TEOREMA DI FERMAT

Definizione:

una funzione che ammette un massimo o un minimo (relativo o assoluto), che sia quindi derivabile, allora la derivata in tale punto è nulla.

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un punto x_o appartenete al dominio e tale punto è un estremante per la funzione e la funzione è anche derivabile nel punto, allora:

$$f'(x_o) = 0$$

Quindi l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x_o, è condizione necessaria affinché x_o sia un punto di massimo o minimo relativo e/o assoluto.

Per il calcolo dei punti di massimo o minimo, è necessario porre la derivata prima, maggiore e uguale a zero.

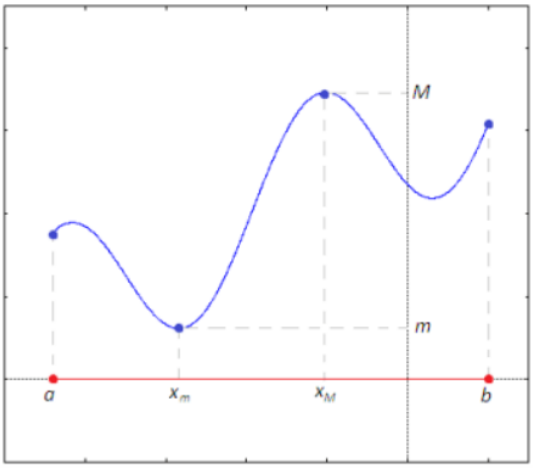
Ing. Borsani Matteo

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Definizione:

se una funzione ha dominio nell'insieme dei numeri reali, definita e continua su un intervallo chiuso e limitato, allora la funzione ammette, in tale intervallo, un massimo ed un minimo assoluti.

Quindi se una funzione ha un dominio chiuso e limitato allora esistono punti di massimo e di minimo entro cui la funzione è definita.



TEOREMA DI ROLLE

Definizione:

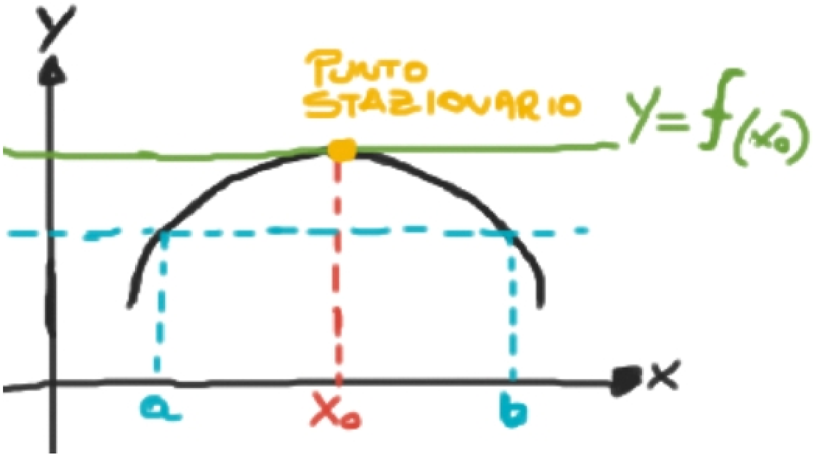
Sia una funzione continua in un intervallo [a,b] e derivabile in (a,b). Se la funzione assume lo stesso valore, calcolati agli estremi dell'intervallo, allora esiste almeno un punto dova la derivata prima si annulla.

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in [a,b] e derivabile in (a,b). Se la funzione ha gli stessi valori agli estremi dell'intervallo, cioè:

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste ALMENO UN PUNTO x_o appartenente al dominio, tale che:

$$f'(x_o) = 0$$



Sapendo che la derivata esprime il coefficiente angolare della retta tangente al punto X_o, tale coefficiente deve valere zero.

La retta tangente è orizzontale e parallela all'asse x e la sua equazione è:

$$y = f(x_o)$$

Il teorema di Rolle afferma che possono esserci più punti di massimo e minimo e nelle funzioni costanti, tali punti sono infiniti.

Esempio.

$f(x) = \sin(x) + 1 \quad [0;\pi]$ e derivabile in $(0;\pi)$

con $f(0) = 1 = f(\pi)$

$f'(x) = \cos(x)$ in $x_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

TEOREMA DI CAUCHY

Non è un vero e proprio teorema, ma un lemma, cioè un'analisi preliminare per dimostrare un teorema (teorema di Lagrange).

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = f'(x_0)[g(b) - g(a)]$$

TEOREMA DI LAGRANGE

Definizione:

quando una funzione è continua e derivabile in un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora ammette *ALMENO* un punto in cui la derivata prima, ha lo stesso valore del rapporto incrementale, esistente tra i punti estremi dell'intervallo.

Sia $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua in [a,b] e derivabile in (a,b). Allora esiste ALMENO UN PUNTO* x_o *interno all'intervallo (a,b) tale che:*

$$f(b)-f(a)=f'(x_o)(b-a)$$

Esempio.

$f(x) = \ln(x) \quad [1;4]$ in $x_0 = ?$

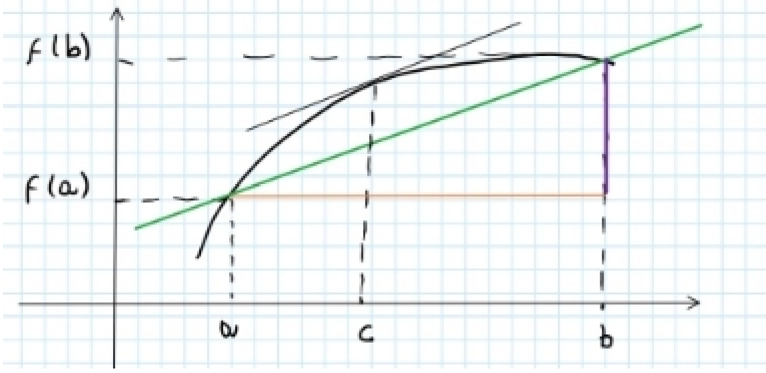
$f(1) = 0$

$f(4) = \ln(4)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$

$\ln(4) = \frac{1}{x}(3) \rightarrow \ln(4) = \frac{3}{x} \rightarrow x = \frac{3}{\ln(4)} \simeq 2,16$


f(b)
f(a)
a
c
b

