



Politechnika Wrocławska



INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
www.if.pwr.wroc.pl

Podstawy analizy niepewności pomiarowych w studenckim laboratorium podstaw fizyki

Włodzimierz Salejda

Ryszard Poprawski

Elektroniczna wersja opracowania

dostępna w Internecie na stronach:

<http://www.if.pwr.wroc.pl/lpf/> w zakładce pomoce dydaktyczne

oraz

<http://www.if.pwr.wroc.pl/~wsalejda>

Wrocław, marzec 2009

Spis treści

1	Pojęcia podstawowe	3
2	Statystyczna analiza wyników i niepewności pomiarów bezpośrednich	5
3	Statystyczna analiza wyników i niepewności pomiarów pośrednich	7
4	Zasady zapisywania i zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych	11
5	Spis literatury	13

1 Pojęcia podstawowe

Wynik nawet najstaranniej wykonanego pomiaru lub obserwacji obarczony jest niepewnością odzwierciedlającą niedokładność wartości wielkości zmierzonej. Dlatego też analiza niepewności pomiarów jest istotnym elementem każdego eksperymentu w fazie jego projektowania, realizacji i opracowania otrzymanych wyników. W tym opracowaniu opiszemy krótko podstawowe pojęcia stosowane w analizie niepewności pomiarów oraz metody ich szacowania.

W roku 1995 uzgodniono nowe międzynarodowe normy [1, 2, 3] dotyczące terminologii i zasad wyznaczania niepewności pomiarowych, których statut prawny jest taki sam, jak uregulowań dotyczących SI.

Nowym i podstawowym pojęciem jest **niepewność pomiaru**, przez którą rozumiemy miarę niedokładności, z jaką zmierzono daną wielkość fizyczną. Innymi słowy, niepewność pomiaru oznacza ilościową miarę naszej niepewności lub wątpliwości co do wartości wyniku pomiaru danej wielkości fizycznej.

Niepewność pomiaru ma wiele przyczyn. Do najważniejszych zaliczamy:

- (a) niepełną definicję wielkości mierzonej (określenie danej wielkości fizycznej jest tymczasowe w tym sensie, że może ulec zmianie wraz z rozwojem nauki);
- (b) niedokładną realizację tej definicji (przyrząd, miernik, wzorzec nie jest idealną realizacją definicji wielkości fizycznej, np. temperaturę określamy jako część temperatury punktu potrójnego wody, ale nie istnieje idealnie czysta woda, pozbawiona jakichkolwiek domieszek; podobnie wzorzec czasu jest ściśle związany z prędkością światła, więc udokładnienie pomiaru prędkości światła wpłynie zapewne na wzorzec czasu);
- (c) niereprezentatywność serii wyników pomiarów (np. zbyt mała liczba pomiarów);
- (d) niedokładną znajomość czynników zewnętrznych (np. wpływu otoczenia na przebieg pomiarów) lub ich niedokładny pomiar;
- (e) błędy obserwatora podczas odczytów wskazań przyrządów analogowych;
- (f) skończoną zdolność rozdzielczą stosowanych w pomiarach przyrządów;
- (g) niedokładność stosowanych wzorców i materiałów odniesienia;
- (h) niedokładne wartości stałych lub parametrów pochodzących z innych «ródeł»;
- (i) przybliżenia i założenia upraszczające przyjęte w pomiarach lub procedurze pomiarowej;
- (j) zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.

Dokonując pomiaru wielkości fizycznej X przypisujemy jej liczbę mianowaną postaci

$$x = (r_X \pm \delta_x) J_X, \quad (1)$$

gdzie J_X — jednostka wielkości X , r_X — liczba jednostek (w takim zapisie r_X jest wartością niemianowaną), δ_x — niepewność pomiaru (w tym zapisie liczba niemianowana).

Jak widzimy z postaci zapisu (1), podanie wartości wielkości fizycznej w postaci tylko liczby nie ma sensu (o ile nie jest to wielkość bezwymiarowa).

Wartość niepewności δ_x oceniamy:

- za pomocą metod analizy statystycznej serii wyników pomiarów; ten sposób nosi nazwę oceny niepewności metodą A (patrz również [1, 3, 5, 6]);
- wykorzystując dodatkowe niestatystyczne informacje np. wielkość działki elementarnej przyrządu lub klasę przyrządu; ten sposób nosi nazwę oceny niepewności metodą B (patrz także [1, 3, 5, 6]).

