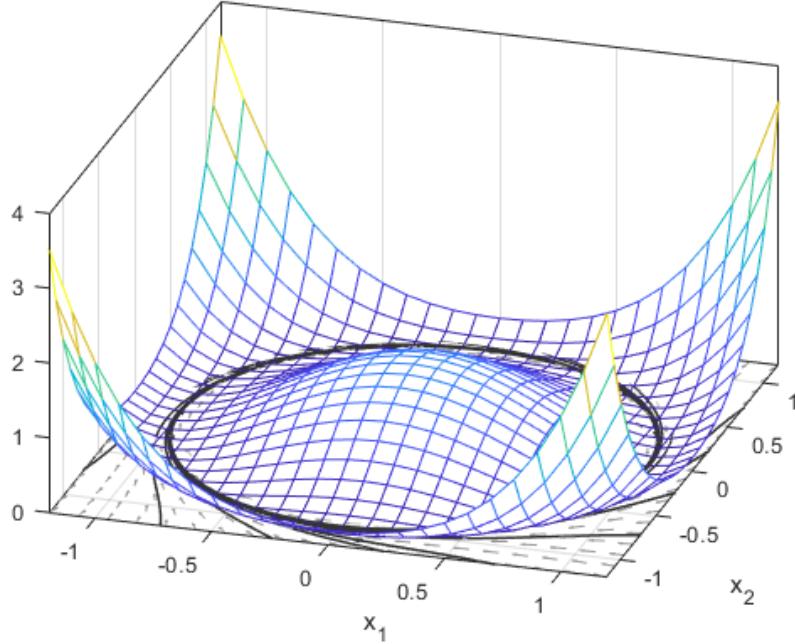
Rysunek 37: Portret fazowy układu z przykładu 8.

Można zauważyc, że jeżeli  $(x_1, x_2)$  znajduje się na okręgu o promieniu 1, to układ redukuje się do układu liniowego z punktem równowagi typu centrum. Zatem możemy szukać cyklu granicznego na tym właśnie okręgu.

Aby to zrobić można sprawdzić, czy istnieje funkcja Lapunowa, która pokaże stabilność/niestabilność takiej trajektorii zamkniętej. Można zaproponować funkcję:

$$V(x) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^2. \quad (42)$$

Jej kształt pokazano na rysunku (38).

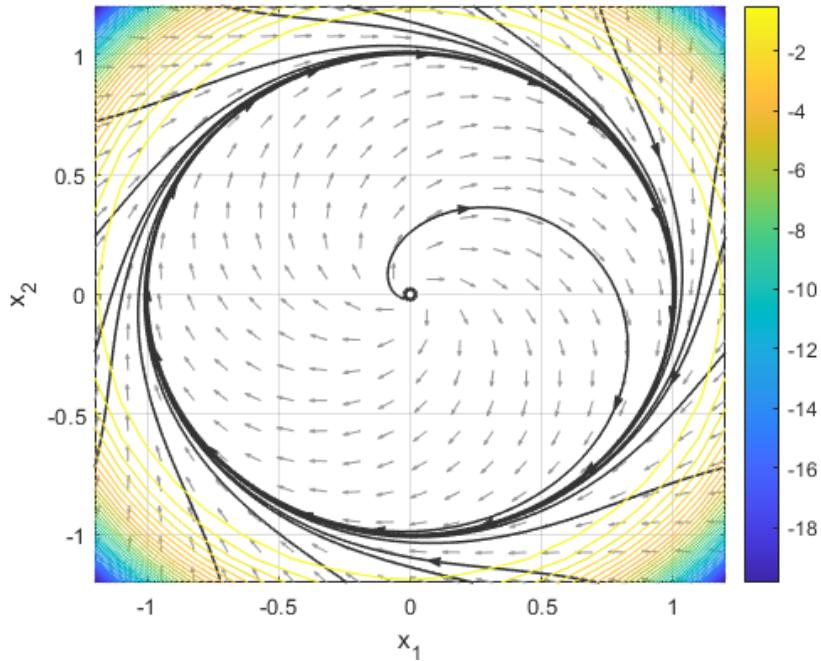


Rysunek 38: Funkcja Lapunowa (42) na tle portretu fazowego układu z przykładu 8.

