PODSTAWY AUTOMATYKI 2 – ĆWICZENIA - odpowiedzi

lista zadań nr 1

Transformata Z

1. *(Korzystając wprost z definicji znaleźć transformatę Z funkcji)*

a. $F(z)=\dfrac{z}{z-3}$

b. $F(z)=\dfrac{0{,}25z}{z-2}$

c. $F(z)=\dfrac{z}{z-9}+\dfrac{z}{z-1}$

d. $F(z)=\dfrac{z(z+4)}{(z-1)^2}$

e. $F(z)=\dfrac{z}{z-e^{-4T_p}}$

f. $F(z)=\dfrac{e^{-T_p}z}{z-e^{T_p}}$

2. *(Korzystając z podstawowych własności transformaty, znaleźć transformatę Z funkcji)*

a. $F(z)=\dfrac{3T_pz}{(z-1)^2}+\dfrac{8z}{z-1}$

b. $F(z)=\dfrac{-T_pz}{(z-1)^2}+\dfrac{5z}{z-1}$

c. $F(z)=\dfrac{0{,}5}{T_p(z-1)^2}$

d. $F(z)=\dfrac{0{,}5T_p^2z(z+1)}{(z-1)^3}$

e. $F(z)=\dfrac{5z}{z-e^{3T_p}}$

f. $F(z)=\dfrac{T_pz}{(z-1)^2}+\dfrac{3z}{z-e^{-4T_p}}$

3. *(Obliczyć odpowiedź na impuls Diraca, $g(n)$, dla układu impulsowego o transmitancji)*

a. $g(n)=0{,}125(-5)^{n-1}+0{,}375(-1)^{n-1}$

b. $g(n)=9(-4)^{n-1}-(-2)^{n+1}$

c. $g(n)=1{,}5(-5)^{n-1}-0{,}5(-2)^{n-1}$

d. $g(n)=9(-5)^{n-1}-5(-3)^{n-1}$

e. $g(n)=2(-1)^{n-1}-(-0{,}5)^{n-1}$

f. $g(n)=7(-5)^{n-1}-5(-4)^{n-1}$

g. $g(n)=4(-3)^{n-1}-(-1)^{n-1}$

h. $g(n)=(-2)^{n-1}-(n-1)(-2)^{n-2}$

4. *(Obliczyć odpowiedź na skok jednostkowy, $y_1(n)$, dla układu impulsowego o transmitancji)*

a. $y_1(n)=-1+2^{n+1}$

b. $y_1(n)=2^{n+1}-2$

c. $y_1(n)=(-1)^n$

d. $y_1(n)=3n+2$

e. $y_1(n)=0{,}5-2^{n+1}+0{,}5\cdot 3^{n+1}$

f. $y_1(n)=-2{,}5+0{,}5(-1)^n+2^{n+1}$

5. *(Dana jest odpowiedź na impuls Diraca* $g(n)$***. Obliczyć transmitancję takiego układu impulsowego)***

a. $G(z)=\dfrac{z(5z-13)}{(z-2)(z-3)}$

c. $G(z)=\dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}$

b. $G(z)=\dfrac{z(6z-7)}{(z-1)(z-2)}$

d. $G(z)=\dfrac{z}{(z-3)^2}$

6. *(Wyznaczyć odpowiednik impulsowy transmitancji układu ciągłego* $G(s)$ ***dla czasu próbkowania*** $T_p=0{,}1s$***)***

a. $G(z)=\dfrac{-z}{z-0{,}905}+\dfrac{3z}{z-0{,}819}$

d. $G(z)=\dfrac{0{,}25z}{z-1{,}221}+\dfrac{-0{,}25z}{z-0{,}819}$

b. $G(z)=\dfrac{-z}{z-0{,}905}+\dfrac{2z}{z-0{,}670}$

e. $G(z)=\dfrac{2z}{z-1}+\dfrac{-z}{z-0{,}819}$

c. $G(z)=\dfrac{z}{z-0{,}819}+\dfrac{-z}{z-0{,}741}$

f. $G(z)=\dfrac{0{,}09z}{(z-0{,}905)^2}$

PODSTAWY AUTOMATYKI 2 – ĆWICZENIA - odpowiedzi

lista zadań nr 2

Równania różnicowe. Ekstrapolatory

1. *(Dla układu impulsowego o transmitancji $G(z)$, zakładając zerowe warunki początkowe, obliczyć wartość pierwszych pięciu próbek sygnału wyjściowego $y(n)$, dla sygnału wejściowego $u(t)=\delta(t)$)*

a. $y(0...4)=\{0;\ 5;\ -25;\ 125;\ -625\}$

b. $y(0...4)=\{0;\ 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25\}$

c. $y(0...4)=\{0;\ 1;\ 0;\ -3;\ 6\}$

d. $y(0...4)=\{0;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ -0{,}75;\ 0{,}5\}$

