CAŁKI KRZYWOLINIOWE
NIEZORIENTOWANE:

(1) $\int_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = at \end{cases}$ $\quad a>0$, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$x' = -a\sin t$
$y' = a\cos t$
$z' = a$

$$dl = \sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+a^2}\,dt$$

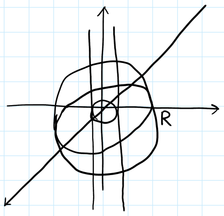
$$dl = a\sqrt{2}\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2t^2}{a^2} a\sqrt{2}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot 8\pi^3$$

(2) Obliczyć:

$\int_\gamma xyz\,d$ $\quad \gamma$ – ćwiartka okręgu: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$

leżąca w 1. oktancie układu współrzędnych



$\begin{cases} x = \frac{R}{2}\cos t \\ y = \frac{R}{2}\sin t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$ $\quad t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$$z = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)} = \sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$x' = -\frac{R}{2}\sin t$
$y' = \frac{R}{2}\cos t$
$z' = 0$

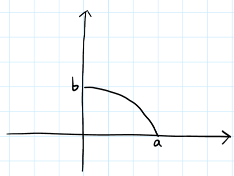
$$dl = \sqrt{\frac{R^2}{4}}\,dt = \frac{R}{2}\,dt$$

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{8}R^3 \sin t\cos t\cdot\frac{R}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16}R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{u}\underbrace{\cos t\,dt}_{du} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16}R^4\underbrace{\int_0^1 u\,du}_{=\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{32}R^4$$

(3) $\int_\gamma xy\,dl$ $\quad \gamma$: część elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżąca w I ćwiartce



$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $\quad t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$x' = -a\sin t$
$y' = b\cos t$

$$dl = \sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$y' = b\cos t$$

$$dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin t\cos t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2 - b^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, dt = \left|\begin{matrix} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt\end{matrix}\right| =$$

$$= ab\int_0^1 u\sqrt{(a^2-b^2)u^2+b^2}\, du = \left|\begin{matrix} w = (a^2-b^2)u^2+b^2 \\ dw = 2(a^2-b^2)u\,du\end{matrix}\right| =$$

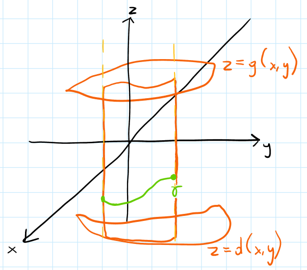
$$u\,du = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\,dw$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{w}\, dw = \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}}\Big|_{b^2}^{a^2} =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left(a^3-b^3\right) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

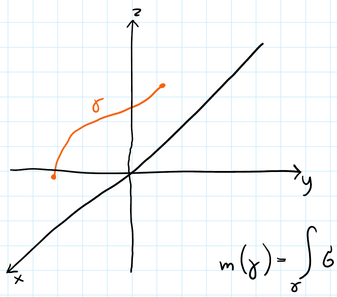
ZASTOSOWANIA CAŁKI KRZYWOLINIOWEJ NIEZORIENTOWANEJ:

① POLE GEOMETRYCZNE POWIERZCHNI WALCOWEJ:



$$|\Sigma| = \int_\gamma \left[g(x,y) - d(x,y)\right] dl$$

② MASA KRZYWEJ γ (ŁUKU):



$\sigma(x,y,z)$ – funkcja gęstości masy na T w $\mathbb{R}^3$

$\sigma(x,y)$ – funkcja gęstości masy na T w $\mathbb{R}^2$

$$m(\gamma) = \int_\gamma \sigma(x,y,z)\, dl$$

Gdy $\sigma(x,y,z) \equiv \sigma_0 \rightarrow$ łuk jednorodny

Długość łuku: $|\gamma| = \int_\gamma dl$

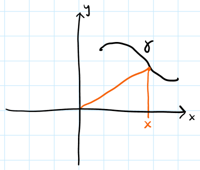
③ WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA MASY ŁUKU γ [POZA KOLOKWIUM]

