

Wzory

środa, 10 stycznia 2018 20:39

1. Zapis pomiaru.

a. Niepewność bezwzględna pomiaru

$$X = [x \pm U(X)] [X], \quad p = \dots\dots, \quad$$

i. objaśnienia

X – symbol mierzonej wielkości, x – wartość mierzonej wielkości,

$U(X)$ - niepewność pomiaru, przedstawiona wartością bezwzględną,

$[X]$ - jednostka miary zmierzonej wielkości; w zapisie konkretnych wartości nie stosuje się nawiasów, np. 2,33 V; (1,638±0,012) μm (nawias kwadratowy używany jest jedynie w celu określenia jednostki wynikowej we wzorach).

p - przyjęty w ocenie niepewności poziom ufności.

b. Niepewność względna pomiaru:

$$U_r(X) = \frac{U(X)}{X} 100 \%.$$

c. Przykłady:

$$U = (2,3608 \pm 0,0012)V, \quad U_r(U) = 0,051\%, \quad p = 0,99$$

$$R = (7,60 \pm 0,07)\Omega, \quad U_r(R) = 0,9\%, \quad p = 0,95$$

2. Błąd pomiaru

a. Błąd bezwzględny:

$$\Delta X = X - X_p$$

b. Błąd względny (procentowy):

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\% = \frac{X - X_p}{X_p} \cdot 100\% = \frac{X - X_p}{X} \cdot 100\%$$

3. Przyrząd analogowy

a. Klasa przyrządu

$$kl. = \frac{\Delta_g X}{X_z} 100\%$$

gdzie: X_z - zakres pomiarowy przyrządu.

b. Wyznaczenie błędu granicznego (ze wzoru powyżej)

$$\Delta_g X = \frac{kl.}{100\%} X_z$$

c. Względny błąd graniczny

$$\delta_g X = \frac{\Delta_g X}{X} \cdot 100\% \quad \text{lub} \quad \delta_g X = kl. \frac{X_z}{X},$$

w których X jest wartością zmierzona.

d. Stała zakresowa

$$X = c \cdot \alpha$$

Stałe zakresowe oblicza się z parametrów miernika:

$$\text{- stała woltomierza } c_V = \frac{U_z}{\alpha_m} \left[\frac{V}{dz}; \frac{mV}{dz} \right],$$

$$\text{- stała amperomierza } c_A = \frac{I_A}{\alpha_m} \left[\frac{A}{dz}; \frac{mA}{dz} \right]$$

$$\text{- stała watomierza } c_W = \frac{I_z U_z}{\alpha_m} \left[\frac{W}{dz} \right]$$

4. Niepewność pomiarów bezpośrednich:

a. Odchylenie standardowe (rozkład jednostajny)

$$s = \frac{\Delta_{\pm} X}{\sqrt{3}}$$

b. Niepewność standardowa (inna nazwa odchylenia):

Dla potrzeb pomiarowych odchylenie standardowe przyjęto nazywać **niepewnością standardową** i oznaczać małą literą $u(x)$, zaś jej wartość względną – $u_r(x)$:

$$u(X) = \frac{\Delta_{\pm} X}{\sqrt{3}}$$

$$u_r(X) = \frac{u(X)}{X} \cdot 100\% = \frac{\Delta_{\pm} X}{\sqrt{3} \cdot X} \cdot 100\%$$

c. Niepewność rozszerzona:

$$U(X) = k \cdot u(X)$$

$$U_r(X) = k \cdot u_r(X)$$

d. Współczynnik rozszerzenia:

$$k = \sqrt{3} \cdot p$$

e. Przykład:

Przykład 5: Woltomierzem analogowym kl.0,5 o zakresie 100V zmierzono napięcie, uzyskując wynik $U=80,2V$. Podać wynik pomiaru z uwzględnieniem niepewności pomiaru na poziomie ufności $p=0,95$.

Rozwiązanie:

$$\text{- niepewność standardowa miernika: } u_B(U) = \frac{\Delta_{\pm} U}{\sqrt{3}} = \frac{kI U_z}{100\% \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{0,5 \cdot 100}{100} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,2886V$$

$$\text{- niepewność rozszerzona : } U(U) = k \cdot u_B(U), \text{ gdzie } k = \sqrt{3} p, \text{ wtedy}$$

$$U(U) = \sqrt{3} \cdot 0,95 \cdot 0,2886V = 0,4748V \approx 0,5V \text{ (przedstawienie niepewności liczbą z 1 cyfrą znaczącą uzasadnione jest rozdzielczością odczytu!)}$$

$$\text{- wynik pomiaru: } U = (80,2 \pm 0,5)V, p = 0,95$$

$$\text{- niepewność względna pomiaru: } U_r(U) = \frac{0,5}{80,2} \cdot 100\% \approx 0,7\%.$$

5. Przyrząd cyfrowy:

a. Zapis dokładności - metoda 1:

$$i. \quad \pm(a\% \text{ wartości mierzonej} + b \text{ cyfr})$$

Pierwszy składnik przedstawia sobą tzw. składową analogową błędu o wartości względnej a %, drugi – tzw. składowa cyfrowa błędu, jest wartością bezwzględną. W zależności od potrzeb przedstawione wyrażenie służy do obliczenia wartości bezwzględnej błędu granicznego lub jego wartość względnej.