W nowej analizie niepewności pomiarowych nie posługujemy się pojęciami **rachunku błędów pomiarowych**, którego podstawowym obiektem był **błąd pomiaru** $\delta_{b.p.}(x)$ wielkości X , zdefiniowany jako różnica między wynikiem pomiaru x a wartością rzeczywistą μ_X wielkości mierzonej

$$\delta_{b.p.}(x) = x - \mu_X. \quad (2)$$

Tak określone pojęcie jest wyidealizowane i mało użyteczne w analizie niepewności pomiarowych, ponieważ nie jest znana dokładna (tj. rzeczywista) wartość μ_X . Tym samym nie jest znana wartość $\delta_{b.p.}(x)$.

Innym pojęciem rachunku błędów, którego użyteczność jest ograniczona, był **błąd przypadkowy** $\delta_p^{(\infty)}(x)$, który definiowano jako różnicę między wynikiem pomiaru x wielkości X a średnią arytmetyczną $\bar{x}^{(\infty)}$ z nieskończonej liczby pomiarów

$$\delta_p^{(\infty)}(x) = x - \bar{x}^{(\infty)}. \quad (3)$$

Pojęcie błędu przypadkowego nie może być przedmiotem analizy ilościowej, ponieważ seria pomiarów jest zawsze skończona. Z tych powodów odstąpiono od posługiwania się błędami (pomiarów lub przypadkowymi), jak również nazwą **rachunek błędów**. Na ich miejsce wprowadzono nowe pojęcia, które prezentujemy dalej i które są przedmiotem **analizy niepewności pomiarowych** przedstawionej obszernie w literaturze «ródłowej [1, 2, 4, 5, 6].

Podstawowym pojęciem w analizie niepewności pomiarowych jest **niepewność przypadkowa** δ_x mierzonej wielkości fizycznej X , którą definiujemy następująco:

$$\delta_x = \delta = x - \bar{x}, \quad (4)$$

gdzie \bar{x} jest średnią arytmetyczną serii n pomiarów

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (5)$$

Dla skrócenia zapisu pominięto argument x w definicji niepewności pomiarowej we wzorze (4).

Oprócz niepewności przypadkowych posługujemy się także pojęciem **błędu systematycznego** Δ_x , który definiuje wyrażenie

$$\Delta_x = \Delta = \bar{x}^{(\infty)} - \mu_X. \quad (6)$$

Wprowadzone poprzednio wielkości (2), (3) i (4) spełniają związek

$$\delta_{b.p.}(x) = x - \mu_X = x - \bar{x}^{(\infty)} + \bar{x}^{(\infty)} - \mu_X \simeq \delta_x + \Delta_x = \delta + \Delta,$$

z którego wynika, że możemy analizować dokładność pomiarów, rozpatrując jedynie przypadkowe niepewności pomiarów (4) oraz błędy systematyczne (6).

W praktyce laboratoryjnej popełniane są dość często **błędy grube**. Powstają one zazwyczaj wskutek pomyłki osoby przeprowadzającej pomiar. Przykładowo: mierząc średnicę drutu śrubą mikrometryczną odczytano wynik 2,34 mm, a zapisano 2,34 m. Błąd gruby jest stosunkowo łatwo zauważyć, ponieważ prowadzi on do absurdalnych wyników, różniących się od spodziewanych wartości o kilka rzędów wielkości. Dlatego też rezultaty pomiarów obciążonych błędami grubymi należy odrzucić, a stosowne pomiary przeprowadzić ponownie.

Celem analizy niepewności pomiarów jest określenie najlepszej w danych warunkach eksperymentalnych oceny wartości rzeczywistej μ_X mierzonej wielkości fizycznej X oraz wyznaczenie niepewności pomiarowych. Zadania te realizujemy za pomocą metody A (statystyczna metoda określania niepewności pomiarów) lub B (metoda niestatystyczna). Pierwsza z metod jest powszechnie stosowana w laboratoriach studenckich, dlatego przedstawiamy ją dalej dość szczegółowo. Metoda B jest znacznie trudniejsza. Zainteresowanych odsyłamy do pozycji literaturowych [1, 5, 6].

Czytelnikom i Czytelniczkom tego opracowania polecamy lekturę pozycji [7, 8, 9, 10] dostępnych w Internecie.