$S(x_0, y_0, z_0)$

$$x_0 = \frac{\int_\gamma x\,\sigma(x,y,z)\,dl}{\int_\gamma \sigma(x,y,z)\,dl}, \quad y_0 = \frac{\int_\gamma y\,\sigma(x,y,z)\,dl}{\int_\gamma \sigma(x,y,z)\,dl}, \quad z_0 = \frac{\int_\gamma z\,\sigma(x,y,z)\,dl}{\int_\gamma \sigma(x,y,z)\,dl}$$

④ MOMENTY BEZWŁADNOŚCI ŁUKU γ

(a) w $\mathbb{R}^2$



$$I_x = \int_\gamma y^2 \cdot \sigma(x,y)\, dl$$
$$I_y = \int_\gamma x^2\, \sigma(x,y)\, dl$$
$$I_0 = \int_\gamma (x^2+y^2)\, \sigma(x,y)\, dl$$

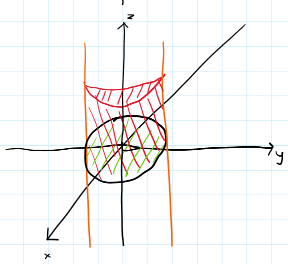
(b) w $\mathbb{R}^3$

$$I_x = \int_\gamma (y^2+z^2)\, \sigma(x,y,z)\, dl$$
$$I_y = \int_\gamma (x^2+z^2)\, \sigma(x,y,z)\, dl$$
$$I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\, \sigma(x,y,z)\, dl$$
$$I_0 = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\, \sigma(x,y,z)\, dl$$

PRZYKŁADY

(1) POLE POWIERZCHNI WALCOWEJ

Obliczyć pole powierzchni walca kołowego $x^2+y^2=R^2$ zawartej między płaszczyzną $z=0$ a powierzchnią $z=R+\frac{x^2}{R}$



$$|\Sigma| = \int_\gamma \left(R+\frac{x^2}{R}-0\right) dl \qquad \gamma: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$x' = -R\sin t$$
$$y' = R\cos t$$
$$dl = \sqrt{R^2}\, dt = R\, dt$$

$$|\Sigma| = \int_\gamma \left(R+\frac{x^2}{R}-0\right) dl = \int_0^{2\pi} \left(R+\frac{R^2\cos^2 t}{R}\right) R\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (R^2+R^2\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt + R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt =$$
$$= 2\pi R^2 + R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 2\pi R^2 + \frac{R^2}{2}\left[2\pi + \underbrace{\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right] =$$
$$= 3\pi R^2$$

(2) Obliczyć masę łuku γ o parametryzacji:

$$\gamma: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} \qquad t \in \langle 0; 1 \rangle$$

Gęstość masy w punkcie (x,y,z) jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od początku układu współrzędnych i w punkcie $(1,0,1)$ jest równa 3.

$$\sigma(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2} \qquad 3 = \frac{k}{1+1} = \frac{k}{2}$$
$$k = 6$$

$$\sigma(x,y,z) = \frac{6}{x^2+y^2+z^2}$$

$$m(\gamma) = \int_\gamma \frac{6}{x^2+y^2+z^2}\, dl$$

$\rho(x,y,z) = \frac{6}{x^2+y^2+z^2}$

$$m(\gamma) = \int_\gamma \frac{6}{x^2+y^2+z^2}\, dl$$

$$x' = e^t\cos t - e^t \sin t$$
$$y' = e^t \sin t + e^t \cos t$$
$$z' = e^t$$

$$dl = \sqrt{2e^{2t} + e^{2t}}\, dt = \sqrt{3}\, e^t\, dt$$

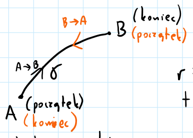
$$m(\gamma) = \int_\gamma \frac{6}{x^2+y^2+z^2}\, dl = \int_0^1 \frac{6}{2e^{2t}} \cdot \sqrt{3}\, e^t\, dt =$$

$$= 3\sqrt{3}\int_0^1 e^{-t}\, dt = -3\sqrt{3}\left[e^{-t}\right]_0^1 = -3\sqrt{3}\left(e^{-1} - 1\right) =$$

$$= 3\sqrt{3}\left(1 - e^{-1}\right)$$

CAŁKI KRZYWOLINIOWE ZORIENTOWANE

1 ŁUK ZORIENTOWANY



$r: \vec{r} = \vec{r}(t)$
$t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

Łuk na którym wyróżniono punkt początkowy i punkt końcowy (orientację) nazywamy łukiem zorientowanym.

