Opracowanie pytań na egzamin
Fizyka dla elektroników 1

Prowadzący: dr hab inż. Grzegorz Harań
(wersja okrojona, po konsultacjach)

1 Inercjalne i nieinercjalne układy odniesienia

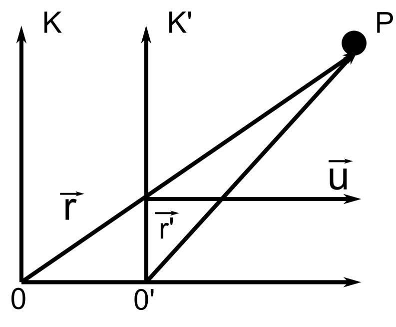
1.1 *** Inercjalny układ odniesienia i jego związek z pierwszą zasadą dynamiki Newtona

Każde ciało pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej dopóty, dopóki nie zostanie zmuszone, za pomocą wywierania odpowiednich sił, do zmiany tego stanu.

Wiadomo, że przyspieszenie (ogólnie) zależy od układu odniesienia, względem którego jest mierzone. Pierwsza zasada dynamika stwierdza, że jeżeli w pobliżu rozważanego ciała nie ma żadnych innych ciał, czyli na rozważane ciało nie działają żadne siły (gdyż każda siła musi być wywierana przez jakieś ciało), to można znaleźć taki zespół układów odniesienia, w którym ciało nie będzie miało przyspieszenia. Fakt ten wiążemy z właściwością materii nazywaną *bezwładnością (inercją).* Pierwszą zasadę Newtona nazywamy więc często *zasadą bezwładności*, a układu odniesienia, w których ona obowiązuje, *układami inercjalnymi.* Przyjmujemy jednak, że układy są nieruchome względem odległych gwiazd.

1.2 Transformacja Galileusza i jej związek z inercjalnymi układami odniesienia

Transformacja Galileusza jest przekształceniem, które łączy ze sobą wszystkie (a jest ich, co wynika z definicji, nieskończenie wiele) układy inercjalne.
Rozważmy ruch cząstki P w dwóch układach odniesienia : K i K', z których jeden (K) jest układem intercjalnym, a K' porusza się względem K ze stałą prędkością $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.
Położenie cząstki P w układzie K jest określone wektorem r, a w K' wektorem r'.



$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}t \qquad \vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}t$$

Przyjmujemy $t = 0$ - układy pokrywają się. Położenie P w K jest określone wektorem $\vec{r}$, w K' - wektorem $\vec{r'}$. W obu układach czas płynie jednakowo:

$$\begin{cases} x' = x - u_x t \\ y' = y - u_y t \\ z' = z - u_z t \\ t' = t \end{cases}$$

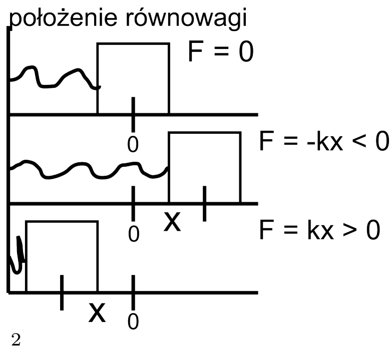
2 Praca i energia

Mam ten wykład przygotowany na dwie godziny, a chcę to zrobić w 15 minut.

(G. Harań)

2.1 Policz pracę wykonaną przez siłę sprężystości przy przesunięciu ciała z położenia x_i do położenia x_f

Pracę wykonaną przez siłę sprężystości obliczamy z prawa Hooke'a, czyli jeśli sprężyna jest ściśnięta lub rozciągnięta o małą długość x względem swojego stanu równowagi, to wywiera ona siłę $F_s = -kx$, gdzie k jest stałą materiałową – nazywaną stałą sprężystości. Przystępując do obliczeń i traktując tą siłę jako siłę jednowymiarową działającą w jednowymiarowym układzie mamy :



$$F = -kx \quad \vec{F} = (F, 0, 0) \quad d\vec{x} = (dx, 0, 0)$$

$$W = \int_{\vec{r_A}}^{\vec{r_B}} \vec{F} d\vec{r} \quad \vec{r_A} = (x_A, 0, 0) \quad \vec{r_B} = (x_B, 0, 0)$$

$$W = \int_{x_p}^{x_k} (-kx)dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_p}^{x_k} = -\frac{1}{2}k{x_k}^2 + \frac{1}{2}k{x_p}^2$$

2.2 Policzyć pracę jaką należy wykonać przyspieszając do prędkości v spoczywającą swobodną cząstkę o masie m, czyli wyprowadzić wzór na nierelatywistyczną energię kinetyczną

