Elementy analizy wektorowej - Operacje całkowania

1. całka objętościowa

W układzie kartezjańskim

$$\int_V \mathrm{F}\,\mathrm{dV} = \iiint_{V(x,y,z)} \mathrm{F(x,y,z)\,dxdydz} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} \mathrm{dy} \int_{z_a(x,y)}^{z_b(x,y)} \mathrm{F(x,y,z)dz}$$

W układzie cylindrycznym $|J|=\rho$ a wiec element objętości $dV=\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

$$\int_V \mathrm{F}\,\mathrm{dV} = \iiint_{V(\rho,\varphi,z)} \mathrm{F}(\rho,\varphi,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{dz}$$

W układzie sferycznym $|J|=r^2 \sin\Theta$ a więc element objętości $dV= r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi$

$$\int_V \mathrm{F}\mathrm{dV} = \iiint_{V(r,\Theta,\varphi)} \mathrm{F}(\mathrm{r},\Theta,\varphi)\,\mathrm{r}^2 \sin\Theta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\Theta\, d\varphi$$

2. całka powierzchniowa

i) niezorientowana
W układzie kartezjańskim

$$\int_S \mathrm{F\,dS} = \int_{S'} \mathrm{F}\frac{\mathrm{dS'}}{\cos(\mathbf{n},\mathrm{z})} = \iint_{S'} \mathrm{F(x,y,f(x,y))}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}\mathrm{dxdy}$$

gdzie płat powierzchni S określony jest funkcją z=f(x,y). S' jest rzutem płata powierzchni S na płaszczyznę xy.
Cos(**n**,z) jest kosinusem kąta miedzy normalną do powierzchni a osią z jako normalną do płaszczyzny xy. Z postaci równania powierzchni z-f(x,y)=0 wynika wektor normalny

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{1}_\mathrm{x} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathbf{1}_\mathrm{y} + \mathbf{1}_\mathrm{z}$$

a stąd kosinus kierunkowy

$$\cos(\mathbf{n},\mathrm{z}) = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{1}_\mathbf{z}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2\right)}}$$

Dla obliczenia całki powierzchniowej po powierzchni kuli (K o promieniu R w układzie sferycznym otrzymuje się wyrażenie

$$\int_{\mathrm{K(R},\Theta,\varphi)} \mathrm{F(x,y,z)\,dS} = \iint_{\mathrm{K(R},\Theta,\varphi)} \mathrm{F}(\mathrm{R}\sin\Theta\ \cos\varphi, \mathrm{R}\sin\Theta\ \sin\varphi, \mathrm{R}\cos\Theta)\mathrm{R}^2\sin\Theta\ \ \mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi$$

ii) całka powierzchniowa zorientowana skalarna

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S (\mathrm{F_x}\mathbf{1_x} + \mathrm{F_y}\mathbf{1}_\mathrm{y} + \mathrm{F_z}\mathbf{1}_\mathrm{z})(\mathrm{dS_x}\mathbf{1}_\mathrm{x} + \mathrm{dS_y}\mathbf{1}_\mathrm{y} + \mathrm{dS_z}\mathbf{1}_\mathrm{z}) = \int_S (\mathrm{F_x dS_x} + \mathrm{F_y dS_y} + \mathrm{F_z dS_z}) =$$

$$= \iint_{\mathrm{S(y,z)}} \mathrm{F_x dydz} + \iint_{\mathrm{S(z,x)}} \mathrm{F_y dzdx} + \iint_{\mathrm{S(x,y)}} \mathrm{F_z dxdy}$$

iii) całka powierzchniowa zorientowana wektorowa

$$\int_S \mathbf{F}\times d\mathbf{S} = \int_S \left(F_x \mathbf{1_x} + F_y \mathbf{1}_y + F_z \mathbf{1}_z\right)\times\left(dS_x \mathbf{1_x} + dS_y \mathbf{1}_y + dS_z \mathbf{1}_z\right) =$$

$$(\int_S F_y dS_z - \int_S F_z dS_y)\mathbf{1_x} + (\int_S F_z dS_x - \int_S F_x dS_z)\mathbf{1}_y + (\int_S F_x dS_y - \int_S F_y dS_x)\mathbf{1}_z =$$

$$(\iint_{\mathbf{S}} F_y dydx - \iint_{\mathbf{S}} F_z dzdx)\mathbf{1_x} + (\iint_{\mathbf{S}} F_z dzdx - \iint_{\mathbf{S}} F_x dxdz)\mathbf{1}_y + (\iint_{\mathbf{S}} F_x dxdy - \iint_{\mathbf{S}} F_y dydx)\mathbf{1}_z$$

3. **całka krzywoliniowa**

i) niezorientowana

Po krzywej L(A,B) od punktu A do punktu B wyrażonej równaniem parametrycznym

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

przy $x_A=x(t_A), y_A=y(t_A), z_A=z(t_A)$, oraz $x_B=x(t_B), y_B=y(t_B), z_B=z(t_B)$

$$\int_{L(A,B)} F(x,y,z)\, dl = \int_{t_A}^{t_B} F[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\left[\left((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\right)\right]}dt$$

ii) całka zorientowana skalarna

$$\int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{L} = \int_L \left(F_x \mathbf{1_x} + F_y \mathbf{1}_y + F_z \mathbf{1}_z\right)\cdot\left(dx\mathbf{1_x} + dy\mathbf{1}_y + dz\mathbf{1}_z\right) = \int_L F_x dx + \int_L F_y dy + \int_L F_z dz =$$

$$\int_{t_A}^{t_B} F_x(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt})\,dt + \int_{t_A}^{t_B} F_y(x(t),y(t),z(t))(\frac{dy}{dt})\,dt + \int_{t_A}^{t_B} F_z(x(t),y(t),z(t))(\frac{dz}{dt})\,dt$$

iii) całka zorientowana wektorowa

$$\int_{\mathbf{L}} \mathbf{F}\times d\mathbf{L} = \int_L \left(F_x \mathbf{1_x} + F_y \mathbf{1}_y + F_z \mathbf{1}_z\right)\times\left(dx\mathbf{1_x} + dy\mathbf{1}_y + dz\mathbf{1}_z\right) =$$

$$(\int_L F_y dz - \int_L F_z dy)\mathbf{1_x} + (\int_L F_z dx - \int_L F_x dz)\mathbf{1}_y + (\int_L F_x dy - \int_L F_y dx)\mathbf{1}_z =$$

$$\int_{t_a}^{t_B}[F_y(x(t),y(t),z(t))(\frac{dz}{dt}) - F_z(x(t),y(t)z(t))(\frac{dy}{dt})]dt\ \mathbf{1_x} +$$

$$\int_{t_A}^{t_B}[F_z(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt}) - F_x(x(t),y(t)z(t))(\frac{dz}{dt})]dt\ \mathbf{1}_y +$$

$$\int_{t_A}^{t_B}[F_x(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt}) - F_y(x(t),y(t)z(t))(\frac{dy}{dt})]dt\ \mathbf{1}_z$$