STUDIO DI FUNZIONE

1. *CONDIZIONI DI ESISTENZA:*

Frazione $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \quad D(x) \neq 0$

Radice $\sqrt[n]{a} \rightarrow \quad a \geq 0 \quad solo\ per\ n \rightarrow pari$

Logaritmo $log(a) \rightarrow \quad a > 0$

Se la funzione non presenta questi tre operatori, le condizioni non si pongono perché sono accettabili tutti i valori di x:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

2. *DOMINIO:*

Frazione $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \quad \big(-\infty; D(x)\big)\ U\ \left(D(x);\ \infty\right)$

Radice $\sqrt[n]{a} \rightarrow \quad [a;\ \infty)$

Logaritmo $log(a) \rightarrow \quad (a;\ \infty)$

Se la funzione non presenta questi tre operatori, le condizioni non si pongono perché sono accettabili tutti i valori di x:

$$D: (-\infty;\ \infty)$$

3. *SIMMETRIE:*

Una funzione è pari se è simmetrica rispetto all'asse y; deve valere la seguente uguaglianza:

$$f(x) = f(-x)$$

→ si sostituisce (-x) a tutte le (x) della funzione.

Una funzione è dispari se è simmetrica rispetto all'origine (O), quindi all'asse x e y

$$f(-x) = -f(x)$$

→ si cambia segno alla funzione (se frazione, cambio segno solo al numeratore).

4. INTERSEZIONI ASSI:

Asse y con x = 0

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \end{cases} \rightarrow \textit{sostituisco lo zero alle x della funzione}$$

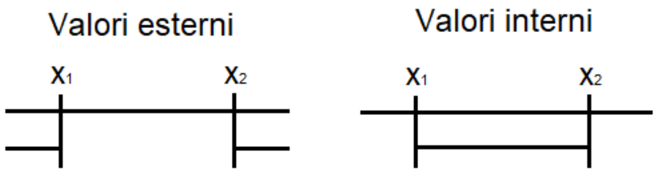
Asse x con y = 0

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \textit{si pone la funzione uguale a zero}$$

5. SEGNO DELLA FUNZIONE:

Lo studio del segno serve per capire dove la funzione è sopra l'asse delle x (positiva) oppure sotto l'asse delle x (negativa). Essendo una disequazione, ricorda che, nelle disequazioni di secondo grado, per valori maggiori di zero, considero i valori esterni, viceversa considero i valori interni.

$$f(x) \geq 0$$



6. LIMITI:

$\lim\limits_{X \to Xo} f(x)$ → ricerca di asintoti verticali (sostituisco il valore a x_0^- e x_0^+);

Intorno sinistro → x_0 – 0,1;
Intorno destro → x_0 + 0,1;

$\lim\limits_{X \to \pm\infty} f(x)$ → ricerca di asintoti orizzontali → gerarchia, De L'Hopital, scomposizioni

Se non esiste l'asintoto orizzontale, potrebbe esserci quello obliquo.

Devo trovare la retta di equazione: $y = m x + q$

Dove:

$$m = \lim_{X \to \pm\infty} f(x) \bullet \frac{1}{x}$$

$$q = \lim_{X \to \pm\infty} f(x) - m \bullet x$$

7. *STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA:*

Lo studio della derivata prima ci permette di calcolare la crescenza e/o decrescenza di una funzione ed i suoi eventuali punti di massimo e/o minimo.

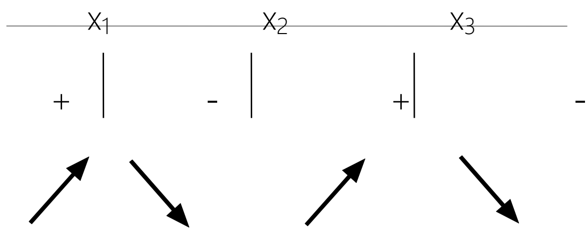
Calcolata la derivata prima, si pone ≥ 0.

$$f'(x) \geq 0$$

Metto a grafico le soluzioni e verifico dove la funzione cresce o decresce.

