Wykład 7

środa, 10 kwietnia 2019 07:33

- zadania do listy 5 włącznie
- kolokwium za tydzień, 45 minut + wykład, zadania przez edukację dostaniemy
- wziąć tablice, wziąć dodatkowe kartki,
- wydruk ze strony: typowe rozkłady prawdopodobieństwa
- kalkulator

PRZYKŁAD:

Prawdopodobieństwo, że wyprodukowany element będzie dobry, wynosi 0,9.

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 150 takich elementów dobrych będzie przynajmniej 130

b) ile elementów należy wyprodukować, aby prawdopodobieństwo, że będzie wśród nich przynajmniej 100 dobrych, było większe niż 0,95?

POPRAWKA

X_k o wart. całkowitych $\qquad a, b$ całkowite

$$\underbrace{P\left(a \leq \sum_{k=1}^{n} X_k \leq b\right)} = \underbrace{P\left(a - \tfrac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} X_k \leq b + \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = b\right) = P\left(b - \tfrac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} X_k \leq b + \tfrac{1}{2}\right)$$

ROZWIĄZANIE:

X_k - jakość k-tego elementu

$k = 1 \dots 150$ $\qquad EX_k = 1 \cdot 0{,}9 = 0{,}9$

$X \sim B(1; 0{,}9)$, $\qquad Var\, X_k = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$

a) $$P\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{150} X_k}_{\text{liczba dobrych elementów wśród wszystkich}} \geq 130\Big) \underset{\text{poprawka}}{=} P\Big(\sum_{k=1}^{150} X_k \geq \underbrace{129{,}5}_{\text{chcemy ująć też wartość 130}}\Big) = 1 - P\Big(\sum_{k=1}^{150} X_k \leq 129{,}5\Big) =$$

$$\underset{\text{centralne twierdzenie graniczne}}{=} 1 - P\left(\underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{150} X_k - 150 \cdot 0{,}9}{\sqrt{150 \cdot 0{,}09}}}_{\to N(0,1)} < \underbrace{\frac{129{,}5 - 150 \cdot 0{,}9}{\sqrt{150 \cdot 0{,}09}}}_{= -1{,}22}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-1{,}22) = 1 - 1 + \Phi(1{,}22) = 0{,}8888$$

b) „dla jakiego n liczba dobrych elementów jest większa niż 100?"

$$P\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} X_k}_{\text{liczba dobrych elementów}} \geq 100\Big) > 0{,}95$$

liczba dobrych elementów

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > 99{,}5\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 99{,}5\right) = 1 - P\Bigg(\underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n} - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}}}_{\to N(0,1)} \leqslant \frac{99{,}5 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}}\Bigg) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{99{,}5 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}}\right) = \underbrace{\Phi\left(-\frac{99{,}5 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}}\right)}_{1-\Phi(a) = \Phi(-a)} > 0{,}95$$

$$-\frac{99{,}5 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}} > 1{,}64$$

$$n\cdot 0{,}9 - 1{,}64\cdot\sqrt{n}\cdot 0{,}3 - 99{,}5 > 0$$

$$\sqrt{n_1} = 10{,}79 \qquad \sqrt{n} < 0$$

$$n_1 = 116{,}45 \longrightarrow n \geqslant 117$$

PRZYKŁAD ALGEBRAICZNY

- niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie, opisanym dystrybuantą $F(t)$.

Wyznaczyć dystrybuantę (i gęstość, jeśli istnieje) dla zmiennych losowych:

a) $Y = \max\{X_1, X_2 \ldots X_n\}$

b) $Z = \min\{X_1 \ldots X_n\}$

X_k - czas pracy k-tego elementu $k = 1 \ldots n$

Y - maksimum $\max\{X_1 \ldots X_n\}$
„czas pracy n elementów połączonych w układ równoległym" → gdy co najmniej jeden pracuje

Z - minimum $\min\{X_1 \ldots X_n\}$
„czas pracy elementów połączonych szeregowo" → gdy wszystkie pracują

$F(t) = P(X_k < t) \qquad k = 1 \ldots n$

a) $F_Y(t) = P(Y < t) = P(\max(X_1 \ldots X_n) < t) =$

$= P(X_1 < t \cap X_2 < t \cap \ldots \cap X_k < t) = P(X_1 < t)\cdot P(X_2 < t)\cdot \ldots \cdot P(X_k < t) =$

$= (F(t))^n$

$$f_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_Y(t) = n\cdot F(t)^{n-1}\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} F(t)}_{f(t)}$$

b) $F_Z(t) = P(Z < t) = P(\min(X_1 \dots X_n) < t) = 1 - P(\min(X_1 \dots X_n) \geq t) =$

$= 1 - P(X_1 \geq t \cap \dots \cap X_k \geq t) = 1 - \underbrace{P(X_1 \geq t)}_{1-F(t)} \cdot \dots \cdot P(X_k \geq t) =$

