- przypomnienie: równania różniczkowe 2 rzędu

$$y''(t) + py'(t) + q\,y(t) = h(t)$$ równanie A

- jeżeli $h(t) = 0$ → równanie jednorodne

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$ równanie B

- wielomian charakterystyczny

# METODA PRZEWIDYWAŃ

Rozważmy równanie $y''(t) = py'(t) + qy(t) = h(t)$
oraz stowarzyszone z nim równanie jednorodne.

(wykład 6)

## PRZYKŁAD II:

$y''(t) - y'(t) = t + 1$ → piszemy równanie charakterystyczne równania jednorodnego

$y''(t) - y'(t) = 0$ → $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 1) = 0$ → $\lambda = 0$ $\quad \lambda = 1$

dwa różne

$\varphi(t) = t\,(At + B)$

jeden z pierwiastków to 0

$$\varphi(t) = At^2 + Bt$$

$$\varphi'(t) = 2At + B$$

$$\varphi''(t) = 2A$$

$$2A - 2At - B = t + 1$$

$$\begin{cases} 2A - B = 1 \\ -2A = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = -2 \end{array}$$

Rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $\varphi(t) = t\left(-\frac{1}{2}t - 2\right)$

$y_1(t) = 1 \qquad y_2(t) = e^t$

$y_1(t) = 1 \qquad y_2(t) = e^t$

$y_j(t) = c_1 + c_2 e^t$

Rozwiązaniem ogólnym jest funkcja (suma równań szczególnego i ogólnego)

$y(t) = c_1 + c_2 e^t + t\left(-\frac{1}{2}t - 2\right)$

# PRZYKŁAD III

$y''(t) = 2t^2 + 4$

$y''(t) = 0$

$\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow$ pierwiastek podwójny, więc:

$y_1(t) = e^0 = 1 \qquad y_2(t) = t e^0 = t$ (układ fundamentalny)

$y_j = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 + c_2 t$ (rozwiązanie równania jednorodnego)

$\varphi(t) = t^2(At^2 + Bt + C)$

pierwiastek podwójny to 0

$\varphi(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2$

$\varphi'(t) = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct$

$\varphi''(t) = 12At^2 + 6Bt + 2C$

$12At^2 + 6Bt + 2C = 2t^2 + 4$

$$\left.\begin{array}{lll} 12A = 2 & \rightarrow & A = \frac{1}{6} \\ 6B = 0 & \rightarrow & B = 0 \\ 2C = 4 & \rightarrow & C = 2 \end{array}\right\} \varphi(t) = t^2\left(\frac{1}{6}t^2 + 2\right)$$

rozwiązanie szczególne

Rozwiązaniem ogólnym jest funkcja: $y(t) = y_j(t) + \varphi(t)$

$y(t) = c_1 + c_2 t + t^2\left(\frac{1}{6}t^2 + 2\right)$

# METODA PRZEWIDYWAŃ, CD.

Niech $f(t) = (A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \dots + A_1 t + A_0)e^{\lambda t}$

# METODA PRZEWIDYWAŃ, CD.

Niech $h(t) = (A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + \ldots + A_1 t + A_0) e^{\lambda t}$
oraz niech $w(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym równania jednorodnego.

① Jeżeli $\lambda$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym równania $A$ jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = (a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0) e^{\lambda t}$$

② Jeżeli $\lambda$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym równania $A$ jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = t\,(a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0) e^{\lambda t}$$

③ Jeżeli $\lambda$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym równania $A$ jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = t^2 (a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0) e^{\lambda t}$$

## PRZYKŁAD I:

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{3t}$$

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\varphi(t) = A \cdot e^{3t}$$

$$\varphi'(t) = 3Ae^{3t}$$

$$\varphi''(t) = 9Ae^{3t}$$

$$9Ae^{3t} - 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$4Ae^{3t} = e^{3t} \rightarrow 4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Rozwiązaniem szczególnym jest funkcja

$$\varphi(t) = \frac{1}{4} e^{3t}$$

Układ fundamentalny $y_1(t) = e^{-t}$ $y_2(t) = e^{2t}$

Układ fundamentalny $y_1(t) = e^{-t}$ $y_2(t) = e^{2t}$

$y_j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

Rozwiązanie ogólne jest postaci $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$

## PRZYKŁAD II:

$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$

$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 2$

$y_j(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

$\varphi(t) = A \cdot t e^{2t}$

$\varphi'(t) = A(e^{2t} + te^{2t}) = Ae^{2t}(1+2t)$

$\varphi''(t) = A \cdot 2e^{2t}(1+2t) + Ae^{2t} \cdot 2 = Ae^{2t}(4+4t)$

$Ae^{2t}(4+4t) - Ae^{2t}(1+2t) - 2Ate^{2t} = e^{2t}$

$A\cancel{e^{2t}}(4+4t-1-2t-2t) = \cancel{e^{2t}}$

$3A = 1$ $A = \frac{1}{3}$

Rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $\varphi(t) = \frac{1}{3} t e^{2t}$

Rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{3} t e^{2t}$

## PRZYKŁAD III

$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4e^{-2t}$

$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ $y_1(t) = e^{-2t}$

$(\lambda+2)^2 = 0$ $\lambda = -2$ $y_2(t) = te^{-2t}$ $y_j = C_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

$\varphi(t) = t^2 \cdot Ae^{-2t} = At^2 e^{-2t}$

$$\varphi(t) = t^2 \cdot Ae^{-2t} = At^2e^{-2t}$$

$$\varphi'(t) = A\left(2te^{-2t} + t^2e^{-2t}(-2)\right) = Ae^{-2t}(2t - 2t^2)$$

$$\varphi''(t) = Ae^{-2t}(-2)(2t-2t^2) + A \cdot e^{-2t}(2-4t) =$$

$$= Ae^{-2t}(-4t + 4t^2 + 2 - 4t) = Ae^{-2t}(4t^2 - 8t + 2)$$

$$Ae^{-2t}(4t^2 - 8t + 2) + 4Ae^{-2t}(2t - 2t^2) + 4At^2e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

$$A\cancel{e^{-2t}}(\cancel{4t^2} - \cancel{8t} + 2 + \cancel{8t} - \cancel{8t^2} + \cancel{4t^2}) = 4\cancel{e^{-2t}}$$

$$2A = 4 \qquad A = 2$$

Rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $y(t) = 2t^2e^{-2t}$

Rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + 2t^2e^{-2t}$

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 + 2t^2)$$

## METODA PRZEWIDYWAŃ CD.

Niech $h(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$
gdzie $\beta > 0$ oraz niech $w(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym równania jednorodnego.

1. Jeżeli $\beta i$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym równania A jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = a\cos\beta t + b\sin\beta t$$

2. Jeżeli $\beta i$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ to rozwiązaniem szczególnym równania A jest funkcja postaci

$$\varphi(t) = t\,(a\cos\beta t + b\sin\beta t)$$

PRZYKŁAD I:

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 2\sin t + 4\cos t$$

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\varphi(t) = A\cos t + B\sin t$$

Kolos: metody przewidywań nie będzie.

zadania: 1 – 51 włącznie
z listy zadań / bez tekstowych

3 zadania po 15 minut każde

Podział: godzina 12:15 nieparzyste