FUNZIONI

1. *Le condizioni necessaria e sufficiente:*

Tale concetto è alla base delle funzioni, utili nel ragionamento per comprendere l'esistenza di una funzione.

CONDIZIONE NECESSARIA (solo se – solamente):

Se esiste l'ipotesi, potrebbe valere la tesi; se invece non esiste l'ipotesi, non può valere la tesi.

CONDIZIONE SUFFICIENTE (se):

Se esiste l'ipotesi, la tesi è sicuramente valida se invece non esiste l'ipotesi, la tesi potrebbe valere comunque.

Esempio.

"Essere lombardo è sufficiente per essere italiano".

Ipotesi → essere lombardo;

Tesi → essere italiano.

Essere lombardo (esiste l'ipotesi), è sufficiente per definirsi italiano (esiste sicuramente la tesi), ma se non sono lombardo (non esiste l'ipotesi), posso comunque essere italiano (vale la tesi).

Il fatto di essere lombardo, non è necessario per essere italiano.

Ci si deve quindi domandare se:

- è sufficiente essere lombardo per essere italiano? Si;
- È necessario essere lombardo per essere italiano? No.

Esempio.

"Essere italiano è sufficiente per essere lombardo".

Ipotesi → essere italiano;

Tesi → essere lombardo.

Essere italiano non è sufficiente per definirsi lombardo (posso essere toscano, emiliano, pugliese, ecc.), ma è necessario essere italiano per essere lombardo (la Lombardia è in Italia).

Ci si deve quindi domandare se:

- è sufficiente essere italiano per essere lombardo? No;
- È necessario essere italiano per essere lombardo? Si.

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE (se e solo se):

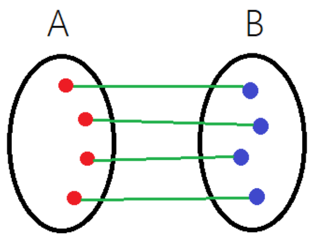
L'ipotesi equivale alla tesi, cioè se vale una, vale anche l'altra e viceversa.

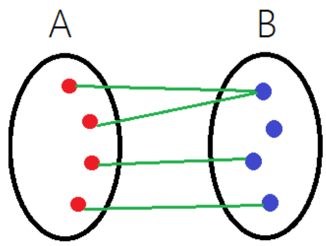
2. *Definizione*

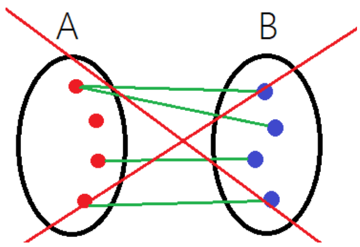
Una funzione è una legge che associa, ad ogni elemento dell'insieme A, uno ed un solo elemento di B.

La funzione si indica con f.

$$f : A \to B$$







Nell'ultima figura di esempio, la definizione di funzione non è rispettata, infatti:

- Nell'insieme A, ad un elemento sono associati due elementi distinti di B;
- Nell'insieme A, non tutti gli elementi sono associati a B.

Per semplicità, chiameremo l'insieme A, insieme delle X, mentre B, insieme delle Y.

3. Definizione Geometrica

Una funzione si può rappresentare mediante un grafico cartesiano ed è definito come l'insieme dei punti del piano cartesiano.

Il grafico della funzione *è quindi il luogo geometrico dei punti del piano, per cui ad ogni ascissa (x) appartenente al dominio (D) della funzione, viene associata l'ordinata (y = ƒ(x)), cioè il valore della y che la rende funzione associata alla x.*

Perciò, l'unione di tutti i punti (x; y) del piano individuati dalla legge y = ƒ(x) è il grafico della funzione.

$$y = f(x)$$

Ad esempio.

alla retta di equazione $y(x_0) = 2x + 2$ considerata nel punto $x_0 = 1$, corrisponde il valore y, tramite la funzione:

$$y = 2x + 2$$

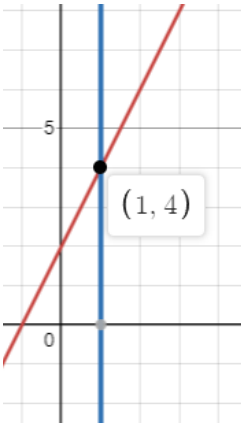
→ $f(x) = 2x + 2$

se consideriamo il punto x = 1

→ $f(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

La coppia di coordinate x = 1 e y = 4 rappresenta il punto del piano (1; 4).

Quindi sostituendo il valore di x_0 nella funzione, si trova il rispettivo valore di y, che corrisponde al valore della funzione $f(x)$.



Cioè, quando la x (variabile indipendente) vale 1, la funzione restituisce un valore y (variabile dipendente) = 4.

4. Dominio

Il dominio è un intervallo di valori per cui la funzione è definita; cioè, è l'insieme di partenza su cui ha senso studiare la funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = A \text{ (o insieme X)}$$

L'insieme A rappresenta quindi i valori di y, che la funzione restituisce dopo averli associati ai valori di x.

In poche parole, l'insieme A (insieme X) è il dominio della funzione, cioè i valori di input.

Ad esempio.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \qquad \text{considerata nel punto } x_0 = 2$$

$\rightarrow f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 8 + 8 - 4 + 3 = 15$

La funzione restituisce un valore diverso da zero, quindi la funzione è definita in $x = 2$ e tale numero appartiene al dominio.

A seconda del tipo di funzione che dobbiamo risolvere, il dominio presenta alcune "limitazioni", cioè per determinati valori, la funzione non è definita. Da questa considerazione, per alcuni operatori matematici è necessario determinare le condizioni di esistenza (C.E.), cioè trovare i valori che rendono indefinita la funzione.

Ricordiamo che le C.E. si utilizzano per:

a. FRAZIONI → il denominatore deve essere diverso da zero;
b. RADICI (*ad indice pari*) → il radicando deve essere maggiore o uguale a zero;
c. LOGARITMI → l'argomento deve essere maggiore di zero.