2 Statystyczna analiza wyników i niepewności pomiarów bezpośrednich

Założmy, że n -krotnie powtórzono bezpośredni pomiar wielkości X (w jednakowych i stabilnych warunkach) i otrzymano serię (próbę) wyników, które oznaczamy symbolicznie jako $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. W metodzie A oceny niepewności pomiarowych zakłada się, że mierzona wielkość X jest zmienną losową, a $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest n -elementową (skończoną) próbą z nieskończonej populacji, którą tworzą wszystkie możliwe wyniki pomiarów. Do próby skończonej stosuje się metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

W charakterze najlepszej oceny wartości rzeczywistej μ_X przyjmuje się średnią arytmetyczną (5). Natomiast za miarę niepewności pojedynczego pomiaru z próby $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ przyjmujemy liczbę

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (7)$$

którą nazywamy odchyleniem standardowym pojedynczego pomiaru (wielkość $(s_x)^2$ nazywamy wariancją). Oznacza to, że oceną niepewności zmierzonej wartości x_i jest s_x ,

a wartość i -tego pomiaru z próby $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ wynosi $x_i \pm s_x$. Jak widzimy, każdemu wynikowi pomiaru możemy w ten sposób przypisać niepewność w sensie relacji (1).

Niepewnością pomiarową $s_{\bar{x}}$, zwaną niepewnością standardową, obarczona jest również wartość średnia \bar{x} (5). Oceną tej niepewności jest

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Oznacza to, że najlepszym oszacowaniem zmierzonej wartości wielkości X jest $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, tj. miarą niepewności \bar{x} jest niepewność standardowa (8). Wkład do niepewności przypadkowej wnoszą czynniki wymienione poprzednio w punktach (a)–(j) na stronie 3.

Jeśli dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru lub wyniki pomiarów nie wykazują rozrzutu, to w charakterze niepewności wartości średniej przyjmujemy

$$s_{\bar{x}} = \Delta_{\text{d.e.}} / \sqrt{3}, \quad (9)$$

gdzie $\Delta_{\text{d.e.}}$ jest wartością działki elementarnej przyrządu.

W przypadkach, gdy w pomiarach uwzględniamy niepewność statystyczną (8) i niepewność przyrządu pomiarowego (9), to należy wyznaczyć oszacowanie całkowitej niepewności standardowej $s_{\bar{x}}^{(c)}$ wartości średniej (5) ze wzoru

$$s_{\bar{x}}^{(c)} = \sqrt{(s_{\bar{x}})^2 + \frac{1}{3}(\Delta_{\text{d.e.}})^2}.$$

W analizie niepewności pomiarowych posługujemy się oprócz wprowadzonych wielkości mianowanych (wzory (5), (7)–(9)) także innymi, które są bezwymiarowe. Są nimi:

- Niepewność względna pojedynczego pomiaru

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{s_x}{x_i}, \quad (10)$$

- Niepewność względna wartości średniej

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}, \quad (11)$$

które podawane są zazwyczaj w procentach.

Znając klasę C_a przyrządu (miernika) analogowego użytego w pomiarach wyznaczamy maksymalną wartość niepewności całkowitej $\delta^{(c)}$ korzystając z zależności

$$\delta^{(c)} = \frac{C_a Z}{100},$$

gdzie klasa C_a wyrażona jest w procentach, Z oznacza używany zakres pomiarowy przyrządu (miernika) [3].

Jeśli stosujemy w pomiarach miernik cyfrowy, to

$$\delta^{(d)} = \frac{C_d x}{100} + \delta_r,$$

gdzie C_d — klasa (w procentach) miernika cyfrowego, a δ_r jest rozdzielczością miernika (zwaną także niepewnością dyskretyzacji zależną od zakresu pomiarowego) [3].

Przedstawione dotychczas metody oceniania niepewności pomiarowych są przydatne w pomiarach bezpośrednich (zwanymi także pomiarami prostymi), kiedy to wartości mierzone są odczytywane bezpośrednio ze skali miernika.

