NASTĘPNE KOLOKWIUM

- brak grup
- 60 minut
- 4 zadania
- bez metody obniżania rzędów

SKŁADANIE ROZWIĄZAŃ - METODA SUPERPOZYCJI

- jeżeli funkcje $\psi(t)$ i $\eta(t)$ są rozwiązaniami odpowiednio równań

$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=g(t)$$
$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=h(t)$$

to ich suma $\psi(t)+\eta(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=g(t)+h(t)$$

będziemy tym rozwiązywać równania o stałych współczynnikach

PRZYKŁAD

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\cos t+6e^{-2t}$$

Zgodnie z twierdzeniem powyżej, rozwiązujemy dwa równania

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\cos t \quad \leftarrow \text{równanie } A$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6e^{-2t} \quad \leftarrow \text{równanie } B$$

$$\lambda^2+5\lambda+6=0 \qquad \Delta=1 \qquad \sqrt{\Delta}=1$$

$$\lambda_1=-3 \qquad \lambda_2=-2$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$$

$$y_j(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-2t} \quad \leftarrow \text{rozwiązanie równania jednorodnego}$$

Przechodzimy do metody przewidywań:

$$\varphi(t)=A\cos t+B\sin t$$
$$\varphi'(t)=-A\sin t+B\cos t$$
$$\varphi''(t)=-A\cos t-B\sin t$$

$$y''+5y'+6y=\cos t$$

$$-A\cos t-B\sin t+5(-A\sin t+B\cos t)+6(A\cos t+B\sin t)=\cos t$$

po podliczeniu współczynników

$$\begin{cases}-A+5B+6A=1\\-B-5A+6B=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}5A+5B=1\\5B=5A\end{cases} \rightarrow \begin{cases}B=\frac{1}{10}\\A=\frac{1}{10}\end{cases}$$

Rozwiązanie szczególne: $\varphi_A(t)=\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t$

Rozwiązanie równania A: $y_A(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t$

Równanie B:

Równanie B:

$$\varphi(t) = Ate^{-2t}$$
$$\varphi'(t) = A(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = Ae^{-2t}(1-2t)$$
$$\varphi''(t) = -2Ae^{-2t}(1-2t) + Ae^{-2t}(-2) = -2Ae^{-2t}(1-2t+1) = -2Ae^{-2t}(2-2t)$$

$$y'' + 5y' + 6y = 6e^{-2t}$$

$$-2Ae^{-2t}(2-2t) + 5Ae^{-2t}(1-2t) + 6Ate^{-2t} = 6e^{-2t}$$

$$-4Ae^{-2t} + \cancel{4Ae^{-2t}t} + 5Ae^{-2t} \cancel{-10Ae^{-2t}t} + \cancel{6Ate^{-2t}} = 6e^{-2t}$$

$$Ae^{-2t} = 6e^{-2t} \qquad A = 6$$

Postać szczególna: $\varphi_B(t) = 6te^{-2t}$

Rozwiązanie równania B: $y_B(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} + 6te^{-2t}$

Suma rozwiązań szczególnych i równania charakterystycznego

$$y(t) = \varphi_A(t) + \varphi_B(t) + y_j(t)$$
$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + 6te^{-2t}$$

Na tym kończymy równania I i II rzędu...

UKŁADY RÓWNAŃ

UKŁAD RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

- układem równań różniczkowych nazywamy układ postaci

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t) \dots y_n(t)) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t) \dots y_n(t)) \\ \dots \\ y_m'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t) \dots y_n(t)) \end{cases} \qquad y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \dots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t) \dots y_n(t)) \\ f_2 \dots \\ \dots \\ f_n(t, y_1(t) \dots y_n(t)) \end{bmatrix}$$

nazywamy układem równań różniczkowych

- warunek początkowy oznaczymy

$$\begin{cases} y_1(t_0) = z_1 \\ y_2(t_0) = z_2 \\ \dots \\ y_n(t_0) = z_n \end{cases} \qquad z_0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} \qquad y(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \dots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix}$$

- zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = z_0 \end{cases}$$

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH I RZĘDU

- niech $I =$

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH I RZĘDU

- niech $I =$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- oznaczymy $A(t) = [a_{ij}(t)]$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad h(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \dots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

wtedy układ możemy zapisać w postaci

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

- natomiast po uzupełnieniu o warunek początkowy

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + h(t) \\ y(t_0) = z_0 \end{cases}$$

taką postać nazywamy zagadnieniem początkowym

- jeżeli wyrazy macierzy $A(t)$ są pewnymi stałymi $A(t) = A$
  to układ ma postać

$$y'(t) = Ay(t) + h(t)$$

- jeżeli $h(t) = 0$ to układ jest nazywany jednorodnym

- twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia początkowego:

  jeżeli $a_{ij}(t)$ oraz $h_{ij}(t)$ dla $1 < i$ $j \leq n$ są ciągłe na przedziale $I \in R$ oraz $t_0 \in I$, $z_1 \dots z_n \in R$ to istnieje dokładnie jedno określone na I rozwiązanie zagadnienia początkowego

METODA ELIMINACJI

- rozważmy układ

pochodna żeby wyznaczyć $y'(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \xrightarrow{:b} \begin{array}{l} x''(t) = ax'(t) + by'(t) \\ \frac{1}{b}x''(t) - \frac{a}{b}x'(t) = y'(t) \\ \frac{1}{b}x''(t) - \frac{a}{b}x(t) = y(t) \end{array}$$

- metoda eliminacji:

$$\frac{1}{b}x''(t) - \frac{a}{b}x'(t) = cx(t) + d\left(\frac{1}{b}x'(t) - \frac{a}{b}x(t)\right) \quad / \cdot b$$

$$x''(t) - a x'(t) - bcx(t) - dx'(t) + dax(t) = 0$$

$$x''(t) - x'(t)(a+d) + x(t)(da - bc) = 0$$

PRZYKŁAD

$x''(t) - x'(t)(a+d) + x(t)(da-bc) = 0$

PRZYKŁAD

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 4y(t) & \text{równanie } A \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) & \text{równanie } B \end{cases}$$

Różniczkujemy równanie A

$$x''(t) = 5x'(t) + 4y'(t)$$

$$\tfrac{1}{4}x''(t) - \tfrac{5}{4}x'(t) = y'(t)$$

Wyznaczamy $y(t)$ z równania A

$$y(t) = \tfrac{1}{4}x'(t) - \tfrac{5}{4}x(t)$$

Wyliczone $y'(t)$ i $y(t)$ wstawiamy do równania B

$$y'(t) = x(t) + 2y(t)$$

$$\tfrac{1}{4}x''(t) - \tfrac{5}{4}x'(t) = x(t) + \tfrac{1}{2}x'(t) - \tfrac{5}{2}x(t) \qquad / \cdot 4$$

$$x''(t) - 5x'(t) = 4x(t) + 2x'(t) - 10x(t)$$

$$x''(t) - 7x'(t) + 6x(t) = 0$$

Układamy równanie charakterystyczne

$$x''(t) - 7x'(t) + 6x(t) = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \qquad \Delta = 49 - 24 \qquad \sqrt{\Delta} = 25$$

$$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_2 = 1$$

$$x(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{t}$$

Mamy wyznaczone $x(t)$, wyznaczamy $y(t)$

$$\tfrac{1}{4}x'(t) - \tfrac{5}{4}x(t) = y(t)$$
$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{6t}$$
$$x'(t) = c_1 e^{t} + 6c_2 e^{t}$$

$$y(t) = -\tfrac{5}{4}(c_1 e^{t} + c_2 e^{6t}) + \tfrac{1}{4}(c_1 e^{t} + 6c_2 e^{6t})$$
$$y(t) = -c_1 e^{t} + \tfrac{1}{4}c_2 e^{6t}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para funkcji:

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{6t}$$
$$y(t) = -c_1 e^{t} + \tfrac{1}{4}c_2 e^{6t}$$

METODA EULERA

- wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

A - macierz kwadratowa $\qquad$ I - macierz jednostkowa tego samego stopnia co A

- równaniem charakterystycznym nazywamy równanie

$$w_A(\lambda) = 0$$

- przykładowo: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$

$$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$