Altri operatori che richiedono le C.E. sono le funzioni trigonometriche come:

d. TANGENTE → la tangente non è definita per valori di $\pi/2 + k\pi$;
e. COTANGENTE → la cotangente non è definita per valori $k\pi$.

Perciò, se la funzione data non presenta uno di questi operatori matematici, allora il dominio coincide con tutto l'insieme dei numeri reali.

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Per ogni x appartenete a R, cioè posso attribuire all'incognita x, un qualsiasi valore appartenete ai numeri reali.

Da ciò si comprende come il dominio è direttamente connesso alle condizioni di esistenza.

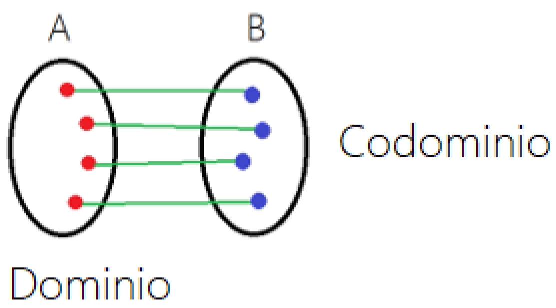
Specifica:

Il dominio è in realtà un sottoinsieme dell'insieme di definizione (o dominio naturale); infatti si parla di campo di esistenza in presenza di due o più condizioni di esistenza.

5. Codominio

Il codominio di una funzione è l'insieme dei valori, che la stessa può assumere, ma non necessariamente; è perciò l'insieme di arrivo (insieme B oppure Y).

$$Cod\ (f) = B$$



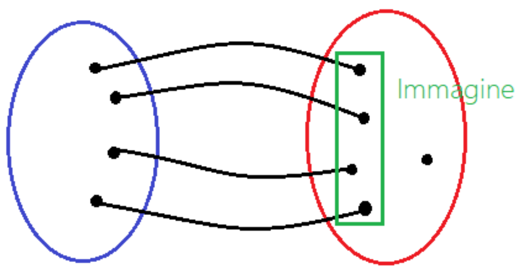
Gli esercizi, in cui è richiesto il calcolo del codominio, non hanno senso perché il codominio viene già definito dalla funzione; è però possibile capire dove si trova tale codominio, osservando il dominio.

6. Immagine:

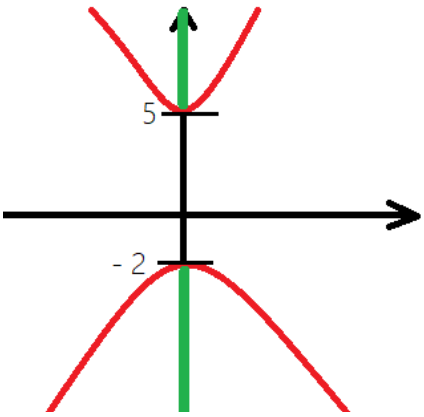
L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti dalla funzione sul dominio ed è contenuta nell'insieme codominio.

$$Im\ (f)$$

L'immagine di una funzione sono quindi i valori dell'insieme B (codominio), associati ai valori dell'insieme A (dominio); se gli elementi sono tutti associati, l'immagine coincide con il codominio.



Graficamente, l'immagine rappresenta tutti i valori sull'asse delle ordinate (Y), associati alla funzione.



Rispetto alla figura precedente, si notano (in verde) i valori dell'immagine, i quali posso essere scritti come:

$$Im\ (f) = (-\infty\ ;\ -2\ ]\ U\ [\ 5\ ;\ \infty\ )$$

7. Controimmagine:

La controimmagine di una funzione è l'insieme degli elementi che compongono il dominio, i quali vengono mandati in un sottoinsieme del dominio, detto appunto controimmagine.

$$f^{-1}(C)$$

La controimmagine NON è la funzione inversa, anche se la nomenclatura è la stessa !

Riassumendo:

$$Insieme\ A\ (X) \rightarrow Dominio \rightarrow controimmagine$$

$$Insieme\ B\ (Y) \rightarrow codominio \rightarrow immagine$$

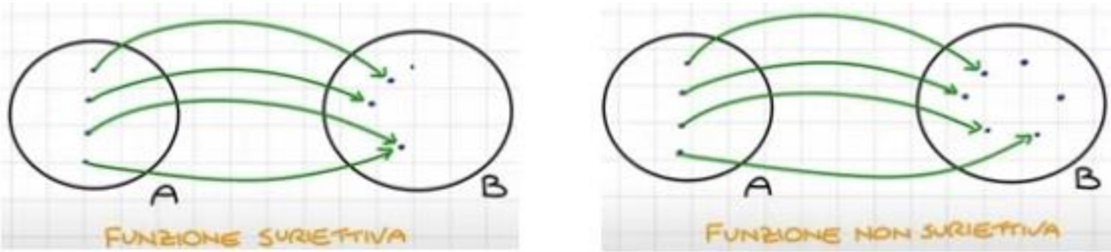
8. Funzione suriettiva, iniettiva e biunivoca:

a) SURIETTIVITA':

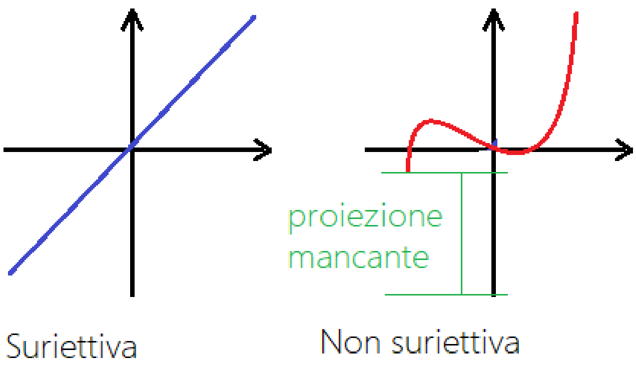
Una funzione è suriettiva quando ad ogni elemento del dominio sono associati tutti i valori del codominio, cioè quando l'immagine coincide con il codominio.

$$funzione\ suriettiva: \quad sse \ \ Im(f) = Cod(f)$$

Graficamente (diagrammi Eulero- Venn) una funzione risulta suriettiva se tutti gli elementi del codominio sono associati ad un elemento del dominio (gli elementi dell'insieme B sono raggiunti da almeno una freccia).