3 Statystyczna analiza wyników i niepewności pomiarów pośrednich

Przejdziemy do przedstawienia sposobów wyznaczania złożonych niepewności pomiarowych, z którymi mamy do czynienia w przypadkach przeprowadzania pomiarów pośrednich. Wówczas to mierzymy wielkości fizyczne (X_1, X_2, \dots, X_k) , z którymi wielkość Y mierzona pośrednio jest związana relacją (związkiem funkcyjnym — jest to zazwyczaj wzór matematyczny) postaci

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_k). \quad (12)$$

Dokonując serii pomiarów wyznaczamy wartości średnie $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ i na tej podstawie znajdujemy jako ocenę mierzonej pośrednio wielkości Y wartość

$$\bar{y} = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k). \quad (13)$$

W następnym kroku należy wyznaczyć niepewności standardowe wielkości pośrednich u_Y . Przy ich obliczaniu należy rozróżnić nieskorelowane i skorelowane pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio. Pojęcie to przedstawimy na przykładzie dwóch wielkości X i Z . Załóżmy, że $\{(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_n, z_n)\}$ są wynikami serii pomiarów X i Z .

Współczynnikiem korelacji $r_{X,Z}$ (korelacją z próby) nazywamy wielkość

$$r_{X,Z} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}} = \frac{s_{X,Z}}{s_X s_Z}, \quad (14)$$

gdzie

$$s_{X,Z} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}).$$

Pokazuje się, że wartości współczynnika korelacji należą do przedziału $[-1, 1]$. Jeśli $r_{X,Z} = \pm 1$, to punkty (x_i, z_i) leżą na prostej. Mówimy wówczas, że wielkości X i Z są skorelowane. Jeśli $r_{X,Z} \ll 1$, to wielkości te nie są skorelowane.

Jeśli wszystkie wielkości występujące we wzorze (12) są parami nieskorelowane, to niepewność standardową $u_{\bar{y}}$ oceny \bar{y} wielkości Y obliczamy za pomocą wzoru

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_1}\right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (s_{\bar{x}_1})^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_2}\right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (s_{\bar{x}_2})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_k}\right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (s_{\bar{x}_k})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_j}\right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (s_{\bar{x}_j})^2}, \quad (15)$$

gdzie $s_{\bar{x}_j}$ oznacza odchylenie standardowe (8) średniej arytmetycznej (5) serii pomiarów wielkości fizycznej X_j , a $(\partial g / \partial \bar{x}_j)_{\bar{\mathbf{x}}}$ oznacza wartość pochodnej cząstkowej funkcji (13) w punkcie $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Wzór (15) jest matematyczną postacią reguły przenoszenia niepewności pomiarowych nieskorelowanych wielkości fizycznych w pomiarach pośrednich.

Przykładem pomiaru pośredniego, w którym mierzymy nieskorelowane wielkości, jest wyznaczanie średniej prędkości $v = d/t$ biegacza, gdzie d i t oznaczają odpowiednio dystans biegu i czas jego trwania. W tym celu najpierw mierzymy długość bieżni (za pomocą określonego miernika) i wyznaczamy jej wartość średnią \bar{d} obarczoną niepewnością $s_{\bar{d}}$. Następnie, innym przyrządem, mierzymy średni czas biegu \bar{t} , którego niepewność wynosi $s_{\bar{t}}$. Złożona niepewność pomiaru pośredniego prędkości jest równa

$$u_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)^2 (s_{\bar{d}})^2 + \left(-\frac{\bar{d}}{(\bar{t})^2}\right)^2 (s_{\bar{t}})^2},$$

ponieważ $\partial v / \partial d = 1/t$, $\partial v / \partial t = -d/t^2$ i skorzystaliśmy ze wzoru (15).

W wielu przypadkach zależność funkcyjna (12) ma postać iloczynu

$$Y = A(X_1)^{\alpha_1}(X_2)^{\alpha_2} \cdots (X_k)^{\alpha_k}, \quad (16)$$

gdzie A — stała wielkość (lub bezwymiarowy współczynnik), α_j są znanymi wykładnikami (w ogólności liczbami rzeczywistymi). W takim wypadku ocena niepewności złożonej wartości średniej (zakładamy, że $A > 0$, $\bar{x}_j > 0$)

$$\bar{y} = A(\bar{x}_1)^{\alpha_1}(\bar{x}_2)^{\alpha_2} \cdots (\bar{x}_k)^{\alpha_k} \quad (17)$$

jest dana wzorem

$$u_Y = \bar{y} \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\bar{x}_1}\right)^2 (s_{\bar{x}_1})^2 + \left(\frac{\alpha_2}{\bar{x}_2}\right)^2 (s_{\bar{x}_2})^2 + \cdots + \left(\frac{\alpha_k}{\bar{x}_k}\right)^2 (s_{\bar{x}_k})^2}. \quad (18)$$

