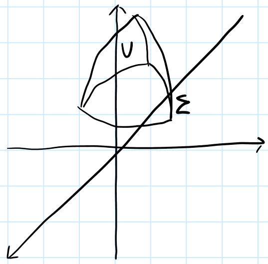
TWIERDZENIE GAUSSA



Σ - brzeg

U - powierzchnia zamknięta (kawałkami) gładka zorientowana na zewnątrz

$\vec{F}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$

pole wektorowe klasy C^1 określone na $U \cup \Sigma$

Zadanie na kolosie: sprawdzić, że jakieś pole jest bezźródłowe.

Przy powyższych założeniach zachodzi równość:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} = \iiint_U \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

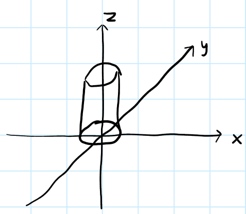
Inaczej:

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

PRZYKŁAD:

Obliczyć $\iint_{\Sigma} x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$

Σ - zewn. strona powierzchni walca $x^2+y^2=R^2$ $\quad 0 \leq z \leq H$



$\vec{F} = [x^3, y^3, z^3]$

$\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2) =$

$$= 3\iiint_U (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = *$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \Omega: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq h \leq H \end{cases}$$

$|J| = \rho$

$$\begin{cases} y = \rho \sin\varphi & \\ z = h & |J| = \rho \end{cases}$$

$$* = 3\iiint_{\Omega} (\rho^2 + h^2)\rho \, d\varphi \, d\rho \, dh = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^H (\rho^3 + \rho h^2)\, dh =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\rho^3 H + \frac{\rho H^3}{3}\right) d\rho = 3 \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^4 H}{4} + \frac{\rho^2 H^3}{6}\right]_0^R =$$

$$= 6\pi\left(\frac{R^4 H}{4} + \frac{R^2 H^3}{6}\right) = 6\pi R^2 H\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{6}\right)$$

WNIOSEK

Jeżeli mamy obszar V i Σ to jego brzeg:

$\vec{F} = [x, y, z]$

to: $$\iint_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy \overset{G}{=} \iiint_V 3\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_V dx\,dy\,dz = 3|V|$$

$$|V| = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

PRZYKŁAD *

Sprawdzić, że pole jest bezźródłowe $\vec{F}(x,y,z) = \frac{Q}{r^3}\cdot\vec{r}$ $\quad Q \in R$

$\vec{r} = [x, y, z]$

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{Q}{r^3}\cdot\vec{r} = \frac{Q[x,y,z]}{x^2+y^2+z^2} = Q\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = Q\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= Q\,\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= Q\,\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

Pole jest bezźródłowe