Una funzione è suriettiva se il suo grafico viene intersecato ALMENO UNA VOLTA, da ogni retta orizzontale e la proiezione sull'asse y del grafico, copre interamente l'asse delle ordinate.



Dalla precedente figura si nota come la funzione di destra non è suriettiva in quanto la proiezione della funzione non copre tutto l'asse y.

È sempre possibile rendere una funzione non suriettiva, suriettiva, restringendo il codominio.

Calcolare la suriettività di una funzione, analiticamente:

$$y = x - 9$$

a. Risolvo come equazione in funzione della variabile x (esplicito la x):

$$x = y + 9$$

b. Cioè, qualunque valore si scelga per y, si può trovare una preimmagine x, come da equazione precedente.

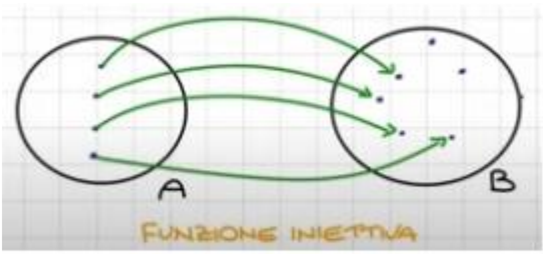
   La funzione è suriettiva.

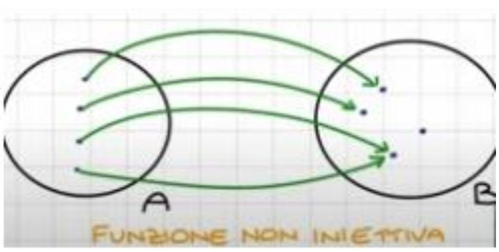
Se si considera ad esempio, una funzione parabola con discriminante negativo, la stessa non ha soluzioni perciò non esistono preimmagini per valori negativi (ad esempio y = - 6), di conseguenza la funzione non è suriettiva.

b) INIETTIVITA':

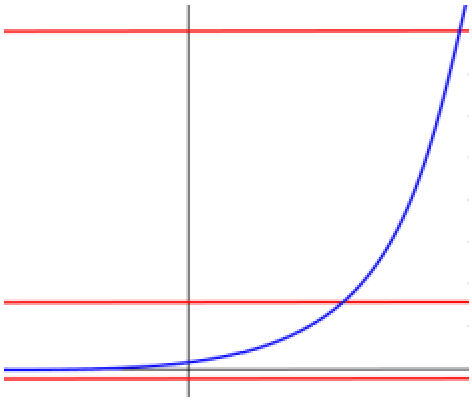
Una funzione è iniettiva quando associa elementi diversi del dominio a elementi diversi del codominio.

Graficamente (diagrammi Eulero- Venn) una funzione risulta iniettiva se gli elementi del codominio sono associati ad un solo elemento del dominio (gli elementi dell'insieme B sono raggiunti da una sola freccia); non importa se non tutti gli elementi del codominio sono associati.





Una funzione è iniettiva se il suo grafico viene intersecato AL MASSIMO UNA VOLTA, da ogni retta orizzontale.



Come si può vedere, qualsiasi retta orizzontale (rosso) si tracci, essa incontra solo in un punto la funzione (blu).

<u>*Calcolare l'iniettività di una funzione, analiticamente*</u>:

$f(x) = 3x + 5$

a. Impongo l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$, cioè sostituisco x_1 e x_2 alla x ed eguaglio le funzioni:

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$$

b. Risolvendo come equazione (divido fratto 3 e sposto a destra il primo 5), ottengo:

$$x_1 = x_2$$

c. Non avendo ulteriori possibilità di soluzioni, oltre a $x_1 = x_2$, la funzione è iniettiva.

$f(x) = x^2 - 3$

Impongo l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$, cioè sostituisco x_1 e x_2 alla x ed eguaglio le funzioni:

$$x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3$$

Risolvendo come equazione ottengo:

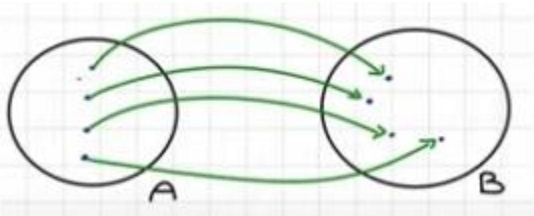
$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1 = \pm\, x_2$$

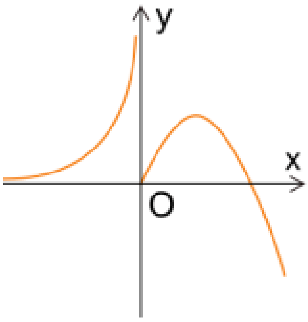
Le soluzioni sono $x_1 = x_2 \cup x_1 = -x_2$, cioè ad un elemento sono associato due elementi diversi ($\pm x_2$), di conseguenza la funzione non è iniettiva.

c) BIIETTIVITA':

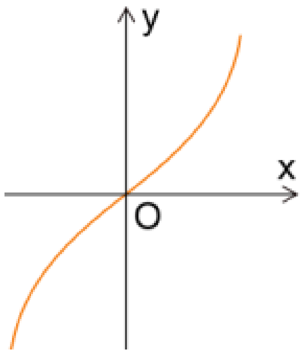
Una funzione è biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva, cioè sono funzioni che associano un solo elemento del codominio, ad un solo elemento del dominio.