Praca wykonana przez siłę F, która działa na swobodną spoczywającą cząstkę o masie m i przyspiesza tą cząstkę do prędkości v, jest równa

$$W = \int_0^{x_k} F dx$$

Korzystamy teraz z zależności $F = ma = m\frac{dv}{dt}$ oraz wykorzystamy zamianę zmiennych $dx = vdt$ (która wynika z tego, że $v = \frac{dx}{dt}$). Otrzymamy więc, że

$$W = \int_0^{x_k} F dx = \int_{t_p}^{t_k} m\frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_p}^{v_k} mv dv = \frac{1}{2}m{v_k}^2 - \frac{1}{2}m{v_p}^2$$

Co jest wzorem na nierelatywistyczną energię kinetyczną.

2.3 *** Podaj trzy równoważne definicje siły potencjalnej

2.3.1 Definicja pierwsza

Jeśli istnieje jednoznaczna funkcja $U(\vec{r})$ taka, że siła $F(\vec{r})$ spełnia równość

$$F(\vec{r}) = -grad(U(\vec{r}))$$

to siła $\vec{F}$ jest siłą potencjalną, a $U(\vec{r})$ jest energią potencjalną danej siły.

2.3.2 Definicja druga

Jeśli siła $\vec{F}$ jest określona w obszarze powierzchniowo spójnym (na dowolnej krzywej C można rozpiąć powierzchnię S_C, która całkowicie zawiera się w tym obszarze), to F jest potencjalna wtedy i tylko wtedy, gdy $rot\vec{F} = 0$.

2.3.3 Definicja trzecia

Jeśli praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ po zamkniętej drodze S jest równa $\oint_S \vec{F} d\vec{s} = 0$, to siła jest potencjalna.

2.4 Napisz równanie wiążące siłę z energią potencjalną

Oznaczając $\vec{F}$ jako siłę potencjalną i U jako energię potencjalną, obliczmy pracę jaką wykona ta siła przy przesunięciu cząstki z położenia $\vec{r_a}$ do położenia $\vec{r_b}$.

$$W = \int\limits_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r_a}) - U(\vec{r_b})$$

2.5 Pokazać, że pole jednorodne, czyli pole stałej siły, jest potencjalne

W polu jednorodnym $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = c\vec{onst}$. Ponadto $rot\vec{F} = 0$, ponieważ wszystkie siły są stałe, tak więc ich wszystkie pochodne są równe zeru. Siła jest więc potencjalna. Ponadto, dowód można wyprowadzić na podstawie związku siły potencjalnej z energią potencjalną :

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\int\limits_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = -\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (F_x, F_y, F_z)(dx, dy, dz) = -\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (F_x dx, F_y dy, F_z dz) =$$

$$= -F_x \int\limits_{x_0}^{x} dx - F_y \int\limits_{y_0}^{y} dy - F_z \int\limits_{z_0}^{z} dz = -F_x(x - x_0) - F_y(y - y_0) - F_z(z - z_0)$$

Otrzymaliśmy więc $U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\vec{F}(\vec{r} - \vec{r_0})$.

2.6 Wykazać potencjalność siły centralnej

Policzmy pracę wykonaną przez siłę centralną na dowolnej drodze między położeniami $\vec{r_a}$ i $\vec{r_b}$.

$$W = \int\limits_{r_a}^{r_b} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} f(r)\vec{r} d\vec{r} = \int\limits_{r_a}^{r_b} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x, y, z)(dx, dy, dz) =$$

$$= \int\limits_{r_a}^{r_b} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(xdx + ydy + zdz) = \int\limits_{r_a}^{r_b} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \left(\frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2 + \frac{1}{2}dz^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{r_a}^{r_b} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}\int\limits_{r_a}^{r_b} f(r) dr^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{r_a}^{r_b} f(r) dr dr = \int\limits_{r_a}^{r_b} f(r) r dr$$

Co oznacza, że siła jest potencjalna, ponieważ nie zależy od drogi, a jedynie od odległości punktów $\vec{r_a}$ i $\vec{r_b}$.

2.7 Znajdź energię potencjalną jednorodnego pola grawitacyjnego

$$F = -(0, 0, mg)$$

Energia potencjalna w układzie jednowymiarowym:

$$U(\vec{r}) = -(0, 0, mg) \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) + U(\vec{r_0}) = mg(z - z_0) + U(\vec{r_0})$$

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = mg(z - z_0)$$

Otrzymaliśmy energię potencjalną jednorodnego pola grawitacyjnego w pobliżu Ziemi i w małej przestrzeni.

