Wykład 4

środa, 20 marca 2019 07:30

ZMIENNE LOSOWE CD.

- zmienne losowe dzielimy na:
  - dyskretne
  - ciągłe
  - mieszane

- zmienna losowa X jest DYSKRETNA (skokowa), jeśli zbiór wartości X jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$ ← zbiór liczb naturalnych
  - zbiór par $(x_i, P(X=x_i))$ nazywamy ROZKŁADEM zmiennej losowej X.
  - przykład:

x_i	-3	-1	1	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,6	0,2

- WARTOŚCIĄ OCZEKIWANĄ (średnią) dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy liczbę EX

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)$$ ← jeśli ten szereg jest rozbieżny, wartość oczekiwana nie istnieje

- WARIANCJĄ zmiennej losowej dyskretnej X nazywamy liczbę Var X

$$\mathrm{Var}\, X = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X=x_i)$$

- przykład: dla zmiennej losowej X, Y obliczyć EX, EY, Var X, Var Y

$P(X=49) = P(X=51) = \frac{1}{2}$

$P(Y=-100) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(Y=100) = \frac{3}{4}$

$EX = 49 \cdot \frac{1}{2} + 51 \cdot \frac{1}{2} = 50$

$EY = -100 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{3}{4} = 50$

„przeciętna wartość zmiennej"

$\mathrm{Var}\, X = (49-50)^2 \cdot \frac{1}{2} + (51-50)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\mathrm{Var}\, Y = (-100-50)^2 \cdot \frac{1}{4} + (100-50)^2 \cdot \frac{3}{4} = 7500$

„jak bardzo wartości zmiennej odbiegają od wartości przeciętnej?"

„wariancja powinna być podawana wraz z wartościami średnimi zarobków"

- przykład dodatkowy:

$EX = (-3) \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,2 = 1$

$\mathrm{Var}\, X = (-3-1)^2 \cdot 0,1 + (-1-1)^2 \cdot 0,1 + (1-1)^2 \cdot 0,6 + (4-1)^2 \cdot 0,2 = 0,38$

- TYPOWE ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE:

① Zmienna losowa zerojedynkowa X

$X \in \{0, 1\}$ • test na obecność wirusa

0 – porażka, 1 – sukces

$P(X=1) = p \qquad P(X=0) = q$

$EX = p$

tekst
istotne
równania, wzory
przykłady
komentarz
komentarz
komentarz
komentarz
definicje
inne ważne

$P(X=1)=p \qquad P(X=0)=q$

$EX=p$

$VarX=p(1-p)$

② Rozkład Bernoulliego $\quad X \sim B(n,p)$

- powtarzamy n razy niezależnie doświadczenie ze zmienną losową zerojedynkową

X - liczba „1" w n niezależnych powtórzeniach

$X \in \{0,1\ldots,n\} \ni k$

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1$

$EX=np$

$VarX=np(1-p)$

- musimy znać liczby n i p (powtórzeń 1 i 0)
- rzut monetą

- liczbę k_0 nazywamy NAJBARDZIEJ PRAWDOPODOBNĄ WARTOŚCIĄ zmiennej losowej X jeżeli $P(X=k_0)\geqslant P(X=k)$

$X \sim B(n,p)$

$$k_0 \begin{cases} \text{część całkowita } (n+1)p, & (n+1)p \notin \mathbb{N} \\ (n+1)p \text{ lub } (n+1)p-1, & (n+1)p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- przykład: firma składa oferty na wykonanie każdego z 4 niezależnych projektów. Każda oferta ma prawdopodobieństwo przyjęcia $\frac{2}{3}$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba przyjętych ofert i ile wynosi jej prawdopodobieństwo?

X - liczba przyjętych ofert spośród 4 złożonych

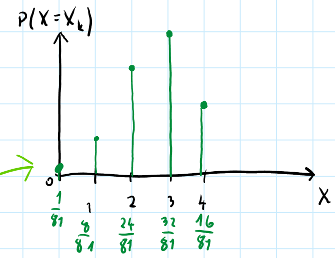
$X \sim B(4,\frac{2}{3}) \qquad k_0=?$

$(n+1)p=(4+1)\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\notin\mathbb{N}$

$k_0=3$

$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}=0{,}395$

$P(X=4)=\ldots$



③ Rozkład geometryczny z parametrem $p\in(0,1)$

- powtarzamy doświadczenie ze zmienną losową zerojedynkową dopóki sukces pojawi się po raz pierwszy

$X\in\{1,2,3\ldots\}\ni k$

$P(X=k)=P(\underbrace{0,0,\ldots,}_{k-1}\underbrace{1}_{k})=q^{k-1}\cdot p$

$EX=\frac{1}{p}$

$VarX=\frac{1-p}{p^2}$

$EX = \frac{1}{p}$

$Var\,X = \frac{1-p}{p^2}$

- przykład: wadliwość wyrobów wynosi 0,02. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wadliwy wyrób wylosujemy po raz pierwszy za piątym razem?

X – numer losowania, w którym wylosujemy po raz pierwszy wadliwy wyrób
X ma rozkład geometryczny

$p = 0{,}02$

$P(X=5) = (1-0{,}02)^4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0184$

$k_0 = 1$

$EX = \frac{1}{0{,}02} = 50$

4 Rozkład Poissona z parametrem λ

$\lambda > 0$ gdy $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k \in \{0,1,2\ldots\}$

$EX = \lambda$

$Var\,X = \lambda$

$$k_0 = \begin{cases} \text{część całkowita } \lambda & \text{gdy } \lambda \notin N \\ \lambda \text{ lub } \lambda - 1 & \text{gdy } \lambda \in N \end{cases}$$

- przykład dla $\lambda = 4{,}0$ (odczyt z tabeli)

$P(X \geqslant k)$ $\quad$ $P(X \geqslant 6) = 0{,}2149$

- przykład: zadanie 6 / lista 3

$\lambda = 8$ $\quad$ $p = 0{,}95$

X – liczba samochodów do naprawy w warsztacie

X ma rozkład Poissona z param. $\lambda = 8$

$EX = 8$ lub 7 $\quad$ ∞ możliwe rozbite samochody

ile powinno być miejsc w warsztacie, aby dla każdego uszkodzonego auta było miejsce w warsztacie?

l – liczba miejsc w warsztacie

$X \leqslant l$ liczba aut do naprawy $\geqslant$ liczba miejsc

$P(X \leqslant l) \geqslant 0{,}95$

$1 - P(X > l) \geqslant 0{,}95$

$P(X > l) \leqslant 0{,}05$

$(X > l) = (X \geqslant l+1)$

$P(X \geqslant l+1) \leqslant 0{,}05$

Z tablicy: $p \to 0{,}0342 \to k = 14$

$l+1 \geqslant 14 \to l \geqslant 13$

ze wzoru

$\lambda = 8$

$P(X=7) = e^{-8}\frac{8^7}{7!}$

$P(X=7) = P(X \geqslant 7) - P(X \geqslant 8) = 0{,}6866 - 0{,}5470$

z tablic