PODSTAWY ELEKRETECHNIKI 2
Algebra wektorów

Elementy rachunku wektorowego

a) **iloczyn liczbowy**

$$\alpha\,\mathbf{A} = \alpha \mathrm{A}_u + \alpha \mathrm{A}_v + \alpha \mathrm{A}_w$$

b) **iloczyn skalarny**

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(\mathrm{A}_u \mathbf{1}_u + \mathrm{A}_v \mathbf{1}_v + \mathrm{A}_w \mathbf{1}_w\right)\cdot\left(\mathrm{B}_u \mathbf{1}_u + \mathrm{B}_v \mathbf{1}_v + \mathrm{B}_w \mathbf{1}_w\right) = \mathrm{A}_u \mathrm{B}_u + \mathrm{A}_v \mathrm{B}_v + \mathrm{A}_w \mathrm{B}_w = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

gdzie z definicji przyjęto wartości iloczynu skalarnego wersorów

$$\mathbf{1}_u\cdot\mathbf{1}_u = \mathbf{1}_v\cdot\mathbf{1}_v = \mathbf{1}_w\cdot\mathbf{1}_w = 1, \qquad \mathbf{1}_u\cdot\mathbf{1}_v = \mathbf{1}_v\cdot\mathbf{1}_w = \mathbf{1}_w\cdot\mathbf{1}_u = 0$$

c) **iloczyn wektorowy**

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(\mathrm{A}_u \mathbf{1}_u + \mathrm{A}_v \mathbf{1}_v + \mathrm{A}_w \mathbf{1}_w\right)\times\left(\mathrm{B}_u \mathbf{1}_u + \mathrm{B}_v \mathbf{1}_v + \mathrm{B}_w \mathbf{1}_w\right) =$$
$$\left(\mathrm{A}_v \mathrm{B}_w - \mathrm{A}_w \mathrm{B}_v\right)\mathbf{1}_u + \left(\mathrm{A}_w \mathrm{B}_u - \mathrm{A}_u \mathrm{B}_w\right)\mathbf{1}_v + \left(\mathrm{A}_u \mathrm{B}_v - \mathrm{A}_v \mathrm{B}_u\right)\mathbf{1}_w$$

gdzie z definicji przyjęto wartości iloczynu wektorowego wersorów

$$\mathbf{1}_u\times\mathbf{1}_u = \mathbf{1}_v\times\mathbf{1}_v = \mathbf{1}_w\times\mathbf{1}_w = 0$$
$$\mathbf{1}_u\times\mathbf{1}_v = \mathbf{1}_w, \quad \mathbf{1}_v\times\mathbf{1}_w = \mathbf{1}_u, \quad \mathbf{1}_w\times\mathbf{1}_u = \mathbf{1}_v$$
$$\mathbf{1}_v\times\mathbf{1}_u = -\mathbf{1}_w \quad \mathbf{1}_w\times\mathbf{1}_v = -\mathbf{1}_u \quad \mathbf{1}_u\times\mathbf{1}_w = -\mathbf{1}_v$$

Wygodny do zapamiętania iloczynu wektorowego jest zapis macierzowy w postaci

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_w \\ \mathrm{A}_u & \mathrm{A}_v & \mathrm{A}_w \\ \mathrm{B}_u & \mathrm{B}_v & \mathrm{B}_w \end{bmatrix} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

d) iloczyn potrójny skalarny (mieszany) jest skalarem

$$\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right) = \det\begin{bmatrix} \mathrm{A}_u & \mathrm{A}_v & \mathrm{A}_w \\ \mathrm{B}_u & \mathrm{B}_v & \mathrm{B}_w \\ \mathrm{C}_u & \mathrm{C}_v & \mathrm{C}_w \end{bmatrix}$$

wzór powyższy wynika z podstawienia b) i c). Należy zauważyć że zapis (**A.B**)x**C** nie ma sensu. Sens iloczynu liczbowego ma zapis (**A.B**) **C.** Iloczyn mieszany ma interpretację geometryczna jako objętość równoległoboku którego krawędziami są odcinki o długości trzech wektorów.

e) iloczyn potrójny wektorowy jest wektorem. Można udowodnić zależność wynikającą z definicji

$$\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)\mathbf{B} - \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{C}$$