2.8 Znajdź energię potencjalną siły sprężystości

Wiedząc, że siła sprzężystości wyraża się wzorem $F = -kx$, i że jest ona siłą potencjalną, policzmy energię potencjalną.

$$U(x) - U(x_0) = -\int\limits_{x_0}^{x} (-kx) dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k{x_0}^2$$

2.9 Pokazać, że siła grawitacji jest siłą potencjalną i znaleźć grawitacyjną energię potencjalną układu dwóch mas m_1, m_2 znajdujących się w odległości r

Siła grawitacji jest siła centralną, a <u>każda</u> siła centralna jest siłą potencjalną.

$$W = \int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} f(r)\vec{r}d\vec{r} = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{dx^2}{2}+\frac{dy^2}{2}+\frac{dz^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} f(r)dr^2 = \frac{1}{2}\int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} f(r)2\vec{r}d\vec{r} = \int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} f(r)\vec{r}d\vec{r}$$

Ponieważ praca nie zależy od drogi, a jedynie od położeń obu punktów, siła centralna jest siłą potencjalną.

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r} -\frac{Gm_1m_2}{r^3} r dr = Gm_1m_2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = -Gm_1m_2 \left.\frac{1}{r}\right|_{r_0}^{r} = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Dalej:

$$U(r) = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + U(r_0)$$

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \underbrace{U(r_0) + \frac{Gm_1m_2}{r_0}}_{const}$$

Przyjmujemy, że $r_0 \to \infty$ oraz $U(r_0) = 0$, wtedy:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

2.10 Zasada zachowania energii mechanicznej

Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że całkowita energia mechaniczna równa jest sumie energii kinetycznej i energii potencjalnej. Jeśli obliczymy pracę, jaką wykona siła potencjalna $\vec{F}$ przy przesunięciu cząstki z położenia $\vec{r_A}$ do położenia $\vec{r_B}$, czyli $W = \int_{\vec{r_A}}^{\vec{r_B}} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r_A}) - U(\vec{r_B})$, to z twierdzenia o pracy i energii mamy, że

$$W = \frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{m{v_A}^2}{2} = K_B - K_A$$

Z czego wynika, że $U(\vec{r_A}) - U(\vec{r_B}) = K_B - K_A$, czyli że $K_A + U(\vec{r_A}) = K_B + U(\vec{r_B})$. Na podstawie tego wnioskujemy, że $K + U = const$, a także, że siły potencjalne nie zmieniają energii mechanicznej cząstki.

2.11 Planeta o masie m krąży wokół gwiazdy o masie M ($M >> m$) po orbicie kołowej o promieniu r. Znaleźć całkowitą energię mechaniczną tego układu mas

Policzmy energię układu Ziemia–Słońce w układzie odniesienia związanym ze Słońcem (środkiem masy układu Ziemia – Słońce)

$$E = U + K \qquad U = \frac{-GmM}{r} \quad K = \frac{mv^2}{2}$$

$$E = \frac{-GmM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Wiedząc, że siła grawitacji jest siłą dośrodkową, otrzymujemy

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \quad mv^2 = \frac{GmM}{r}$$

Tak więc

$$E = -\frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{2r} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{GmM}{r} < 0$$

3 Zasada zachowania pędu

3.1 Pokazać, że pęd izolowanego układu dwóch cząstek, które oddziałują ze sobą siłami wewnętrznymi jest zachowany

Jeśli dwie cząstki oddziałują na siebie siłami wewnętrznymi, to znaczy, że $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$, natomiast pęd przy masie m_1 równy jest $\vec{p_1} = m_1\vec{v_1}$, a przy masie m_2 – $\vec{p_2} = m_2\vec{v_2}$. Całkowity pęd takiego układu cząstek wynosi więc $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$. Policzmy zmianę całkowitego pędu w czasie :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

Z drugiej zasady dynamiki wiemy zaś, że

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{F_{12}} \quad \frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{F_{21}}$$

Tak więc

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{21}} = \vec{F_{12}} - \vec{F_{12}} = 0$$

Z tego wynika, że $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, tak więc $\vec{p} = \vec{const}$.

3.2 Dwie cząstki o masach m_1 i m_2 i prędkościach v_1 i v_2 zderzają się doskonale niesprężyście. Znaleźć prędkość cząstek po zderzeniu

Zderzenie niesprężyste oznacza, że cząstki po zderzeniu poruszają się razem po jednej prostej. Z zasady zachowania pędu, dla ruchu jednowymiarowego, mamy:

$$p_p = m_1v_1 + m_2v_2 \quad = \quad p_k = (m_1 + m_2)v_k$$

$$v_k = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

W przypadku ruchu wielowymiarowego, wektor kierunkowy prędkości v_k jest wypadkowym wektorem prędkości v_1 i v_2.