Ostatnią relację otrzymujemy za pomocą metody pochodnej logarytmicznej. W tym celu logarytmujemy obie strony wzoru (17)

$$\ln \bar{y} = \ln A + \alpha_1 \ln \bar{x}_1 + \alpha_2 \ln \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_k \ln \bar{x}_k \quad (19)$$

i obliczamy pochodne cząstkowe (19), co prowadzi do wyrażeń typu

$$\frac{\partial(\ln \bar{y})}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{\bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\alpha_j}{\bar{x}_j}, \quad (20)$$

z których wynika, że

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}_j} = \bar{y} \frac{\alpha_j}{\bar{x}_j}. \quad (21)$$

Po podstawieniu związków (20) i (21) do wzoru (15) otrzymujemy relację (18).

Pomiary wielkości fizycznych (X_1, X_2, \dots, X_k) należy uznać za skorelowane wtedy, gdy są mierzone wielokrotnie za pomocą jednego zestawu doświadczalnego. Oznacza to, że praktycznie wszystkie pomiary elektryczne w pracowniach studenckich są pomiarami skorelowanymi. W takim przypadku trzeba uwzględniać korelacje zachodzące pomiędzy poszczególnymi wielkościami mierzonymi bezpośrednio i złożona niepewność standardowa $u_{\bar{y}}$ wielkości Y mierzonej pośrednio wyraża się wzorem

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_j} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (s_{\bar{x}_j})^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=j+1}^k \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_j} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_i} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} s_{\bar{x}_j} s_{\bar{x}_i} r_{X_j, X_i}}, \quad (22)$$

gdzie zastosowano oznaczenia jak we wzorze (15) i r_{X_j, X_i} oznaczają współczynnik korelacji wielkości X_j oraz X_i (patrz wzór (14)).

Wzór (15) jest matematyczną postacią reguły przenoszenia niepewności pomiarowych skorelowanych wielkości fizycznych w pomiarach pośrednich.

Przykładem takich pomiarów jest wyznaczanie oporu R przewodnika metodą techniczną, w której dokonujemy wielokrotnego pomiaru bezpośredniego natężenia prądu I_i oraz spadku napięcia U_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Korzystając z przytoczonych wzorów wyznaczamy kolejno:

- (a) wartości średnie (5): \bar{I} oraz \bar{U} ;
- (b) ocenę wartości średniej $\bar{R} = \bar{U}/\bar{I}$ — w rozpatrywanym przypadku zależność funkcyjna (12) ma postać ilorazu $R = U/I$;
- (c) odchylenia standardowe (8): \bar{s}_I i \bar{s}_U ;
- (d) współczynnik korelacji (14) $r_{U,I}$;
- (e) niepewność standardową (22) u_R wartości \bar{U} :

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{I}} \right)^2 (\bar{s}_U)^2 + \left(-\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} \right)^2 (\bar{s}_I)^2 + 2 \left(\frac{1}{\bar{I}} \right) \left(-\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} \right) \bar{s}_U \bar{s}_I r_{U,I}},$$

gdzie skorzystano z pochodnych cząstkowych $\partial R/\partial U = 1/I$, $\partial R/\partial I = -U/I^2$.

Podamy teraz inny sposób wyznaczania oceny niepewności pomiarowych za pomocą **metody różniczki zupełnej**. Można go stosować w pomiarach wielkości nieskorelowanych. Niech $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ będą ocenami zmierzonych bezpośrednio wielkości (X_1, X_2, \dots, X_k), a $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_k)$ niepewnościami tych ocen. Jeśli zachodzi związek (12), to niepewność $v_{\bar{y}}$ wielkości Y wynosi

$$v_{\bar{y}} = \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_1} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{s}_1 + \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_2} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{s}_2 + \dots + \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_k} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{s}_k, \quad (23)$$

gdzie wartości pochodnych cząstkowych obliczamy w punkcie $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$.

