LE DERIVATE

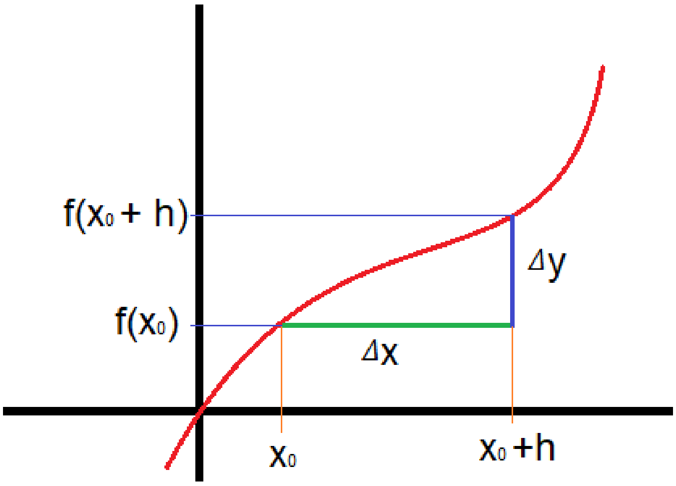
Il rapporto incrementale:

Prima di introdurre le derivate, è necessario comprendere il significato di rapporto incrementale.

Per definizione, il rapporto incrementale *è la variazione delle ordinate (x) nel grafico, diviso la variazione delle ascisse (y), in funzione di un incremento (h), a partire dal punto.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometricamente il rapporto incrementale è la pendenza della retta secante il grafico, nei punti considerati.



Una seconda formulazione del rapporto incrementale (matematicamente equivalente) è la seguente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La derivata:

Definito il rapporto incrementale, è possibile ora spiegare la derivata.

Per la derivata, esistono due definizioni ugualmente valida:

1. Per definizione, la derivata è il limite del rapporto incrementale al tendere a zero, dell' incremento h, in un punto x_0 del dominio.

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata viene indicata comunemente con:

$$f'(x)$$

Ma è possibile trovarla in altre forme, come ad esempio:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \;\; ; \;\; \frac{df}{dx} \;\; ; \;\; D(f(x))|_{x=x_0}$$

Conoscendo la definizione di intorno di un punto di accumulazione, è possibile calcolare la derivata sinistra e destra dello stesso:

$$f'_{-}(x) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_{+}(x) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Utilizzando la definizione di funzione, si provi a calcolare:

1. $f(x) = 2x \qquad in\ x_0 = 4$

   Sostituisco la funzione e poi il valore 4, nella definizione di derivata:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h) - 2(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8+2h-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

2. $f(x) = x + 1 \qquad in\ x_0 = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

   Si sostituisce alla x di f(x), i termini (x_0 +h) e (x_0):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[(x_0+h)+1] - [(x_0)+1]}{h}$$

   poi il valore:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[(2+h)+1] - [(2)+1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3+h] - [3]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

3. $f(x) = x^2 \qquad in\ x_0 = 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)]^2 - [(1)]^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+2h+h^2) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} =$$