$= 1 - [1 - F(t)]^n$

$f_Z(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_Z(t) = n(1 - F(t))^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} F(t)$

PRZYKŁAD

Czas działania każdego elementu jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 10]$

Obliczyć wartość oczekiwaną czasu działania 5 takich elementów podłączonych

a) równolegle
b) szeregowo

X_k - czas działania k-tego elementu $\quad k = 1 \dots 5$

$EX_k = 5$

$F_{X_k}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{10} & 0 < t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases} \qquad f_{X_k}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{poza zakresem} \end{cases}$

a) $Y_{max}\{X_1, \dots X_5\}$

$EY = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t)\, dt = \int_0^{10} t \cdot 5 \frac{t^4}{10^5} dt = \frac{5}{10^5} \cdot \frac{t^6}{6}\Big|_0^{10} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$

$f_Y(t) = \begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{t}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{10} & t \in (0; 10) \\ 0 & \text{poza przedziałem} \end{cases}$

b) zrobić sb. w domu, wynik: $\frac{5}{3}$

LISTA 3 / ZADANIE 2

Spośród 6 płytek dobrych i 4 wadliwych losujemy jednocześnie 3 płytki.

X - liczba płytek dobrych wśród wylosowanych

Obliczyć dystrybuantę X, EX, $VarX$

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{1}{6}$$

$$F(t) = P(X<t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{30} & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{1}{3} & 1 < t \leq 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} & 2 < t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

$$EX = \sum_{k=0}^{3} x_k \cdot P(X=x_k) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1{,}8$$

$$VarX = E(X^2) - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 P(X=x_k) - (EX)^2 =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{30} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - (1{,}8)^2 = 0{,}56$$

LISTA 4 / ZADANIE 3

Czas produkcji wyrobu jest zmienną losową X o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 < x < 4 \\ 0 & x \leq 1,\ x \geq 4 \end{cases}$$

Obliczyć EX oraz Var czasu produkcji wyrobu.
Obliczyć P, że wśród 15 wyrobów 8 ma czas produkcji krótszy niż $\frac{9}{4}$ s

X – czas produkcji elementu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{1}^{4} x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big| = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

$$VarX = E(X)^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (EX)^2 = \int_{1}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 - \frac{49}{9} = \frac{1}{5}(32-1) - \frac{49}{9} = \frac{34}{45}$$

Y – liczba wyrobów z czasem produkcji krótszym niż $\frac{9}{4}$ s

$$Y \sim B(15, p) \qquad p = P\left(X < \frac{9}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{9}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_1^{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

liczba prób

$p = \frac{1}{2}$

$$P(Y=8) = \binom{15}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}1964$$

* na kolosa: rozkład normalny

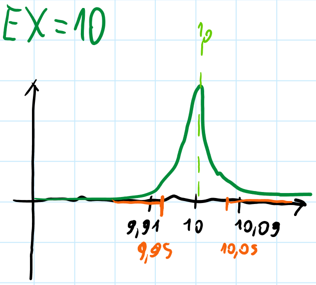
* na kolosa: rozkład normalny

LISTA 5 / ZADANIE 4

Średnica prod. elementów ma rozkład normalny $N(10, 0{,}03)$

Norma: $10 \pm 0{,}05\,mm$

$EX = 10$



a) jaki % wyrobów nie spełnia wymogów normy?

$$P(X \geq 10{,}05 \cup X \leq 9{,}95) = P(|X-10| \geq 0{,}05) =$$

$$= 1 - P(|X-10| < 0{,}05) = 1 - P\Big(\frac{-0{,}05}{0{,}03} < \underbrace{\frac{X-10}{0{,}03}}_{N(0,1)} < \frac{0{,}05}{0{,}03}\Big) =$$

$$= 1 - \Big(\Phi\big(\tfrac{5}{3}\big) - \Phi\big(-\tfrac{5}{3}\big) = 2\Phi\big(\tfrac{5}{3}\big) - 1\Big) = 2 - 2\Phi(1{,}67) =$$

$$= 2 - 2 \cdot 0{,}95252 = 0{,}09492 \rightarrow 9{,}49\,\%$$

b) dopuszczalne σ, aby wyrobów niespełniających wymogów było co najwyżej 0,1%

$$P(|X-10| \geq 0{,}05) \leq 0{,}001$$

$$1 - P(|X-10| < 0{,}05) \leq 0{,}001$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{(x-10)}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{0{,}05}{\sigma}\Big) \geq 0{,}999$$

$$\Phi\Big(\frac{0{,}05}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{-0{,}05}{\sigma}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{0{,}05}{\sigma}\Big) - 1 \geq 0{,}999$$

$$\Phi\Big(\frac{0{,}05}{\sigma}\Big) \geq 0{,}9995 \geq \Phi(3{,}29) \rightarrow \text{dystrybuanta z tablic}$$

$$\frac{0{,}05}{\sigma} \geq 3{,}29 \qquad \sigma \leq 0{,}015$$