Operacje różniczkowe I rzędu

1. operator ∇ („nabla”)

i) układ prostokątny

$$\nabla_K = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z \right)$$

ii) układ cylindryczny

$$\nabla_C = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z \right)$$

iii) układ sferyczny

$$\nabla_S = \left(\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}\mathbf{1}_\Theta + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi \right)$$

2. gradient

Dotyczy funkcji skalarnej $\Phi(x,y,z) \to gradient \to \overline{A}(x,y,z)$

i) układ prostokątny

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{1}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z \right)\Phi = \nabla_K \Phi$$

ii) układ cylindryczny

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{1}_z = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\mathbf{1}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z \right)\Phi = \nabla_C \Phi$$

iii) układ sferyczny

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\mathbf{1}_\Theta + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}\mathbf{1}_\Theta + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{1}_\varphi \right)\Phi = \nabla_S \Phi$$

3. dywergencja

Dotyczy funkcji wektorowej $\overline{F}(x,y,z) \to dywergencja \to f(x,y,z)$

i) układ prostokątny

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{1}_z \right) \cdot \left(F_x\mathbf{1}_{\mathbf{x}} + F_y\mathbf{1}_y + F_z\mathbf{1}_z \right) = \nabla_K \circ \mathbf{F}$$

ii) układ cylindryczny

$$div\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla_C \circ \mathbf{F}$$

iii) układ sferyczny

$$div\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(F_\Theta \sin\Theta) + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} = \nabla_S \circ \mathbf{F}$$

3. **rotacja**

$$\overline{F}(x,y,z) \to rotacja \to \overline{G}(x,y,z)$$

i) układ prostokątny

$$rot\mathbf{F} = +\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{1_x} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\mathbf{1}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \nabla_K \times \mathbf{F}$$

ii) układ cylindryczny

$$rot\mathbf{F} = +\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{1}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{1}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{1}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_\rho & \rho\mathbf{1}_\varphi & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{bmatrix} = \nabla_C \times \mathbf{F}$$

iii) układ sferyczny

$$rot\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial(F_\varphi\sin\Theta)}{\partial\Theta} - \frac{\partial F_\Theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{1}_\Theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\Theta}\right)\mathbf{1}_\varphi = \frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & r\mathbf{1}_\Theta & r\sin\Theta\mathbf{1}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\Theta & r\sin\Theta F_\varphi \end{bmatrix} = \nabla_S \times \mathbf{F}$$

Operacje różniczkowe II rzędu

1. **dywergencja gradientu (laplasjan skalarny)**

i) w układzie prostokątnym

$$div(grad\Phi) = \nabla \circ \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \Delta\Phi = lap\Phi$$

ii) układ cylindryczny

$$div(grad\Phi) = \nabla \circ \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi = lap\Phi$$

iii) układ sferyczny

$$div(grad\Phi) = \nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \Delta\Phi = lap\Phi$$

2. rotacja rotacji (laplasjan wektorowy)

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{F} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{F}) - \mathrm{lap}\mathbf{F}$$

gdzie wykorzystano operator nabla jako wektor i wzór potrójnego iloczynu wektorowego

3. rotacja gradientu

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\Phi)=\nabla\times\nabla\Phi=(\nabla\times\nabla)\Phi=0$$

gdzie iloczyn wektorowy symbolów operatorów nabla jako dwóch jednakowych wektorów jest równy zeru, co jest równoważne przemienności pochodnych mieszanych drugiego rzędu.

4. dywergencja rotacji

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$$

gdzie wykorzystano wzór potrójnego iloczynu skalarnego z operatorem nabla jako symboliczny wektor, otrzymując wyznacznik o dwóch jednakowych wierszach, co również jest równoważne przemienności pochodnych mieszanych.