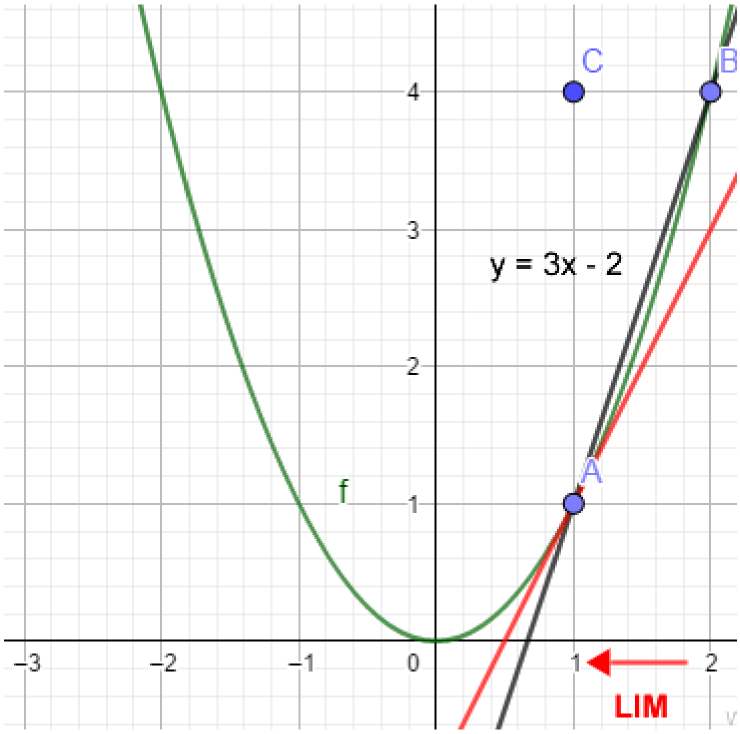
$$= \lim_{h\to 0} 2 + h = 2 + 0 = 2$$

La seconda definizione di derivata, riguarda più l' aspetto geometrico, infatti:

2. <u>la derivata di una funzione, è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione, in un punto.</u>

   Il coefficiente angolare (m) di una retta, esprime la pendenza della stessa; da ciò si ricordi che:

$$m = \tan(\alpha) \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = m$$



Calcolare la retta tangente ad una funzione:

Data la seguente funzione, calcola la retta tangente nei punti assegnati.

$$f(x) = \ln(6x - 4) \qquad in \;\; x_0 = 1 \;\; U \; x_0 = -1$$

a. Studio il dominio:

   $$D\colon \left(\frac{2}{3}\ ;\ \infty\right)$$

   Si noti che il punto x = - 1 non appartiene al dominio.

b. Calcolo della derivata:

   $$f'(x) = \frac{3}{3x-2}$$

c. Calcolo della funzione nei punti:

$$f(1) = \ln((6 \bullet 1) - 4) = \ln(2)$$

d. Le coordinate del punto di tangenza sono:

$$P_t\ (1\,;\ln(2))$$

e. Calcolo del coefficiente angolare:

$$m = f'(x_0)$$

Si calcola quindi la derivata nei punti x_0.

$$f'(1) = \frac{3}{3 \bullet 1 - 2} = 3$$

$$m = f'(1) = 3$$

f. Si ricava l' intercetta (q), dall' equazione della retta:

$$y = mx + q \quad \rightarrow \quad f(x_0) = f'(x_0) \bullet x_0 + q$$

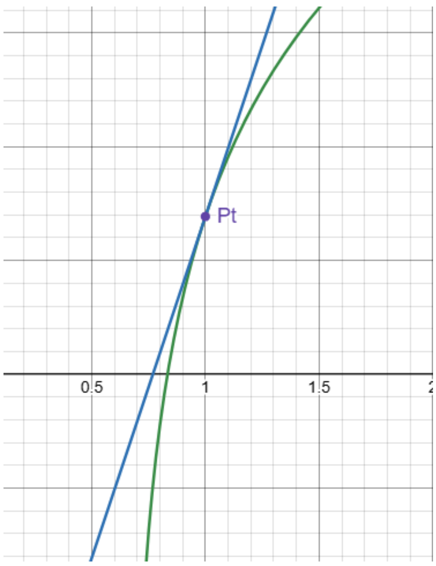
$$\rightarrow\ f(1) = f'(1) \bullet 1 + q$$

$$\rightarrow\ \ln(2) = 3 \bullet 1 + q$$

$$\rightarrow \ln(2) - 3 = q$$

g. Si determina l' equazione della retta tangente alla funzione:

$$\mathrm{y = mx + q} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y = 3 \bullet x + \ln(2) - 3}$$



Punti di non derivabilità:

Si definiscono punti di non derivabilità, valori appartenenti al dominio nel quale la derivata non è definita.

Tali punti possono essere di tre tipi:

1. PUNTO ANGOLOSO:
2. PUNTO DI CUSPIDE:
3. PUNTO DI FLESSO A TANGENZA VERTICALE.

1. Il punto angoloso è presente quando *i valori dei limiti, sinistro e destro della derivata, esistono con valori finito, ma diverso.*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l_1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l_2$$

$$con \ \ l_1 \neq l_2$$

Esempio.

Il classico esempio di punto angoloso, lo si ottiene con la funzione valore assoluto.

