INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: C. Kuhlmann, N. Padilla, I. Ríos, F. Vidal

Control 2

Martes 15 de Mayo de 2012

Problema 1

A una consulta dental puede llegar un paciente con probabilidad p cada hora o puede no llegar ninguno, con probabilidad $(1-p)$. Los pacientes generalmente requieren un procedimiento que dura 1 hora, sin embargo, una fracción q de ellos presenta complicaciones por lo que debe ser atendido por 2 horas, pero nunca más allá. Los pacientes prefieren atenderse con el dentista 1, pero si está ocupado se atienden con el dentista 2. Considere que cada dentista puede atender solo a un paciente cada hora.

a) (1,5 puntos) Modele el problema como un proceso de Markov Discreto.
Representaremos los estados como (iD_1, jD_2), donde i y j puden tomar los valores 0, 1 o 2 que representan la hora de atención al paciente. 0 es que está desocupado, 1 atendiendo al paciente en la primera hora y 2 atendiendo al paciente en la segunda hora.

Las probabilidades de transición son:

$$P((0D1, 0D2), (0D1, 0)) = 1 - p$$
$$P((0D1, 0D2), (1D1, 0D2)) = p$$
$$P((1D1, 0D2), (0D1, 0D2)) = (1 - p)(1 - q)$$
$$P((1D1, 0D2), (1D1, 0D2)) = p(1 - q)$$
$$P((1D1, 0D2), (2D1, 0D2)) = (1 - p)q$$
$$P((1D1, 0D2), (2D1, 1D2)) = pq$$
$$P((2D1, 1D2), (0D1, 0D2)) = (1 - p)(1 - q)$$
$$P((2D1, 1D2), (1D1, 0D2)) = p(1 - q)$$
$$P((2D1, 1D2), (1D1, 2D2)) = pq$$
$$P((2D1, 1D2), (0D1, 2D2)) = (1 - p)q$$
$$P((1D1, 2D2), (0D1, 0D2)) = (1 - p)(1 - q)$$
$$P((1D1, 2D2), (1D1, 0D2)) = p(1 - q)$$
$$P((1D1, 2D2), (2D1, 0D2)) = (1 - p)q$$
$$P((1D1, 2D2), (2D1, 1D2)) = pq$$
$$P((2D1, 0D2), (0D1, 0D2)) = (1 - p)$$
$$P((2D1, 0D2), (1D1, 0D2)) = p$$
$$P((0D1, 2D2), (0D1, 0D2)) = (1 - p)$$
$$P((0D1, 2D2), (1D1, 0D2)) = p$$

b) (1,5 puntos) Clasifique los estados. ¿Existen probabilidades estacionarias? En caso de que existan plantee el sistema que permite calcularlas.
Hay una única clase recurrente aperiódica, por lo que existen probabilidades estacionarias. El sistema que permite su cálculo es :

$$\sum \pi_i = 1$$
$$\pi = \pi \cdot P$$

donde P es la matriz de transición.

c) (1,5 puntos) El costo de atención a los pacientes es de C por la primera hora y D por la segunda hora ($C > D$). Cuales son las ganacias esperadas de cada dentista?

Llamaremos $\pi_{i,j}$ a la probabilidad estacionaria correspondiente al estado iD_1, jD_2.
Ganancias esperadas Dentista 1:

$$C(\pi_{1,0} + \pi_{1,2}) + D(\pi_{2,0} + \pi_{2,1})$$

Ganancias esperadas Dentista 2:

$$C(\pi_{2,1}) + D(\pi_{1,2} + \pi_{0,2})$$

d) (1,5 puntos) Suponga que en un momento el dentista uno está atendiendo un paciente en la segunda hora y el dentista 2 está atendiendo un paciente en la primera hora. ¿Cómo calcularía el tiempo esperado que transcurre hasta que pasa una hora con ambos dentistas desocupados?

Para resolverlo debemos convertir el estado $(0D_1, 0D_2)$ en recurrente y calcular el vector W. Ya que $(0D_1, 0D_2)$ sería el único estado recurrente, $\pi=$ [1 0 0 0 0 0] y los costos son

$$r_{0,0} = 0 \quad y \quad r_{i,j} = 1 \quad \forall (i,j) \neq (0,0)$$

Sabiendo que $W = r + P \cdot W$, se obtiene el valor de $W_{2,1}$ que representa el tiempo esperado hasta llegar al estado $(0D_1, 0D_2)$ comenzando en $(2D_1, 1D_2)$.

Problema 2

En una consulta de urgencia, que siempre cuenta con pacientes esperando ser atendidos, se atienden pacientes segun un Proceso de Poisson de tasa 3 pacientes por hora. $\frac{2}{3}$ de los pacientes no necesitan tratamiento, mientras $\frac{1}{3}$ requiere ser hospitalizado.

i) (1,5 puntos) Suponga que en un intervalo de 5 horas (de las 10 a las 15) terminan 9 atenciones ¿Cuál es el tiempo esperado que tomó la última atencion?