3.3 Dwie cząstki o masach m_1, m_2 i prędkościach v_1, v_2 zderzają się centralnie doskonale sprężyście. Znaleźć prędkości cząstek po zderzeniu, a następnie rozważyć przypadek $m_1 = m_2$

Zderzenie centralne oznacza, że cząstki przed i po zderzeniu poruszają się po jednej prostej. Doskonała sprężystość odbicia gwarantuje, że energia kinetyczna obu cząstek przed zderzeniem jest równa energii kinetycznej tychże cząstek po zderzeniu.
Korzystając z **zasady zachowania energii** oraz **zasady zachowania pędu** ostatecznie otrzymamy wzory:

$$V_{I_k} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_{I_p} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_{II_p}$$
$$V_{II_k} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_{I_p} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_{II_p}$$

Jeśli rozważymy przypadek $m_1 = m_2$, to

$$V_{I_k} = V_{II_p} \quad V_{II_k} = V_{I_p}$$

co oznacza, że **masy wymieniają się prędkościami**.

4 Dynamika ruchu obrotowego

4.1 *** Na cząstkę znajdującą się w położeniu określonym wektorem r działa siła F. Znaleźć związek pomiędzy momentem pędu cząstki i momentem siły F. Kiedy moment pędu cząstki jest stały?

Moment pędu cząstki o masie m poruszającej się z prędkością $\vec{v}$ względem punktu 0 w płaszczyźnie XY wynosi

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$\vec{L}$ jest prostopadły do płaszczyzny, tak więc skoro $\vec{r}$ jest równoległy do $\vec{p}$, to $\vec{L} = 0$. Jeśli policzymy zmianę $\vec{L}$ w czasie:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \frac{\vec{r} \times d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{const} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Moment pędu jest stały, jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na cząstkę jest równy zeru.

4.2 Otrzymać zależność między momentem pędu i prędkością kątową obracającej się wokół stałej osi bryły sztywnej o momencie bezwładności I

$$v = r\omega \quad \text{oraz} \quad \sum_i r_i^2 m_i = I$$

Wiedząc, że całkowity moment pędu całej bryły wynosi

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L_i} = \sum_i (0, 0, L_i) = \left(0, 0, \sum_i L_i\right)$$

natomiast

$$\sum_i L_i = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i r_i^2 m_i\right) \omega = I\omega$$

gdzie ω jest prędkością kątową bryły.

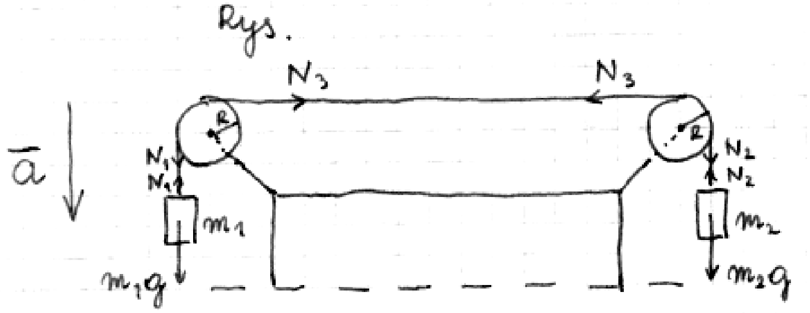
4.3 Otrzymać zależność między momentem siły i przyspieszeniem kątowym obracającej się wokół stałej osi bryły sztywnej o momencie bezwładności I

Wiedząc, że energia kinetyczna obracającej się bryły wynosi $\frac{1}{2}I\omega^2$ i korzystając z zależności $\vec{L} = I\vec{\omega}$ oraz $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ otrzymujemy :

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} I\vec{\omega} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

gdzie $\vec{\alpha}$ to przyspieszenie kątowe bryły. Należy pamiętać, że moment bewładności I jest niezależny od czasu i dlatego wyciągamy go przed pochodną.

