

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY 2018/2019
STATYSTYKA STOSOWANA, MAT1501
LISTY ZADAŃ

opracowanie W. Wawrzyniak-Kosz

Literatura podstawowa

1. J. Koronacki, J. Mielniczuk, *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, WNT, Warszawa 2010.
2. W. Krysiński, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Cz. I i II*, PWN, Warszawa 2007.

Literatura uzupełniająca

1. L. Gajek, M. Kałuska, *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, WNT, Warszawa 2004.
2. J. Greń, *Statystyka matematyczna. Modele i zadania*, PWN, Warszawa 1976.
3. T. Inglot, T. Ledwina, Z. Ławniczak, *Materiały do ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Wyd. Politechniki Wrocławskiej 1984
4. W. Klonecki, *Statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1999.
5. W. Kordecki, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna.*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

LISTA 1 Prawdopodobieństwo.

1. Dla zdarzeń A, B mamy: $P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Obliczyć: $P(\bar{B})$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(B - A)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

2. Zdarzenia A, B są rozłączne oraz $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Obliczyć: $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

3. Wśród m losów; $m \geq 5$; jest 5 wygrywających. Dla jakich m prawdopodobieństwo zdarzenia: zakupione 2 losy będą wygrywające jest mniejsze niż 0.5.

4. Hasło dostępu składa się z 6 małych liter alfabetu o 25 znakach i 2 cyfr na końcu. Jakie jest prawdopodobieństwo odgadnięcia hasła, jeśli wiadomo, że ostatnia cyfra jest nieparzysta i hasło zawiera dokładnie 2 litery w.

5. Z pudła, w którym jest 20 uszczelek dobrych i 5 wadliwych losujemy jednocześnie 4 uszczelki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród tych 4 wylosowanych uszczelek będą:

- a) 3 uszczelki dobre;
- b) przynajmniej 3 uszczelki dobre.

6. O pracę w pewnej firmie ubiega się n osób. Poproszono 3 specjalistów, aby każdy niezależnie uszeregował je według przydatności do pracy. Do pracy zostanie przyjęta osoba, którą przynajmniej 2 specjalistów umieści na pierwszym miejscu. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że jedna z n

osób zostanie przyjęta. Dla jakiego n to prawdopodobieństwo jest równe 1.

7. W produkcji firmy A jest 1% braków, zaś w produkcji firmy B jest ich 2%. Kupujemy jeden produkt firmy A oraz jeden firmy B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- a) przynajmniej jeden jest dobry;
- b) obydwa są dobre;
- c) tylko jeden z nich jest dobry.

8. W pudle są kule białe i czarne. Razem jest ich n , $n > 2$. Ile powinno być kul czarnych, aby prawdopodobieństwo wylosowania (bez zwracania) dwóch kul różnych kolorów było takie samo jak prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru?

LISTA 2 Prawdopodobieństwo warunkowe.

1. Prawdopodobieństwo, że w próbkach występują związki glinu wynosi 0.8. Test na obecność tych związków z prawdopodobieństwem 0.95 daje wynik pozytywny, jeśli w próbce są związki glinu i z prawdopodobieństwem 0.9 wynik negatywny jeśli w próbce nie ma tych związków. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w próbce są związki glinu, jeśli wynik testu był pozytywny?

2. Wśród wyrobów firmy A jest 0.5% wadliwych, firmy B jest 2% wadliwych zaś firma C ma 1% wadliwych. Z partii towaru zawierającej 500 elementów firmy A, 300 firmy B oraz 200 firmy C losujemy jeden element. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

- a) jest on dobry,
- b) jest dobry i pochodzi z firmy B,
- c) wyprodukowała go firma C, jeśli wiemy, że jest dobry.

3. Wiadomo, że przeciętnie 5 % badanych elementów ma skazy. Do wykrycia skaz wykorzystuje się następujący test. Jeśli element ma skazę to test w 90 % wskazuje jej istnienie (wynik testu jest pozytywny) i w 90 % nie wskazuje skazy, gdy element jej nie ma. Jakie jest prawdopodobieństwo, że element ma skazę, jeśli wynik testu jest pozytywny? Jak będzie powyższe prawdopodobieństwo, jeśli element zostanie poddany testowi dwukrotnie i w obu przypadkach wynik testu będzie pozytywny?

4. Rzucamy dwa razy monetą. Czy zdarzenia A, B są niezależne ?:

- a) A - za pierwszym razem wypadł orzeł, B - za drugim razem wypadła reszka;
- b) A - co najmniej raz wypadł orzeł, B reszka wypadła tylko raz.