Jej pochodna systemowa ma postać (rysunek (39)):

$$V(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)^2. \quad (43)$$

Jest ona ujemna wszędzie poza okręgiem jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych i poza tym właśnie początkiem, gdzie ma wartość 0. Zatem na podstawie La Salle'a wszystkie trajektorie dążą do tego zbioru invariantnego. Ponadto na podstawie tej samej funkcji Lapunowa i twierdzenia o niestabilności można sprawdzić, że początek układu współrzędnych jest niestabilnym punktem równowagi (sprawdzić, czemu nie na podstawie pośredniej metody Lapunowa). Ostatecznie mamy więc wniosek, że okrąg jednostkowy jest stabilnym cyklem granicznym.



Rysunek 39: Poziomice pochodnej funkcji Lapunowa (42) na tle portretu fazowego układu z przykładu 8.

### 2.2.9 Przykład 9

Rozważmy równanie:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 2bx + 3x^2 = 0, \quad a, b > 0. \quad (44)$$

Wprowadzamy zmienne:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1.$$

Zatem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2bx_1 - 3x_1^2 - ax_2 \end{cases}.$$

Układ ma dwa punkty równowagi, których stabilność można określić przy użyciu pośredniej metody Lapunowa:

1.  $x_e^1 = (0, 0)$ : wówczas wielomian charakterystyczny ma postać:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda a + 2b.$$

Z wzorów Viète'a otrzymuje się:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 2b.$$

Oznacza to, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego albo są rzeczywiste ujemne, albo sprzężone z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Czyli punkt równowagi jest punktem stabilnym typu węzeł stabilny lub ognisko stabilne.

2.  $x_e^1 = \left(-\frac{2}{3}b, 0\right)$ : w tym przypadku wykonujemy zmianę zmiennych, aby rozpatrywać początek układu współrzędnych:

$$z_1 = x_1 + \frac{2}{3}b, z_2 = x_2.$$

Mamy więc układ w postaci:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2bz_1 - 3z_1^2 - az_2 \end{cases}.$$

Zatem w tym przypadku wielomian charakterystyczny części liniowej układu ma postać:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda a - 2b.$$

Z wzorów Viète'a otrzymuje się:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -2b,$$

co oznacza, że pierwiastki są przeciwnego znaku - czyli punkt równowagi jest niestabilny, typu siodło.

Tylko pierwszy punkt równowagi jest stabilny i dla niego szukamy estymaty obszaru atrakcji. W tym celu sprawdzamy funkcję  $V(x)$  w postaci:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2 + bx_1^2 + x_1^3. \quad (45)$$

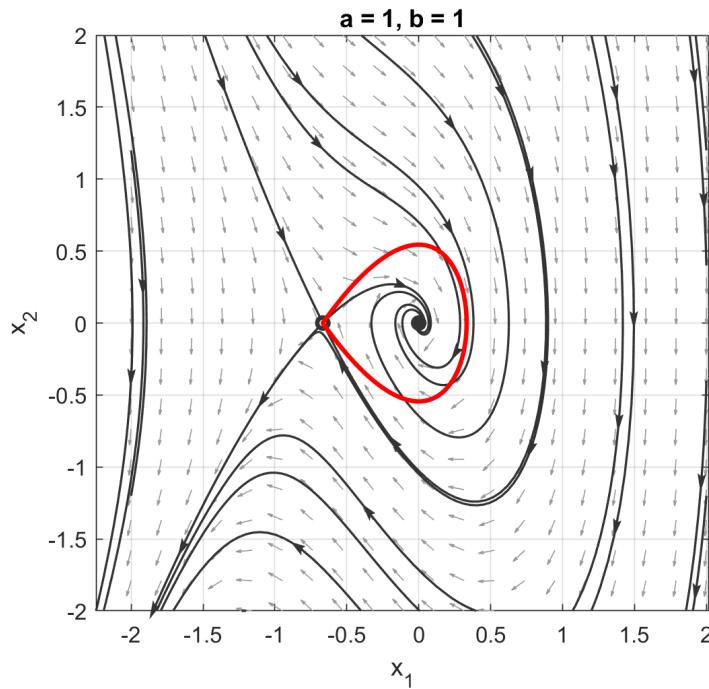
Jej pochodna systemowa ma postać:

$$\dot{V}(x) = -ax_2^2. \quad (46)$$

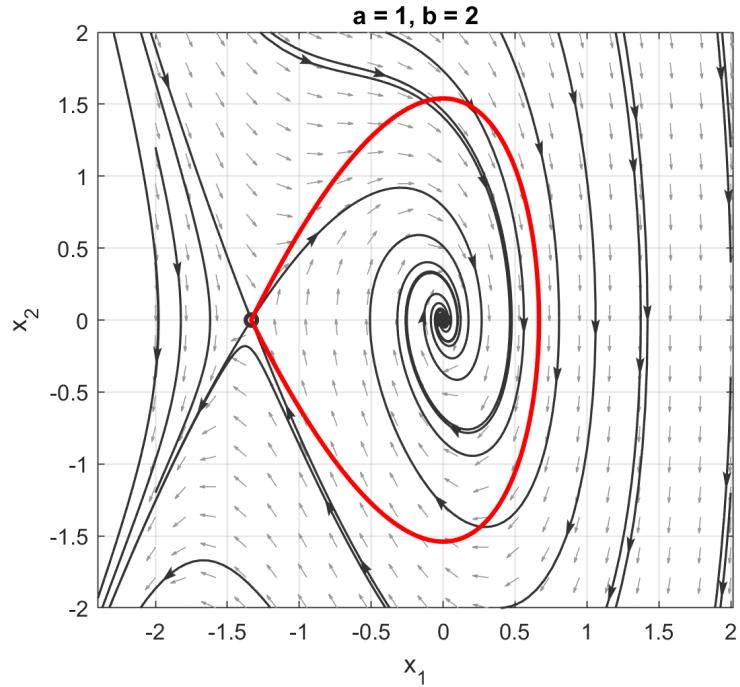
Pochodna ta jest ujemna wszędzie poza osią  $OX$ , jednak łatwo sprawdzić, że jedynymi zbiorami invariantnymi na tej osi są punkty równowagi. Ograniczeniem więc estymaty zbioru invariantnego będzie poziomica funkcji Lapunowa (45), "zahaczająca" o niestabilny punkt równowagi:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2 + bx_1^2 + x_1^3 = \frac{4}{27}b^3.$$

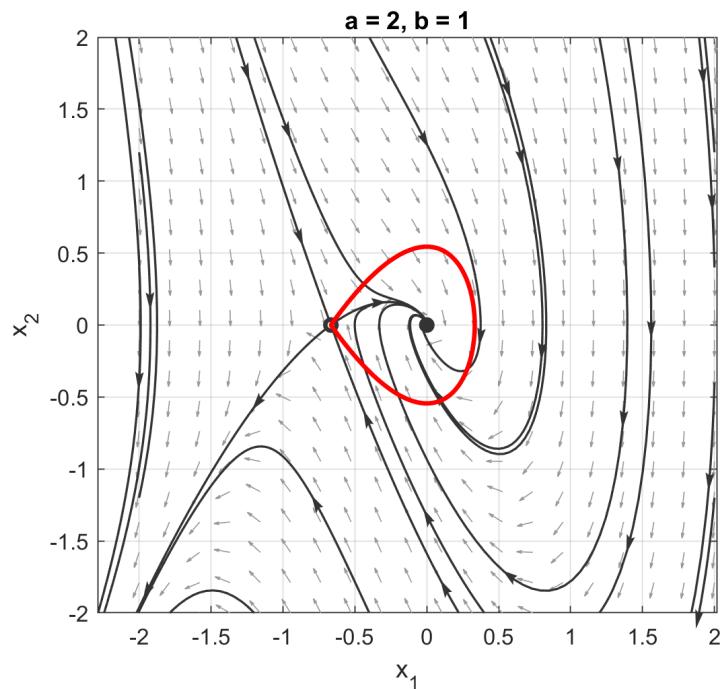
Rysunki (40), (41), (42) pokazują dobór estymaty obszaru przyciągania dla kilku doborów parametrów.