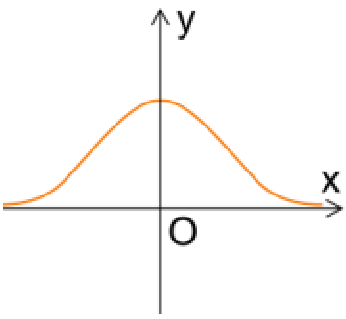
Esempi grafici per comprendere meglio.



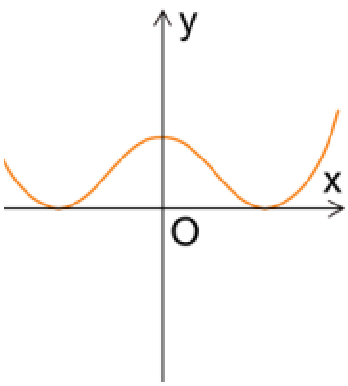
FUNZIONE SURIETTIVA MA NON INIETTIVA;



FUNZIONE SURIETTIVA ED INIETTIVA, QUINDI BIIETTIVA;



FUNZIONE NE' SURIETTIVA NE' INIETTIVA;



FUNZIONE NE' SURIETTIVA NE' INIETTIVA.

9. Funzione invertibile:

Una funzione può essere invertibile se e solo se, essa è biiettiva (sia iniettiva sia suriettiva).

L'invertibilità non è un concetto assoluto, infatti se la funzione in esame non è biiettiva, magari lo può essere in una parte del suo dominio, quindi, restringendo l'intervallo, una funzione non biunivoca può diventare biiettiva e quindi invertibile.

La condizione di biiettività, è quindi una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità.

$$x = f^{-1}(y)$$

Se una funzione è invertibile, il dominio della sua inversa, coincide con l'immagine della funzione.

Una funzione invertibile e la sua inversa, hanno lo stesso grafico (sovrapposizione);

Per rappresentare la funzione inversa, devo scambiare le x e le y alla funzione invertibile.

Ad esempio:

La funzione:

$f(x) = 3x + 5$

è una funzione biunivoca, di conseguenza è sicuramente invertibile in tutto il suo dominio, infatti è iniettiva perché:

$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \ \rightarrow \ x_1 = x_2$

È suriettiva perché:

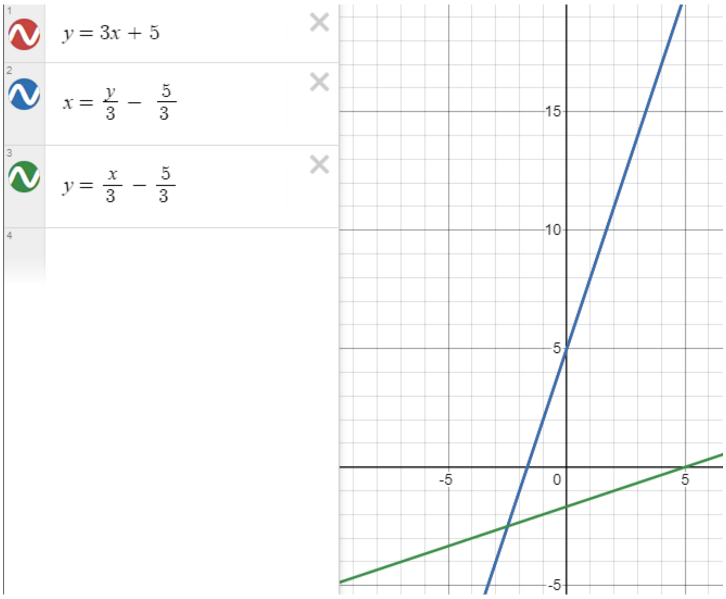
$x = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}$

La funzione invertibile (che coincide graficamente con la funzione iniziale) è data da:

$$f^{-1}(x) = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}$$

La funzione inversa è data da:

$$f^{-1}(y) = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$$



La funzione:

$$f(x) = e^x$$

è una funzione iniettiva ma non suriettiva (è sempre positiva, perciò non copre la parte negativa dell'asse y).

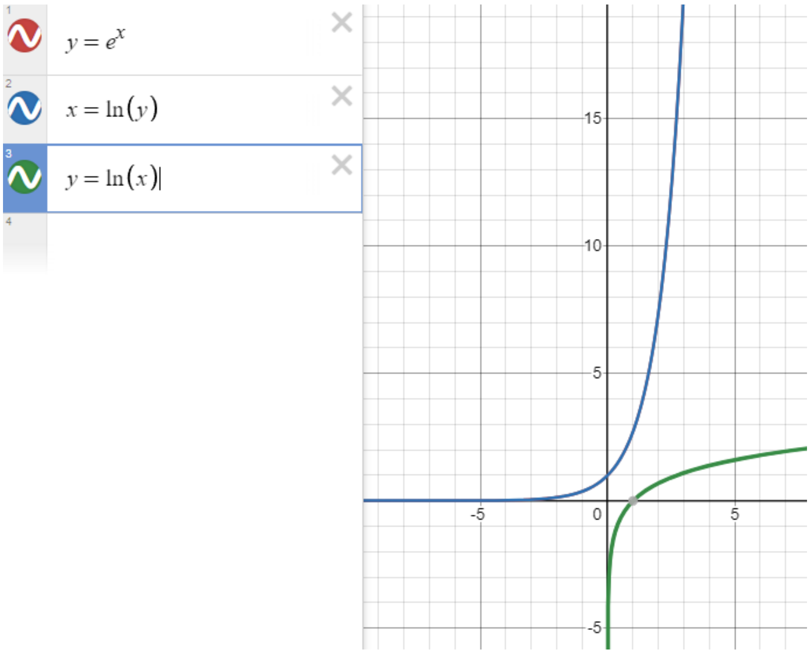
Se restringo l'intervallo da (0; + ∞), la funzione diventa biiettiva, quindi invertibile.