5. Jakość elementu jest sprawdzana przez każdy z 3 niezależnie pracujących automatów. Pierwszy wykrywa wadę z prawdopodobieństwem 0.95, drugi z prawdopodobieństwem 0.9, trzeci prawdopodobieństwem 0.98. Obliczyć prawdopodobieństwo :

- a) wadę wykryją wszystkie automaty;
- b) wadę wykryje przynajmniej jeden automat;
- c) wadę wykryje tylko jeden z automatów.

LISTA 3 Zmienne losowe dyskretne.

1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości -2, 1, 3, 5 z prawdopodobieństwem odpowiednio $\frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}$. Wyznaczyć i narysować dystrybuantę X . Wykorzystując dystrybuantę obliczyć $P(X \geq 0)$, $P(0.5 < X \leq 3)$, $P(-2 \leq X < 2)$, $P(X = 4)$, $P(-1 \leq X < 6)$.

2. Spośród 6 płytek dobrych i 4 wadliwych losujemy jednocześnie 3 płytki. Niech X oznacza liczbę płytek dobrych wśród 3 wylosowanych. Wyznaczyć dystrybuantę X , obliczyć EX , $Var X$.

3. W hali jest zainstalowanych 18 niezależnie pracujących obrabiarek. Każda z nich pracuje przeciętnie 50 minut na godzinę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowym momencie:

- a) pracuje 12 obrabiarek,
- b) pracuje co najmniej jedna,
- c) przynajmniej jedna nie pracuje.

Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba pracujących obrabiarek. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby pracujących obrabiarek.

4. Prawdopodobieństwo, że opakowanie jest nieszczelne wynosi 0.02: jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 50 opakowań będzie:

- a) 5 nieszczelnych,
- b) co najwyżej 2 nieszczelne,
- c) Jaka jest wartość oczekiwana oraz wariancja liczby nieszczelnych opakowań?

5. Prawdopodobieństwo, że urządzenie zepsuje przed upływem 3 sekund od momentu włączenia wynosi 0.01, i za każdym razem jest takie samo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

- a) urządzenie zepsuje się przed upływem 3 sekund dopiero przy 5 włączeniu,
- b) nie zepsuje się przed 5 włączeniem,
- c) zepsuje się przed upływem 3 sekund, co najmniej przy 7 włączeniu.

Który ze znanych rozkładów prawdopodobieństwa można wykorzystać w rozwiązaniu zadania?

6. Liczba samochodów, które ulegają wypadkowi w ciągu jednego dnia w danym mieście i wymagają naprawy w warsztacie ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 10$. Ile miejsc do naprawy należy przygotować, aby z prawdopodobieństwem większym niż 0.95 było wolne miejsce dla uszkodzonego samochodu.

7. Liczba awarii sieci energetycznej w pewnym mieście, w ciągu dnia, jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 8$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba awarii? Jaka jest wartość oczekiwana liczby awarii?

Jakie jest prawdopodobieństwo, że;

- a) w ciągu 7 dni będzie 5 dni, z liczbą awarii mniejszą niż 6
- b) w ciągu 7 dni będą 2 dni z liczbą awarii większą niż 10.

LISTA 4 Zmienne losowe ciągłe.

1. Czas przeprowadzania kontroli (w s) jest zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[3, 11]$. Podać i narysować funkcję gęstości X .

Obliczyć $P(X > 9)$, $P(2 < X < 10)$, $P(X \geq 4)$.

Jaka jest wartość oczekiwana oraz wariancja czasu kontroli?

2. Układ składa się z n elementów połączonych równolegle. Czas działania każdego z elementów jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 10]$ i te zmienne losowe są niezależne. Dla jakiej najmniejszej liczby elementów n , wartość oczekiwana czasu działania układu będzie większa lub równa 8.

3. Czas produkcji wyrobu (w min.) jest zmienną losową X o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{gdy } 1 < x < 4 \\ 0, & x \leq 1, x \geq 4 \end{cases}$$

Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję czasu produkcji wyrobu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 15 wyrobów, 8 wyrobów będzie miało czas produkcji krótszy niż $\frac{9}{4}$ s?

4. Czas pracy diody jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z $\alpha = 10^{-4}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dioda będzie pracować co najmniej 5000h ? Wiadomo, że dioda pracowała bezawaryjnie przez 1000h, jakie jest prawdopodobieństwo, że popracuje jeszcze co najmniej 5000h ?