Aby uzasadnić wzór (23), należy wyznaczyć różniczkę zupełną funkcji (12), która ma następującą postać:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_1} d\bar{x}_1 + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_2} d\bar{x}_2 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k.$$

Ostatnie wyrażenie jest nieskończenie małą zmianą $d\bar{y}$ funkcji (12) spowodowaną nieskończenie małymi zmianami $d\bar{x}_j$ jej argumentów ($j = 1, 2, \dots, k$). Jeśli teraz potraktujemy przyrosty $d\bar{x}_j$ jako niepewności oceny \bar{s}_j , tj. położymy $d\bar{x}_j = \bar{s}_j$, a $d\bar{y}$ jako niepewność oceny Y , tj. $d\bar{y} = v_{\bar{y}}$, oraz przyjmiemy najmniej korzystny układ znaków pochodnych (aby zmaksymalizować sumę po prawej stronie ostatniej równości), to otrzymamy wzór (23). Jeśli obliczamy niepewność złożoną za pomocą (23), to mówimy, że wyznaczamy ją metodą różniczki zupełnej.

Metoda różniczki zupełnej dla zależności (16) prowadzi do oszacowania

$$v_{\bar{y}} = \bar{y} \left[\left| \alpha_1 \frac{\bar{s}_1}{\bar{x}_1} \right| + \left| \alpha_2 \frac{\bar{s}_2}{\bar{x}_2} \right| + \cdots + \left| \alpha_k \frac{\bar{s}_k}{\bar{x}_k} \right| \right].$$

Z uwagi na nierówność

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{x}_j} \right)_{\bar{x}} s_{\bar{x}_j} \right]^2} \leq \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_j} \right|_{\bar{x}} s_{\bar{x}_j}$$

złożone niepewności pomiarowe dane wzorami (15) i (23) spełniają relację

$$u_{\bar{y}} \leq v_{\bar{y}}.$$

Oznacza to, że do szacowania niepewności złożonych wielkości nieskorelowanych możemy stosować metodę różniczki zupełnej, która jednak przeszacowuje (tj. szacuje z nadmiarem) wyznaczane wartości niepewności.

Metoda ta nie może być stosowana do oceny niepewności wielkości skorelowanych, gdyż w tym przypadku niepewność (22) może być mniejsza lub większa od niepewności (23).

Ponieważ szacowanie złożonej niepewności standardowej wielkości mierzonej pośrednio w oparciu o skorelowane wielkości fizyczne mierzone bezpośrednio jest dość skomplikowane, to w praktyce laboratorium studenckiego zalecamy postępować następująco:

- (a) Wykonujemy serię n pomiarów wielkości fizycznych (X_1, X_2, \dots, X_k) ; oznaczmy wynik i -tego bezpośredniego pomiaru wielkości X_j przez $x_j^{(i)}$.
- (b) Na podstawie zmierzonych wartości $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ wyznaczamy n wartości $y_i = g(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})$ wielkości Y mierzonej pośrednio.
- (c) Zbiór wartości $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ traktujemy jako skończoną n -elementową próbę, podobnie jak w pomiarach bezpośrednich. Pozwala to wyznaczyć średnią \bar{y} (wzór (5)) oraz odchylenie standardowe $s_{\bar{y}}$ (wzór (8)).
- (d) Przyjmujemy \bar{y} za ocenę Y , a $s_{\bar{y}}$ — za ocenę złożonej niepewności standardowej $u_{\bar{y}}$.

4 Zasady zapisywania i zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych

Przedstawimy jeszcze zasady zaokrąglania i zapisywania wyników pomiarów oraz ich niepewności. Przypomnijmy, że wyniki pomiarów zapisujemy w postaci liczbowej mianowanej

$$\bar{x} \pm \delta,$$

gdzie $\bar{x} = r_X \cdot J_X$ jest teraz wielkością mianowaną. Postać ta zawiera informację o ocenie wartości wielkości zmierzonej (\bar{x}), jednostkach, w jakich jest ona podana, oraz o niepewności pomiaru, której miarą jest mianowana wielkość $\delta = \delta_x \cdot J_X$.

Wyznaczając wartość średnią (5) lub niepewność pomiaru za pomocą kalkulatora lub komputera otrzymujemy liczby wielocyfrowe (widoczne na wyświetlaczu kalkulatora, ekranie monitora lub wydruku), w której wiarygodne są cyfry zwane **cyframi znaczącymi**.