La funzione invertibile è data da:

$$x = \ln{(y)}$$

La funzione inversa è:

$$y = \ln{(x)}$$



10. Simmetria:

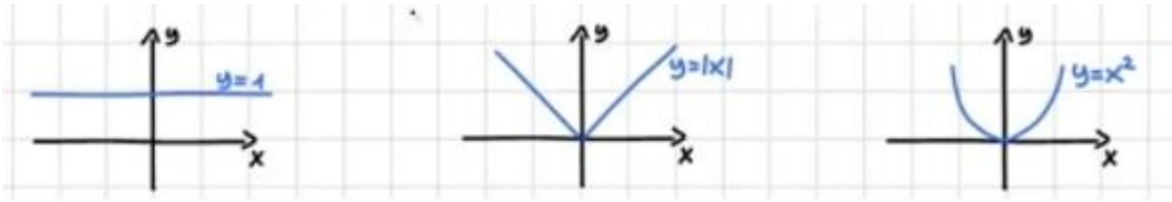
- FUNZIONE PARI:

Una funzione si definisce pari, se per ogni X appartenente al dominio, vale l'uguaglianza:

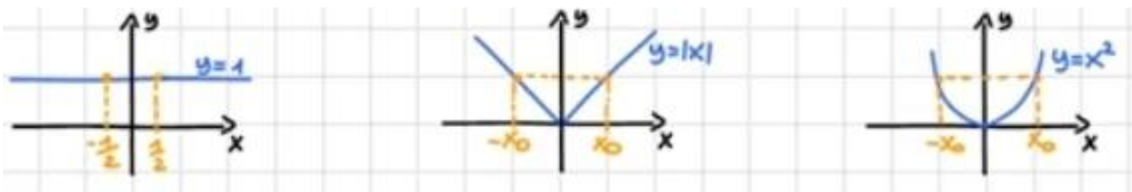
$$f(x) = f(-x)$$

Ciò significa che, la funzione calcolata in un punto, ad esempio + 3, deve avere lo stesso risultato della funzione calcolata in – 3; per ogni punto del dominio.

Le funzioni pari hanno la peculiarità di essere SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ASSE Y, cioè sono "specchiate" rispetto all'asse delle ordinate.



Ogni valore associato a x_0 è simmetrico a $-x_0$.



Ad esempio:

$f(x) = x^2 - 5$

$\rightarrow f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5$

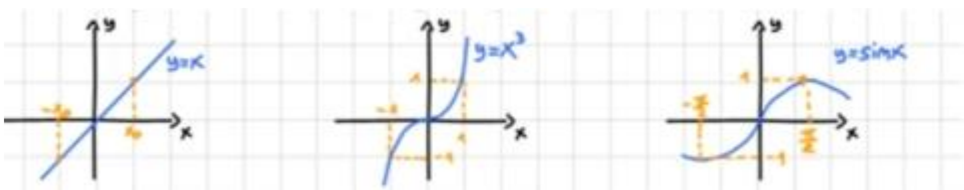
- FUNZIONE DISPARI:

Una funzione si definisce dispari, se per ogni X appartenente al dominio, vale l'uguaglianza:

$$f(-x) = -\ [f(x)]$$

Ciò significa che, la funzione calcolata in un punto, ad esempio + 3, dà come risultato 8, allora la funzione calcolata in – 3, deve risultare – 8; per ogni punto del dominio.

Le funzioni pari hanno la peculiarità di essere SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ASSE Y e SUCCESSIVAMENTE, RISPETTO ALL'ASSE X; come se fossero "doppiamente specchiate".



Ad esempio:

$f(x) = x^3$

$\rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$\rightarrow -f(x) = -x^3$

$\rightarrow$ *la funzione è dispari perchè* $f(-x) = -f(x)$

<u>Una funzione non deve necessariamente essere o pari o dispari; infatti può essere pari, dispari o nessuno dei due.</u>

11. Operazioni tra funzioni:

Come ogni espressione matematica, anche tra le funzioni si possono effettuare operazioni come somma, prodotto, differenza, prodotto per uno scalare, etc…

Per ogni operazione, la funzione subisce una traslazione nel grafico:

Si prenda come esempio la funzione:

$$f(x) = \log(x)$$

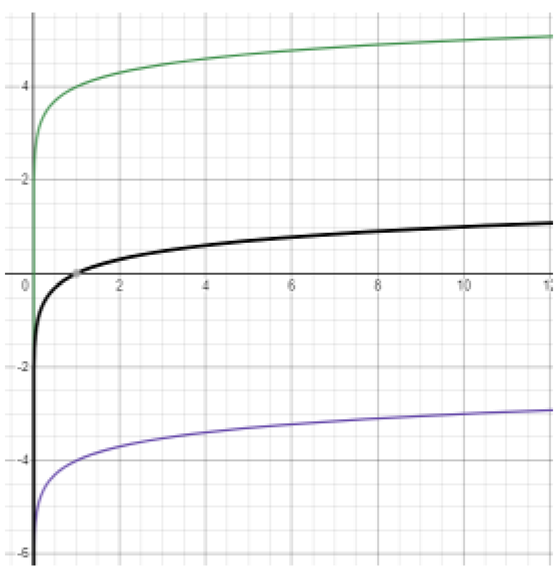
➢ *somma e sottrazione di una costante alla variabile, fuori le parentesi:*

- sommando/ sottraendo fuori dall'argomento, la funzione sale/scende, rispetto alla posizione originale.

In verde la funzione $f(x) = \log(x) + 4$;

In nero la funzione $f(x) = \log(x)$;

In viola la funzione $f(x) = \log(x) - 4$.



- *somma e sottrazione di una costante alla variabile, dentro le parentesi:*

- sommando/ sottraendo dentro dall'argomento, la funzione si sposta a sinistra/destra, rispetto alla posizione originale.