5. Czas działania elementu jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\alpha = 0.1$. Obliczyć wartość oczekiwaną czasu działania układu złożonego z 3 takich elementów połączonych:

- a) równolegle;
- b) szeregowo.

Zakładamy, że czasy działania elementów są niezależnymi zmiennymi losowymi.

LISTA 5 Rozkład normalny. Twierdzenia graniczne.

1. Czas wykonywania (w min.) kontroli technicznej jest zmienną losową X , o rozkładzie $X \sim N(24, 2)$.

- a) Narysować funkcję gęstości zmiennej X , zaznaczyć przedział z reguły 3σ .
- b) Obliczyć z wykorzystaniem tablic $P(22 < X < 27)$; $P(X > 29)$.
- c) Dla jakiej stałej t zachodzi $P(X > t) < 0.8$?
- d) Dla jakiej stałej t zachodzi $P(X < t) = 0.05$, (ogon lewostronny) ?
- e) Dla jakiej stałej t zachodzi $P(|X| > t) = 0.02$ (ogon dwustronny)?

2. Czas jednej analizy (w s) na zawartość miedzi jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(10, 2)$. Naszkicować funkcję gęstości zmiennej X . Jaki rozkład ma suma czasów 5 takich niezależnych analiz? Narysować jego funkcję gęstości. Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas 5 analiz będzie:

- a) między 36s a 64s;
- b) dłuższy niż 55s .

3. Czas sprawnej pracy mierników pewnego typu (w dniach) ma rozkład $N(1000, 100)$. Jaki powinien być okres gwarancji, aby na 99% miernik działał przynajmniej przez okres gwarancji ?

4. Średnica (w mm) produkowanych przewodów ma rozkład normalny $N(10, 0.03)$. Norma przewiduje wyroby o średnicy 10 ± 0.05 . Jaki procent produkowanych wyrobów nie spełnia wymogów normy? Jakiego powinno być dopuszczalne σ , aby przewodów nie spełniających wymogów normy było co najwyżej 0.1 %.

5. Niech X, Y, Z będą zmiennymi losowymi, że $EX = 4, EY = -2, VarX = 2, EY^2 = 8$ zaś Z ma rozkład $N(-5, 3)$. Obliczyć $E(-2X + 1), E(-3X + 2Y), E(Z - Y + 2X), Var(-2X + 4), Var(-Z), Var(Y + 2)$.

Przyjmując niezależność X, Y, Z obliczyć $Var(X + Y + Z), Var(2X - 3Y - Z)$.

6. Czas pracy bezpiecznika (w godz.) jest wykładniczy z $\alpha = 0.001$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapas 100 bezpieczników wystarczy na co najmniej 80000 godzin pracy?

7. Korzystając ze zdjęć satelitarnych mierzono odległości między 2 obiektami. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi opisującymi wyniki kolejnych pomiarów. Założono, że $EX_k = d$, $var X_k = 1$, $k=1, 2, \dots, n$. Za oszacowanie odległości d przyjęto

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Ile pomiarów należy wykonać, aby $P(|Y_n - d| \leq 0.1) \geq 0.95$.

8. Prawdopodobieństwo, że urządzenie zepsuje się w czasie jego konserwacji wynosi 0.02. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie konserwacji 100 urządzeń zepsuje się:

- wiecej niż 5 urządzeń;
- wiecej niż 5 i mniej niż 10 urządzeń ?

9. Jeśli gracz wyrzuci kostką sześcienną 6 oczek to wygrywa 4 pkt, w przypadku innej liczby oczek przegrywa 1 pkt. Do czego dąży średnia z wygranych gdy liczba rzutów rośnie do nieskończoności? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 120 rzutach gracz przegra więcej niż 50 pkt?

10. Prawdopodobieństwo, że wyprodukowany detal okaże się dobry wynosi 0.9. Ile elementów należy wyprodukować, aby prawdopodobieństwo, że będzie wśród nich co najmniej 50 dobrych było większe niż 95%.

11. Czas kontroli (w sek.) jednego wyrobu jest zmienną losową o gęstości (tzw.rozkład Pareto)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0 \\ \frac{3}{(x+1)^4}, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$$

Przerwa po kontroli (w sek.) każdego wyrobu jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czasy kontroli wyrobów, czasy przerw sa niezależnymi zmiennymi losowymi. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kontrola 144 wyrobów wraz z 144 przerwami będzie trwała krócej niż 246 sek.?