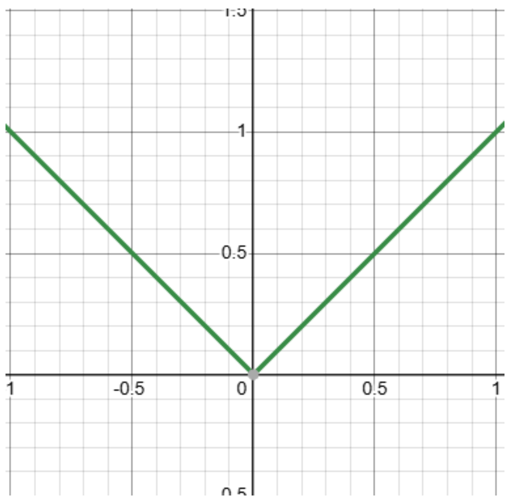
$$f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Il punto angoloso è tipico delle funzioni con valori assoluti o funzioni definite a tratti; tale punto si presenta graficamente come:



2. Il punto di cuspide è presente quando *i valori dei limiti, sinistro e destro della derivata, esistono con valori infiniti, solitamente di segno opposto.*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

E viceversa:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

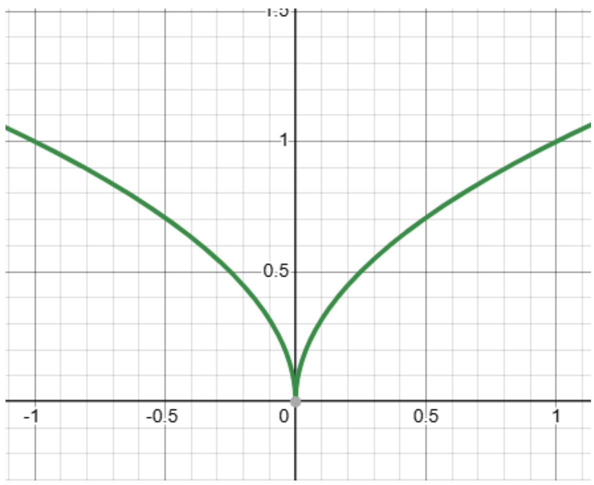
Esempio.

Il classico esempio di cuspide, lo si ottiene con la seguente funzione.

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{+h}}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = -\infty$$



3. Il punto di flesso a tangenza verticale è presente quando _i valori dei limiti, sinistro e destro della derivata, esistono con valori infiniti e di segno uguale._

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

E viceversa:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

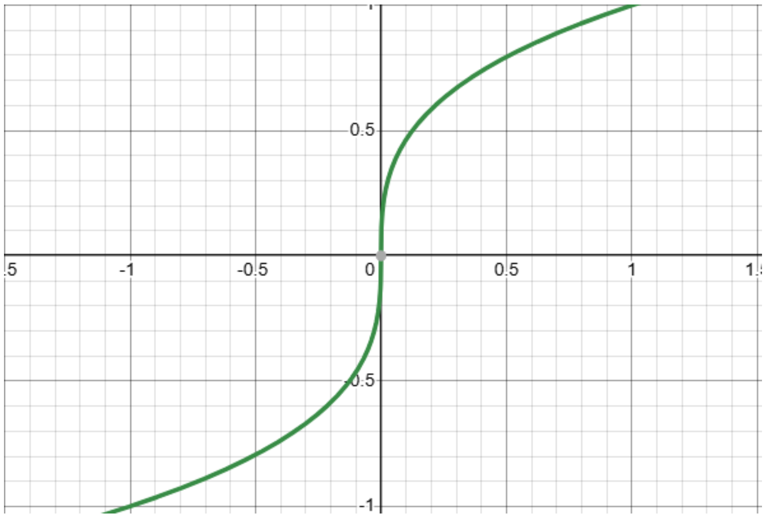
Esempio.

Il classico esempio di flesso a tangenza verticale, lo si ottiene con la funzione radice cubica.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Relazione tra continuità e derivabilità di una funzione:

- condizione necessaria, ma non sufficiente per la derivabilità:

  Una funzione deve essere continua per essere derivabile, ma ciò non garantisce la derivabilità

  .

  → se una funzione è continua in un punto, potrebbe essere derivabile nel punto;

  → se una funzione non è continua nel punto, allora non è derivabile.

