DEFINICJE

$y''(t) + p \cdot y'(t) + q \cdot y(t) = h(t)$ równanie A

$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$ równanie B

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ $\quad y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $\quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ pierwiastki
2. $\lambda_0 \in R$ $\quad y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$ $\quad y_2(t) = e^{\lambda_0 t}$ pierwiastek drugiego stopnia
3. $\lambda \in C$ $\quad \lambda = \alpha + \beta i$ $\quad \beta > 0$ pierwiastki zespolone

$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ $\quad y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$

$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ rozwiązanie ogólne

METODA UZMIENNIANIA STAŁYCH DLA RÓWNANIA A

- jeżeli $y_1(t), y_2(t)$ stanowią układ fundamentalny dla równania B, to rozwiązanie ogólne dla równania A jest postaci

$$y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$$

gdzie $c_1(t), c_2(t)$ spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD

$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^2$

$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Delta = 9 \rightarrow \lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ $\rightarrow$ $y_1(t) = e^{-2t}$, $y_2(t) = e^{t}$

$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$

$y_1'(t) = -2e^{-2t}$

$y_2'(t) = e^{t}$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{t} \\ -2e^{-2t} & e^{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

wyznacznik

$y_2'(t) = e^t \qquad \begin{bmatrix} -2e^{-2t} & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \end{bmatrix}$

wyznacznik
$$W = e^{-2t} e^{t} + 2e^{-2t} e^{t} = 3e^{-t}$$

metoda Cramera
$$W_{c_1'(t)} = \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ t^2 & e^t \end{vmatrix} = -t^2 e^t$$

$$c_1'(t) = \frac{W_{c_1'(t)}}{W} = \frac{-t^2e^t}{3e^{-t}} = \frac{1}{3} t^2 e^{2t}$$

$$W_{c_2'(t)} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & t^2 \end{vmatrix} = t^2 e^{-2t}$$

$$c_2'(t) = \frac{W_{c_2'(t)}}{W} = \frac{t^2 e^{-2t}}{3e^{-t}} = \frac{1}{3} t^2 e^{-t}$$

całki:
$$c_1(t) = \int \frac{1}{3} t^2 e^{2t}\, dt = \begin{vmatrix} f = t^2 & g' = e^{2t} \\ f' = 2t & g = \frac{1}{2} e^{2t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} t^2 e^{2t} - \frac{1}{6} t e^{2t} + \frac{1}{12} e^{2t} + D_1$$

$$c_2(t) = \int \frac{1}{3} t^2 e^{-t}\, dt = \begin{vmatrix} f = t^2 & g' = e^{-t} \\ f' = 2t & g = -e^{-t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} t^2 e^{-t} - \frac{2}{3} t e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-t} + D_2$$

dalej:
$$y = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) =$$
$$= \left(-\frac{1}{6} t^2 e^{2t} - \frac{1}{6} t e^{2t} + \frac{1}{12} e^{2t} + D_1\right) e^{-2t} + \left(-\frac{1}{3} t^2 e^{-t} - \frac{2}{3} t e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-t} + D_2\right) e^{t}$$

rozwiązanie

METODA PRZEWIDYWAŃ
(METODA CZYNNIKÓW NIEOZNACZONYCH)

Rozważmy równanie A wraz ze stowarzyszonym równaniem jednorodnym B.

$$y''(t) + p y'(t) + q y(t) = h(t)$$ równanie A

(1) Niech $h(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} \dots + a_1 t + a_0$ gdzie $a_k \neq 0$

Niech $w(\lambda)$ będzie równaniem charakterystycznym dla równania jednorodnego B

- jeżeli liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym dla równania A jest funkcja postaci
$$\varphi(t) = A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \dots + A_1 t + A_0$$

- jeżeli liczba 0 jest jednym z pierwiastków wielomianu $w(\lambda)$, to rozwiązaniem szczególnym równania A jest funkcja postaci
$$\varphi(t) = t \cdot (A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \dots + A_1 t + A_0)$$

- jeżeli liczba 0 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $w(\lambda)$,

$\varphi(t) = t \cdot (A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \ldots + A_1 t + A_0)$

- jeżeli liczba 0 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $w(\lambda)$, to rozwiązaniem szczególnym równania A jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = t^2 (A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \ldots A_1 t + A_0)$$

PRZYKŁAD I:

$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^2 - t + 1$ wielomian stopnia 2, przewidujemy że rozwiązanie też będzie wielomianem stopnia drugiego

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad \sqrt{\Delta} = 3 \qquad \lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= At^2 + Bt + C \\ \varphi'(t) &= 2At + t \\ \varphi''(t) &= 2A \end{aligned}\right\} \rightarrow 2A + 2At + B - 2(At^2 + Bt + C) = t^2 - t + 1$$

$$2A + 2At + B - 2At^2 - 2Bt - 2C = t^2 - t + 1$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - 2B = -1 \\ 2A + B - 2C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 1$$