LISTA 6 Wektory losowe. Krzywa regresji. Współczynnik korelacji.

1. Łączny rozkład wektora losowego (X, Y) , gdzie zmienna losowa X jest liczbą spalonych zasilaczy w ciągu dnia, zmienna losowa Y jest liczbą przepięć w sieci energetycznej opisuje tabela

X / Y	0	1	2
0	0.9	0.01	0
1	0.02	0	0.02
2	0.01	0.03	0.01

- Obliczyć $P((X, Y) \in \{(0, 0), (2, 1)\})$.
- Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennej losowej X oraz Y . Ile wynosi $P(X = 1)$, $P(Y = 0)$. Obliczyć EX , EY .
- Czy zmienne losowe X , Y są niezależne?
- Oliczyć kowariancję i współczynnik korelacji zmiennych X , Y .

2. Gęstość wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

- a) Czy zmienne losowe X, Y są niezależne?
- b) Obliczyć $P(X > 1)$.
- c) Obliczyć $P((X, Y) \in A)$ gdzie $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.
- d) Jaki jest współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y ?

3. Gęstość wektora losowego (X, Y) jest postaci:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y + y), & \text{gdzie } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Obliczyć $P(0.5 < X < 1, 1 < Y < 2)$, $P(Y > 1)$, $P(X > 0.5 | Y < 1)$, $P(Y > X)$.

4. Czy można dobrać stałą c , aby funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2 \cos x, & \text{gdzie } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej? Jeśli tak, to:

- a) znaleźć rozkłady brzegowe
 - b) wyznaczyć kowariancję oraz współczynnik korelacji zmiennych X, Y .
- Czy X, Y są niezależne?

5. Wektor losowy (X, Y) ma funkcję gęstości postaci:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2ye^{-x}, & \text{gdzie } x > 0, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Obliczyć EX oraz $E(Y|X = 1)$ i $E(X|Y = 0.5)$.

6. Wektor losowy (X, Y) ma funkcję gęstości postaci:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{16}{3}xy, & \text{gdzie } 0 < x < 1, x^3 < y < 1 \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Obliczyć $P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2})$, $P(Y < X)$

Wyznaczyć funkcję regresji zmiennej losowej Y względem zmiennej X .

Ile wynosi $E(Y|0.5)$?

7. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach w punktach $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(0, 2)$. Wyznaczyć gęstość wektora losowego (X, Y) . Sprawdzić, czy zmienne losowe X oraz Y są niezależne? Jaki jest ich współczynnik korelacji? Wyznaczyć funkcje regresji zmiennej losowej X względem Y oraz zmiennej losowej Y względem X . Ile wynosi $E(Y|X = 0.25)$.

8. Współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y wynosi 0.25. Jaki współczynnik korelacji mają zmienne losowe $4X - 3$, $-2Y + 4$?

LISTA 7 Wstępna analiza danych.

1. Zmierzono grubość (w μm) warstwy izolatora nanoszonej przez automat otrzymując : 5.2, 4.6, 6.1, 6.0, 5.0, 5.3, 4.0, 4.0, 5.4, 6.1, 7.2, 5.0, 4.0, 5.4, 6.0, 4.0, 3.5, 6.2, 5.0, 6.2, 5.0, 7.1, 5.0, 5.0, 5.1, 5.0, 4.0, 5.0, 6.1, 5.0, 5.2, 5.0, 5.0, 3.0, 6.0, 5.0, 4.0, 6.0, 4.3, 4.0. Dla podanej próby:

- a) zbudować szereg rozdzielczy;
- b) narysować histogram
- c) wyznaczyć średnią, wariancję, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności.
- d) wyznaczyć medianę, kwartył dolny i górny, rozstęp międzykwartyłowy, modalną
- Czy w podanej próbie są obserwacje odstające? e) sporządzić wykres ramkowy (box-plot),
- f) ocenić symetrię, skośność histogramu.

2. W pewnej elektrowni przez 180 dni obserwowano liczbę k awarii. Zebrane obserwacje podaje następująca tabela:

k	0	1	2	3	4	6
y_k	98	59	17	4	1	1

gdzie y_k oznacza liczbę dni z k awariami .

Dla podanej próby wyznaczyć wielkości opisane w punktach a) - f) zad.1.

