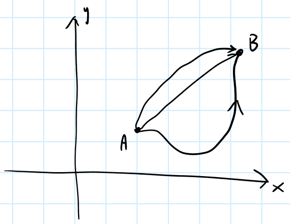
Wykład 3 - Pola potencjalne, twierdzenie Greena

sobota, 17 marca 2018 13:11

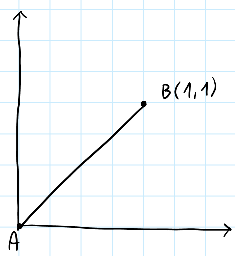
Czy całka po krzywej łączącej 2 dane punkty może przechodzić po różnych drogach?




$\vec{F}(x,y)$

$$\int_\gamma (3x+2y)\,dx + (2x-y)\,dy$$

$\gamma = \overset{\frown}{AB} \qquad A(0,0) \qquad B(1,1)$




① $\gamma$ – odcinek

$x = t$
$y = t$ $\quad t \in \langle 0;1 \rangle$

$x'(t) = 1$
$y'(t) = 1$

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_0^1 (5t\cdot 1 + t\cdot 1)\,dt = \int_0^1 6t\,dt = 3t^2 \Big|_0^1 = 3$$

② $\gamma$ – parabola

$x = x \qquad x' = 1 \qquad x \in \langle 0;1 \rangle$
$y = x^2 \qquad y' = 2x$

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_0^1 (3x + 2x^2)\cdot 1 + (2x - x^2)\cdot 2x\,dx = \int_0^1 (-2x^3 + 6x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \left[ -\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 3$$

③ $\gamma$ – krzywa o równaniu wielomianowym $x = y^3$

$x = y^3$

$$\begin{cases} x = y^3 \\ y = y \end{cases} \qquad x' = 3y^2 \qquad y \in \langle 0;1 \rangle$$
$$\qquad\qquad y' = 1$$

$$\int \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_0^1 \left[ (3y^3 + 2y)\cdot 3y^2 + (2y^3 - y) \right] dy = \int_0^1 (9y^5 + 8y^3 - y)\,dy =$$

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_0^1 \left[(3y^3+2y)\cdot 3y^2 + (2y^3-y)\right]dy = \int_0^1 (9y^5+8y^3-y)\,dy =$$

$$= \left[\frac{9y^6}{6} + \frac{8y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 3$$

WNIOSEK: $\vec{F}(x,y) = [3x+2y,\ 2x-y]$

Wartość całki zorientowanej po krzywej nie zależy od drogi całkowania.

# GRADIENT

$z = f(x,y)$

$\operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$

$w = g(x,y,z)$

$\operatorname{grad} g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right]$

$\operatorname{grad} f\cdot g = g(\operatorname{grad} f) + f(\operatorname{grad} g)$

dla 2 zmiennych w g

PRZYKŁAD:

$f(x,y,z) = x^2y + \frac{xy^2}{z}$

$\operatorname{grad} f = \left[2xy + \frac{y^2}{z},\ x^2 + \frac{2xy}{z},\ \frac{-xy^2}{z^2}\right]$

# POLA POTENCJALNE

POLE POTENCJALNE – pole wektorowe $\vec{F}(\vec{r})$ nazywa się polem potencjalnym na zbiorze $D \in \mathbb{R}^2$ (lub $\mathbb{R}^3$) wtedy, gdy istnieje funkcja skalarna $U(\vec{r})$ taka, że $\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad} U(\vec{r})$ na zbiorze D

① W $\mathbb{R}^2$:

$\vec{F}(x,y) = \operatorname{grad} U(x,y)$

$\vec{F}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)]$

$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$

② W $\mathbb{R}^3$:

$\vec{F}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) \end{cases}$$

dla każdego $(x,y,z) \in D$

Funkcję skalarną $u(x,y)$ lub $u(x,y,z)$ o tej własności nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}(x,y)$ (lub $\vec{F}(x,y,z)$).

# KRYTERIA POTENCJALNOŚCI POLA

w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

① w $\mathbb{R}^2$:

Pole wektorowe $\vec{F}(x,y)=[P(x,y), Q(x,y)]$ klasy $C^1$ na zbiorze wypukłym $D\subset\mathbb{R}^2$ jest potencjalne $\Leftrightarrow \bigwedge_{(x,y)\in D} \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

② W $\mathbb{R}^3$

Pole wektorowe $\vec{F}(x,y,z)=[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ klasy $C^1$ na zbiorze wypukłym $V\subset\mathbb{R}^3$ jest potencjalne $\Leftrightarrow \bigwedge_{(x,y,z)\in V}$ rot $\vec{F}=\vec{0}$, czyli:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

# ROTACJA POLA WEKTOROWEGO

$$\text{grad } f(x,y,z)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]f$$

OPERATOR HAMILTONA:

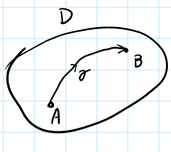
$$\nabla=\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$\text{grad} f=\nabla f$$

$$\text{rot }\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left[\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Niech $\vec{F}(x,y,z)=[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ → pole potencjalne

$u(x,y,z)$ → potencjał pola $\vec{F}$




$\gamma: \vec{r}=\vec{r}(t)=[x(t), y(t), z(t)]$ → krzywa gładko zorientowana od A do B zawarta w D