Cyfry znaczące w średniej (5) ustalamy na podstawie cyfr określających ocenę niepewności pomiarowej δ . Wyznaczając niepewność pomiarową δ (za pomocą kalkulatora lub komputera) otrzymujemy także liczbę wielocyfrową, w której co najwyżej dwie pierwsze cyfry są znaczące. Ich znajomość pozwala określić sensownie ocenę wartości średniej i jej cyfry znaczące. Kierujemy się przy tym następującą regułą zaokrąglania wyników: **wyniki pomiarów podajemy z dokładnością do miejsca, na którym występuje ostatnia cyfra znacząca niepewności pomiaru**. Reguła ta pozwala zapisywać średnią (5) za pomocą tylko cyfr znaczących (i pomijać pozostałe).

Przy wyznaczaniu wartości liczbowej niepewności pomiarowej oraz jej cyfr znaczących posługujemy się następującymi regułami zaokrąglania:

- (1) Wartość niepewności zawsze zaokrąglamy w górę.
- (2) Wstępnie niepewność zaokrąglamy do jednej cyfry (zwanej znaczącą).
- (3) Jeśli wstępne zaokrąglenie wartości niepewności powoduje wzrost jej wartości o więcej niż 10%, to niepewność zaokrąglamy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Przykład 1. Obliczona wartość średnia $\bar{x}^{(0)} = 12,3452907$ m, a odchylenia standardowego wynosi $s_{\bar{x}}^{(0)} = 0,1234236$ m. Zaokrąglenie w górę (reguła 1) do jednej cyfry znaczącej daje $s_{\bar{x}}^{(1)} = 0,2$ m. Względna zmiana wartości $(0,2 - 0,1234236)/0,1234236 = 62\%$. Zatem należy niepewność standardową zaokrąglić do dwóch cyfr znaczących, tj. $s_{\bar{x}}^{(2)} = 0,13$ m. Tym razem względna zmiana wartości jest równa $(0,13 - 0,1234236)/0,1234236 = 5\%$, co oznacza, że poprawną postacią odchylenia standardowego jest $s_{\bar{x}} = 0,13$ m z dwiema cyframi znaczącymi. Pozwala to nam zapisać średnią z pomiarów za pomocą cyfr znaczących: $\bar{x} = (12,35 \pm 0,13)$ m. W ten sposób spośród dziewięciu cyfr z początkowej wartości liczby $\bar{x}^{(0)}$ pozostają jedynie cztery, przy czym po przecinku mamy dwie cyfry znaczące.

Przykład 2. Załóżmy, że wyznaczamy powierzchnię S prostokąta, mierząc długości jego boków za pomocą przymiaru z dokładnością $\pm 0,1$ cm. Niechaj zmierzone długości boków będą równe $a = 14,4$ cm (trzy cyfry znaczące) i $b = 5,3$ cm (dwie cyfry znaczące), co oznacza, że wartości zmierzone są równe $(14,4 \pm 0,1)$ cm i $(5,3 \pm 0,1)$ cm, a pole prostokąta

$S^{(0)} = 14,4 \cdot 5,6 \text{ cm}^2 = 76,32 \text{ cm}^2$. Ostatni wynik zawiera cztery cyfry, czyli więcej, niż liczba cyfr znaczących w zmierzonych długościach jego boków. Stosując metodę pochodnej logarytmicznej do wzoru $S = ab$ otrzymujemy $\delta_S/S = \delta_a/a + \delta_b/b$, a stąd niepewność wartości średniej $\delta_S = S(\delta_a/a + \delta_b/b) = 76,32(0,1/14,4 + 0,1/5,3) \text{ cm}^2 = 1,97 \simeq 2 \text{ cm}^2$. Zaokrąglając pole prostokąta z dokładnością do 1 cm^2 (niepewność pomiaru jest określona z dokładnością do cyfr jedności), otrzymujemy ostatecznie wartość pola $S = (76 \pm 2) \text{ cm}^2$. Jak widzimy, w tym przypadku (mnożenia wielkości fizycznych) liczba cyfr znaczących wartości końcowej jest równa liczbie cyfr znaczących wielkości określonej z najmniejszą dokładnością (tj. liczbie cyfr znaczących w zmierzonej wartości boku $b = 5,3 \text{ cm}$). Można w związku z tym sformułować następującą regułę: **Jeśli mnożymy kilka wielkości fizycznych, to liczba cyfr znaczących w wartości końcowej jest równa liczbie cyfr znaczących wielkości określonej z najmniejszą dokładnością.**