4.4 Z dwóch stron układu dwóch identycznych bloczków o momencie bezwładności I i promieniu R zawieszono na bardzo lekkiej lince dwie różne masy m_1, m_2. Znajdź przyspieszenie mas i siły naprężenia linki



$$m_1 a = m_1 g - N_1 \qquad m_2 a = N_2 - m_2 g$$

Moment sił τ działających na blok o momencie bezwładności I jest równy

$$\tau = N_1 \cdot R - N_3 \cdot R = (N_1 - N_3)R = I \cdot \alpha = (N_3 - N_2)R$$

$$a = \alpha \cdot R$$

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g + N_2 - N_1$$

$$2I\frac{a}{R^2} = N_1 - N_2$$

$$\left(m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}\right) a = (m_1 - m_2)g$$

Ostatecznie otrzymujemy przyspieszenie:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}$$

Znając natomiast przyspieszenie możemy wyliczyć naprężenie linki we wszystkich punktach.

$$N_1 = m_1(g - a)$$

$$N_2 = m_2(g + a)$$

$$N_3 = \frac{I \cdot \alpha}{R} + N_2 = \frac{Ia}{R^2} + N_2$$

4.5 Policz energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się z szybkością kątową ω wokół stałej osi

$$k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \left(\frac{1}{2} \sum_i r_i^2 m_i\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

5 Ruch drgający

5.1 Rozwiązać równanie ruchu oscylatora harmonicznego prostego z warunkami początkowymi: a) $x(t = 0) = x_0$ i $v(t = 0) = 0$, b) $x(t = 0) = 0$ i $v(t = 0) = v_0$. Jaka jest częstość i amplituda tych drgań?

5.1.1 $x(t = 0) = x_0$, $v(t = 0) = 0$

$$x(t = t_0) = A_1 e^{i\omega_0 t_0} + A_2 e^{-i\omega_0 t_0}$$

$$A_1' = A_1 e^{i\omega_0 t_0},\ A_2' = A_2 e^{-i\omega_0 t_0}$$

$$A_1' + A_2' = x_0$$

$$v(t = t_0) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega 0 t}\right)_{|t=t_0} = i\omega_0(A_1' - A_2')$$

$$i\omega_0(A_1' - A_2') = 0$$

$$\begin{cases} A_1' - A_2' = 0 \\ A_1' + A_2' = x_0 \end{cases} \Rightarrow A_1' = A_2' = \frac{x_0}{2}$$

Rozwiązanie z warunkami początkowymi:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = \left(A_1' e^{-i\omega_0 t_0}\right) e^{i\omega_0 t} + \left(A_2' e^{i\omega_0 t_0}\right) e^{-i\omega_0 t} = \frac{x_0}{2}\left(e^{i\omega_0(t-t_0)} e^{-i\omega_0(t-t_0)}\right)$$

$$x(t) = x_0 \cos\left[\omega_0(t - t_0)\right] = x_0 \cos(w_0 t + \varphi),\ \varphi = -\omega_0 t_0$$

Jeśli przyjmiemy $t_0 = 0$, otrzymujemy $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Amplituda $A = x_0$, zatem rozważany warunek początkowy jest w maksymalnym wychyleniu. Częstość drgań to $\omega = \omega_0 = 2\pi f$.

5.1.2 $x(t=0)=0$ **,** $v(t=0)=v_0$

$$x(t=t_0)=A_1'+A_2'=0$$

$$v(t=t_0)=\frac{dx}{dt}_{|t=t_0}=i\omega_0\left(A_1'-A_2'\right)=v_0$$

$$\begin{cases} A_1'+A_2'=0 \\ A_1'-A_2'=\frac{v_0}{i\omega_0} \end{cases} \Rightarrow A_1'=\frac{v_0}{2i\omega_0},\ A_2'=-\frac{v_0}{2i\omega_0}$$

Rozwiązanie w warunkach początkowych:

$$x(t)=\left(A_1'e^{-i\omega_0 t_0}\right)e^{i\omega_0 t}+\left(A_2'e^{i\omega_0 t_0}\right)e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\left(\frac{e^{i\omega_0(t-t_0)}-e^{-i\omega_0(t-t_0)}}{2i}\right)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\left[\omega_0(t-t_0)\right]$$

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t+\varphi\right),\ \varphi=-\omega_0 t_0$$

Dla $t_0=0$ mamy

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega t$$

Amplituda $A=\frac{v_0}{\omega_0}$, częstość jest niezmienna i wynosi nadal $\omega=\omega_0=2\pi f$.