Ya que el tiempo en que termina una atención se distribuye como una exponencial, los eventos dentro del intervalo se distribuyen Uniforme. El tiempo entre que termina la 8° atención y la 9° son 30 min.

ii) (1,5 puntos) Suponga que en un intervalo de 5 horas (de las 10 a las 15) terminan 9 atenciones ¿Cuál es el tiempo esperado que tomó la primera atención?

El tiempo esperado en que termina la primera atención dentro del intervalo de 5 horas es 30 min al igual que la parte i, pero además debemos sumarle el tiempo esperado en que comenzó, que podría ser fuera del intervalo de 5 horas (antes de las 10). Como la distribución es exponencial y tiene pérdida de memoria, el tiempo esperado fuera del intervalo es $\frac{1}{\lambda} = 20$ min. Por ende, en total es 50 min.

iii) (1,5 puntos)¿Cuál es la probabilidad de que en tres atenciones consecutivas exactamente una requiera hospitalización?

Se puede calcular como una binomial:

$$P(N = 1) = \binom{3}{1} \frac{1}{3} \frac{2}{3}^2$$

iv) (1,5 puntos)¿Cuál es el tiempo esperado que transcurre hasta que una atención toma mas de 40 minutos?
Llamaremos p a la probabilidad de que una atención tome más de 40 minutos.

$$p = P(t \geq 40) = \int_{40}^{\infty} (3e^{-3t} dt) = e^{-120}$$

Luego, la probabilidad de que pasen k atenciones hasta que una demore más de 40 minutos es una binomial negativa

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$E(N) = \frac{1}{p}$$

Por ende sabemos que tienen que pasar $\frac{1}{p}$ pacientes, cada uno con un tiempo esperado que distribuye en forma exponencial:

$$E(T) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{3} = \frac{e^{120}}{3}$$

Problema 3

Durante un día el pabellón quirúrgico de un hospital tiene programadas 12 operaciones, cada 1 hr, desde las 8:00 hasta las 20:00. Los pacientes y equipos médicos llegan puntuales y están preparados para comenzar la intervención quirúrgica a la hora estipulada. Sin embargo, la duración de cada operación es exponencial de media 1 hora por lo que pueden producirse atrasos. Calcule:

i) (1,2 puntos) La probabilidad de que durante el día al menos un paciente comience tarde su atención.
P(al menos un paciente comience tarde su atención) = 1- P(todos comiencen a la hora)

$$P(t \leq 1) = \int_0^1 e^{-t} dt = (1 - e^{-1})$$

La probabilidad buscada es:

$$P = 1 - (1 - e^{-1})^{12}$$

ii) (1,2 puntos)La hora esperada en la que el primer paciente termina su operación.

Dado que la duración de la operación se distribuye exponencial, la hora esperada en que el 1º paciente termina su operación es 8:00 + $\frac{1}{\lambda}$ = 8:00 + 1= 9:00

iii) (1,2 puntos) La hora esperada en la que el segundo paciente termina su operación.
Debemos condicionar en que el primer paciente termine antes de la hora en que está citado el segundo o termine después. Sea X_i el tiempo de operación del paciente i

$$E(X_1 + X_2) = E(X_2/X_1 \leq 1) \cdot P(X_1 \leq 1) + E(X_2/X_1 \geq 1) \cdot P(X_1 \geq 1)$$

$$E(X_1 + X_2) = (1 + \frac{1}{\lambda}) \cdot (1 - e^{-1}) + (1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}) \cdot e^{-1}$$

$$E(X_1 + X_2) = 2 \cdot (1 - e^{-1}) + 3 \cdot e^{-1}$$

iv) (1,2 puntos) La hora esperada en la que el tercer paciente termina su operacion.

$$E(X_1+X_2+X_3) = E(X_3/X_1 \leq 1 \wedge X_2 \leq 1) \cdot P(X_1 \leq 1) \cdot P(X_2 \leq 1) + E(X_3/X_1 \leq 1 \wedge X_2 \geq 1) \cdot P(X_1 \leq 1) \cdot P(X_2 \geq 1)$$

$$+E(X_3/X_1 \geq 1 \wedge X_2 \leq 1) \cdot P(X_1 \geq 1) \cdot P(X_2 \leq 1) + E(X_3/X_1 \geq 1 \wedge X_2 \geq 1) \cdot P(X_1 \geq 1) \cdot P(X_2 \geq 1)$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = (2 + \frac{1}{\lambda}) \cdot (1 - e^{-1}) \cdot (1 - e^{-1}) + (\frac{1}{\lambda} + 1 + 1 + \frac{1}{\lambda}) + \cdot (1 - e^{-1}) \cdot e^{-1}$$

$$+(1 + \frac{1}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda}) + \cdot (1 - e^{-1}) \cdot e^{-1} + (\frac{1}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda}) + \cdot e^{-1} \cdot e^{-1}$$

v) (1,2 puntos) ¿Cómo calcularía la hora esperada a la que n-ésimo paciente termina su operación?

Se puede calcular como

$$E(max\{k + \sum_{i=k+1}^{n} X_i\})$$