3. Elementy analizy wektorowej

3.1 Operacje całkowania

a) **całka objętościowa**

W układzie kartezjańskim

$$\int_V \mathrm{F}\,\mathrm{dV} = \iiint_{V(x,y,z)} \mathrm{F(x,y,z)}\,\mathrm{dxdydz} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} \mathrm{dy} \int_{z_a(x,y)}^{z_b(x,y)} \mathrm{F(x,y,z)dz}$$

W układzie cylindrycznym |J|=ρ a wiec element objętości dV=ρ dρ dφ dz

$$\int\limits_V F\,dV = \iiint\limits_{V(\rho,\varphi,z)} F(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

W układzie sferycznym |J|=r^2 sinΘ a więc element objętości dV= r^2 sinΘ dr dΘ dφ

$$\int\limits_V F\,dV = \iiint\limits_{V(r,\Theta,\varphi)} F(r,\Theta,\varphi)\, r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi$$

b) **całka powierzchniowa**

i) niezorientowana

W układzie kartezjańskim

$$\int\limits_S F\,dS = \int\limits_{S'} F\frac{dS'}{\cos(\mathbf{n},z)} = \iint\limits_{S'} F(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)}dxdy$$

gdzie płat powierzchni S określony jest funkcją z=f(x,y). S' jest rzutem płata powierzchni S na płaszczyznę xy.

Cos(**n**,z) jest kosinusem kąta miedzy normalną do powierzchni a osią z jako normalną do płaszczyzny xy. Z postaci równania powierzchni z-f(x,y)=0 wynika wektor normalny

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{1}_x - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z$$

a stąd kosinus kierunkowy

$$\cos(\mathbf{n},z) = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{1_z}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+(\frac{\partial f}{dx})^2+(\frac{\partial f}{dy})^2\right)}}$$

Dla obliczenia całki powierzchniowej po powierzchni kuli (K o promieniu R w układzie sferycznym otrzymuje się wyrażenie

$$\int\limits_{K(R,\Theta,\varphi)} F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{K(R,\Theta,\varphi)} F(R\sin\Theta\ \cos\varphi, R\sin\Theta\ \sin\varphi, R\cos\Theta)R^2\sin\Theta\ \ d\Theta\ d\varphi$$

ii) całka powierzchniowa zorientowana skalarna

$$\int\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_S \left(F_x\mathbf{1_x}+F_y\mathbf{1}_y+F_z\mathbf{1}_z\right)\left(dS_x\mathbf{1}_x+dS_y\mathbf{1}_y+dS_z\mathbf{1}_z\right) = \int\limits_S \left(F_x dS_x + F_y dS_y + F_z dS_z\right) =$$

$$= \iint\limits_{S(y,z)} F_x dydz + \iint\limits_{S(z,x)} F_y dzdx + \iint\limits_{S(x,y)} F_z dxdy$$

iii) całka powierzchniowa zorientowana wektorowa

$$\int\limits_S \mathbf{F}\times d\mathbf{S} = \int\limits_S \left(F_x\mathbf{1_x}+F_y\mathbf{1}_y+F_z\mathbf{1}_z\right)\times\left(dS_x\mathbf{1_x}+dS_y\mathbf{1}_y+dS_z\mathbf{1}_z\right) =$$

$$(\int\limits_S F_y dS_z - \int\limits_S F_z dS_y)\mathbf{1_x} + (\int\limits_S F_z dS_x - \int\limits_S F_x dS_z)\mathbf{1}_y + (\int\limits_S F_x dS_y - \int\limits_S F_y dS_x)\mathbf{1}_z =$$

$$(\iint\limits_S F_y dydx - \iint\limits_S F_z dzdx)\mathbf{1_x} + (\iint\limits_S F_z dzdx - \iint\limits_S F_x dxdz)\mathbf{1}_y + (\iint\limits_S F_x dxdy - \iint\limits_S F_y dydx)\mathbf{1}_z$$

c) **całka krzywoliniowa**

i) niezorientowana

Po krzywej L(A,B) od punktu A do punktu B wyrażonej równaniem parametrycznym

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

przy $x_A=x(t_A), y_A=y(t_A), z_A=z(t_A)$, oraz $x_B=x(t_B), y_B=y(t_B), z_B=z(t_B)$