Rysunek 40: Oszacowanie obszaru przyciągania punktu równowagi układu z przykładu 9 dla funkcji Lapunowa w postaci (45). Dla parametrów  $a = 1$  i  $b = 1$ .



Rysunek 41: Oszacowanie obszaru przyciągania punktu równowagi układu z przykładu 9 dla funkcji Lapunowa w postaci (45). Dla parametrów  $a = 1$  i  $b = 2$ .



Rysunek 42: Oszacowanie obszaru przyciągania punktu równowagi układu z przykładu 9 dla funkcji Lapunowa w postaci (45). Dla parametrów  $a = 2$  i  $b = 1$ .

### 3 Jak wykorzystać to do projektowania sterowania?

#### 3.1 Sterująca Funkcja Lapunowa (Control Lyapunov Function - CLF)

W znacznej ilości przypadków spotykanych w praktyce, model dynamiki układ może być zapisany w tzw. postaci afińskiej ze względu na sterowanie, pokazanej wzorem (47):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (47)$$

gdzie:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  oraz  $f(0) = 0$ .

Wówczas, aby punkt równowagi  $x_e = 0$  był asymptotycznie stabilny, pochodna systemowa musi spełniać warunek:

$$\dot{V}(x) = \mathcal{L}_f V(x) + \mathcal{L}_g V(x)u < 0. \quad (48)$$

Można zatem zauważyć, że można odnaleźć sterowanie stabilizujące punkt równowagi gdy zachodzi warunek: dla każdego  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0 \wedge x \neq 0\}$  musi zachodzić  $\mathcal{L}_f V(x) < 0$ .

Wówczas sterowanie można odnaleźć np.:

**Metodą Sonntaga** : Sterowanie można wyznaczyć za pomocą tzw. formuły Sonntaga:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{L}_f V(x) + \sqrt{(\mathcal{L}_f V(x))^2 + (\mathcal{L}_g V(x))^4}}{\mathcal{L}_g V(x)} & \text{dla } \mathcal{L}_g V(x) \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \mathcal{L}_g V(x) = 0 \end{cases}.$$

Po podstawieniu takiego sterowania do równania (48) przyjmuje ono postać:

$$\dot{V}(x) = -\sqrt{(\mathcal{L}_f V(x))^2 + (\mathcal{L}_g V(x))^4} < 0$$

co zapewnia asymptotyczną stabilność punktu równowagi. Metodę tę można uogólnić dla  $u \in \mathbb{R}^m$ .

#### Przykład

Stabilizujemy układ w punkcie  $x_e = 0$ :

$$\dot{x} = x - 2x^3 + (x + 1)u(x),$$

dla którego zakładamy funkcję Lapunowa:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Wówczas mamy:

- $f(x) = x - 2x^3$ ,  $g(x) = x + 1$
- $\mathcal{L}_f V(x) = x(x - 2x^3)$ ,
- $\mathcal{L}_g V(x) = x(x + 1)$ , z tego wynika, że  $\mathcal{L}_g V(x) = 0$  dla  $x = 0$  i  $x = -1$ ,
- $\mathcal{L}_f V(0) = 0$  oraz  $\mathcal{L}_f V(-1) = -1 < 0$  - zatem spełnione są warunki metody Sonntaga.