- condizione sufficiente, ma non necessaria per la continuità:

  Una funzione che risulta derivabile, è sicuramente continua, ma se una funzione non è derivabile, potrebbe comunque essere continua.

  .

  → se una funzione è derivabile in un punto, è sicuramente continua nel punto;

  → se una funzione non è derivabile nel punto, potrebbe comunque essere continua.

La condizione di continuità è necessaria per la derivabilità.

Tabella derivate fondamentali:

Nomenclatura	Funzione	Derivata
Costante	k	0
Lineare	x	1
Potenza	x^n	$n \bullet x^{n-1}$
Radicale	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \bullet \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Reciproco	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
Esponenziale base variabile	a^x	$a^x \bullet \ln(a)$
Esponenziale	e^x	e^x
Logaritmo naturale	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Logaritmo base variabile	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \bullet \log(a)}$
Valore assoluto	$\|x\|$	$\frac{\|x\|}{x} \quad oppure \quad sgn(x)$
Seno	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Coseno	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
Tangente	$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} \quad opp. \quad 1 + tan^2(x)$
Cotangente	$cotan(x)$	$\frac{-1}{sin^2(x)} \quad opp. \quad -1 - cotan^2(x)$
Arcotangente	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Arcoseno	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcocoseno	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcocotangente	$\text{arccotan}\,(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Arcosecante	$\text{arcsec}\,(x)$	$\frac{1}{x^2 \bullet \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
Arcocosecante	$\text{arccosec}\,(x)$	$-\frac{1}{x^2 \bullet \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
Seno iperbolico	$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(\mathrm{x})$
Coseno iperbolico	$\cosh(\mathrm{x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sinh(x)$

Proprietà derivate:

Nome	Formula	Derivata
Prodotto per una costante	$c \bullet f(x)$	$c \bullet f'(x)$
Somma	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Differenza	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
Prodotto	$f(x) \bullet g(x)$	$f'(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)$
Rapporto	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$
Prodotto di 3 funzioni		
$f(x) \bullet g(x) \bullet h(x)$	$f'(x) \bullet g(x) \bullet h(x) + f(x) \bullet g'(x) \bullet h(x) + f(x) \bullet g(x) \bullet h'(x)$	

Derivate composte:

Il teorema per il calcolo delle derivate composte (chain-rule), permette di determinare la derivata di una funzione composta, lavorando sulle funzioni più esterne fino ad arrivare a quella interna.

$$h'(x) = g'[f(x)] \bullet f'(x)$$

Ugualmente:

$$g[f(x)] = g'[f(x)] \bullet f'(x)$$

Nomenclatura	Funzione	Derivata
Potenza	$f(x)^n$	$n \bullet f(x)^{n-1} \bullet f'(x)$
Radicale	$\sqrt[n]{f(x)}$	$\frac{1}{n \bullet \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \bullet f'(x)$
Reciproco	$\frac{1}{f(x)^n}$	$-\frac{n}{f(x)^{n+1}}$
Esponenziale base variabile	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \bullet \ln(a) \bullet f'(x)$
Esponenziale	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \bullet f'(x)$
Logaritmo naturale	$\ln[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
Logaritmo base variabile	$\log_a[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x) \bullet \log(a)}$
Seno	$\sin[f(x)]$	$\cos\ [f(x)] \bullet f'(x)$
Coseno	$\cos\ [f(x)]$	$-\sin[f(x)] \bullet f'(x)$
Tangente	$\tan[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$
Arcotangente	$\arctan\ [f(x)]$	$\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

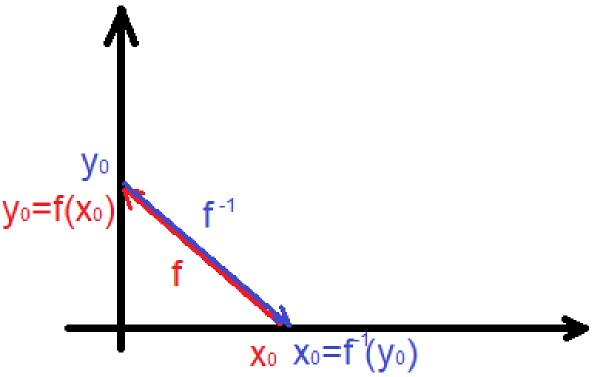
Derivata della funzione inversa:

