CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

① Pierwszego rodzaju (jedna z granic całkowania to ∞)

$$\int_a^\infty f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^\infty = \lim_{T\to\infty} F(T) - F(a) =$$

$$= \begin{cases} \infty & \to \text{całka rozbieżna} \\ b & \to \text{całka zbieżna} \end{cases}$$

② Drugiego rodzaju (dla $x \in \langle a,b\rangle$ $f(x) \to \infty$)

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a} F(x) = \begin{cases} \infty & \to \text{całka rozbieżna} \\ b & \to \text{całka zbieżna} \end{cases}$$

$\uparrow$ nieciągłość

PRZYKŁADY:

① $$\int_0^\infty \sqrt{3^{-x}}\,dx = \int_0^\infty 3^{\frac{-x}{2}}\,dx = \left[\frac{3^{\frac{-x}{2}}\ln 3}{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty = -2\Big(\underbrace{\lim_{t\to\infty} 3^{-\frac{t}{2}}\ln 3}_{0} - \underbrace{3^{-0}}_{1}\ln 3\Big) = -2\cdot(-\ln 3) = 2\ln 3$$

② $$\int_0^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_0^e = \ln^2 e - \lim_{t\to 0}\frac{\ln^2 t}{2} = -\infty$$ $\leftarrow$ całka rozbieżna

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{cases} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{cases} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

BADANIE ZBIEŻNOŚCI CAŁEK 1-EGO RODZAJU

Czy całka jest zbieżna?

FAKT 1.1.7

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \rightarrow \begin{cases} \text{zbieżna na} & p > 1 \\ \text{rozbieżna dla} & p \leqslant 1 \end{cases} - \int_a^\infty \frac{1}{p^x}\,dx$$

$a > 0$

Kryterium porównawcze:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Jeżeli $\int f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to $\int g(x)\,dx$ też jest rozbieżna

Analogicznie: $\int g(x)\,dx$ jest zbieżna $\rightarrow$ $\int f(x)\,dx$ jest zbieżna

FAKT:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ zbieżna} \rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

PRZYKŁAD:

$$\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+1}\,dx \rightarrow \text{zbieżna}$$

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+1} \leqslant \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{x^3} \rightarrow \frac{\sqrt{2}\,x}{x^3} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ zbieżna $\rightarrow$ $\sqrt{2}\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna $\Rightarrow$ to nasza całka też jest zbieżna

KRYTERIUM ILORAZOWE

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad 0 < k < \infty$$

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ i $\int_a^\infty g(x)\,dx$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne

PRZYKŁAD:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 = 1^2 = 1 \quad \to 0 < 1 < \infty$$

$f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

czyli $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ jest zbieżna $(2 > 1)$

to na mocy kryterium ilorazowego całka jest zbieżna

PRZYKŁAD 2:

$$\int_1^\infty \frac{x^2\, dx}{x^3 - \sin x}$$

$\int \frac{1}{x}\, dx$ rozbieżna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3 - \sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1 - \underbrace{\frac{\sin x}{x^3}}_{\to 0}\right)} = 1$$

$$0 < 1 < \infty$$

na mocy kryterium ilorazowego całka jest rozbieżna

Wzory na zastosowania przenoszą się bezpośrednio z całek oznaczonych.

PRZYKŁAD (ciekawostka)

$f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $\langle 1; \infty)$ obracany wokół osi OX

Objętość: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

Pole: $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Pole : $P = 2\pi \int_1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \pi\left(\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{t} - \frac{-1}{1}\right) = \pi$$

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx \sim \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3}\,dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = 1$$

z kryterium ilorazowego pole powierzchni bryły jest nieskończone.