Definiujemy sterowanie jako:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 - 2x^4 + \sqrt{(x^2 - 2x^4)^2 + (x^2 + x)^4}}{x^2 + x} & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } x \neq -1 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}.$$

**Rozwiązywanie online problemu programowania kwadratowego** : Obecnie, gdy sterowniki dysponują mikroprocesorami o dużej mocy obliczeniowej, można na bieżąco wyznaczać sterowanie poprzez rozwiązywanie problemu programowania kwadratowego. Dla przykładu gdy chcemy zachować stabilność i minimalizować koszt sterowania odpowiada to następującemu problemowi:

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}}(u)^2$$

przy ograniczeniu:  $\mathcal{L}_f V(x) + \mathcal{L}_g V(x)u < 0$ .

Dość łatwo zauważyc, że metoda ta jest bardzo elastyczna, można wprowadzić inny wskaźnik jakości oraz inne ograniczenia.

#### Zastosowanie w robotyce

Nowoczesne roboty, takie jak te z Boston Dynamics (np. Atlas), wykorzystują koncepcję Sterujących Funkcji Lapunowa (CLF) połączoną z Programowaniem Kwadratowym (QP).

**Na czym to polega?** Robot kroczący jest skrajnie niestabilny - wystarczy chwila, by upadł. Algorytm sterowania w każdym ułamku sekundy (np. co 1 ms) rozwiązuje zadanie optymalizacyjne.

**Rola Lapunowa:** Funkcja Lapunowa definiuje tutaj "bezpieczny margines". Sterownik szuka takich sił w silnikach nóg, aby pochodna funkcji Lapunowa  $V$  była jak najbardziej ujemna. To gwarantuje, że robot "pcha" swój stan w stronę stabilnego pionu, nawet jeśli ktoś go popchnie.

**Rola Programowania Kwadratowego:** W każdym kroku czasowym sterownik rozwiązuje problem optymalizacji kwadratowej, aby znaleźć najlepsze możliwe siły w silnikach nóg. Celem jest minimalizacja zużycia energii lub sił wymaganych do utrzymania równowagi, przy jednoczesnym spełnieniu warunku stabilności narzuconego przez funkcję Lapunowa.

Dzięki temu robot może dynamicznie dostosowywać swoje ruchy, reagując na zmiany w terenie lub zewnętrzne zakłócenia, jednocześnie zachowując stabilność i efektywność energetyczną.

### 3.2 Metoda "kroków wstecz" (Backstepping)

Metoda "kroków wstecz" jest to rekursywna, systematyczna metoda projektowania stabilizującego sprzężenia zwrotnego w pewnej klasie układów nielinowych. W metodzie tej projektuje się kolejne elementy funkcji Lapunowa, zakładając, że możemy sterować poszczególnymi zmiennymi stanu i dzielimi wirtualnie układ na podsystemy i zaczynając od pierwszego idziemy "do końca". Dokładny opis tej metody jest dość obszerny, dlatego tutaj zostanie zaprezentowany tylko przykład.

## Przykład

Celem jest stabilizacja zerowego punktu równowagi układu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \right\}$$

- Zakładamy, że można sterować układem bezpośrednio za pomocą zmiennej  $x_2$  - rozważamy tylko pierwsze równanie i stosujemy do niego funkcję Lapunowa:

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2.$$

- Jej pochodna na trajektoriach systemu wynosi:

$$\dot{V}_1 = x_1(x_1 - x_1^3 + x_2) = x_1^2 - x_1^4 + x_1 x_2.$$

- Pochodna ta ma pożądany zawszeujemny składnik  $-x_1^4$  oraz "przeszkadzający" dodatni składnik  $x_1^2$ , który powinien być wyeliminowany przez dobór  $x_2$ , na przykład jako:

$$x_2 = \alpha(x_1) = -x_1 - kx_1, \quad k > 0.$$

Wówczas:

$$\dot{V}_1(x_1) = -kx_1^2 - x_1^4,$$

zatem układ asymptotycznie stabilny. Jednak ponieważ nie możemy bezpośrednio sterować zmienną  $x_2$  sterowanie  $\alpha(x_1)$  nazywamy sterowaniem wirtualnym.