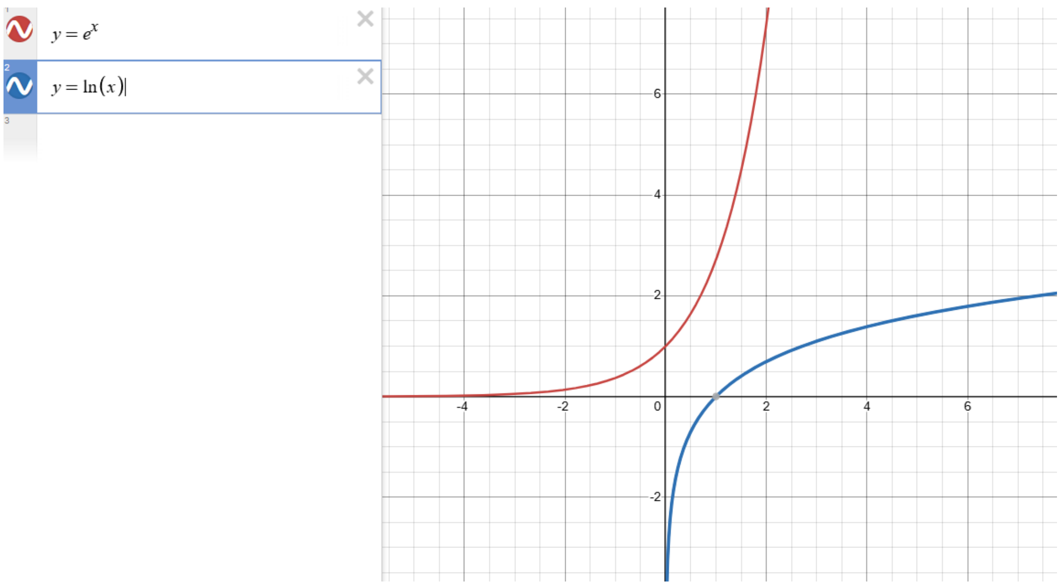
Il teorema della derivazione di una funzione inversa afferma che:

Sia y = f (x) una funzione invertibile, derivabile in un punto x_0 con derivata diversa da zero, allora la funzione inversa è derivabile nel punto y_0 e vale:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

1. la funzione inversa è derivabile nell' immagine del punto, mediante f → $y_0 = f(x_0)$;
2. la derivata della funzione inversa in y_0 è il reciproco della derivata di f(x) in x_0.





Massimi e minimi (punti estremanti):

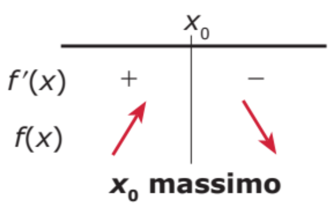
I punti di massimo e minimo di una funzione, sono definiti a partire dalle derivate della funzione stessa e si possono dividere in *assoluti* o *relativi*.

1. MASSIMO ASSOLUTO:

   è il massimo valore che la funzione f(x) assume nell' intervallo.

   Un punto x_0 si dice di massimo assoluto per f(x), nell' intervallo [a, b], se è il punto di ordinata maggiore:

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

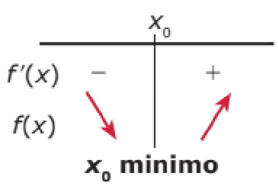


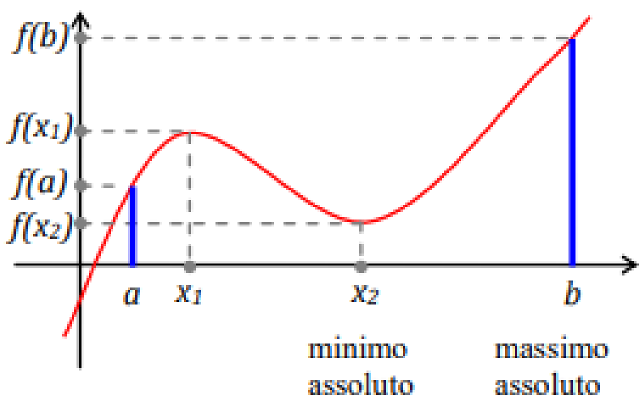
2. MINIMO ASSOLUTO:

   è il minimo valore che la funzione f(x) assume nell' intervallo.

