SZEREGI MACLAURINA

TWIERDZENIE:
Jeśli $f(x)$ jest różniczkowalna (nieskończenie wiele razy) w $x=0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

To jest to szereg potęgowy $s=0$

WAŻNE SZEREGI MACLAURINA:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x \in (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in \langle -1, 1)$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Jak wyliczyć na tej podstawie szeregi Maclaurina innych funkcji?

① PROSTE PRZEKSZTAŁCENIA

Przykłady:

- $$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2\left(\frac{1}{1-(-x^2)}\right) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}$$

- $$x \sin 2x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

② TWIERDZENIE o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów Maclaurina

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\boxed{1.}$ $$(f'(x))=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}nx^{n-1}$$

$\boxed{2}$ $$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^x t^n\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=\frac{x^{n+1}}{n+1}-0$$

PRZYKŁAD:

$$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\mathrm{arctg}\,x$$

$$\int_0^x\left(\frac{1}{1-(-t^2)}\right)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

$$\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\Big[-\ln(t-1)\Big]_0^x$$