3. Dla podanych prób obliczyć (bez kalkulatora) średnią i wariancję, odchylenie standardowe

- a) 18, 19, 22, 17, 24;
- b) -1, 2, 3, -4, -8, 2;
- c) 2, -3, -1, 2, -4, 1.

Jak zmieniają się te parametry, gdy każdą z powyższych obserwacji wyrazimy w innych zależnych liniowo jednostkach, tzn.

nowa wartość = $a \cdot (\text{stara wartość}) + b$, dla pewnych a, b .

4. Dla podanej próby; 6, 5, 7, 4, 5.5, 7, 7.5, 6 obliczyć;

- a) średnią i odchylenie standardowe;
- b) medianę i rozstęp międzykwartyłowy.
- c) zastąpić obserwację 7.5 przez 10.5 i powtórzyć punkt a) oraz b)
- d) które z charakterystyk są odporne na takie zmiany, a które nie?

5. W następującej tabeli zebrano obserwacje o czasie rozmów telefonicznych (w min) w pewnej firmie:

[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)	[10,14)
2	12	25	15	18	15	10	8	5	4	6

w pierwszym wierszu tabeli podano przedziały $[a, b)$; drugi wiersz podaje liczbę rozmów o czasie z przedziału $(a, b]$.

Obliczyć średnią i odchylenie standardowe czasu rozmowy. W obliczeniach przyjmujemy, że obserwacje z ustalonego przedziału leżą w środku przedziału.

6. Zbadano czas X (w dniach) bezawaryjnej pracy 300 jednakowych automatów otrzymując:

przedział	liczba obserwacji	przedział	liczba obserwacji
[0,100)	70	[600,700)	15
[100,200)	55	[700,800)	11
[200,300)	42	[800,900)	9
[300,400)	35	[900,1000)	7
[400,500)	30	[1000,1100)	5
[500,600)	21	[1100,1200)	0

Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X oraz $P(400 < X < 700)$.

LISTA 8 Estymatory i ich własności

1. W oparciu o $2n$ elementową próbę prostą z populacji o średniej m i wariancji σ^2 oszacowano wartość oczekiwaną używając dwóch estymatorów: $Y_1 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} X_k$, oraz $Y_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Który z nich jest nieobciążony? Który ma mniejszy błąd średniokwadratowy?

2. W celu oszacowania wartości przeciętnej czasu bezawaryjnej pracy urządzenia pewnego typu, obserwowano czasy do momentu awarii 7 losowo wybranych urządzeń. Uszkodzenia nastąpiły w godzinach: 51, 115, 150, 190, 217, 228, 350. Wiedząc, że czas bezawaryjnej pracy urządzenia ma rozkład wykładniczy oszacować : wartość przeciętną bezawaryjnej pracy maszyny oraz parametr α tego rozkładu.

3. Wykazać, że jeżeli niezależne zmienne losowe $X_k, k = 1, \dots, n$ mają taki sam rozkład wykładniczy to $\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$ jest nieobciążonym estymatorem dla wariancji tego rozkładu.

4. Zmienne losowe X_k mają rozkład jednostajny na przedziale $[a; a+1]$; parametr a jest nieznany. Sprawdzić, że dla n niezależnych obserwacji estymator:

$$T_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

jest nieobciążonym i zgodnym estymatorem parametru a . Oszacować $P(|T_n - a| \geq 0.1)$ gdy: $n = 20$ oraz $n = 100$.

5. Wykazać, że $\frac{n+1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ jest lepszym nieobciążonym estymatorem dla parametru a , w rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0; a]$ niż $\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Oszacować parametr a dla następujących obserwacji: 3.7, 1.2, 4.0, 5.7, 8.1, 6.6, 7.0, 2.8, 0.4.

6. Na podstawie próby prostej $X_k, k = 1, \dots, n$, metodą największej wiarygodności wyznaczyć estymator parametru:

a) λ w rozkładzie Poissona ;

b) p w rozkładzie geometrycznym

c) α w rozkładzie wykładniczym.

d) c w rozkładzie o gęstości $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}}, & \text{gdy } x > 1 \\ 0, & \text{gdy } x \leq 1 \end{cases}$

e) c w rozkładzie o gęstości $f(x) = \begin{cases} (1+c)x^c, & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{gdy } x < 0, x > 1 \end{cases}$

7. Wykorzystując metodę momentów wyznaczyć, w oparciu o próbę prostą $X_k, k = 1, \dots, n$ estymatory dla parametrów:

a) a oraz b w rozkładzie jednostajnym na przedziale $[a, b]$. Obliczyć wartości estymatorów tych parametrów dla następujących obserwacji: 2.1, 0.6, 4.3, 5.4, 2.2, 3.4.

b) c , ($c > 1$) gdy X_k ma gęstość opisaną w zad.6d). Oszacować c dla obserwacji 4.1, 8.6, 10.3, 5.4, 2.2, 4.4.

