Wykład 6 - operacje różniczkowe na polach wektorowych, dywergencja, rotacja

sobota, 14 kwietnia 2018 14:03

OPERACJE RÓŻNICZKOWE NA POLACH WEKTOROWYCH

$$\vec{F}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$$

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

① DYWERGENCJA POLA WEKTOROWEGO $\vec{F}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \circ \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Jeżeli $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, pole $\vec{F}$ nazywamy bezdopływowym.

Pole wektora $\vec{F}(x,y,z)$ dla którego $\bigwedge_{(x,y,z)\in V} \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 0$ nazywa się polem bezźródłowym (solenoidalnym)

$\operatorname{div}\vec{F} \rightarrow$ operator skalarny

② ROTACJA POLA WEKTOROWEGO $\vec{F}$

$\operatorname{rot}\vec{F}$ - operator wektorowy

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Pole $\vec{F}$ dla którego $\bigwedge_{(x,y,z)\in V} \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ nazywa się polem bezwirowym.

Jest to też pole potencjalne.

ZALEŻNOŚĆ:

$\vec{F}(x,y,z) = [P, Q, R]$ klasy C^2

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}} = 0$$

rotacja = pole bezźródłowe

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$ → gradient jest polem bezwirowym

f – klasy C^2