- równanie liniowe drugiego rzędu

niejednorodne

$$y''(t) + p(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t) = h(t) \qquad A$$

$$y''(t) + p(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t) = 0 \qquad B$$

jednorodne

UKŁAD FUNDAMENTALNY

- para rozwiązań $(y_1(t), y_2(t))$ równania jednorodnego B spełniająca warunek

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

wyznacznik Wrońskiego
„wrońskian”

WZÓR LIOUVILLE'A

- jeżeli funkcje $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$ tworzą układ fundamentalny dla równania liniowego jednorodnego na przedziale (a,b) oraz $t \in (a,b)$ to ich wrońskian wyraża się wzorem:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$$

gdzie $W(t) = W(y_1(t), y_2(t)) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$

PRZYKŁAD:

- Dane jest równanie $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$.
- Znając jedno z rozwiązań tego równania, wyznaczyć drugie rozwiązanie tak, aby para $y_1(t), y_2(t)$ tworzyła układ fundamentalny

$y_1(t) = e^t \qquad t \in \mathbb{R}$
$y_2(0) = 1$
$y_2'(0) = 0$

• Szukamy $y_2(t)$

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^t & y_2(t) \\ e^t & y_2'(t) \end{bmatrix}$$

$$W(0) = \det\begin{bmatrix} 1 & y_2(0) \\ 1 & y_2'(0) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• $\int_0^t p(\tau)\,d\tau = \int_0^t -2\,d\tau = -2t$

• wstawiamy dane do wzoru

$$\begin{vmatrix} e^t & y_2(t) \\ e^t & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$e^t \cdot y_2'(t) - e^t y_2(t) = -e^{2t} \qquad /:e^t$$

$$y_2'(t) - y_2(t) = -e^t \qquad /\cdot e^{-t}$$

$\int -1\,dt = -t$ czynnik całkujący

$$e^{-t} y_2'(t) - e^{-t} y_2(t) = -1$$

$$\left(e^{-t} y_2(t)\right)' = -1$$

$$\int \left(e^{-t} y_2(t)\right)' dt = \int -1$$

$$e^{-t} y_2(t) = -t + c$$

$$y_2(t) = e^t(-t + c) \qquad y_2(0) = 1 \; (0 + c) = 1 \qquad c = 1$$

$$y_2(t) = e^t(-t + 1)$$

• układ fundamentalny : $y_2(t) = e^t(-t+1)$

$y_1(t) = e^t$

RÓWNANIA LINIOWE DRUGIEGO RZĘDU O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

• równanie liniowe postaci $y''(t) + p\cdot y'(t) + q \cdot y(t) = h(t)$ gdzie $p, q \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem liniowym o stałych współczynnikach (niejednorodnym)

C

- jeżeli $h(t)=0$, to takie równanie będziemy nazywali liniowym jednorodnym o stałych współczynnikach : $y''(t)+py'(t)+qy(t)=0 \leftarrow D$

- równanie postaci $\lambda^2+p\lambda+q=0$ nazywamy równaniem charakterystycznym dla równania D.

- wielomian postaci $w(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q$ nazywamy wielomianem charakterystycznym dla równania D.

- niech λ_1, λ_2 będą dwoma różnymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $w(\lambda)$. Wtedy układ fundamentalny dla równania D składa się z funkcji $y_1(t)=e^{\lambda_1 t}$ oraz $y_2(t)=e^{\lambda_2 t}$. Są to tzn. rozwiązania szczególne dla równania D.
  - natomiast rozwiązanie ogólne rozwiązania D wyraża się wzorem $y(t)=c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)$, tzn. $y(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}$.

