WYKŁADOWCA

- Wiesława Wawrzyniak-Kosz
- www.prac.im.pwr.wroc.pl/~wkosz

ZALICZENIE

- 2 kolosy x 3 zadania x 5pkt
- min. 15pkt na zaliczenie
- max 34 pkt

- 1 kolos: 17.04
- 2 kolos: 12.06

- max 20% nieobecności
- max 4 pkt za aktywność

- poprawka w sesji

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Temat wykładu: Prawdopodobieństwo

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

- doświadczenie losowe – doświadczenie /zjawisko /eksperyment, które kończy się jakimś wynikiem, dopóki się nie zakończy nie można podać wyniku
    - jak trzymam monetę i puszczam, to nie dośw. losowe
    - awers vs. rewers → dośw. losowe
    - trasa dojazdu to losowe doświadczenie
    - wszystkie czasy pracy
- stabilność częstości – jeśli coś powtarzamy wiele razy, to relacja wystąpienia danej wartości do liczby powtórzeń, dążąc do nieskończoności, zbliża się do pewnej liczby
    - jak rzucimy 10 razy to może wyjść 0 orłów, zwiększając liczbę powtórzeń zmieniamy częstość wystąpienia orła → okazuje się, że granica dąży do $\frac{1}{2}$.
- opisujemy doświadczenie losowe podając zbiór wszystkich możliwych wyników Ω

$w \in \Omega$

- ω - zdarzenie elementarne
- podzbiór Ω to zdarzenie losowe A, $A \subset \Omega$
- zdarzenie losowe A zaszło, gdy doświadczenie zakończyło się wynikiem z A
- przykład: rzut kostką

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  A - wypadła parzysta liczba oczek $A = \{2, 4, 6\}$
- zdarzenie przeciwne do A:

  $\bar{A} \underset{def}{=} \Omega - A$
- operacje na zbiorach

  $A \cup B$ – suma zdarzeń

  $A \cap B$ – iloczyn – wszystkie wyniki, które są i w A i w B

  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ – różnica – wszystko, co jest w A i nie jest w B

  $B \setminus A = B \cap \bar{A}$ – różnica – to co w B, a nie ma w A
- prawo de Morgana:

  $\overline{A \cup B} = \underbrace{\bar{A} \cap \bar{B}}$

  chcesz kawę albo herbatę? nie chcę ani tego, ani tego

  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ← zaprzeczenie iloczynu to suma zaprzeczeń

DEFINICJA AKSJOMETRYCZNA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem zdarzeń z Ω spełniającym warunki:

  ① $\mathcal{A} \neq \emptyset$

  ② $A \in \mathcal{A}$ to $\bar{A} \in \mathcal{A}$

  ③ $A_1, A_2 \ldots$ $A_i \in \mathcal{A}$ to $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$
- Funkcję P określoną na $\mathcal{A}$ o wartościach w $[0,1]$, spełniającą warunki:

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$

② $P(\Omega) = 1$

③ dla zdarzeń $A_1, A_2 \ldots$ parami rozłącznych $(A_i \cap A_j = \emptyset;\ i \neq j)$

$$P\left(\bigcup_{i}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

nazywamy prawdopodobieństwem

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$ – suma zbiorów

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

① $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ bo $A \cup \bar{A} = \Omega$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

rozłączne

$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega)$

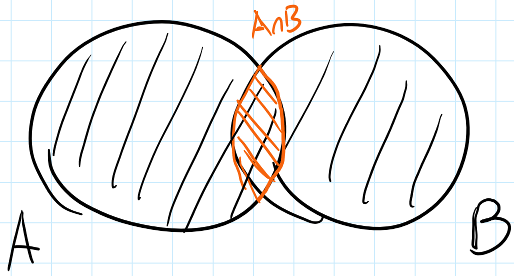
$P(\emptyset) = 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{1\ -\ \text{aksjomat 2}} = 0$

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\emptyset$ – zbiór pusty, zdarzenie niemożliwe

② $\underbrace{A \subset B}_{\text{podzbiór}} \rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

* ③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$\rightarrow A,\ B \cap \bar{A}$ rozłączne

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

rozłączne

- Z powyższego: $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$
$(B \setminus A)$

TWIERDZENIE

- niech Ω ma N elementów lub elementy Ω można ponumerować liczbami naturalnymi (ustawić je w ciąg) oraz niech liczby

  $p_i = P(\omega_i)$ $\quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$

  spełniają następujące warunki

  (1) $p_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \ldots$

  (2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

  to funkcja $P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$ jest prawdopodobieństwem na Ω.

  $A \subset \Omega \quad A = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$

WNIOSEK

- jeśli Ω ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$) ma N elementów oraz $p_i(\omega_i) = \frac{1}{N}$

  wtedy $P(A) = \frac{\text{liczba elementów } A}{N}$ ← tzw. prawdopodobieństwo klasyczne

PRZYKŁAD

- opisać Ω i P dla:

(1) rzutu 2 monetami rozróżnialnymi:

$\Omega = \{(0,0), (r,r), (r,0), (0,r)\}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$

(2) rzut 2 monetami nierozróżnialnymi

$\Omega = \{(0,0), (r,r), (0,r)\}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}$