5.2 Policzyć częstość drgań wahadła fizycznego o masie m i momencie bezwładności I zawieszonego w odległości d od środka masy

Wychodzimy z równania

$$\vec{\tau}=\vec{d}\times m\vec{g}=dmg\sin\theta(-\widehat{n})$$

gdzie $\widehat{n}$ to wektor jednostkowy prostopadły do płaszczyzny ruchu. Następnie stosując drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego, otrzymujemy, że

$$I\vec{\alpha}=\vec{\tau}\quad \vec{\alpha}=\frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}\quad \vec{\alpha}=\frac{d^2\theta}{dt^2}(0,0,1)$$

Korzystając teraz z otrzymanej na początku zadania zależności, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}(0,0,1)=-mgd\sin\theta(0,0,1)$$

Dla małych wychyleń przyjmujemy $\sin\theta=\theta$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+mdg=0$$

Po rozwiązaniu i podstawieniu $\theta=\theta_0\cos\omega_0 t$ otrzymujemy wzór na częstość drgań wahadła fizycznego:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

5.3 Znaleźć całkowitą energię drgań oscylatora harmonicznego prostego

Wychodząc z ogólnego wzoru na energię

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(mv^2+kx^2)=\frac{mv^2+kx^2}{2}$$

i na prędkość

$$v=\frac{dx}{dt}=-x_0\omega_0\sin\omega_0 t$$

łączymy te dwa wzory, pamiętając, że $w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$E=\frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t+\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega_0 t=\frac{1}{2}kx_0^2\sin^2\omega_0 t+\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega_0 t=\frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2\omega_0 t+\cos^2\omega_0 t)=\frac{1}{2}kx_0^2$$

5.4 *** Napisać równanie ruchu oscylatora tłumionego. Podać przybliżony wzór rozwiązania dla bardzo słabego tłumienia drgań i przedstawić to rozwiązanie na rysunku

Równanie ruchu oscylatora tłumionego wyrażane jest równaniem różniczkowym

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

którego rozwiązanie ogólne wygląda następująco:

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(A_1e^{-i\omega t} + A_2e^{i\omega t}\right)$$

Dla warunków początkowych $x(t=0) = x_0$ oraz $v(t=0) = 0$, otrzymujemy:

$$x(t=0) = A_1 + A_2 = x_0$$

$$v(t=0) = -\frac{b}{2m}(A_1 + A_2) + (-i\omega A_1 + i\omega A_2) = 0$$

$$A_1 = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{ib}{2m\omega}\right) \quad A_2 = \overline{A_1} = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{ib}{2m\omega}\right)$$

$$x(t) = x_0e^{\frac{-b}{2m}t}\left(\cos\omega t - \frac{b}{2m\omega}\sin\omega t\right)$$

Z tym że dla małego tłumienia $\frac{b}{2m} << w_0$

$$\frac{b}{2m} << \omega = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \Rightarrow \frac{b}{2m\omega} << 1$$

przybliżone rozwiązanie to:

$$x(t) = x_0e^{-\frac{bt}{2m}}\cos\omega t$$

5.5 Rozwiązać równanie oscylatora harmonicznego prostego z siłą wymuszającą $F = \alpha\cos(\omega t)$ i warunkami początkowymi $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = 0$. Kiedy zachodzi rezonans? Znaleźć zależność amplitudy drgań rezonansowych od czasu

Przyjmujemy $\rho = \frac{b}{2m} = 0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \alpha\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \alpha\cos\omega t$$

Rozwiązanie równania jednorodnego: $x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$
Szukamy rozwiązania szczególnego postaci $x = h\cos\omega t$. Wstawiamy do równania:

$$\frac{d^2}{dt^2}h\cos\omega t + \omega_0^2h\cos\omega t = \alpha\cos\omega t$$

$$-h\omega^2\cos\omega t - \omega^2h\cos\omega t = \alpha\cos\omega t$$

$$h = \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Zatem rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

Po podstawieniu warunków $x(t=0) = x_0$ oraz $v(t=0) = 0$ otrzymamy (z granicy i różniczki, która tam wyniknie):

$$A_1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} = x_0$$

$$A_2\omega_0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$x = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t.$$

Jeśli przyjmiemy, że $\omega \to \omega_0$, to otrzymamy:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\alpha t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Rezonans zachodzi wtedy, gdy częstość siły wymuszającej jest równa częstości drgań własnych oscylatora harmonicznego. Amplituda drgań rośnie wtedy z czasem do nieskończoności:
Dla niezerowego ρ mamy wówczas:

$$h_{rez} = 2\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}$$

6 Szczególna teoria względności

6.1 Podstawy szczególnej teorii względności – postulaty Einsteina. Omówić charakterystyczne zjawiska

Postulaty Einsteina mówią, że :

1. Wszystkie prawa fizyki są takie same we wszystkich intercjalnych układach odniesienia.
2. Prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich kierunkach i w dowolnym obszarze inercjalnego układu odniesienia i jednakowa dla wszystkich układów intercjalnych.