LISTA 9 Przedziały ufności

1. Dokonano 8 pomiarów napięcia w sieci i otrzymano (w V): 231, 225, 227, 233, 228, 235, 232, 234. Wiadomo, że rozkład błędu pomiaru jest normalny o średniej 0 i wariancji 4. Wyznaczyć przedział ufności dla mierzonego napięcia na poziomie ufności 0.95.

Ponadto, wykonano 5 dodatkowych pomiarów i otrzymano: 229, 231, 224, 225, 230. Korzystając ze wszystkich pomiarów wyznaczyć jeszcze raz przedział ufności dla mierzonego napięcia oraz porównać długości przedziałów.

2. Zużycie prądu w małej firmie w kolejnych dniach pracy podlega wahaniom. Na podstawie obserwacji dla 100 kolejnych dni obliczono, że średnie dzienne zużycie prądu wynosi $\bar{x} = 65,4 kWh$ zaś wariancja z próby $s^2 = 25,2(kWh)^2$. Wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej zużycia prądu na poziomie ufności: a) 0.90 oraz b) 0.80. Który jest dłuższy?

3. Dla 10 obserwacji czasu pracy na baterii (w h) smartfona pewnej marki otrzymano: 8; 8.5; 9.5; 9; 7; 8.5; 7.5; 6.5; 8.5; 7. Zakładając, że czas pracy na baterii smartfona ma rozkład normalny wyznaczyć:

a) przedział ufności dla wartości oczekiwanej czasu pracy na baterii na poziomie ufności 0.9;

b) jednostronny przedział ufności typu $(-\infty, c)$ dla wartości oczekiwanej czasu pracy na baterii na poziomie ufności 0.9.

4. Klasa przyrządu jest związana z odchyleniem standardowym pomiarów nim wykonywanych. W celu zbadania klasy przyrządu służącego do pomiaru odległości wykonano nim 12 pomiarów długości tego samego odcinka otrzymując (w m):

101, 103, 98, 96, 100, 102, 100, 97, 98, 101, 99, 101.

Przy założeniu, że wyniki pomiaru mają rozkład normalny wyznaczyć 95% przedział ufności dla odchylenia standardowego.

5. Zmierzono czas działania (w $10^2 h$) pewnego typu baterii i otrzymano 8, 10, 15, 12, 18, 9, 10, 12, 14, 12. Przyjmując poziom ufności 0.95 wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej oraz dyspersji (odchylenia standardowego) czasu działania baterii. Jakie założenia o rozkładzie czasu działania baterii tego typu należy przyjąć?

6. Błąd pomiaru wysokości komina elektrowni ma rozkład normalny o wariancji $0.04 m^2$. Ile pomiarów należy wykonać, aby na poziomie ufności 0.95 oszacować wysokość komina w przedziale ufności długości 0.5 m?

7. W celu sprawdzenia czy temperatura mięknięcia izolatora zwiększa się po modyfikacji polimerami wylosowano 20 próbek izolatora i zmierzono temperaturę (w $^{\circ}\text{C}$) mięknięcia przed i po dodaniu polimerów otrzymując:

przed dodaniem	45	38	54	71	61	50	48	61	72	52
po dodaniu	44	48	59	76	48	59	52	54	70	62
przed dodaniem	60	72	58	70	46	54	58	62	71	57
po dodaniu	59	74	66	70	66	58	68	66	69	55

Zakładając, że temperatura mięknięcia ma rozkład normalny wyznaczyć przedział ufności dla różnicy między średnimi temperaturami mięknięcia izolatora przed i po dodaniu polimerów, na poziomie ufności 0.95.

8. Sprawdzano pojemność kondensatorów pochodzących z dwóch różnych dostaw. Dla $n = 10$ kondensatorów z pierwszej dostawy otrzymano $\bar{x} = 20.3$, dla $m=15$ kondensatorów z drugiej dostawy $\bar{y} = 18.5$. Przyjmując, że maksymalna pojemność kondensatora ma rozkład normalny o wariancji odpowiednio $\sigma_x^2 = 16$, $\sigma_y^2 = 12$ wyznaczyć przedział ufności dla różnicy między średnimi pojemnościami kondensatorów na poziomie ufności 0.8.

