- kartkówka: drugi czwartek po świętach 10.01.2019
  - układy równań
  - metoda Eulera

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

dodać ze slajdu

$$y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(t,y(t))=\begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t) \dots y_n(t)) \\ f_n(t, y_1(t) \dots y_n(t)) \end{bmatrix}$$

$$z_0=\begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} \qquad y(t_0)=z_0$$

warunek początkowy

$t_0, z_1 \dots z_n \in \mathbb{R}$

- zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=z_0 \end{cases}$$

UKŁAD RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH I RZĘDU

$$\begin{cases} y_1'(t)=a_{11}(t)y_1(t)+a_{12}(t)y_2(t) \dots a_{1n}(t)y_n(t)+h_1(t) \\ \dots \\ y_n'(t)=a_{n1}(t)y_n(t) \dots a_{nn}(t)y_n(t)+h_1(t) \end{cases}$$

równanie 1.2

- oznaczmy $A(t)=[a_{ij}(t)]$

$$y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad h(t)=\begin{bmatrix} h_1(t) \\ \dots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

- układ zapisujemy w postaci

$$y'(t)=A(t)y(t)+h(t)$$

- z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} y'(t)=A(t)y(t)+h(t) \\ y(t_0)=z_0 \end{cases}$$

zagadnienie początkowe

TW. O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA POCZĄTKOWEGO

ZAGADNIENIA POCZĄTKOWEGO

- jeżeli wszystkie wyrazy macierzy A są stałe, układ 1.3 jest układem o stałych współczynnikach

$$y'(t) = A\,y(t) + h(t)$$

- jeśli $h(t) = 0$, układ nazywamy jednorodnym

$$y'(t) = A(t)\,y(t)$$

- zbiór rozwiązań na przedziale I nazywamy zbiorem fundamentalnym rozwiązań, a macierz $Y(t) = (y_{ij}(t))^{n}_{i,j=1}$ nazywamy macierzą fundamentalną rozwiązań układu. Elementy $y_1(t), y_2(t) \ldots$ tworzą kolejne kolumny macierzy $Y(t)$. Macierz fundamentalna $Y(t)$ rozwiązań układu spełnia równanie

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t)$$

PRZYKŁAD

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

- układ fundamentalny

$$\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(t) \\ \leftarrow y(t) \end{matrix} \qquad \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(t) \\ \leftarrow y(t) \end{matrix}$$

- sprawdzamy rozwiązanie

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} -e^{-t} \\ y(t) &= 2e^{-t} \xrightarrow{\frac{dy}{dt}} -2e^{-t} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad -e^{-t} = e^{-t} - 2e^{-t}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} -2e^{-t} \\ y(t) &= 4e^{-t} \longrightarrow -4e^{-t} \end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned} -2e^{-t} &= 2e^{-t} - 4e^{-t} \\ -4e^{-t} &= -8e^{-t} + 4e^{-t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} -e^{-t} &= e^{-t} - 2e^{-t} \\ -2e^{-t} &= -4e^{-t} + 2e^{-t} \end{aligned}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-t} & 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY
RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNE

- niech A będzie macierzą kwadratową. Wielomianem charakterystycznym macierzy A nazywamy wielomian

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

macierzy A nazywamy wielomian

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową (tego samego stopnia co A)

- Równaniem charakterystycznym macierzy A nazywamy równanie

$$w_A(\lambda) = 0$$

- przykład:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

$$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$w_A(\lambda) = 0 \rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \longrightarrow \lambda = \dots$$

wyznaczamy λ

- wartością własną macierzy A nazywamy każdy rzeczywisty lub zespolony pierwiastek wielomianu charakterystycznego

- każdy wektor $\vec{v}$ który spełnia warunek

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

nazywamy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej

- $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$
  $\vec{v}(A - \lambda) = 0$
  $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD

Jak liczyć wektory własne i wartości własne?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$w_A(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$w_A(\lambda)=0 \rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \qquad \Delta=9 \qquad \sqrt{\Delta}=3$

$\lambda_1=\frac{1-3}{2}=-1 \qquad \lambda_2=\frac{1+3}{2}=2$

• dla $\lambda=-1$

$\vec{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad A-\lambda=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2v_1+2v_2=0 \\ v_1+v_2=0 \end{cases} \qquad v_1=-v_2$

$\vec{v}=\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ← wektor nie może być wektorem zerowym

$v_2 \in R\setminus\{0\}$

• dla $\lambda=2$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -v_1+2v_2=0 \\ v_1-2v_2=0 \end{cases} \qquad v_1=2v_2$

$\vec{v}=\begin{bmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad v_2 \in R\setminus\{0\}$

PRZYKŁAD II

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$w_A(\lambda)=(3-\lambda)(1-\lambda)+10=3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+10=\lambda^2-4\lambda+13=0$

