RÓWNANIE OGÓLNE

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = g(t) \cdot h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \text{zagadnienie początkowe} \quad \Big\} \text{ zagadnienie } A$$

zmienne rozdzielne

warunek początkowy

TWIERDZENIE O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA A

Jeżeli funkcje $g(t)$ oraz $h(y)$ są ciągłe na przedziałach odpowiednio (a,b) oraz (c,d), przy czym $h(y) \neq 0$ na przedziale (c,d) oraz $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$ to zagadnienie A ma dokładnie jedno rozwiązanie

PRZYKŁAD:

$$\begin{cases} y' + y^2 \cdot ctg t = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \longrightarrow y' = -y^2 ctg t$$

$h(y) = -y^2$ → ciągła w $y \in (-\infty; +\infty)$

$g(t) = ctg t$ → ciągła w $t \in (k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in C$

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \quad y_0 = 1 \longrightarrow t_0 \in (0;\pi) \quad y_0 \in (-\infty; +\infty)$$

→ równanie jest określone na przedziale $(0;\pi) \times (-\infty;\infty)$ i ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$y' = -y^2 ctg t \longrightarrow \frac{dy}{dt} = -y^2 ctg t \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int ctg t \, dt$$

$$-\frac{1}{y} = -\ln|\sin t| - C \longrightarrow \frac{1}{y} = \ln|\sin t| + c \longrightarrow g(t) = \frac{1}{\ln|\sin t| + c}$$

uwzględniamy warunek początkowy:

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \longrightarrow y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\ln|\sin \pi| + c} = 1 \longrightarrow \frac{1}{c} = 1 \longrightarrow c = 1$$

$$y(t) = \frac{1}{\ln|\sin t| + 1}$$

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE

Równanie różniczkowe, które możemy zapisać jako

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right) \quad \Big\} \text{ równanie } B$$

nazywamy równaniem jednorodnym.

Rozwiązujemy je poprzez sprowadzenie do równania o rozdzielonych zmiennych przez podstawienie:

$$\frac{y(t)}{t} = v(t)$$

$$y(t) = t \cdot v(t)$$

$$y(t) = t \cdot u(t)$$
$$y'(t) = u(t) + t \cdot u'(t)$$
$$u(t) + t \cdot u'(t) = g(u)$$
$$t u'(t) = g(u) - u(t)$$
$$u'(t) = \frac{1}{t}\left(g(u) - u(t)\right)$$

Uwaga: jeżeli $g(u) = u$ to równanie B ma rozwiązanie w postaci:

$$y(t) = c \cdot t$$

$$u = \frac{y}{t} \rightarrow g\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{y}{t} \rightarrow y' = g\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{y}{t} \rightarrow y' = \frac{y}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln|y| = \ln|t| + c \rightarrow \ln|y| = \ln|t \cdot c| \rightarrow y = t \cdot c$$

TWIERDZENIE O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA C

$$\left.\begin{cases} y' = g\left(\frac{y}{t}\right) \\ y(t_0) = y \end{cases}\right\} \text{równanie C}$$

Jeżeli funkcja $g(u)$ jest ciągła na przedziale (a, b) i spełnia warunek $g(u) \neq u$, to zagadnienie C ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdzie:

$$a < \frac{y_0}{t_0} < b$$

PRZYKŁAD:

$$\underbrace{t^2 y' = t^2 + ty + y^2}_{\text{zakładamy, że } t \neq 0} \rightarrow \underbrace{y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$$

założenie: $\frac{y}{t} = u \rightarrow y = tu$

$y' = u + tu'$

$$u + tu' = 1 + u + u^2 \rightarrow t\frac{du}{dt} = 1 + u^2 \rightarrow \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{t}\,dt \rightarrow \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\underbrace{\operatorname{arctg}(u) = \ln|t| + c} \rightarrow u = \operatorname{tg}(\ln|t| + c) \rightarrow y = t \cdot \operatorname{tg}(\ln|t| + c)$$

funkcja $\operatorname{arctg}(u)$ jest odwracalna w $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, stąd założenie $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

kiedy $t = 0$

$0 = y \rightarrow$ przy $t = 0$ $y = 0$, dodatkowe rozwiązanie

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE

[illegible] $y'(t) + a(t)y = g(t)$ } równanie D

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE

Równanie różniczkowe w postaci $y'(t)+p(t)y=q(t)$ } równanie D
nazywamy równaniem różniczkowym liniowym.

Jeżeli $q(t)\equiv 0$, to równanie D nazywamy liniowym jednorodnym.
W przeciwnym wypadku równanie nazywamy liniowym niejednorodnym.

METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA D

① Metoda uzmienniania stałej

- najpierw rozwiązujemy równanie liniowe jednorodne, tzn:

$$y'(t)+p(t)y(t)=0 \rightarrow \frac{dy}{dt}=-p(t)y(t) \rightarrow \int\frac{dy}{y(t)}=\int -p(t)\,dt$$

$$\ln|y(t)|=-\int p(t)\,dt+\ln|c| \rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right|=-\int p(t)\,dt$$

$$\frac{y}{c}=e^{-\int p(t)dt} \rightarrow y(t)=c\cdot e^{-\int p(t)dt}$$

- niech $c=c(t)$

$$y(t)=c(t)\cdot e^{-\int p(t)dt} \quad \Big\} \text{ równanie E}$$

- liczymy pochodną funkcji $y(t)$

$$y'(t)=c'(t)\cdot e^{-\int p(t)dt}+c(t)\cdot e^{-\int p(t)dt}\cdot(-p(t))$$

- pochodną podstawiamy do równania D

$$c'(t)\cdot e^{-\int p(t)dt}\underbrace{-c(t)e^{-\int p(t)dt}\cdot p(t)}_{-}+\overbrace{p(t)\cdot c(t)e^{-\int p(t)dt}}^{+}=q(t)$$

$$c'(t)\cdot e^{-\int p(t)dt}=q(t)$$

- z tego równania wyznaczamy $c'(t)$

$$c'(t)=q(t)\cdot e^{\int p(t)dt}$$

- całkujemy

$$c(t)=\int q(t)\cdot e^{\int p(t)dt}\,dt+C_1$$

- wyliczone $c(t)$ wstawiamy do równania E

$$y(t)=\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}\,dt+C_1\right)\cdot e^{-\int p(t)dt}$$

PRZYKŁAD:

$$y'-ty=te^{t^2} \rightarrow \begin{matrix} p(t)=-t \\ q(t)=te^{t^2}\end{matrix}$$

$$y'-ty=0 \rightarrow \frac{dy}{dt}=ty \rightarrow \frac{dy}{y}=t\,dt \rightarrow \ln|y|=\frac{1}{2}t^2+\ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right|=\frac{1}{2}t^2 \rightarrow y=c\cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \rightarrow y=c(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$y'(t)=c'(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}+c(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot t$$

$$c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2}+\underline{c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot t}-\overline{t\cdot c(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}}=te^{t^2}$$

$y'(t) = c'(t)\,e^{\ldots} + c(t)\,e^{\ldots}\cdot t$

$$c'(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2} + \cancel{c(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot t} - \cancel{t\cdot c(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}} = te^{t^2}$$

$$c'(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2} = t\cdot e^{t^2} \longrightarrow c'(t) = te^{-\frac{1}{2}t^2}e^{t^2} = te^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$c(t) = \int te^{\frac{1}{2}t^2}\,dt = \underbrace{\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}t^2 = z\\ t\,dt = dz\end{matrix}\right|}_{\text{podstawienie}} = \int e^z\,dz = e^{\frac{1}{2}t^2} + C_1$$

$$y = c(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2} \longrightarrow y(t) = \left(e^{\frac{1}{2}t^2} + c_1\right)e^{\frac{1}{2}t^2}$$

2 Metoda czynnika całkującego

- czynnikiem całkującym nazywamy wyrażenie $\underbrace{e^{\int p(t)dt} > 0}_{\text{zawsze}}$

$$y' + p(t)y = Q(t) \quad \Big\}\ \text{równanie F}$$

- równanie F mnożymy przez czynnik całkujący

$$\underbrace{y'e^{\int p(t)dt} + p(t)\,y\,e^{\int p(t)dt}}\ = Q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

$$\hookrightarrow \left(ye^{\int p(t)dt}\right)' = Q(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

- obustronnie całkujemy

$$y\cdot e^{\int p(t)dt} = \int Q(t)\,e^{\int p(t)dt}\,dt + c_1$$

$$y(t) = \left(\int Q(t)\,e^{\int p(t)dt}\,dt + c_1\right)e^{-\int p(t)dt} \longleftarrow \text{i jest rozwiązanie}$$

PRZYKŁAD

$$t\,y' - y = 2t^3 \qquad \text{gdy } t = 0 \qquad -y = 0 \to y = 0$$

↳ zakładamy, że $t \neq 0$, dzielimy przez t

równanie G $\Big\{\ y' - \frac{1}{t}y = 2t^2 \longrightarrow p(t) = -\frac{1}{t} \qquad Q(t) = 2t^2$

$$\int p(t)\,dt = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t|$$

- czynnik całkujący: $e^{-\ln|t|} \longrightarrow e^{\ln\left|\frac{1}{t}\right|} \xrightarrow{t>0} e^{\ln\frac{1}{t}}$

- mnożymy równanie G przez $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 2t \longrightarrow \left(y\cdot\frac{1}{t}\right)' = 2t$$

- obustronnie całkujemy

$$y\cdot\frac{1}{t} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}t^2 + c$$

- mnożymy przez t

$$y = t^3 + ct$$

$y = t' + ct$