Łuk zorientowany przeciwnie do łuku γ będziemy oznaczać $-\gamma$

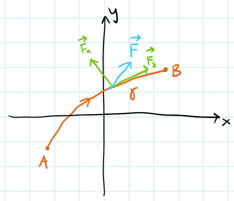
Orientacja której ruch po łuku odbywa się zgodnie ze wzrostem parametru t nazywa się orientacją zgodną z parametryzacją

2 POLE WEKTOROWE (R^2, R^3)

a) w R^2

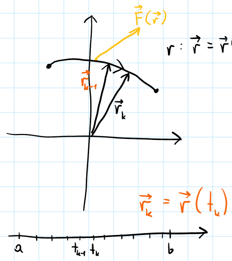
$\vec{F}: R^2 \to R^2$ $\qquad \vec{F}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)]$ $\qquad = \vec{F}(\vec{r})$ $\qquad$ np. $\vec{F}(\vec{r}) = \left[\sin xy, \frac{1}{x+y}\right]$

$\vec{F}: R^3 \to R^3$ $\qquad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$



$$\Delta W = \vec{F} \circ \Delta\vec{l} = |\vec{F}||\Delta\vec{l}| \cos\sphericalangle\alpha =$$
$$= |\vec{F}_s| \cdot |\Delta\vec{l}|$$

3 Całka krzywoliniowa zorientowana



$r: \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$\vec{r}_k = \vec{r}(t_k)$

$\max \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ nazywamy średnicą przedziału

$$g = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$$

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_k^{\,*}) \circ \Delta\vec{r}_k = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$$

$\lim \sum^{n} P(\ ^*\ \ ^*)\Delta x + Q(\ ^*\ \ ^*)\Delta\ = \int P(\ \ )d\ + Q(\ \ )d\ \quad R^2$

$$\lim \sum_{k=1} \vec F(\vec r_k^{\,*}) \circ \Delta \vec r_k = \int_\gamma \vec F(\vec r) \circ d\vec r$$

$$\lim_{\delta(g)\to 0} \sum_{k=1}^{n} P(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \to w\ R^2$$

W R^3: $\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

$$d\vec r = [dx, dy, dz] = [x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt]$$
$$\vec r = \vec r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

Twierdzenie: zamiana całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną po parametrze.

Jeżeli $\vec F(\vec r) = [P(\dots), Q(\dots), R(\dots)]$ - pole wektorowe ciągłe na łuku gładkim γ
$[P(x,y), Q(x,y)]$
zorientowanym zgodnie z parametryzacją: $\vec r = \vec r(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$

Wtedy: $\int_\gamma \vec F(\vec r) \circ d\vec r = \int_a^b \underbrace{\vec F(\vec r(t) \circ \vec r'(t)]}_{\text{funkcja skalarna od } t} dt$

$$\int_\gamma P(\dots)dx + Q(\dots)dy + R(\dots)dz = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

$$\int_{-\gamma} \vec F(\vec r) \circ d\vec r = -\int_\gamma \vec F(\vec r) \circ d\vec r$$

Zachodzi liniowość całki

Jeżeli punkt początkowy łuku pokrywa się z końcowym, to łuk jest zamknięty.

PRZYKŁAD:

$$\int_\gamma \vec F(\vec r) \cdot d\vec r$$

$\vec F(x,y) = \left[\frac{x}{y}, \frac{1}{y-1}\right]$ $\quad \gamma: \begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}$ $\quad t \in \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \rangle$

$x'(t) = 1 - \cos t$
$y'(t) = \sin t$

$$\int_\gamma \vec F(\vec r) \circ d\vec r = \int \frac{x}{y}dx + \frac{dy}{x-1} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\left(\frac{t-\sin t}{1-\cos t}\right)(1-\cos t) + \frac{\sin t}{\cos t}\right]dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(t - \sin t + \frac{-\sin t}{\cos t}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \cos t + \ln \cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{18} + \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{72} - \frac{\sqrt3}{2} - \ln\frac{\sqrt3}{2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{24} + \frac{1-\sqrt3}{2} - \frac{1}{2}\ln 3$$