2. *(Znaleźć równanie różnicowe wiążące sygnały wejściowy i wyjściowy dla układu impulsowego o transmitancji $G(z)$, zakładając zerowe warunki początkowe. Obliczyć wartość próbki sygnału wyjściowego $y(3)$, dla sygnału wejściowego $u(t)=\mathbf{1}(t)$)*

a. $y(n)=6y(n-1)-5y(n-2)+u(n-1)+u(n-2)$, $y(3)=45$

b. $y(n)=-5y(n-1)-6y(n-2)+u(n-2)$, $y(3)=-4$

c. $y(n)=-10y(n-1)+2u(n-1)$, $y(3)=182$

d. $y(n)=2y(n-2)+u(n-2)$, $y(3)=1$

3. *(Rozwiązać równanie różnicowe dla podanych warunków początkowych)*

a. $y(n)=4^{n+1}$

b. $y(n)=6\cdot 3^n+3\cdot(-3)^n$

c. $y(n)=2^{n+2}$

d. $y(n)=1+2^{n+2}$

e. $y(n)=5+4\cdot(-2)^n$

4. *(Rozwiązać układ równań różnicowych dla podanych warunków początkowych)*

a. $x_1(n)=-1+3\cdot 2^n$, $x_2(n)=-1+2^{n+1}$

b. $x_1(n)=-11\cdot 2^n+4\cdot 3^{n+1}$, $x_2(n)=11\cdot 2^n-3^{n+2}$

c. $x_1(n)=3+6n$, $x_2(n)=1+6n$

5. (Obliczyć transmitancję $G(z)$ obiektu o transmitancji $G(s)$ przy zastosowaniu ekstrapolatora zerowego rzędu)

a. $G(z)=\dfrac{0{,}632}{z-0{,}368}$

b. $G(z)=\dfrac{2{,}885}{z-2}$

c. $G(z)=\dfrac{0{,}157}{z-0{,}607}$

d. $G(z)=\dfrac{0{,}4}{z}$

e. $G(z)=\dfrac{1{,}476z+4{,}013}{z^2-10{,}11z+20{,}09}$

f. $G(z)=\dfrac{0{,}52z+0{,}52}{z^2-2{,}5z+1}$

6. (W układzie jak na rys. 9.1 zastosowano ekstrapolator zerowego rzędu. Obliczyć wartości pierwszych czterech próbek sygnałów odpowiedzi $y(n)$ i błędu $e(n)$ przy pobudzeniu skokiem jednostkowym ($T_p=1s$))

a. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}432}{z-0{,}135}$, $\quad y_1(0...3)=\{0;\ 0{,}432;\ 0{,}304;\ 0{,}342\}$

$e(0...3)=\{1{,}0;\ 0{,}568;\ 0{,}696;\ 0{,}658\}$

b. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}85}{z-0{,}717}$, $\quad y_1(0...3)=\{0;\ 0{,}850;\ 0{,}737;\ 0{,}752\}$

$e(0...3)=\{1{,}0;\ 0{,}150;\ 0{,}263;\ 0{,}248\}$

c. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}123}{z-0{,}018}$, $\quad y_1(0...3)=\{0;\ 0{,}123;\ 0{,}110;\ 0{,}111\}$

$e(0...3)=\{1{,}0;\ 0{,}877;\ 0{,}890;\ 0{,}889\}$

d. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}093z+0{,}013}{z^2-0{,}154z+0{,}002}$, $\quad y_1(0...3)=\{0;\ 0{,}093;\ 0{,}112;\ 0{,}111\}$

$e(0...3)=\{1{,}0;\ 0{,}907;\ 0{,}888;\ 0{,}889\}$

7. (W układzie jak na rys. 9.1 zastosowano ekstrapolator zerowego rzędu. Obliczyć wartości pierwszych pięciu próbek sygnałów odpowiedzi $y(n)$ i przy pobudzeniu skokiem prędkości ($T_p=1s$))

a. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}632}{z-0{,}368}$ $\quad y_1(0...4)=\{0;\ 0;\ 0{,}632;\ 1{,}097;\ 1{,}606\}$

b. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}284}{z-0{,}717}$ $\quad y_1(0...4)=\{0;\ 0;\ 0{,}283;\ 0{,}690;\ 1{,}149\}$

c. $G_{OE}(z)=\dfrac{3{,}195}{z-7{,}389}$ $\quad y_1(0...4)=\{0;\ 0;\ 3.195;\ 19.789;\ 92.587\}$

d. $G_{OE}(z)=\dfrac{0{,}58}{z-4{,}482}$ $\quad y_1(0...4)=\{0;\ 0;\ 0{,}580;\ 3{,}424;\ 15{,}101\}$