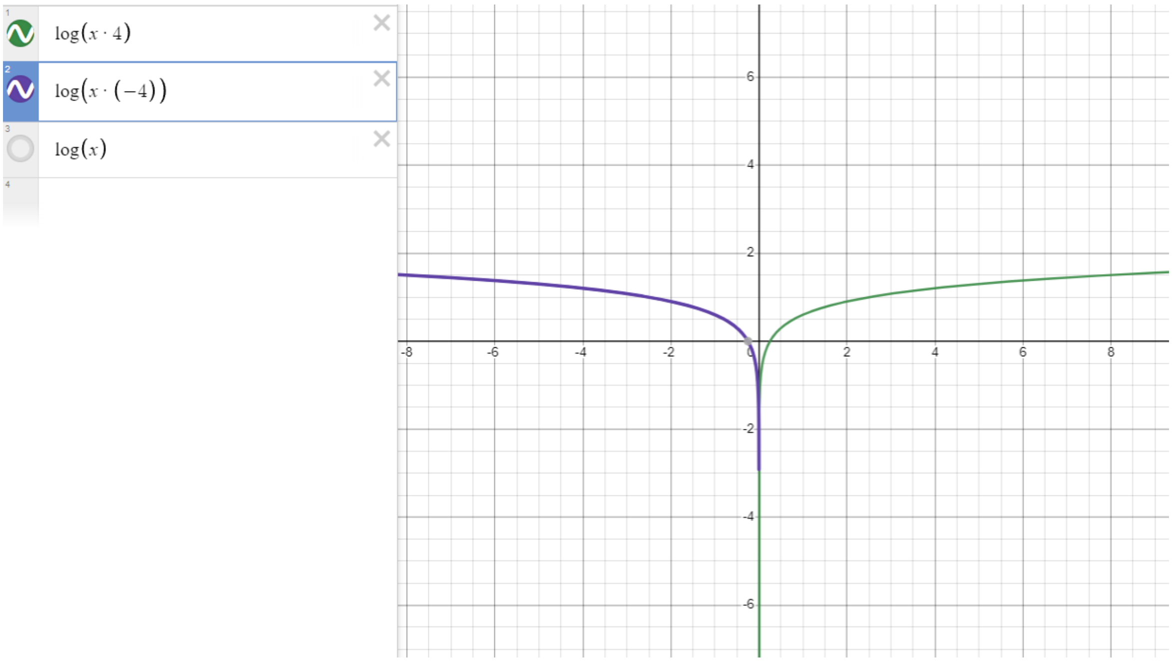
In verde la funzione $f(x) = \log(x + 4)$;

In nero la funzione $f(x) = \log(x)$;

In viola la funzione $f(x) = \log(x - 4)$.

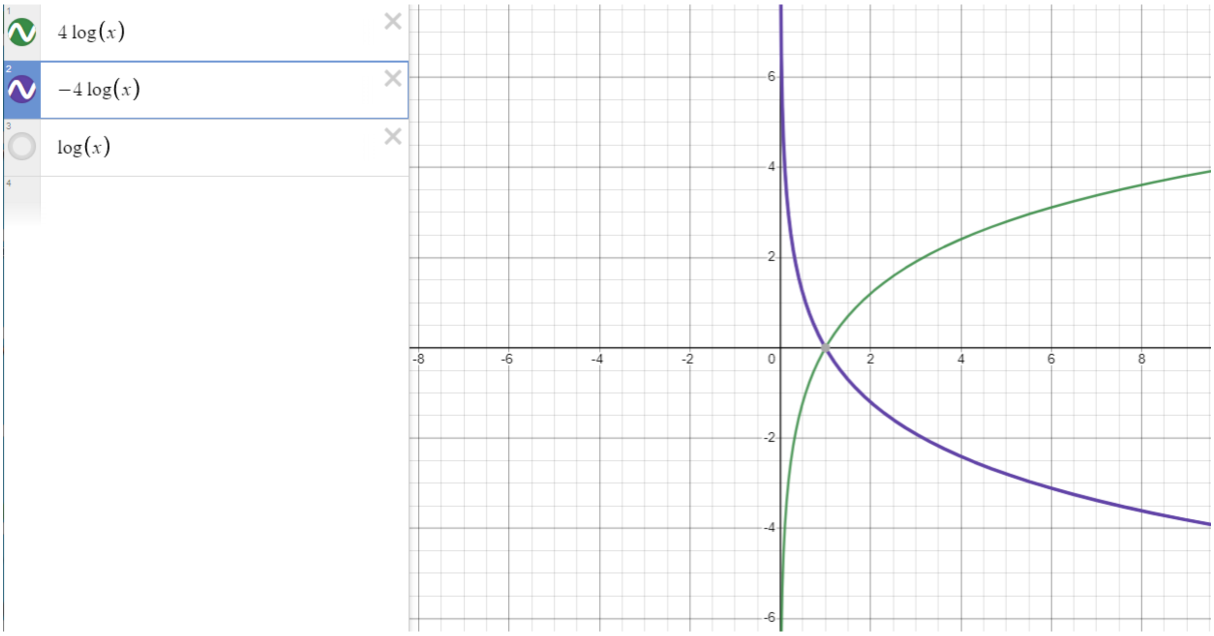
- *prodotto (rapporto) di una costante per la variabile, dentro le parentesi:*

- moltiplicando dentro l'argomento, la funzione risulta specchiata, rispetto alla posizione originale, in funzione del segno dell'argomento.