$$\int\limits_{L(A,B)} F(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_A}^{t_B} F[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\left[\left((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\right)\right]}dt$$

ii) całka zorientowana skalarna

$$\int\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{L} = \int\limits_L (F_x\mathbf{1_x} + F_y\mathbf{1}_y + F_z\mathbf{1}_z)\cdot(dx\mathbf{1_x} + dy\mathbf{1}_y + dz\mathbf{1}_z) = \int\limits_L F_x dx + \int\limits_L F_y dy + \int\limits_L F_z dz =$$

$$\int\limits_{t_A}^{t_B} F_x(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt})dt + \int\limits_{t_A}^{t_B} F_y(x(t),y(t),z(t))(\frac{dy}{dt})dt + \int\limits_{t_A}^{t_B} F_z(x(t),y(t),z(t))(\frac{dz}{dt})dt$$

iii) całka zorientowana wektorowa

$$\int\limits_{\mathbf{L}} \mathbf{F}\times d\mathbf{L} = \int\limits_L (F_x\mathbf{1_x} + F_y\mathbf{1}_y + F_z\mathbf{1}_z)\times(dx\mathbf{1_x} + dy\mathbf{1}_y + dz\mathbf{1}_z) =$$

$$(\int\limits_L F_y dz - \int\limits_L F_z dy)\mathbf{1_x} + (\int\limits_L F_z dx - \int\limits_L F_x dz)\mathbf{1}_y + (\int\limits_L F_x dy - \int\limits_L F_y dx)\mathbf{1}_z =$$

$$\int\limits_{t_a}^{t_B}[F_y(x(t),y(t),z(t))(\frac{dz}{dt}) - F_z(x(t),y(t)z(t))(\frac{dy}{dt})]dt\,\mathbf{1_x} +$$

$$\int\limits_{t_A}^{t_B}[F_z(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt}) - F_x(x(t),y(t)z(t))(\frac{dz}{dt})]dt\,\mathbf{1}_y +$$

$$\int\limits_{t_A}^{t_B}[F_x(x(t),y(t),z(t))(\frac{dx}{dt}) - F_y(x(t),y(t)z(t))(\frac{dy}{dt})]dt\,\mathbf{1}_z$$

Wektor położenia punktu:

$\mathbf{r}_K(x, y, z) = \mathbf{r}_C(\rho, \varphi, z) = \mathbf{r}_S(r, \theta, \varphi)$

Przyrost (element) wektora położenia:

a) $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{1}_x + dy\,\mathbf{1}_y + dz\,\mathbf{1}_z$,

b) $d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{1}_\rho + \rho\,d\varphi\,\mathbf{1}_\varphi + dz\,\mathbf{1_z}$

c) $d\mathbf{r} = dr\mathbf{1}_\rho + rd\theta\mathbf{1}_\theta + r\sin\Theta d\varphi\mathbf{1}_\varphi$

Wzory transformacyjne współrzędnych i składowych wektorów:

$$dx = d\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,d\varphi$$
$$dy = d\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,d\varphi$$
$$dz = dz$$
$$d\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$
$$d\varphi = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}dy$$
$$\rho\,d\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$
$$dz = dz$$
$$dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta d\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$
$$dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta d\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos d\varphi$$
$$dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta$$

$$A_x = A_\rho\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$$
$$A_y = A_\rho\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$$
$$A_z = A_z$$
$$A_\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}A_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}A_y$$
$$A_\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}A_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}A_y$$
$$A_z = A_z$$
$$A_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$$
$$A_y = A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$$
$$A_x = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta$$

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

$$rd\theta = \frac{r}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \frac{x}{z\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{r}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \frac{y}{z\sqrt{x^2 + y^2}} dy - \frac{r}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} dz$$

$$r \sin\theta \, d\varphi = \frac{-r \sin\theta \, y}{x^2 + y^2} dx + \frac{r \sin\theta \, x}{x^2 + y^2} dy$$

$$A_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} A_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} A_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} A_z$$

$$A_\theta = \frac{xz}{r\sqrt{x^2 + y^2}} A_x + \frac{yz}{r\sqrt{x^2 + y^2}} A_y - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} A_z$$

$$\mathrm{A}_\varphi = -\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} \mathrm{A}_\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} \mathrm{A}_\mathrm{y}$$