Ricorda che il grafico prevede:

- freccia verso l'alto, dove è +;
- freccia verso il basso, dove è -.



x_1 e x_3 sono due punti di massimo [max]

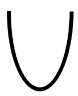
x_2 è un punto di minimo [min]

8. *STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA.*

Lo studio della derivata seconda ci permette di calcolare la concavità o convessità di una funzione ed i suoi eventuali punti di flesso.

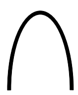
Il procedimento è identico al precedente; dopo aver posto la derivata seconda ≥ 0, si disegna il grafico, ma al posto delle frecce, si usano i simboli per indicare la concavità, infatti:

- dove è +, la concavità è rivolta verso l'alto (sorride);



convessa

- dove è -, la concavità è rivolta verso il basso (triste);



concava

Massimi e minimi

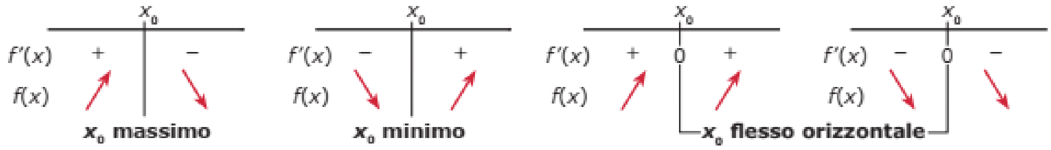
Data la funzione $y = f(x)$ con dominio D e dato il punto $x_0 \in D$, se

- $f(x_0) = M$ e $M \geq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **massimo assoluto**;
- $f(x_0) = m$ e $m \leq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **minimo assoluto**.

Se esiste un intorno I di x_0 tale che:

- $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **massimo relativo**;
- $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **minimo relativo**.

Nella pratica, si studia il segno della derivata prima di $f(x)$ individuando massimi, minimi ed eventuali flessi orizzontali della funzione.



si calcola la derivata prima di $f(x)$

si pone $f'(x) = 0$

si risolve l'equazione ottenendo le soluzioni

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

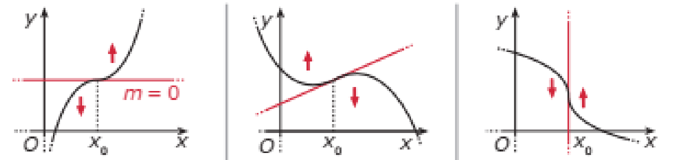
i punti $x_0, x_1, x_2, \ldots$ possono essere di massimo, di minimo o di flesso orizzontale

i punti così trovati si analizzano uno alla volta sostituendoli nelle derivate di ordine successivo

- se:
  $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **minimo relativo**
  $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **massimo relativo**
  $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f'''(x)$
- se:
  $f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **flesso orizzontale**
  $f'''(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f^{IV}(x)$
- se:
  $f^{IV}(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **minimo relativo**
  $f^{IV}(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ è un punto di **massimo relativo**
  $f^{IV}(x_0) = 0 \rightarrow$ si calcola $f^{V}(x)$ .... e così via

Punti di flesso

Se in x_0 il grafico di $f(x)$ cambia concavità, la curva ha un punto di flesso che può essere orizzontale, obliquo o verticale.



x_0 è punto di flesso **orizzontale** | x_0 è punto di flesso **obliquo** | x_0 è punto di flesso **verticale**

Condizioni per la concavità e per i flessi

$y = f(x)$ definita e continua in I, con $x_0 \in I$; $f'(x)$, $f''(x)$ definite e continue in I:

- se $f''(x_0) > 0$, **concavità verso l'alto**;
- se $f''(x_0) < 0$, **concavità verso il basso**;
- se $f''(x_0) = 0$, **condizione necessaria per un flesso**.

Nella pratica, si studia il segno della derivata seconda della funzione individuando concavità e flessi.