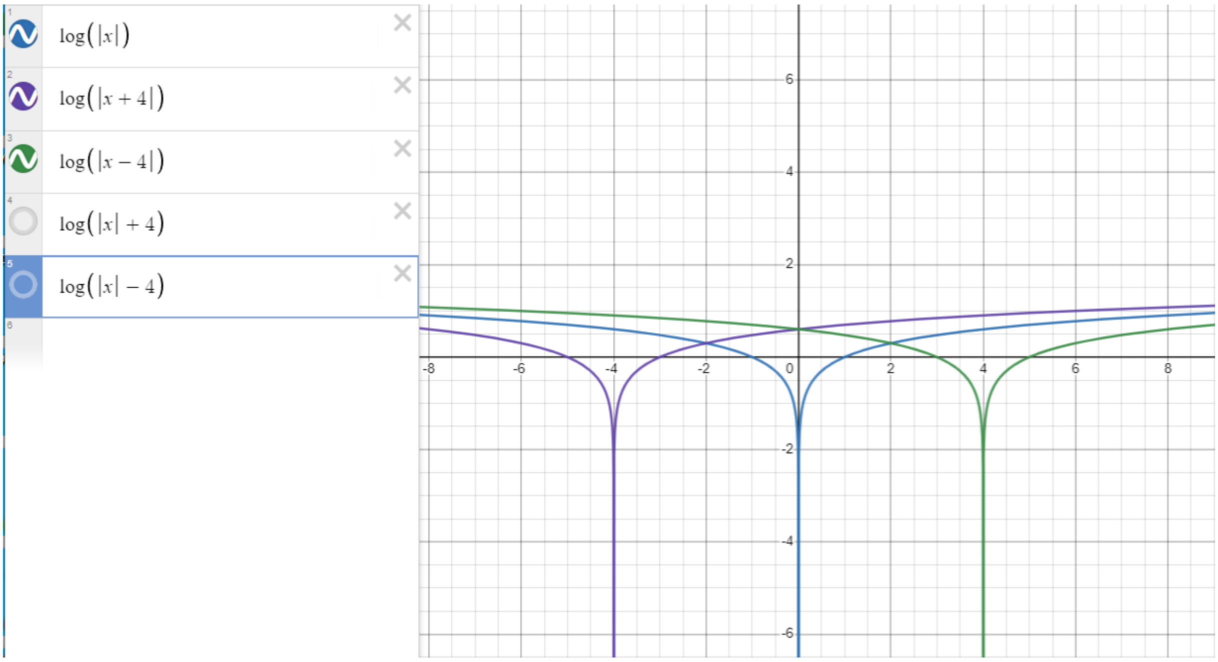


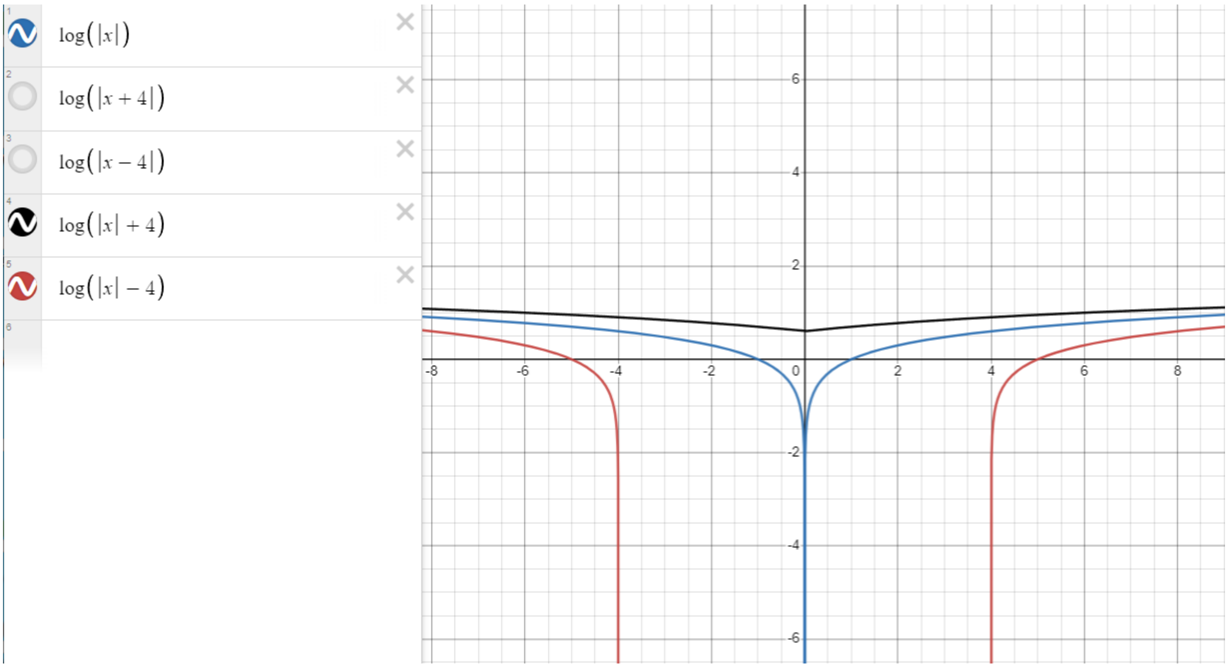
➢ *prodotto (rapporto) di una costante per la variabile, fuori le parentesi:*