- Wyznaczona wartość  $x_2$  może być uznana jako wartość zadana dla kolejnego równania dynamiki - będzie to zadanie nadążania za wartością zadaną.
- Definiujemy uchyb regulacji:

$$e = x_2 - \alpha.$$

Wówczas pierwsze równanie zapisujemy jako:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 + \alpha + e = -kx_1 - x_1^3 + e.$$

Natomiast pochodna funkcji Lapunowa ma postać:

$$\dot{V}(x_1) = x_1(-kx_1 - x_1^3 + e) = -kx_1^2 - x_1^4 + x_1 e.$$

Dodatkowo dynamika błędu wynosi:

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \dot{\alpha} = u + (k+1)\dot{x}_1 = u + (k+1)(-kx_1 - x_1^3 + e).$$

- Interesuje nas stabilizacja "w zerze" zmiennej  $x_1$  oraz uchybu  $e$ , budujemy więc funkcję Lapunowa:

$$V(x_1, e) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}e^2.$$

Jej pochodna wynosi:

$$\dot{V}(x_1, e) = \dot{V}_1(x_1) + e\dot{e} = -kx_1^2 - x_1^4 + e[u + x_1 + (k+1)(-kx_1 - x_1^3 + e)]$$

- Dobierając sterowanie  $u$  jako:

$$u = -K - x_1 + (k+1)(-kx_1 - x_1^3 + e), \quad K > 0$$

redukujemy wyrażenie na pochodną funkcji Lapunowa do postaci:

$$\dot{V}(x_1, e) = -kx_1^2 - x_1^4 - Ke^2 < 0,$$

zatem uzyskujemy stabilność asymptotyczną.

Można ogólnie wymienić trzy kluczowe elementy metody "kroków wstecz":

- sterowanie wirtualne,
- funkcja stabilizująca,
- uchyb śledzenia zadanego przebiegu sterowania wirtualnego.

#### Zastosowanie w robotyce

W dronach (quadrocopterach) funkcje Lapunowa wykorzystuje się do projektowania tzw. algorytmów Back-stepping. Pozwalają one na stabilne sterowanie dronem nawet podczas wykonywania gwałtownych uników czy lotu z dużymi prędkościami.

**Na czym to polega?** Dron jest układem kaskadowym: najpierw sterujemy kątami nachylenia (orientacją), a to z kolei powoduje ruch w przestrzeni (pozycję).

**Rola Lapunowa:** Projektuje się funkcję Lapunowa dla "błędu orientacji", a następnie rozszerza ją o "błąd pozycji". Sumaryczna funkcja  $V(e)$  gwarantuje, że błąd śledzenia trasy zawsze będzie dążył do zera, niezależnie od tego, jak mocno dronem "rzuci" wiatr.

## 4 Jak to zrobić w MATLABie?

### 4.1 Rozwiązywanie macierzowego równania Lapunowa

MATLAB dostarcza w toolboxie Control System funkcję rozwiązywaną numerycznie macierzowe równanie Lapunowa (10). Jest to funkcja:

```
P = lyap(A, Q);
```

gdzie: A jest macierzą stanu układu liniowego, natomiast natomiast Q jest symetryczną macierzą dodatnio określona.

### 4.2 Rysowanie zbiorów poziomickowych

Przydatne może być wyznaczanie zbiorów poziomickowych funkcji Lapunowa. Można to zrobić w następujący sposób:

```
[X1, X2] = mesh(-2:0.01:2, -2:0.01:2); % Definiowanie obszaru, na
                                              którym obliczamy funkcje Lapunowa
V = X1.^2 + 2*X1.*X2 + X2.^2; % Obliczenie wartości funkcji Lapunowa

figure();
hold on;
grid on;
xlabel("x_{1}");
ylabel("x_{2}");
contour(X, Y, V, 20); % Rysujemy 20 konturów funkcji Lapunowa
contour(X, Y, V, [1 1]); % Rysujemy kontur, na którym V(x) == 1
```