PODSTAWY AUTOMATYKI 2 – ĆWICZENIA - odpowiedzi

lista zadań nr 3

Algebra schematów blokowych układów dyskretnych. Uchyby ustalone

1. *(Wyprowadzić wzór na dyskretną transmitancję zastępczą układów jak na rysunkach)*

a. $G_z(z)=\dfrac{\mathrm{Z}\{G_1(s)\,G_2(s)\}}{1+\mathrm{Z}\{G_1(s)\,G_2(s)\}\,G_3(z)}$

b. $G_z(z)=\dfrac{\mathrm{Z}\{G_1(s)\,G_2(s)\}}{1+\mathrm{Z}\{G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)\}}$

2. *(Wyznaczyć transmitancję zastępczą układów jak na rysunkach)*

a. $G_z(z)=\dfrac{z^2}{(z-0{,}37)^2}$

b. $G_z(z)=\dfrac{z(z-3)}{3z^2-5z+6}$

c. $G_z(z)=\dfrac{z(z-1)}{z^2+1}$

d. $G_z(z)=\dfrac{z(z-2)}{z^2+4}$

3. *(Dana jest transmitancja układu otwartego $G_{12}(z)$. Obliczyć wartość uchybów położenia, prędkości i przyspieszenia ($T_p=1s$))*

a.	$e_p=0{,}333$	$e_v=\infty$	$e_a=\infty$
b.	$e_p=-1{,}5$	$e_v=\infty$	$e_a=\infty$
c.	$e_p=-39$	$e_v=\infty$	$e_a=\infty$
d.	$e_p=0$	$e_v=1{,}75$	$e_a=\infty$
e.	$e_p=0$	$e_v=3{,}5$	$e_a=\infty$
f.	$e_p=0$	$e_v=2$	$e_a=\infty$
g.	$e_p=0$	$e_v=0$	$e_a=1{,}196$
h.	$e_p=0$	$e_v=0$	$e_a=1{,}333$
i.	$e_p=0$	$e_v=0$	$e_a=0{,}48$
j.	$e_p=0$	$e_v=0$	$e_a=0$

PODSTAWY AUTOMATYKI 2 – ĆWICZENIA - odpowiedzi

lista zadań nr 4

Stabilność układów dyskretnych

1. (Dana jest transmitancja $G_{12}(z)$ układu otwartego. Zbadać stabilność układu zamkniętego, wykorzystując podstawowy warunek stabilności układów dyskretnych)

a. $z_1 = 0{,}8$, $z_2 = 0{,}5$, $|z_1| = 0{,}8$, $|z_2| = 0{,}5$ - stabilny.

b. $z_1 = 0{,}2 + 0{,}2i$, $z_2 = 0{,}2 - 0{,}2i$, $|z_1| = 0{,}283$, $|z_2| = 0{,}283$ - stabilny.

c. $z_1 = 0{,}9 + 0{,}9i$, $z_2 = 0{,}9 - 0{,}9i$, $|z_1| = 1{,}273$, $|z_2| = 1{,}273$ - NIESTABILNY.

d. $z_1 = 1{,}0 + 0{,}2i$, $z_2 = 1{,}0 - 0{,}2i$, $|z_1| = 1{,}02$, $|z_2| = 1{,}02$ - NIESTABILNY.

2. (Korzystając z kryterium Jury'ego zbadać stabilność układu o transmitancji)

a. Układ stabilny. $M(1)$= 15, $(-1)^n M(-1)$=3. Tablica Jury'ego:

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1
-24	-18	-12	-6	
-6	-12	-18	-24	
540	360	180		

b. Układ NIESTABILNY. $M(1)$= 10, $(-1)^n M(-1)$=4. Tablica Jury'ego:

1	2	4	1	2
2	1	4	2	1
-3	0	-4	-3	
-3	-4	0	-3	
0	-12	12		

c. Układ NIESTABILNY. $M(1)$= 6, $(-1)^n M(-1)$=12. Tablica Jury'ego:

2	-2	4	-1	3
3	-1	4	-2	2
-5	-1	-4	4	
4	-4	-1	-5	
9	21	24		

d. Układ stabilny. $M(1)$= 13, $(-1)^n M(-1)$=1. Tablica Jury'ego:

2	3	2	3	3
3	3	2	3	2
-5	-3	-2	-3	
-3	-2	-3	-5	
16	9	1		

e. Układ stabilny. $M(1)= 12$, $(-1)^n M(-1)=4$. Tablica Jury'ego:

2	2	2	2	4
4	2	2	2	2
-12	-4	-4	-4	
-4	-4	-4	-12	
128	32	32		

f. Układ NIESTABILNY. $M(1)= 15$, $(-1)^n M(-1)=7$. Tablica Jury'ego:

4	3	2	1	5
5	1	2	3	4
-9	7	-2	-11	
-11	-2	7	-9	
-40	-85	95		

g. Układ stabilny. $M(1)= 1$, $(-1)^n M(-1)=11$. Tablica Jury'ego:

1	-2	2	-3	3
3	-3	2	-2	1
-8	7	-4	3	
3	-4	7	-8	
55	-44	11		

h. Układ stabilny. $M(1)= 2$, $(-1)^n M(-1)=6$. Tablica Jury'ego:

1	-1	1	-1	2
2	-1	1	-1	1
-3	1	-1	1	
1	-1	1	-3	
8	-2	2		

3. (Dana jest transmitancja $G_{12}(z)$ układu otwartego. Wykorzystując kryterium Nyquista zbadać dla jakiego k układ zamknięty jest niestabilny $(T_p = 1s)$)

a. $k>0,5$

b. $k>1,8$

c. $k>0,2$

d. $k>1,3$

e. $k>3,8$

f. $k>24$

4. (Korzystając z przekształcenia biliniowego zbadać stabilność układu o transmitancji $G(z)$)

a. $G(w) = \dfrac{0,25(w-1)^3}{w^3 - 4w^2 + 3w - 2}$

układ niestabilny

1-szy war. Routh'a niespełniony

b. $G(w) = \dfrac{(1-w)^3}{w^3 + 2w^2 + w + 4}$

układ niestabilny, II war. Routha

$[1 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 4]^{-1}$

c. $G(w) = \dfrac{(1-w)^3}{9w^3 + 17w^2 + 7w + 7}$

układ stabilny, II war. Routha

$[9 \;\; 17 \;\; 3,3 \;\; 7]^{-1}$

d. $G(w) = \dfrac{(1-w)^3}{17w^3 + 19w^2 + 7w + 13}$

układ niestabilny, II war. Routha

$[17 \;\; 19 \;\; -4,6 \;\; 13]^{-1}$

PODSTAWY AUTOMATYKI 2 – ĆWICZENIA - odpowiedzi

lista zadań nr 5

Zmienne stanu

1. (Korzystając z metody bezpośredniej wyznaczyć równania stanu dla obiektu o transmitancji $G(s)$ przy zerowych warunkach początkowych)

a. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]U$$

c. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]U$$

b. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]U$$

d. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]U$$

2. (Korzystając z metody równoległej wyznaczyć równania stanu dla obiektu o transmitancji $G(s)$ przy zerowych warunkach początkowych)

a. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]U$$

c. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]U$$

b. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2{,}25 & -0{,}25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]U$$

d. $$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]U$$

3. (Korzystając z metody szeregowej wyznaczyć równania stanu dla obiektu o transmitancji $G(s)$ przy zerowych warunkach początkowych)

Uwaga: w metodzie szeregowej otrzymamy różne (prawidłowe) wyniki w zależności od kolejności występowania członów podstawowych, dlatego w poniższych odpowiedziach podano także tę kolejność.

a. $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)^2}=\dfrac{1}{(s+2)}\dfrac{1}{(s+2)}$

$$s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[0]U$$

b. $G(s)=\dfrac{4}{2s^2+6s+4}=\dfrac{2}{(s+1)}\dfrac{1}{(s+2)}$

$$s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[0]U$$

c. $G(s)=\dfrac{s(s-4)}{(s+1)(s+4)}=\dfrac{s}{(s+1)}\dfrac{s-4}{(s+4)}$

$$s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}-1 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[1]U$$

d. $G(s)=\dfrac{s-2}{s^2(s+2)}=\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s}\dfrac{s-2}{(s+2)}$

$$s\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+[0]U$$

4. (Dane są równania stanu:

$$s\mathbf{X}(s)=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}U(s)$$
$$Y(s)=\mathbf{C}\mathbf{X}(s)+\mathbf{D}U(s)$$

Wyznaczyć transmitancję $G(s)$)

a. $G(s)=\dfrac{1}{s^2-2s}$

b. $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2-2s-3}$

c. $G(s)=\dfrac{s-2}{s^2-4s+3}$

d. $G(s)=\dfrac{2s+1}{s^2-5s-2}$

e. $G(s)=\dfrac{8s}{s^2-5s}$

f. $G(s)=\dfrac{6s+4}{s^2+s+1}$