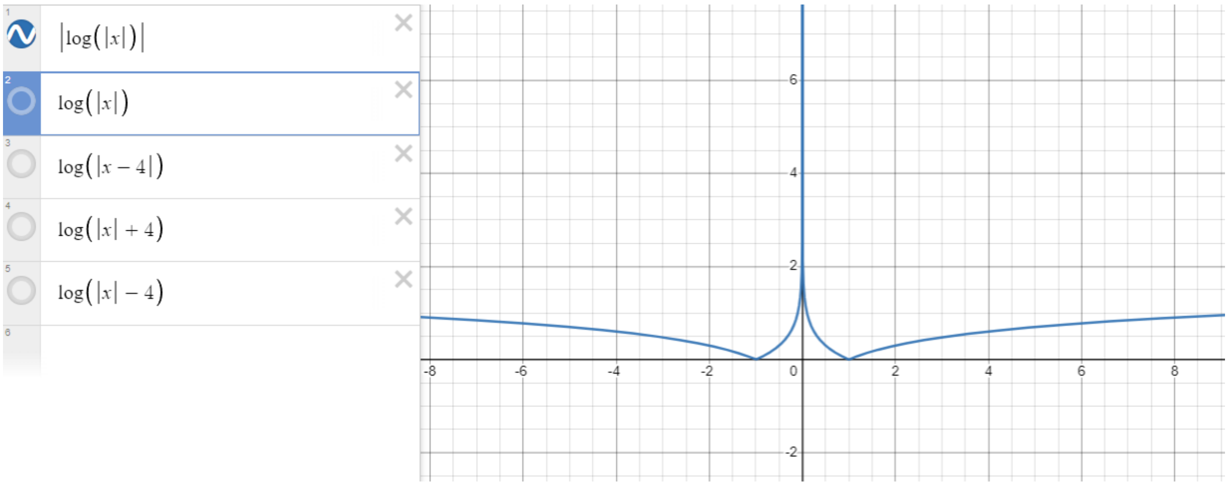
- moltiplicando fuori dall'argomento, la funzione risulta specchiata, rispetto all'asse delle scisse (x) in base al segno della costante.

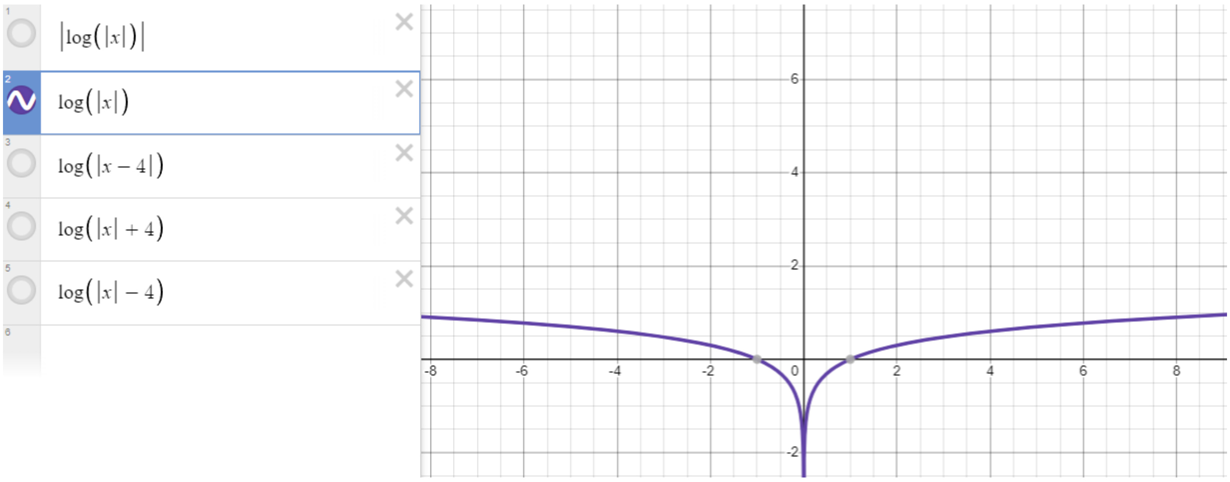


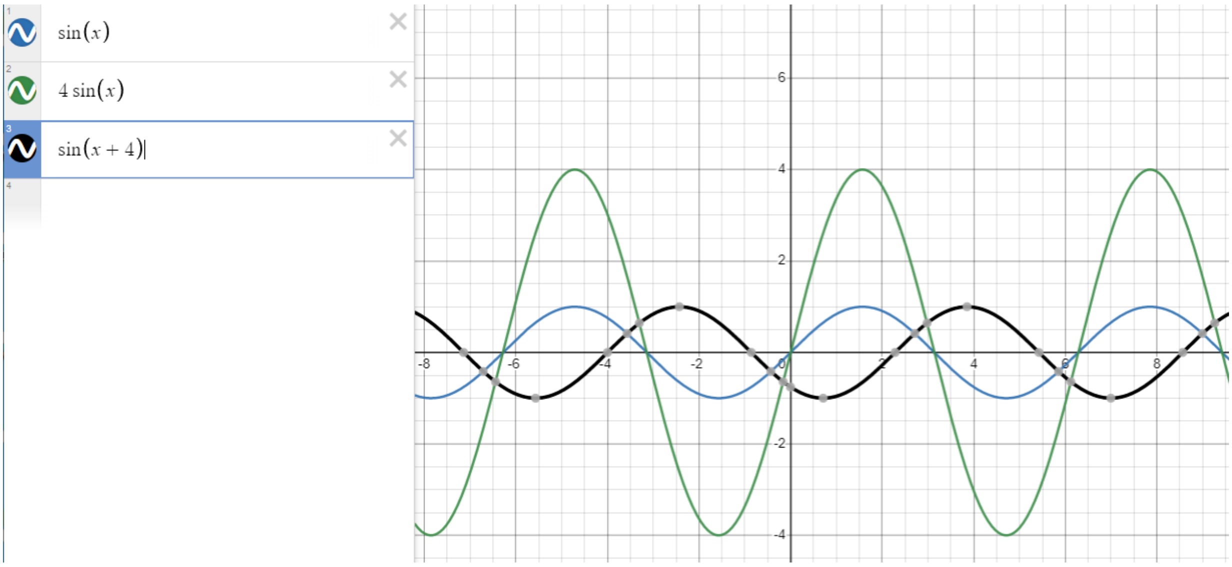
➢ *Altri esempi:*




log(|x|)
log(|x + 4|)
log(|x − 4|)
log(|x| + 4)
log(|x| − 4)


|log(|x|)|
log(|x|)
log(|x − 4|)
log(|x| + 4)
log(|x| − 4)


|log(|x|)|
log(|x|)
log(|x − 4|)
log(|x| + 4)
log(|x| − 4)


sin(x)
4 sin(x)
sin(x + 4)
6
4
2
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
4
6
8