Przykład 3. Zmierzone wartości masy dwóch różnych ciał są równe odpowiednio $m_1 = 173 \text{ kg}$ i $m_2 = 8,25 \text{ kg}$. Układ złożony z obu ciał ma masę $M = 181 \text{ kg}$. W przypadku dodawania lub odejmowania zmierzonych wartości obowiązuje inna reguła, zgodnie z którą **dokładność wyniku dodawania (sumy składników) lub odejmowania (różnicy składników) określona jest przez najmniejszą dokładność dodawanych lub odejmowanych składników.** W naszym przykładzie najmniej dokładnym składnikiem sumy jest masa $m_1 = 173 \text{ kg}$, ponieważ dokładność jej wyznaczenia jest równa 1 kg (druga masa jest wyznaczona z większą dokładnością równą $0,01 \text{ kg}$). Dlatego też masa układu jest równa 181 kg , a nie $181,25 \text{ kg}$. Jest to zgodne z zasadami podanymi wcześniej, ponieważ $\delta_M = \delta_{m_1} + \delta_{m_2} = (1 + 0,01) \text{ kg} \simeq 1 \text{ kg}$. Zatem wynik dodawania $181,25 \text{ kg}$ zaokrąglamy do pierwszego miejsca przed przecinkiem (cyfra jedności), co prowadzi do wyniku $M = (181 \pm 1) \text{ kg}$.

Zera występujące w liczbie mogą być lub nie być cyframi znaczącymi. **Zera, które określają w zapisie dziesiętnym liczby położenie przecinka nie są cyframi znaczącymi**, jak zera w liczbach $0,02 \text{ m}$ lub $0,0056 \text{ m}$. Liczby te mają odpowiednio jedną i dwie cyfry znaczące. Wartości takie zapisujemy często w postaci wykładniczej: $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ i $5,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. W pozostałych przypadkach pod cyframi znaczącymi rozumiemy cyfry rzeczywiście znane. Przykładowo, zapis masy ciała $1,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$ oznacza, że liczba zawiera dwie cyfry znaczące. Natomiast zapis $1,50 \cdot 10^3$ oznacza, że wartość masy ma trzy cyfry znaczące.

5 Spis literatury

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, opracowanie International Organization for Standardization (ISO), Genewa 1995.
- [2] Henryk Szydłowski, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów*, Postępy Fizyki, **51**, Zeszyt 2 (2000); wersja artykułu dostępna ze strony www.prz.rzeszow.pl/fizyka/pl/pobieralnia/lab_stud/miedzynarodowe_normy_oceny_niepewnosci_pomiaru.pdf
- [3] Ryszard Poprawski, Włodzimierz Salejda, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki. Część I. Zasady opracowania wyników pomiarów*, Wydanie V, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005.
- [4] Witold Klonecki, *Statystyka dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1999.
- [5] *Essentials of expressing measurement uncertainty. The National Institute of Standards and Technology (NIST) Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, dokument elektroniczny — adres w Internecie: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty>.
- [6] B.N. Taylor and Ch.E. Kuyatt, *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results. NIST Technical Note 1297* (1994), dokument elektroniczny — adres w Internecie: <http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines>.
- [7] K. Kozłowski, R. Zieliński, *Metody opracowania i analiza wyników pomiarów*; opracowanie dostępne na stronie <http://www.fuw.edu.pl/~ajduk/FUW/analniepewn.pdf>
- [8] Autor nieznany *Analiza niepewności pomiarowych*, opracowanie dostępne na stronie <http://labor.ps.pl/e/er1.html>
- [9] M. Zimnal-Starnawska, *Analiza niepewności pomiarowych w pigułce*, opracowanie dostępne na stronie <http://www.fuw.edu.pl/~ajduk/FUW/analniepewn.pdf>
- [10] *Podstawy opracowania wyników pomiarów z elementami analizy niepewności pomiarowych*, opracowanie (w postaci prezentacji) pod redakcją A. Magiery dostępne na stronie <http://users.uj.edu.pl/~pustelny/downloads/pracownia1/AnalizaNiepewnosciPomiarowych.pdf>; inna ale bardzo elementarna prezentacja na stronie <http://zsgfizyka.republika.pl/liceum/niepewnosc.pps>.