### 4.3 Symboliczne obliczenia macierzy Jacobiego

MATLAB dostarcza poprzez Symbolic Toolbox funkcje do symbolicznego wyznaczania macierzy Jacobiego funkcji nieliniowej:

```
% Definiowanie zmiennych symbolicznych
syms x1 x2 x3

% Dodawanie założeń o zmiennych symbolicznych
assume([x1 x2 x3], 'real') % Zakładamy, że x1, x2 i x3 przyjmują tylko
                             wartości rzeczywiste
```

```
% Definiujemy model nieliniowy
f = [x2; x3; x1^2 * x3 - x3^3];

% Wyznaczamy macierz Jacobiego
A = jacobian(f,[x1, x2, x3]);
```

## 4.4 Symboliczne obliczenia funkcji Lapunowa i jej pochodnej systemowej

Niejednokrotnie obliczenie pochodnej systemowej funkcji Lapunowa może dostarczyć trudności. Dlatego warto skorzystać z możliwości obliczeń symbolicznych dostarczanych przez Symbolic Toolbox MATLABa. Można to zrobić w następujący sposób:

```
% Definiowanie zmiennych symbolicznych
syms x1(t) x2(t)      % Funkcje zmiennej t

% Dodawanie założen o zmiennych symbolicznych
assume([x1(t) x2(t)], 'real')    % Zakładamy, że x1(t) i x2(t) przyjmuja
                                 tylko wartości rzeczywiste

% Definiujemy wektor zmiennych X i model obiektu
X = [x1; x2];

dx1 = -x1;
dx2 = -x2;

% Definiowanie funkcji Lapunowa
P = [1 0; 0 1];
V = X' * P * X;

% Wyznaczenie pochodnej systemowej
dV = diff(V, t);

% Uproszczanie postaci
dV = subs(dV, {diff(x1,t), diff(x2,t)}, {dx1, dx2});
dV = simplify(dV);

% Sprawdzamy czy ujemna
tf = isAlways(dV(t) <= 0)
```

### 4.4.1 Wyznaczanie trajektorii bez Simulinka

MATLAB dostarcza kilku funkcji służących do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Jedną z nich jest `ode45`, rozwiązująca równanie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu.

```
model_dynamiki = @(t,y)[x(2); -x(1) + x(2)x(1)^3];
tspan = 0 : 0.01 : 10;
y0 = [1; 1];

[y, t] = ode45(model_dynamiki, tspan, y0);
```

Innymi funkcjami, rozwiązymi równania różniczkowe, są np.: `ode23`, `ode113`.

## 5 Przebieg ćwiczenia

### 5.1 Pośrednia metoda Lapunowa

Dla każdego z podanych systemów opisanych równaniami (49), (50), (51), (52), (53):

- zamodelować układ równań w Simulinku (lub użyć skryptu do jego rozwiązania),
- wyznaczyć portrety fazowe,
- znaleźć punkty równowagi,
- sprawdzić, czy można zastosować pośrednią metodę Lapunowa do badania stabilności punktów równowagi,
- zbadać stabilność wszystkich punktów równowagi,
- zbadać doświadczalnie obszar atrakcji asymptotycznie stabilnych punktów równowagi - przedstawić go na tle portretu fazowego.

### 5.1.1 System 1

Rozważamy układ mechaniczny masa-sprężyna ze sprężyną o nieliniowej charakterystyce. Układ ten opisany jest równaniem (49).

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx + dx^3 = 0, \quad b, c > 0, \quad |c| < |d|. \quad (49)$$

Gdzie:

- $x$  - odchylenie od punktu równowagi,
- $b$  - współczynnik tarcia,
- $c$  i  $d$  - parametry sprężyny.

Proszę rozważyć przypadek dla  $d > 0$  i  $d < 0$ .

### 5.1.2 System 2

Rozważamy wahadło z tłumieniem, opisywane równaniem:

$$\ddot{x} + \frac{c}{lm}\dot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (50)$$

gdzie:

- $x$  - kąt wychylenia wahadła z punktu równowagi trwałej,
- $g$  - przyspieszenie ziemskie,
- $m$  - masa wahadła,
- $l$  - długość wahadła.