   Un punto x_0 si dice di massimo assoluto per f(x), nell' intervallo [a, b], se è il punto di ordinata minore:

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$



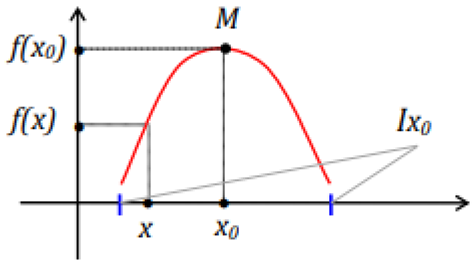


3. MASSIMO RELATIVO:

   è il massimo valore che la funzione f(x) assume nel Dominio.

   Un punto x_0 si dice di massimo relativo per f(x), se esiste un intorno di x_0 tale che l' ordinata di x_0 sia maggiore o uguale delle ordinate di tutti i punti dell' intorno:

$$\exists\, I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \cap D \rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

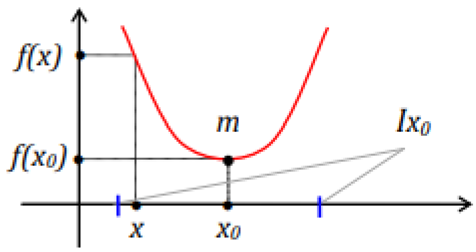


4. MINIMO RELATIVO:

   è il minimo valore che la funzione f(x) assume nel Dominio.

   Un punto x_0 si dice di minimo relativo per f(x), se esiste un intorno di x_0 tale che l' ordinata di x_0 sia minore o uguale delle ordinate di tutti i punti dell' intorno:

$$\exists\, I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \cap D \rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$



Relazione tra massimi e minimi, relativi e assoluti:

Relativo → condizione necessaria ma non sufficiente per *assoluto*;

Assoluto → condizione sufficiente ma non necessaria per *relativo*.

Se un punto è di massimo (minimo) assoluto, allora è anche relativo, ma se un punto è di massimo (minimo) relativo, non è necessariamente un assoluto.

Punti critici e stazionari:

Per punto critico, si intende un punto x_0 appartenente al dominio della funzione, tale che:

- È un punto di non derivabilità;

Per punto stazionario, si intende un punto x_0 appartenente al dominio della funzione, tale che:

- È un punto in cui la derivata esiste, ma uguale a zero.

$$f'(x_0) = 0$$

Teorema di Fermat:

Sia y = f(x) una funzione derivabile in un punto x_o appartenete al dominio e tale punto è un estremante per la funzione e la funzione è anche derivabile nel punto, allora:

$$f'(x_0) = 0$$

Se una funzione ammette un massimo (minimo) relativo in un punto appartenente al dominio ed è anche derivabile, allora la derivata nel punto si annulla, quindi l' annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x_o, è condizione necessaria affinché x_o sia un punto di massimo o minimo relativo e/o assoluto.

Sapendo che la derivata in un punto è zero, il punto stesso è un candidato per essere un massimo o un minimo.

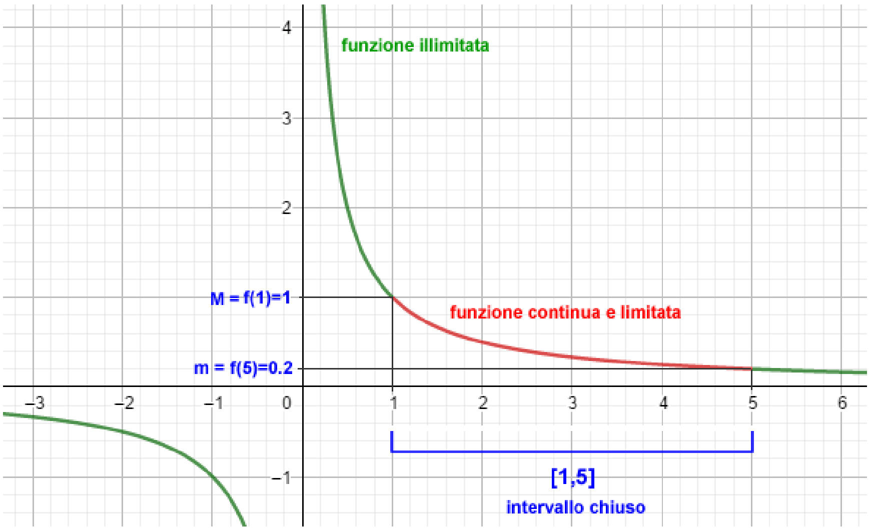
Per il calcolo dei punti di massimo o minimo, è necessario porre la derivata prima,
maggiore o uguale a zero.