$\Delta=16-52=-36 \qquad \sqrt{\Delta}=\{-6i,\ \underline{6i}\}$

↖ wybieramy ten

$\lambda_1=2+3i \qquad \lambda_2=2-3i$

• dla $\lambda=2+3i$

$\begin{bmatrix} 3-2-3i & 2 \\ -5 & 1-2-3i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} (1-3i)v_1+2v_2=0 \\ -5v_1+(-1-3i)v_2=0 \end{cases} \rightarrow v_2=-\frac{1}{2}(1-3i)v_1$

$-5v_1+(-1-3i)\left(-\frac{1}{2}\right)(1-3i)v_1=0$

$-5v_1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1+3i-3i-9)v_1=0$

$0=0$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i)v_1 \end{bmatrix} \qquad v_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ \dots \\ y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{cases}$$

n układ A

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i$ $j \leqslant n$

METODA EULERA

- układ A możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \dots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- jeżeli λ jest pierwiastkiem rzeczywistym jednokrotnym to funkcja wektorowa

$$e^{\lambda t} \vec{v}$$

gdzie $\vec{v}$ jest dowolnym wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ jest rozwiązaniem szczególnym tego układu

- jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$ i $\lambda = \alpha - \beta i$ gdzie $\beta > 0$ są zespolonymi i jednokrotnymi wartościami własnymi, to każda z funkcji wektorowych

$$Re\left(e^{\lambda t} \vec{v}\right) \qquad Im\left(e^{\lambda t} \vec{v}\right)$$

gdzie $\vec{v}$ jest dowolnym wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ jest rozwiązaniem szczególnym tego układu

PRZYKŁAD

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \Delta = 1$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)+2=0 \rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \qquad \Delta=1$$

$$\lambda_1=\frac{4}{2}=2 \qquad \lambda_2=3$$

- dla $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}-v_1+v_2=0\\ -2v_1+2v_2=0\end{cases} \qquad v_1=v_2$$

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_1\end{bmatrix} \qquad v_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad \lambda_1=2 \rightarrow y_1(t)=e^{2t}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

rozwiązanie szczególne

- dla $\lambda_2=3$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}-2v_1+v_2=0\\ -2v_1+v_2=0\end{cases} \qquad v_2=2v_1$$

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ 2v_1\end{bmatrix} \qquad \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \rightarrow y_2(t)\,e^{3t}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

rozwiązanie szczególne

- rozwiązanie ogólne: $\bar{y}(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$

$$\bar{y}(t)=c_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

- rozwiązanie układu:

$$\begin{cases}x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\\ y(t)=c_1e^{2t}+2c_2e^{3t}\end{cases}$$

PRZYKŁAD II

Rozwiązania zespolone

$$\begin{cases}x'(t)=3x(t)+2y(t)\\ y'(t)=-5x(t)+y(t)\end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

$$w_A(\lambda)=(3-\lambda)(1-\lambda)+10=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+13=0 \qquad \Delta=16-52=-36 \qquad \sqrt{\Delta}=\{-6i,\ \underline{6i}\}$$

$$\lambda_1=2-3i \qquad \lambda_2=2+3i$$

- dla $\lambda=2+3i$

$$\begin{bmatrix}1-3i & 2\\ -5 & -1-3i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}(1-3i)v_1+2v_2=0\\ -5v_1+(-1-3i)v_2=0\end{cases} \qquad v_2=-\frac{1}{2}(1-3i)v_1$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i)v_1 \end{bmatrix} \qquad v_1 \in R \setminus \{0\}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} \qquad e^{(2+3i)t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} = e^{2t+3it}\begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} = e^{2t}e^{3it}\begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)\cdot 2 \\ e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)(-1+3i) \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_1(t) = Re\{e^{2t}\vec{v}\} = \begin{bmatrix} 2e^{t}\cos 3t \\ -e^{2t}\cos 3t - 3\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$y_2(t) = Im\{e^{2t}\vec{v}\} = \begin{bmatrix} 2e^{2t}\sin 3t \\ -e^{2t}\sin 3t \end{bmatrix}$$

Dokończenie z 20.12.2018

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = Re\left\{e^{(2+3i)t}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Im\left\{e^{(2+3i)t}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{bmatrix}\right\}$$

$$e^{(2+3i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{bmatrix} = e^{2t}\cdot e^{3it}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{bmatrix} = e^{2t}(\cos(3t) + i\sin(3t))\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} \cos 3t + i\sin 3t \\ -\frac{1}{2}(1-3i)(\cos 3t) + i\sin 3t \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos 3t + i\sin 3t \\ -\frac{1}{2}(\cos(3t) + i\sin(3t) - 3i\cos(3t) + 3\sin(3t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\frac{1}{2}(\cos 3t + 3\sin 3t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2}(\sin(3t) - 3\cos(3t)) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} e^{2t}(\cos 3t) \\ -\frac{1}{2}e^{2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin t \\ -\frac{1}{2}e^{2t}(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = C_1\cos 3t\, e^{2t} + C_2\sin 3t\, e^{2t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}C_1(\cos 3t + 3\sin t) - \frac{1}{2}e^{2t}C_2(\sin 3t - 3\cos 3t) =$$