9. Aby oszacować ile procent wyborców ($p\%$) jest zdecydowanych poprzeć danego kandydata w najbliższych wyborach przeprowadzono ankietę wśród n losowo wybranych osób ($n \geq 100$). Na pytanie: czy będziesz głosować na danego kandydata; ankietę przewidywała 2 odpowiedzi: "TAK" albo "NIE". Wyznacz przedział ufności dla p na poziomie ufności $1 - \alpha$. Przy jakim n długość przedziału ufności będzie mniejsza niż 0.05.

Wykonaj obliczenia dla: $n = 200$, 180 odpowiedzi "TAK", $\alpha = 0.05$.

10. W badaniu niezawodności pewnego czujnika w 100 niezależnych próbach 94 razy reagował prawidłowo. Wyznaczyć przedział ufności dla prawdopodobieństwa prawidłowej reakcji na poziomie ufności 0.98.

LISTA 10 Testy dla średniej, proporcji, wariancji.

1. Aby zweryfikować hipotezę o wadliwości wyrobów; $H: p = 0.08$ przeciwko $K: p \neq 0.08$ sprawdzono jakość $n = 100$ wyrobów. Wyznaczyć obszar krytyczny i zweryfikować hipotezę H gdy wśród 100 wyrobów było 11 wadliwych, na poziomie istotności:

- a) $\alpha = 0.1$,
- b) $\alpha = 0.05$.

2. Producent podaje, że czas pracy na baterii (w h) produkowanych przez niego laptopów ma rozkład $N(5,1)$. Zbadano czas pracy na baterii 25 laptopów i otrzymano $\bar{x} = 4.7$ Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę $H: m=5$, przeciwko $K: m < 5$. Obliczyć wartość p-value.

3. Dostawca twierdzi, że średnica (w mm) produkowanych przez niego przewodów ma rozkład normalny o średniej 5. Zmierzone średnice 7 próbek wyniosły: 5.2, 5.3, 4.9, 5.0, 5.2, 4.7, 4.9. Czy obserwacje te przeczą hipotezie producenta o wartości oczekiwanej średnicy przewodów? Zweryfikować hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0.02$.

4. Czas wiązania spoiwa pewnego typu (w h) jest zmienną losową o rozkładzie $N(m, \sigma)$ zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ hipotezę $H: m=100$ przeciwko $K: m \neq 100$ dla następujących obserwacji czasu wiązania: 95, 103, 104, 97, 100.

5. Zużycie wody (w m^3) przez pewną firmę w losowo wybranych 10 dniach było następujące: 104, 100, 105, 110, 106, 105, 102, 105, 107, 106. Zakładając, że zużycie wody ma rozkład normalny, na poziomie istotności $\alpha = 0.025$ zweryfikować hipotezę $H: \sigma^2 = 10$ przeciwko $K: \sigma^2 > 10$.

6. Błędy pomiarów każdego z 2 przyrządów mają rozkład normalny o takiej samej wariancji, równej 3. Badając zgodność pomiarów wykonano po 6 pomiarów każdym przyrządem i otrzymano: $\bar{x}_1 = 66.7$, $\bar{x}_2 = 67.3$;

a) zweryfikować odpowiednią hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0.05$;

b) obliczyć p-wartość.

7. Pewien eksperymentator twierdzi, że opracował nową (lepszą) metodę odsiarczania żeliwa. Dokonano pomiarów zawartości siarki i otrzymano dla metody:

starej: 17, 11, 22, 18, 15, 13, 14, 16

nowej: 15, 12, 10, 18, 14, 15, 13.

Przyjmując, że zawartość siarki ma rozkład normalny zweryfikować odpowiednią hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

8. Czasy produkcji X, Y elementów przez dwa oddzielne automaty są zmiennymi losowymi o takiej samej wariancji. Z dwóch niezależnych prób prostych o liczebności odpowiednio 100, 110 dla każdego z automatów obliczono $\bar{x} = 5.05$, $s_X^2 = 2.5$, $\bar{y} = 4.97$, $s_Y^2 = 2.4$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.04$ zweryfikować hipotezę o równości wartości oczekiwanych czasów produkcji X, Y .

9. Spośród 190 losowo wybranych kobiet 157 stwierdziło, że przy zakupie kosmetyków zwraca uwagę na markę, wśród 150 losowo wybranych mężczyzn 122 powiedziało o analogicznym zachowaniu. Zweryfikować hipotezę, że proporcja kobiet zwracających uwagę na markę jest równa proporcji mężczyzn: a) na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, b) na poziomie istotności $\alpha = 0.1$.