Natomiast charakterystyczne zjawiska to :

6.1.1 Dylatacja czasu

Niech eksperyment w układzie k przebiega w taki sposób, że obserwator widzi ten eksperyment w jednym miejscu, tzn. nie zmienia się położenie np. cząstki w trakcie jej życia. W takim razie $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Czas trwania tego eksperymentu w tym układzie nazywamy czasem własnym eksperymentu $\Delta t = \tau$. Czas trwania eksperymentu w układzie k', w którym nie zachodzi on w jednym punkcie, bo $\Delta x' = -v\Delta t$, to

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \gamma\tau \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

na podstawie czego wynika, że $\Delta t' > \Delta t$. Czas własny eksperymentu jest najkrótszym czasem trwania tego eksperymentu.

6.1.2 Skrócenie długości

Oznaczmy $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ oraz $\Delta t' = \gamma\left(\Delta x - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$, gdzie Δx to długość własna przedmiotu, a $\Delta x'$ oraz $\Delta t'$ to wielkości mierzone przez obserwatora poruszającego się względem obiektu. Ponieważ obserwator porusza się względem obiektu, poprawne wyznaczenie długości tego obiektu wymaga jednoczesnego pomiaru położeń obu końców mierzonego przedmiotu tak, aby $\Delta t'$ była równa 0.

$$0 = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{v\Delta x}{c^2}$$

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\Delta x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma l_0\frac{1}{\gamma^2} = \frac{l_0}{\gamma}$$

6.2 W wagonie o wysokości z_0 przeprowadzono eksperyment polegający na wysłaniu promienia światła z podłogi, odbiciu go przez zwierciadło na suficie i powrocie do źródła na podłodze. Wyznaczyć czas trwania tego eksperymentu zmierzony w wagonie oraz czas, który określi obserwator widzący poruszający się prostoliniowo wagon z prędkością v

Czas trwania tego eksperymentu, mierzony w wagonie, będzie równy $\Delta t = \frac{2z_0}{c} = \tau$. Czas określony przez obserwatora widzącego poruszający się wagon będzie jednak wynosił :

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + z_0^2$$

$$\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4z_0^2$$

$$\Delta t = \frac{2z_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2z_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2z_0'}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t'\gamma = \gamma\tau$$

6.3 Porównując długość drogi zmierzoną w układzie związanym z mezonem m_i i układzie ziemskim, w którym mezon porusza się z prędkością v otrzymać relację relatywistycznego skrócenia długości

Czas życia mezonu m_i to τ, prędkość zaś oznaczymy przez v. Droga przebyta przez ten mezon w układzie związanym z mezonem jest równa $l = v\tau$. W układzie Ziemi, pomiar długości odcinka jest pomiarem długości własnej, tzn. długości zmierzonej w układzie, w którym ten odcinek spoczywa. Czas życia mionu w tym układzie (z transformacji Lorentza) jest równy $\tau' = \gamma\tau$. Długość tego odcinka to $l_0 = v\tau' = v\gamma\tau$. Ostatecznie otrzymujemy $l_0 = l\gamma$, a ponieważ $\gamma > 1$, to $l < l_0$, co nazywamy **relatywistycznym skróceniem długości**.

6.4 Korzystając z transformacji Lorentza wyprowadzić wzory dylatacji czasu i relatywistycznego skrócenia długości

Proszę nie uczyć się transformacji Lorentza - będzie podana na tablicy!

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right) \end{cases}$$

6.4.1 Relatywistyczne skrócenie długości

Ponieważ istotna jest dla nas dwuwymiarowa czasoprzestrzeń, a przez długość rozumiemy odległość dwóch punktów w tej samej chwili t', wyznaczamy t i punkty x_1 oraz x_2:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{vx}{c^2}$$

$$x' = \gamma\left(x - v\frac{t'}{\gamma} - v\frac{vx}{c^2}\right) = \gamma x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - vt'$$

Zobaczmy, że $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{y^2}$, zatem mamy:

$$x' = \gamma\frac{x}{\gamma^2} - vt' = \frac{x}{\gamma} - vt'$$

Obliczymy długość L' przy czym zakładamy, że ${t'}_1 = {t'}_2$:

$$L = x_2 - x_1$$

$$L' = {x'}_2 - {x'}_1 = \frac{x_2}{\gamma} - v{t'}_2 - \frac{x_1}{\gamma} + v{t'}_1 = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$$