- 1) Jak rozumieć składnik „b cyfr”? Jest to wartość wynikająca ze zwielokrotnienia b razy rozdzielczości przyrządu cyfrowego - $\Delta_r X$, czyli

$$b \text{ cyfr} \equiv b \Delta_r X$$

- ii. Błąd graniczny dopuszczalny wyrażony wartością bezwzględną oblicza się z zależności:

$$\Delta_g X = \left(\frac{a \% X}{100 \%} + b \cdot \Delta_r X \right) [X]$$

Błąd graniczny dopuszczalny wyrażony wartością względną (procentową) oblicza się z zależności:

$$\delta_g X = \frac{\Delta_g X}{X} \cdot 100 \% = a \% + \frac{b \Delta_r X}{X} 100 \%$$

b. Zapis dokładności - metoda 2:

i. $\pm (a \% \text{ odczytu} + c \% \text{ zakresu})$

W związku z tym, wzory obliczeniowe na błędy graniczne dopuszczalne mają postać:

ii. - dla wartości bezwzględnej $\Delta_g X = \left(\frac{a \% X}{100 \%} + \frac{c \% X_z}{100 \%} \right) [X]$

- dla wartości względnej $\delta_g X = (a \% + c \% \frac{X_z}{X}) \%$

c. Przykład:

6. Odchylenie standardowe:

a. Wartość średnia:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ gdzie } X_i \text{ jest wynikiem pojedynczego pomiaru.}$$

- i. Odchylenie pojedynczego wyniku pomiaru od średniej (błąd pozorny)

$$(X_i - \bar{X})$$

b. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru:

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

c. Odchylenie standardowe średniej:

$$s(\bar{X}) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

7. Niepewność typu A - standardowa i rozszerzona:

a. Niepewność standardowa:

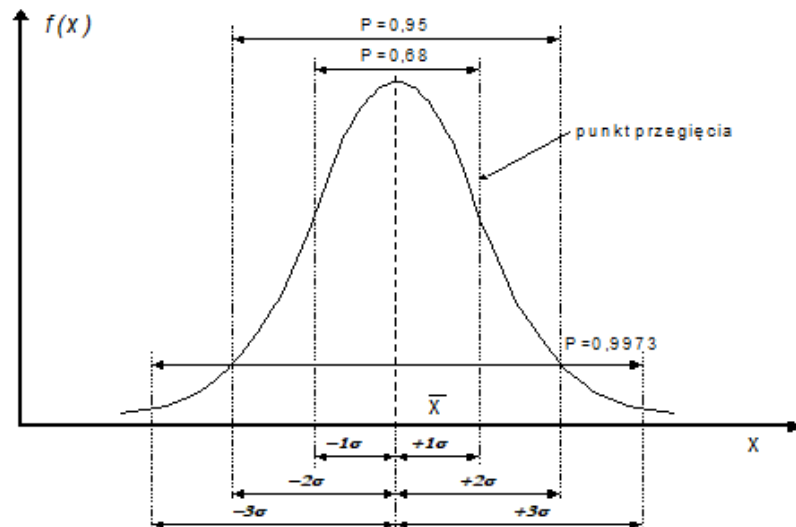
$$u(\bar{X}) = s(\bar{X}).$$

b. Niepewność rozszerzona:

$$U(\bar{X}) = k \cdot u(\bar{X}),$$

c. Poziom ufności:

Poziom ufności - p	k	Oznaczenie na rys.	Niepewność
0,68	1	1σ	standardowa - $u(x)$
0,95	2	2σ	rozszerzona - $U(x)$
0,997	3	3σ	rozszerzona - $U(x)$



Rys. 2. Rozkład normalny
(σ - podstawowy symbol dla odchylenia standardowego)

d. Względna niepewność standardowa:

$$u_r(\bar{X}) = \frac{u(\bar{X})}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

e. Względna niepewność rozszerzona:

$$U_r(\bar{X}) = \frac{U(\bar{X})}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

8. Niepewność łączna (typu AB):

a. Niepewność typu B:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}, \text{ w której } \Delta_g X \text{ jest błędem granicznym przyrządu.}$$

b. łączna niepewność standardowa:

$$i. \quad u_i(X) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Łączną niepewność standardową oblicza się na podstawie prawa propagacji niepewności. Zgodnie z nim, niepewność łączna jest pierwiastkiem sumy kwadratów niepewności typu A i typu B:

$$ii. \quad u_r(U) = \sqrt{u_A^2(\bar{U}) + u_B^2(U)} = \sqrt{0,0621^2 + 0,250^2} = \sqrt{0,0662} = 0,257V$$

Wynik pomiaru z poziomem ufności $p=0,68$: $(220,89 \pm 0,26)V$

Wynik pomiaru z poziomem ufności $p=0,95$ ($k=2$): $(220,89 \pm 0,51)V$

c. Prawo propagacji niepewności:

Jeżeli wielkości $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ nie są skorelowane, wówczas niepewność łączna mierzonych wielkości jest określana zależnością:

i.
$$u(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dX}{dX_i} \right)^2 \cdot u^2(X_i)}$$

ii.
$$u(\bar{X}) = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\bar{A}} \right)^2 \cdot u^2(\bar{A}) + \left(\frac{dX}{d\bar{B}} \right)^2 \cdot u^2(\bar{B}) + \left(\frac{dX}{d\bar{C}} \right)^2 \cdot u^2(\bar{C}) + \dots}$$