- niech λ_0 będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Wtedy układ fundamentalny dla równania D składa się z funkcji $y_1(t)=e^{\lambda_0 t}$, $y_2(t)=t\cdot e^{\lambda_0 t}$. To są rozwiązania szczególne
  - natomiast rozwiązanie ogólne równania D wyraża się wzorem $y(t)=c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)$, czyli: $y(t)=c_1 e^{\lambda_0 t}+c_2 t e^{\lambda_0 t}$

- niech $\lambda_1=\alpha+\beta i$ oraz $\lambda_2=\alpha-\beta i$, $\beta>0$, będą pierwiastkami zespolonymi dla wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$. Wtedy układ fundamentalny dla równania D będzie składał się z funkcji $y_1(t)=e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t)$ $y_2(t)=e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t) \leftarrow$ rozw. szczególne
  - rozwiązanie ogólne równania D wyraża się wzorem $y(t)=c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)=c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t)+c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

- skąd bierze się $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ i $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$$e^{\lambda t} \qquad \lambda=\alpha+\beta i \qquad e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$e^{(\alpha+\beta i)t}=e^{\alpha t}\cdot e^{\beta t i}=e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t+i\sin\beta t)=$$
$$=e^{\alpha t}\cos\beta t+e^{\alpha t}\sin\beta t\ i$$

PRZYKŁADY

Przykład 1: $y''(t)=3y'(t)+2y(t)=0$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

$\Delta = 1 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

- ukł. fundamentalny składa się z 2 rozwiązań

$y_1(t) = e^t$
$y_2(t) = e^{2t}$ rozwiązania szczególne

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ rozwiązanie ogólne

Przykład 2: $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0 \qquad \lambda_0 = 3$

- ukł. fundamentalny: $y_1(t) = e^{3t}$
$y_2(t) = t \cdot e^{3t}$ rozwiązania szczególne

$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$ rozwiązanie ogólne

Przykład 3: $y''(t) + 4y(t) = 0$
$\lambda^2 + 4 = 0$
$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$
$\lambda_1 = 2i \qquad \lambda_2 = -2i$

$y_1(t) = e^0 \cdot \cos 2t = \cos 2t$
$y_2(t) = e^0 \cdot \sin 2t = \sin 2t$ rozwiązania szczególne

$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ rozwiązanie ogólne

Zadanie tekstowe:

- wyznaczyć równanie ruchu, w którym przyspieszenie jest wielkością stałą i wynosi $10 \frac{m}{s^2}$.

- wyznaczyć przebytą drogę punktu materialnego do chwili $t = 2s$, jeżeli w chwili $t = 0$ pkt. materialny przebył drogę $y = 0$; nadano mu prędkość w chwili $t = 0$ równą $v = 5 \frac{m}{s}$

$y(t)$ – położenie pkt. materialnego w chwili t

$y''(t)$ – przyspieszenie pkt. materialnego

$\{ y''(t) = 10 \quad m \qquad v(t) = y'(t)$

$y''(t)$ - przyspieszenie pkt. materialnego

$$\begin{cases} y''(t) = 10 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

$v_0 = 5 \frac{m}{s}$

$v(t) = y'(t)$
$v'(t) = 10$
$v(t) = 10t + c_1$

$y'(t) = 10t + c_1$
$$\underbrace{y(t) = \int 10t + c_1 \, dt = 5t^2 + c_1 t + c_2}_{\text{równanie ruchu}}$$

$y(0) = c_2 = 0$
$y'(0) = c_1 = 5$

$y(t) = 5t^2 + 5t$
$y(2) = 20 + 10 = 30$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE NIEJEDNORODNE

- $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t)$ A

- postać rozwiązania równania liniowego:

  - niech $\varphi(t)$ będzie szczególnym rozwiązaniem równania A oraz niech para $y_1(t), y_2(t)$ będzie układem fundamentalnym równania jednorodnego.

  - wtedy dla każdego rozwiązania ogólnego równania A istnieją stałe c_1, c_2 takie, że $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \varphi(t)$

METODA UZMIENNIANIA STAŁYCH

- załóżmy, że para $y_1(t)$, $y_2(t)$ tworzy układ fundamentalny równania liniowego jednorodnego. Wtedy funkcja $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ jest rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego, gdzie stałe $c_1(t)$, $c_2(t)$ spełniają układ równań:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$