Problema 1

(a) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(n+1)$ es par.

(b) Dados dos enteros n, m, probar que nm es par si y solo si n es par o m es par.

(a) $P(n) := n(n+1) = 2m$

Por inducción, debemos comprobar que $n_0 \in \mathbb{N}$ cumple con P. $P(n_0)$

$n_0 = 1$ dado que es el primer número natural.

1. $P(1) \to 1(1+1) = 1(2) = 2$ ✓

2. Ahora, asumiendo que $P(n)$ es cierto, toca comprobar que $P(n+1)$ lo sea: $n(n+1) = 2k$

$$(n+1)(n+2) = 2m \to n^2 + 3n + 2 = 2m \to n(n+3) + 2 = 2m$$

$$\to n(n+1) + 2n + 2 = 2m \to 2k + 2n + 2 = 2m$$

$$2(k + n + 1) = 2m \quad ✓$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto para $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

b) nm es par si y solo si n es par o m es par

$P \iff (Q \vee R)$

Vamos a negar que n y m sean pares y vamos a demostrar que nm tampoco es par:

$n = 2k+1 \qquad nm = (2k+1)(2t+1) = 2kt + 2k + 2t + 1$

$m = 2t+1 \qquad nm = 2(kt + k + t) + 1$ ✓

Ahora vamos a negar que nm es par:

$nm = 2k+1 \to \left.\begin{array}{l} n = 2t \\ m = 2s \end{array}\right\} 4ts = 2k+1 \to 2(2ts) = 2k+1$ ※

por tanto, n o m han de ser pares.

Problema 2

Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple $P(n)$.

$$P(n) := \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Para demostrar el enunciado a través del principio de inducción debemos:

1. Verificar que P se cumple con n_0, siendo n_0 el primer elemento de $\mathbb{N}$ (1):

$$P(1) := \sum_{i=1}^{1} 1^3 = \frac{1}{4} 1(2)^2 \to 1 = \frac{4}{4} = 1 \quad ✓$$

2. Verificar que $P(n+1)$ sea cierto suponiendo que $P(n)$ lo es:

$$P(n+1) := \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \to$$

$$\to \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \to \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

$$\cancel{(n+1)^2}\left(\frac{1}{4} n^2 + n + 1\right) = \frac{1}{4}\cancel{(n+1)^2}(n+2)^2 \to \frac{1}{4} n^2 + n + 1 = \frac{1}{4}(n^2 + 4n + 4)$$

$$\frac{1}{4} n^2 + n + 1 = \frac{1}{4} n^2 + n + 1 \quad ✓$$

Por tanto, $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ gracias al método de inducción.