$A=(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ $B=(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$

Obliczamy $\int_\gamma \vec{F}(\vec{r})\circ d\vec{r}=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+Q(\ldots)y'(t)+R(\ldots)z'(t)\,dt=$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\frac{\partial u(x(t),y(t),z(t))}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y'(t)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot z'(t)\,dt=\right.$$

$$= \int_\alpha \left[\frac{\partial v(x(t),y(t),z(t))}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot z'(t)\right] dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta v'(t)\, dt = v(t)\Big|_\alpha^\beta = v(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - v(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) =$$

$$= v(B) - v(A) = v(x,y,z)\Big|_A^B$$

# CAŁKA KRZYWOLINIOWA Z POLA POTENCJALNEGO

TWIERDZENIE:
Całka krzywoliniowa z pola potencjalnego $\vec{F}(\vec{r})$ po krzywej kawałkami gładkiej łączącej punkty $A$ i $B$ zorientowanej od $A$ do $B$ jest równa różnicy potencjałów pola w punktach końcowym i początkowym:

$$\int \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r} = v(B) - v(A)$$

więc nie zależy od drogi całkowania zawartej w zbiorze $D$

PRZYKŁAD:
Sprawdzić, że pole $\vec{F}$ jest potencjalne, wyznaczyć potencjał pola i przy jego pomocy obliczyć całkę

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy \qquad A(2,1) \quad B(1,2)$$

$$\vec{F} = \left[\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

zatem $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$ pole potencjalne

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

"stała całkowania po x"

① $v(x,y) = \int \frac{y}{x^2}\,dx = \frac{-y}{x} + \varphi(y)$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$-\frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = C$$

② $v(x,y) = \frac{-y}{x} + C$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy = v(1,2) - v(2,1) =$$

$$= -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = [x^3 - 5yz, \; y^3 - 5xz, \; z^3 - 5xy]$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \vec{F}(\vec{r})\, dr \qquad A(1,0,1) \quad B(-2,2,-2)$$

Sprawdzenie

$$\left.\begin{aligned} &① \; \frac{\partial R}{\partial y} = -5x = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ &② \; \frac{\partial P}{\partial z} = -5y = \frac{\partial R}{\partial x} \\ &③ \; \frac{\partial Q}{\partial x} = -5z = \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{pole potencjalne w } R^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = x^3 - 5yz \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^3 - 5xz \\ \frac{\partial u}{\partial z} = z^3 - 5xy \end{cases}$$

① $u(x,y,z) = \int (x^3 - 5yz)\,dx = \frac{x^4}{4} - 5xyz + \varphi(y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -5xz + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

$$y^3 = \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

$$\varphi(y,z) = \int y^3\,dy = \frac{y}{4} + \psi(z)$$

② DRUGIE PRZYBLIŻENIE POTENCJAŁU

$$u(x,y,z) = \frac{x^4}{4} - 5xyz + \frac{y^4}{4} + \psi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -5xy + \psi(z) \;\wedge\; \frac{\partial u}{\partial z} = z^3 - 5xy$$

$$\Downarrow$$

$$\psi'(z) = z^3$$

$$\psi(z) = \int z^3\,dz = \frac{z^4}{4} + C$$

③ TRZECIE PRZYBL.

$$u(x,y,z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} - 5xyz + C$$

$$\int (x^3 - 5yz)dx + (y^3 - 5xz)dy + (z^3 - 5xy)dz =$$

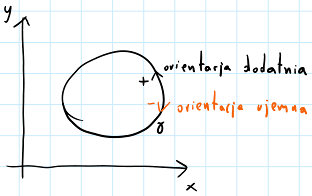
$$= u(-2,2,-2) - u(1,0,1) = 12 - 5 + 8 - \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -28 - \frac{1}{2} = -\frac{57}{2}$$

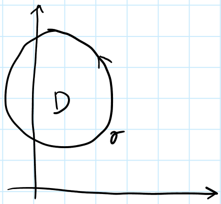
W polu potencjalnym $\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = 0$

# TWIERDZENIE GREENA

## ORIENTACJA KRZYWEJ ZAMKNIĘTEJ:




## TWIERDZENIE GREENA:




$\gamma$ – krzywa zamknięta (kawałkami) gładka, dodatnio zorientowana

D – obszar ograniczony krzywą $\gamma$; obszar normalny względem obu osi

Na $D \cup \gamma$ określone jest pole wektorowe $\vec{F}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)]$ klasy $C^1$

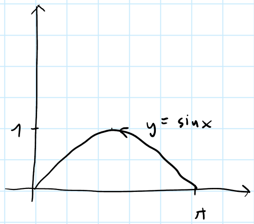
Wtedy zachodzi wzór Greena:

$$\oint_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

## PRZYKŁAD:

$$\oint_\gamma e^x(1-\cos y)\,dx - e^x(y-\sin y)\,dy$$

$\gamma$ – brzeg obszaru: $\{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$ dodatnio zorientowany




$P(x,y) = e^x(1-\cos y)$

$Q(x,y) = -e^x(y - \sin y)$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(y - \sin y)e^x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \sin y$

$$\iint_D (-ye^x + e^x \sin y - e^x \sin y)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_D ye^x\,dx\,dy = -\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} ye^x\,dy = -\frac{1}{2}\int e^x\,dx \sin^2 x$$