Politechnika Warszawska
Wydział MiNI
Równania Różniczkowe Zwyczajne

ZESTAW 2

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

a) $(t+x^2)dt - 2txdx = 0$ w zbiorze $t > 0$. Szukaj czynnika całkującego postaci: $\mu(t)$ lub $\mu(x)$.

b) $(tx^2 - x)dt + t^2xdx = 0$ w zbiorze $t > 0$. Szukaj czynnika całkującego postaci: $\mu(t,x) = \mu(tx)$.

c) $(t-x+1)dt + (t-x-1)dx = 0$. Szukaj czynnika całkującego postaci: $\mu(t,x) = \mu(t+x)$.

Ponadto przykłady **335–358** ze zbioru zadań Matwiejewa.

Zadanie 2. Niech $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $C^1(\mathbb{R})$. Rozważ równanie różniczkowe w postaci $g(x,t)dt + h(x,t)dx = 0$. Wykaż, że jeżeli istnieją funkcje $x \mapsto A(x)$, $t \mapsto B(t)$ takie, że

$$B(t)h(x,t) - A(x)g(x,t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

dla wszystkich (t,x), to powyższe równanie różniczkowe posiada czynnik całkujący w postaci $\mu(x,t) = a(x)b(t)$, gdzie funkcje a oraz b spełniają odpowiednio równania $a'(x) = A(x)a(x)$ oraz $b'(t) = B(t)b(t)$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania równań liniowych o stałych współczynnikach:

a) $x'' - 6x' + 8x = 0$;

b) $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$;

c) $x^{(V)} - 10x''' + 9x' = 0$;

d) $x'' + 2x' + 2x = 0$;

e) $x^{(V)} - 4x^{(IV)} + 5x''' = 0$;

f) $x^{IV} + 10x'' + 9x = 0$;

g) $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0$;

h) $x^V + 8x''' + 16x' = 0$;

i) $x'' - 4x' = -12t^2 + 6t - 4$;

j) $x'' + x = 4e^t$;

k) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 3e^{-2t}$;

l) $x'' - x' = (2-t)e^t t^{-3}$;

m) $x^V + 4x''' = e^t + 3\sin 2t + 1$;

n) $x^V - x^{IV} = te^t - 1$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań, gdy dane jest jedno rozwiązanie szczególne:

a) $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} y; \qquad y_s(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix},$

b) $y' = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) & -t \end{pmatrix} y; \qquad y_s(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$

Zadanie 5. Wyznacz rozwiązanie ogólne układu równań:

$$x' = (3t-1)x - (1-t)y + te^{t^2}$$
$$y' = -(t+2)x + (t-2)y - e^{t^2}$$

wiedząc, że układ jednorodny ma rozwiązanie postaci: $(x(t), y(t)) = (\varphi(t), -\varphi(t))$.

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie ogólne układu jednorodnego $Y' = \mathbf{A} \cdot Y$. Gdzie:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Rozwiąż zagadnie Cauchy'ego $Y' = \mathbf{A} \cdot Y$; $Y(0) = Y_0$, gdzie:

a) $\mathbf{A}$ takie jak w przykładzie **b**, $Y_0 = [-4, 0, 1]^T$;

b) $\mathbf{A}$ takie jak w przykładzie **e**, $Y_0 = [0, -1]^T$;

c) $\mathbf{A}$ takie jak w przykładzie **g**, $Y_0 = [0, 1]^T$;

Zadanie 7. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t \\ \dot{y} = 3x - y + 2t \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + t \\ \dot{y} = x + 2y + e^t \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + 1 + 4t \\ \dot{y} = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \sin(2t) \\ \dot{y} = 2x - y + 2t \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dot{x} = y + \cos(t) \\ \dot{y} = -x + t \end{cases}$;

f) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + e^{-t} \\ \dot{y} = x - 2y + 4t \end{cases}$.

Zadanie 8. Udowodnij Lemat Riemanna z wykładu. Jeżeli funkcja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest bezwzględnie całkowalna, to

$$\lim_{p\to\infty} \int_b^a g(t) \sin pt \, dt = 0$$

i analogicznie

$$\lim_{p\to\infty} \int_b^a g(t) \cos pt \, dt = 0.$$

Wskazówka Dowód przeprowadź najpierw dla całki właściwej, a następnie dla niewłaściwej. Wykorzystaj oszacowanie:

$$\left| \int_\beta^\alpha \sin pt \, dt \right| = \left| \frac{\cos p\alpha - cos p\beta}{p} \right| \leqslant \frac{2}{p}.$$

Zadanie 9. Rozwiń w szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcję:

a) $\sin ax$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

b) $\cos ax$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Ponadto przykłady **15.4–15.22** ze zbioru zadań Krysickiego-Włodarskiego.

Zadanie 10. Rozwiń funkcję $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ na przedziale $(0, \pi)$ w szereg sinusów oraz w szereg kosinusów. Do jakiej wartości zbiegają te szeregi w punktach 0 oraz π. Do jakiej wartości zbiegają te szeregi w punktach ${}^3\!/_2\,\pi$ oraz 2π. Czy w ogóle są w powyższych punktach zbieżne? Dlaczego?

Zadanie dodatkowe. Wykaż, że funkcja $u(t,x) \equiv 0$ jest jedynym rozwiązaniem problemu

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & \text{dla } (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi) \\ u(t,0) & = & 0 = u(t,\pi) & \text{dla } t > 0 \\ u(0,x) & = & 0 & \text{dla } x \in [0,\pi]. \end{array} \right. \tag{RPC}$$