6.4.2 Dylatacja czasu

Czas własny układu mierzy się poprzez zdarzenia zachodzące w tym samym punkcie przestrzeni x. Korzystając z transformaty Lorentza mamy:

$${t'}_2 - {t'}_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left(t_2 - t_1\right)$$

Co daje nam:

$$\Delta t' = \gamma\Delta t$$

6.5 W inercjalnym układzie odniesienia K prędkość cząstki wynosi $u = (u_x, u_y, u_z)$. Jaka jest prędkość tej samej cząstki zmierzona przez obserwatora, który porusza się w K zgodnie z kierunkiem osi X z prędkością v? (Wzór na relatywistyczne składanie prędkości)

Prędkość cząstki wyznaczona w układzie K to $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, a prędkość zmierzona w układzie K' to $\vec{u} = (u'_x, u'_y, u'_z)$, gdzie dla wszystkich tych wielkości definiujemy :

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{vdx}{c^2})} = \frac{dt}{dt} \cdot \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

6.6 Wykaż stałość prędkości światła w inercjalnych układach odniesienia

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) \quad c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = c^2$$

$$\vec{c^{‘}} = (c_x‘, c_y‘, c_z‘) \quad c_x^2‘ + c_y^2‘ + c_z^2‘ = c^2‘$$

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

Zakładając, że sam układ porusza się z prędkością światła :

$$\lim_{v \to c} \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \lim_{v \to c} c\left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right) = c \cdot \lim_{v \to c} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

7 Fizyka kwantowa

7.1 Dlaczego foton jest cząstką bezmasową? Jak pęd fotonu zależy od jego energii, a jak jest związany z długością stowarzyszonej z nim fali elektromagnetycznej?

Jeśli zdefiniujemy cząstkę bezmasową, czyli taką, której $m = 0$ i $E = |\vec{p}|c$ i skorzystamy ze wzoru relatywistycznego na energię :

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \overset{m \to 0}{\rightarrow} \frac{0}{0}$$

Z którego wynika, że $v \to c$, a więc i $v = c$. Tak więc cząstki o masie $m = 0$ poruszają się z prędkością światła. Cząstka taka nazywana jest fotonem i jej energię można wyrazić w następujący sposób :

$$E = h\nu$$

7.2 Zjawisko Comptona – na czym polega, jaki jest wynik pomiaru? Napisz równania opisujące rozpraszanie fotonu

Zjawisko Comptona to rozproszenie promieniowania rentgenowskiego i promieniowania gamma, w wyniku którego następuje zwiększenie długości fali promieniowania, które zwane jest przesunięciem Comptona.

Wyrażenie Comptona (zwiększenie długości fali)

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Energia rozproszonego fotonu:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \quad \text{, gdzie } E = \frac{hc}{\lambda}$$

7.3 *** Jaka jest długość fali materii (de Broglie'a) cząstki o pędzie p? Podaj przykład zjawiska, w którym elektron ma własności falowe

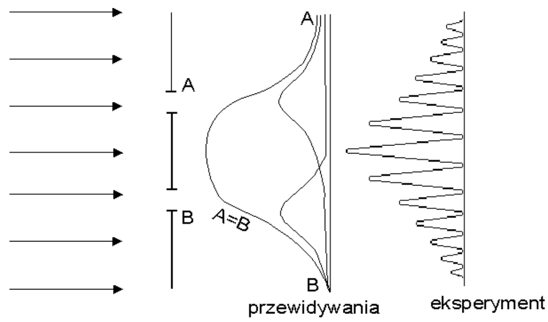
De Broigle w 1924 roku założył, że długość przewidzianych fal materii jest określona tym samym związkiem, który stosuje się do światła, mianowicie związkiem danym przez równanie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

który, w równaniu falowym, wiąże długość fali świetlnej z pędem fotonów. De Broglie przewidział, że długość fali materii jest dana tym samym równaniem, z tym tylko wyjątkiem, że teraz p oznacza pęd cząstki materialnej.

7.3.1 Doświadczenie Thomsona

Thomson wykazał, że wiązka elektronów przechodząc przez cienkie folie polikrystaliczne (np. złota, aluminium) ulega dyfrakcji, a następnie w sposób niezależny szczegółowo potwierdził relację de Broigle'a. Thomson w swoim doświadczeniu użył elektronów o dużej energii (są bardziej przenikliwe), tak że wiele setek płaszczyzn atomowych brało udział w tworzeniu fali ugiętej. Otrzymał pierścienie dyfrakcyjne podobne do tych, które uzyskiwane są przy dyfrakcji promieniowania **X**.



Pro publico bono – XAVeRY & tiraeth 2009
Ostatnia korekta: 18.06.2009, 14:34