Ćwiczenia 16

niedziela, 15 kwietnia 2018 14:11

(62) a) $\iiint_U \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad U: 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$

$4 \leqslant r^2 \leqslant 9$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_2^3 r\cos\psi\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \int_2^3 r\, dr = \frac{1}{2}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\sin\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[r^2\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 5 = 10\pi$$

(b) $\iiint_U xyz\,dx\,dy\,dz$ $\qquad U: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1$

$\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^5 \sin\varphi\cos\varphi\cos^3\psi\sin\psi\, dr = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\sin\psi\, d\psi \int_0^1 r^5\, dr =$$

$=$