$$f'(x) \geq 0$$

Teorema di Weierstrass:

se una funzione ha dominio nell' insieme dei numeri reali, è definita e continua su un intervallo chiuso e limitato, allora la funzione ammette, in tale intervallo, un massimo ed un minimo assoluti.

Quindi se una funzione ha un dominio chiuso e limitato allora esistono punti di massimo e di minimo entro cui la funzione è definita.



Teorema di Rolle:

Sia f : [a ,b] → $\mathbb{R}$ *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Se la funzione ha gli stessi valori agli estremi dell' intervallo, cioè:*

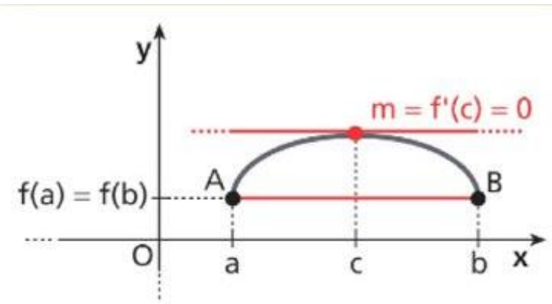
$$f(a) = f(b)$$

Allora esiste *almeno* *un punto* x_0 *appartenente al dominio, tale che:*

$$f'(x_0) = 0$$

Sia una funzione continua in un intervallo [a, b] e derivabile in (a, b). Se la funzione assume lo stesso valore, calcolati agli estremi dell' intervallo, allora esiste almeno un punto, dove la derivata prima si annulla.

Sapendo che la derivata esprime il coefficiente angolare della retta tangente al punto x_o, tale coefficiente deve valere zero.



La retta tangente è orizzontale (parallela all'asse x) e la sua equazione è:

$$y = f(x_0)$$

Il teorema di Rolle afferma che possono esserci più punti di massimo (minimo) nelle funzioni costanti e tali punti sono infiniti.

Esempio.

$f(x) = \sin(x) + 1 \qquad definita\ in\ [0, \pi]$

$f(x) = \sin(x) + 1 \rightarrow\ derivabile \rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$\rightarrow f(0) = \sin(0) + 1 = 1$

$\rightarrow f(\pi) = \sin(\pi) + 1 = 1$

$La\ funzione\ agli\ estremi\ assume\ lo\ stesso\ valore\ (1).$

$Considero\ un\ valore\ all'interno\ del\ dominio, ad\ esempio\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Teorema di Cauchy:

Non è un vero e proprio teorema, ma un lemma, cioè un'analisi preliminare per dimostrare un teorema (teorema di Lagrange).

$$[f(b) - f(a)]\ g'(x_0) = f'(x_0)[g(b) - g(a)]$$

Teorema di Lagrange:

quando una funzione è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette ALMENO un punto in cui la derivata prima, ha lo stesso valore del rapporto incrementale, esistente tra i punti estremi dell'intervallo.

Sia f :[a , b]→ℝ una funzione continua in [a,b] e derivabile in (a,b).

Allora esiste ALMENO UN PUNTO x_0 interno all' intervallo (a,b) tale che:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Esempio.

$f(x) = \ln(x) \qquad definita\ da\ [1; 4]\ in\ x_0 = 2$

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f(4) = \ln(4)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$\ln(4) - 0 = \frac{1}{x}\,(4 - 1) \rightarrow \ln(4) = \frac{3}{x} \ \rightarrow \ \ x = \frac{3}{\ln\,(4)}$