### 5.1.3 System 3

Rozważamy układ równań Van der Pola:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 - ax_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}. \quad (51)$$

Proszę zbadać zachowanie układu dla różnych wartości  $a$ .

### 5.1.4 System 4

Rozważamy układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}. \quad (52)$$

### 5.1.5 System 5

Rozważamy układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}. \quad (53)$$

## 5.2 Bezpośrednia metoda Lapunowa i twierdzenie La Salle'a

Dla poniższych układów (54), (55), (56), (57):

- zamodelować układ równań w Simulinku (lub użyć skryptu do jego rozwiązania),
- wyznaczyć portrety fazowe,
- znaleźć punkty równowagi,
- zbadać stabilność punktów równowagi, stosując podane funkcje Lapunowa,
- dla każdej z podanych funkcji Lapunowa znaleźć analitycznie estymatę obszaru atrakcji,
- symulacyjnie określić obszar atrakcji,
- porównać obszary odnalezione analitycznie i symulacyjnie - przedstawić obydwa na tle portretu fazowego,
- porównać estymaty obszaru atrakcji uzyskane z użyciem różnych funkcji Lapunowa - przedstawić obydwa na jednym wykresie na tle portretu fazowego.

### 5.2.1 System 1

Rozważamy układ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}. \quad (54)$$

Dla tego układu rozpatrujemy dwóch kandydatów na funkcję Lapunowa:

- (a)  $V_1^1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$ ,
- (a)  $V_1^2(x) = \frac{x_1^2}{1-x_1 x_2} + x_2^2$ .

### 5.2.2 System 2

Rozważamy układ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}. \quad (55)$$

Dla tego układu rozpatrujemy dwóch kandydatów na funkcję Lapunowa:

- (a)  $V_2^1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ ,
- (a)  $V_2^2(x) = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2)$ .

### 5.2.3 System 3

Rozważamy układ (zauważmy, że nie rozważamy  $x \in \mathbb{R}^2$ , ale  $x_1 > -1$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{1+x_1} - \frac{x_1}{1+x_1} \end{cases}. \quad (56)$$

Dla tego układu rozpatrujemy dwóch kandydatów na funkcję Lapunowa:

- (a)  $V_3^1(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \frac{z}{1+z} dz$ ,
- (a)  $V_3^2(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ .

### 5.2.4 System 4

Rozważamy układ (szukamy cyklu granicznego):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^7 (x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - 3x_2^5 (x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{cases}. \quad (57)$$

Dla tego układu rozpatrujemy następującego kandydata na funkcję Lapunowa:

- (a)  $V_4^1(x) = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2$ .

## Literatura

- [1] Mitkowski W., Baranowski J., Hajduk K., Korytowski A., Tutaj A., *Teoria Sterowania: Materiały Pomocnicze do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, AGH Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2007.
- [2] Mitkowski W., *Zarys Teorii Sterowania*, Wydawnictwa AGH, 2019.
- [3] Amborski K., Marusak A., *Teoria Sterowania w Ćwiczeniach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1978.
- [4] Gessing R., Latarnik M., Skrzywan-Kossek A., *Zbiór Zadań z Teorii Nieliniowych Układów Regulacji i Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1981.
- [5] Gibson J. E., *Nieliniowe Układy Sterowania Automatycznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1968.
- [6] Kabziński J., Mosiołek P., *Projektowanie Nieliniowych Układów Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo PWN, 2018.
- [7] La Salle J., Lefschetz S., *Zarys Teorii Stabilności Lapunowa i Jego Metody Bezpośredniej*, PWN, 1966.
- [8] Shinnars S. M., *Modern Control System Theory and Design*, Wiley & Sons, 1992.
- [9] Kaczorek T., *Podstawy Teorii Sterowania*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2005.
- [10] Chang Y-C., Roohi N., Gao S., *Neural Lyapunov Control*, 33rd Conference on Neural Information Processing Systems, Vancouver, Canada., 2019.
- [11] Dai H., Landry B., Yang L., Pavone M. i Tedrake R., *Lyapunov-stable neural-network control*, Robotics: Science and Systems , 2021.