LISTA 11 Testy zgodności, testy niezależności. Prosta regresji.

1. W celu sprawdzenia symetryczności kostki do gry wykonano nią 120 rzutów i otrzymano:

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
liczba rzutów	11	30	14	10	33	22

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że kostka jest symetryczna.

2. Do kontroli technicznej wylosowano 100 metalowych kształtek i prześwietlono je promieniami rtg. Zaobserwowane liczby skaz podaje tabela:

liczba skaz	0	1	2	3	4	5
liczba próbek	10	27	29	19	8	7

Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ zweryfikować hipotezę, że liczba skaz w próbkach ma rozkład Poissona.

3. W pewnym doświadczeniu zmierzono czas pracy (w 10^3h) 1000 żarówek pewnego typu i otrzymano:

czas pracy	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)
liczba żarówek	90	140	320	300	150

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ testem zgodności chi-kwadrat zweryfikować hipotezę, że czas pracy żarówki tego typu ma rozkład normalny.

4. Pewien produkt wytwarzany jest trzema metodami. Wysunięto hipotezę, że wadliwość produktu nie zależy od metody wytwarzania. Wylosowano niezależnie próbę 270 sztuk i wyniki badania jakości podaje tabela

jakość	metoda1	metoda2	metoda3
dobra	40	80	60
wadliwa	10	60	20

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować, testem niezależności chi-kwadrat, hipotezę o niezależności jakości produktu od metody produkcji.

5. W ciągu 3 miesięcy zaobserwowano 145 awarii maszyn. W tabeli podano liczby awarii poszczególnych typów maszyn w czasie każdej zmiany

zmiana	maszynaA	maszynaB	maszynaC	maszynaD
1	9	5	11	12
2	9	11	18	20
3	12	9	12	17

Zweryfikować hipotezę, o niezależności liczby awarii od zmiany na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

6. Zbadano zależność między ilością pewnej substancji dodawanej do produkcji wyrobu a jego twardością:

ilość substancji	1	2	4	6	7
twardość wyrobu	52	53	48	50	52

- czy istnieje zależność między ilością dodawanej substancji a twardością wyrobu?
- metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć równanie prostej regresji
- obliczyć spodziewaną twardość wyrobu, gdy do produkcji dodamy 5 jednostek substancji
- obliczyć współczynnik determinacji.

7. W następującej tabeli x_i określa miesięczne zużycie pewnego surowca (w tonach) w produkcji wyrobu, zaś y_i określa wielkość produkcji (w tonach) w tym miesiącu:

x_i	1	1.5	2	4	5	6
y_i	3	3.5	4.5	8	11	12

Przedstawić podane obserwacje na płaszczyźnie. Obliczyć współczynnik korelacji liniowej. Czy zależność cechy Y od cechy X jest dodatnia czy ujemna i co to oznacza? Co można powiedzieć o sile zależności między tymi cechami?

- Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć prostą regresji cechy Y względem cechy X.
- Czy punkt (\bar{x}, \bar{y}) należy do prostej regresji?
- Oszacować wielkość produkcji gdy zużycie surowca: wyniesie 3 tony; wyniesie 5.5 tony;

d) O ile wzrośnie produkcja gdy zużycie surowca wzrośnie o 1 tonę?

8. Czas działania bezpieczników 16A wyprodukowanych trzema różnymi metodami był następujący:

metoda 1	1402	1502	1456	1480	1340	1500
metoda 2	1565	1345	1430	1460		
metoda 3	1477	1310	1482	1321	1450	

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wartości przeciętne czasów działania bezpieczników produkowanych różnymi metodami są jednakowe: przeciwko hipotezie alternatywnej, że przynajmniej dwie wartości przeciętne są różne.

9. Zmierzono głębokość utlenienia płytek półprzewodnikowych (w angstromach) tego samego typu wyprodukowanych przez 4 różne firmy otrzymując wartości:

producent 1	28	36	26	28	25	27	33
producent 2	29	27	34	30	29		
producent 3	30	37	29	28	31	30	
producent 4	30	29	35	28			

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wartości przeciętne głębokości utlenienia dla 4 różnych producentów są jednakowe; przeciwko hipotezie alternatywnej, że przynajmniej dwie z nich są różne.

I to już wszystko.