Analiza Matematyczna 2.1, 2.1 A, 2.2 A, 2.2 B (MAT 1421 - 1424, 1426) 2017/2018

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 15 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 15. Przy czym ćwiczenia 7. oraz 15. zawierają przykładowe zestawy zadań odpowiednio na pierwsze i drugie kolokwium. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką. Na końcu listy umieszczono przykładowe zestawy zadań z egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także wykaz książek, z których są one zaczerpnięte.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [5].

Ćwiczenia pierwsze

---

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left(2^x+1\right)\,dx}{3^x+1}$; (e) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+2}$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\displaystyle\int_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sin x}$; (d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2^x\,dx}{\sqrt{2^x-8}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$.

6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x\,dx}{x^3}$; (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$; (d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}$; (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(e^x-1\right)\,dx}{\sqrt{x^3}}$; (d*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; (e*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$.

8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x+5|}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Ćwiczenia drugie

9. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

10. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

11. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

12. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n^2)}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

13. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

14. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

15. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{3^n}=0$; (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

16. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

Ćwiczenia trzecie

17. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

18. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+1)^{2n}}{n+3}$.

19. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\frac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\frac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

20. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć pochodne:

(a) $f^{(50)}(0),\ f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(2015)}(0),\ f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0),\ f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0),\ f(x)=x\sin^2\frac{x}{2}$.

21. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

22. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

23. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Ćwiczenia czwarte

---

24. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\ln(y-\sin x)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{\frac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y)=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2-y}}$; (d) $f(x,y)=\ln\frac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$;

(e) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z)=\arccos\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$.

25. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y)=1-2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y)=\sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y)=x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y)=\cos x$; (e) $f(x,y)=1-y^2$; (f*) $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}$.

*** 26.** Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cos\frac{1}{x^4+y^4}$.

27. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

28. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x,y)=\frac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y)=e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z)=x^2+\frac{xz}{y}+yz^3$;

(g) $g(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z)=\cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

Ćwiczenia piąte

*** 29.** Sprawdzić, że funkcja f spełnia równania:

(a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $\quad xf_x+yf_y=2$; $\quad$ (b) $f(x,y)=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $\quad xf_x+yf_y=\dfrac{f}{2}$.

30. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funcji f i g:

(a) $f(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$; $\quad$ (b) $f(x,y)=ye^{xy}$; $\quad$ (c) $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y)=y\ln\dfrac{x}{y}$; $\quad$ (e) $g(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; $\quad$ (f) $g(x,y,z)=\ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

31. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx}+f_{yy}=0$ (równanie Laplace'a):

(a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; $\quad$ (b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$; $\quad$ (c) $f(x,y)=\cos x\cosh y$.

32. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z=x^2\sqrt{y+1}$, $\quad(1,3,z_0)$; $\quad$ (b) $z=e^{x+2y}$, $\quad(2,-1,z_0)$; $\quad$ (c) $z=\dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\quad\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},z_0\right)$;

(d) $z=(2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; $\quad$ (e) $z=e^{x+y}-e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

33. (a) Na wykresie funkcji $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z=x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t\in\mathbb{R}$.

Ćwiczenia szóste

34. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością ±1 mm. Otrzymano $h=350$ mm oraz $r=145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a=3$ m, $b=4$ m, $c=12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

*** 35.** Sprawdzić, że podane funkcje spełniają wskazane równania:

(a) $z=f\left(x^2+y^2\right)$, $\quad yz_x-xz_y=0$; $\quad$ (b) $z=xf\left(\sin(x-y)\right)$, $\quad z_x+z_y=\dfrac{z}{x}$;

(c) $z=x^nf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad xz_x+yz_y=nz$ $(n\in\mathbb{N})$; $\quad$ (d*) $z=\dfrac{x}{y}g(x)+h\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad xyz_{xy}+y^2z_{yy}+xz_x+2yz_y=0$.

36. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\;(x_0,y_0)=(0,0)$, $\;\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{3}/2,\,1/2\right)$;

(b) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $\;(x_0,y_0)=(1,0)$, $\;\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{2}/2,\,\sqrt{2}/2\right)$.

37. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\;(x_0,y_0)=(-3,4)$, $\;\boldsymbol{v}=(12/13,\,5/13)$;

(b) $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2}+y$, $\;(x_0,y_0)=(1,1)$, $\;\boldsymbol{v}=(3/5,\,-4/5)$;

(c) $g(x,y,z)=e^{x^2y-z}$, $\;(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,-1)$, $\;\boldsymbol{v}=(2/3,-2/3,1/3)$.

38. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=y-x^2+2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,\,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y)=\sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

39. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=x^3+xy^2+2$, $(1,-2)$; (b) $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$, $(e,1)$; (c) $f(x,y)=(1+xy)^y$, $(0,0)$;

(d) $g(x,y,z)=x\sqrt{y}-e^z\ln y$, $(1,0,0)$; (e) $g(x,y,z)=\dfrac{x}{y+\sin z}$, $(0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z)=\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{z}}}$, $(1,1,1)$.

Ćwiczenia siódme (I kolokwium - przykładowe zestawy)

Zestaw A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{3^{-x}}\,dx$.
2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n+1}{n3^n+1}$.
3. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2}$.
4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji$f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{1}{2}+x^2-y\right)$ w punkcie jego przecięcia z osią Oz.

Zestaw B

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{x^3+1}$.
2. Uzasadnić zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n}$.
3. Funkcję $f(x)=\dfrac{x^2}{1+4x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Podać wraz z uzasadnieniem przedział zbieżności.
4. Narysować dziedzinę funkcji $f(x,y)=\sqrt{y-x}\cdot\ln\left(9-x^2-y^2\right)$ i obliczyć jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Zestaw C

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej drugiego rodzaju $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$.
2. Korzystając z kryterium całkowego uzasadnić zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} 2n}{4n^2+1}$.
3. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}}$ w szereg Maclaurina, a następnie obliczyć $f^{(101)}(0)$.
4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=6$ w punkcie $(0,2,-1)$.

Zestaw D

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

2. Funkcję $f(x) = \frac{1}{4x^2+1}$ oraz jej pochodną $f'(x)$ rozwinąć w szeregi Maclaurina i podać promienie ich zbieżności. Następnie obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{4^n}$.

3. Na powierzchni $z = y\ln\left(1+x+y^2\right)$ znaleźć taki punkt, aby płaszczyzna styczna do tej powierzchni w tym punkcie była równoległa do płaszczyzny $z - y\ln 2 = 0$.

4. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$ w kierunku wersora $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$ przyjmuje wartość 0.

Ćwiczenia ósme

---

40. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \frac{1}{x} + e^y$; (c) $f(x,y) = xy^2(12-x-y)$ $(x,y>0)$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (e) $f(x,y) = e^3 + y^3 - 3xy$; (f) $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ $(x,y>0)$;

(g) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2$; (h) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

41. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $3x+2y=6$; (b) $f(x,y) = x^2+y^2-8x+10$, $x-y^2+1=0$;

(c) $f(x,y) = x^2y + \ln x$, $8x+3y=0$; (d) $f(x,y) = 2x+3y$, $x^2+y^2=1$.

42. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{x-y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-(x^2+y^2)}$;

(d) $f(x,y) = x^2-y^2$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4+y^4$, $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 9\right\}$;

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}$, $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$.

43. (a) W trójkącie o wierzchołkach $A=(-1,5)$, $B=(1,4)$, $C=(2,-3)$ znaleźć punkt $M=(x_0,y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

(b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

(c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x+y-1 = 0, \\ z+1 = 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x-y+3 = 0, \\ z-2 = 0. \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(f) Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi

$$K(x,y) = x^2 - xy + y^2 \ [\text{zł}].$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

(g) Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P=(4,1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia dziewiąte

44. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\iint\limits_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right)\, dxdy,\ R = [0,1] \times [0,1];$ (b) $\iint\limits_R \frac{x\, dxdy}{y^2},\ R = [1,2] \times [2,4];$

(c) $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3},\ R = [0,2] \times [0,1];$ (d) $\iint\limits_R (x \sin(xy))\, dxdy,\ R = [0,1] \times [\pi, 2\pi];$

(e) $\iint\limits_R e^{2x-y}\, dxdy,\ R = [0,1] \times [-1,0];$ (f) $\iint\limits_R \frac{(x+y)\, dxdy}{e^x},\ R = [0,1] \times [0,1].$

45. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = x^2,\ \ y = x + 2;$ (b) $x^2 + y^2 = 4,\ \ y = 2x - x^2,\ \ x = 0\ (x, y \geqslant 0);$

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0;$ (d) $x^2 - y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 3\ (x < 0).$

46. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy;$ (b) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{2x} x^2\sqrt{y - x}\, dy;$ (c) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right)\, dy;$ (d) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2 + 16}\, dx.$

Narysować obszary całkowania.

47. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-1}^{|x|} f(x,y)\, dy;$ (b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)\, dy;$ (c) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dy;$

(d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\, dx;$ (e) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\, dy;$ (f) $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)\, dy.$

48. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\, dxdy,\ \ D:\ y = x,\ y = 2 - x^2;$ (b) $\iint\limits_D x^2 y\, dxdy,\ \ D:\ y = -2,\ y = \frac{1}{x},\ y = -\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\, dxdy,\ \ D:\ y = \sqrt{x},\ x = 0,\ y = 1;$ (d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right)\, dxdy,\ \ D:\ y = x + 3,\ y = x^2 + 3x + 3;$

(e) $\iint\limits_D x^2 e^{xy}\, dxdy,\ \ D:\ y = x,\ y = 1,\ x = 0;$ (f) $\iint\limits_D \frac{x\, dxdy}{x^2 + y^2},\ \ D:\ x = 2,\ y = x,\ y = x/2;$

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\, dxdy,\ \ D:\ y = 0,\ y = 2x,\ x = \sqrt{\ln 3};$ (h) $\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\, dxdy,\ \ D:\ y = 0,\ y = \pi,\ x = -1,\ x = \sin y.$

* **49.** Obliczyć całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D \min(x,y)\, dxdy,\ D = [0,1] \times [0,2];$ (b) $\iint\limits_D \lfloor x + y \rfloor\, dxdy,\ D = [0,2] \times [0,2];$

(c) $\iint\limits_D |x - y|\, dxdy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 3 - 2x\right\};$

(d) $\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right)\, dxdy,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$

Uwaga. Symbol $\min(a,b)$ oznacza mniejszą spośród liczb a, b, a symbol $\lfloor u \rfloor$ – część całkowitą liczby u.

50. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

(a) $f(x,y) = \sin x \cos y,\ D = [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; (b) $f(x,y) = 2x - y,\ D:\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x \leqslant \sin y$.

Ćwiczenia dziesiąte

---

51. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\, dxdy,\ D:\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$; (b) $\iint\limits_D xy^2\, dxdy,\ D:\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$;

(c) $\iint\limits_D y^2 e^{x^2+y^2}\, dxdy,\ D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1$; (d) $\iint\limits_D x^2\, dxdy,\ D:\ x^2+y^2 \leqslant 2y$;

(e) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy,\ D:\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x$; (f) $\iint\limits_D y\, dxy,\ D:\ x^2+y^2 \leqslant 2x\ (y \leqslant 0)$;

(g) $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right) dxdy,\ D:\ x^2+y^2 \leqslant \pi^2$; (h) $\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right) dxdy,\ D:\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$.

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

52. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2 = 4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y \geqslant 0)$; (b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0$;

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5$; (d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|$.

53. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z = \sqrt{25-(x^2+y^2)},\ z = x^2+y^2-13$; (b) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=1\ (z \geqslant 1)$;
(c) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$; (d) $z=5-x^2-y^2,\ z=1,\ z=4$;
(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=xy,\ z=0$; (f*) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4$.

54. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1$; (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2-Rx \leqslant 0,\ z \geqslant 0$; (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1 \leqslant z \leqslant 2$;
(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z = \left(x^2+y^2\right)/2$.

55. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 9\right\}$; (b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$;

(c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant e^x\right\}$; (d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

(e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;

(f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

56. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:

(a) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;

(c) kwadrat o boku a, przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii;

(e) koło o średnicy D, środek; (f) elipsa o półosiach a, b, oś symetrii.

Ćwiczenia jedenaste

---

57. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, $U = [1,2] \times [1,e] \times [1,e]$;

(b) $\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, $U = [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$;

(c) $\iiint\limits_U \sin x \sin(x+y) \sin(x+y+z)\,dxdydz$, $U = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(d) $\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\,dxdydz$, $U = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

58. Całkę potrójną z funkcji $g(x,y,z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

(a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$; (b) $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$; (c) $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

*** 59.** Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania:

(a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\,dz$; (b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$;

(c) $\int\limits_0^3 dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy$; (d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

60. Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

(a) $g(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $U: x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$;

(b) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $U: x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

(c) $g(x,y,z) = x^2+y^2$, $U: x^2+y^2 \leqslant 4,\ 1-x \leqslant z \leqslant 2-x$;

(d) $g(x,y,z) = x^2y^2$, $U: 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$.

Ćwiczenia dwunaste

61. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dxdydz$, $U: x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

(b) $\iiint\limits_U xyz\,dxdydz$, $U: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$;

(d) $\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, $U: x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y$.

62. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\iiint\limits_U \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $U: 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

(b) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\iiint\limits_U z^2\,dxdydz$, $U: x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2$ $(R>0)$; (d) $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$; $U: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

63. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a) $x^2+y^2=9, \quad x+y+z=1, \quad x+y+z=5$; (b) $z=4-x^2, \quad z=y^2-5$;

(c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad z=0, \quad x^2+y^2=4$; (d) $x^2+y^2+z^2=2, \quad y=1$ $(y \geqslant 1)$.

64. Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

(a) półkula o promieniu R; (b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H; (c) $U: x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}$.

65. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi:

(a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, oś walca;

(b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, oś stożka;

(c) kula o promieniu R, oś symetrii;

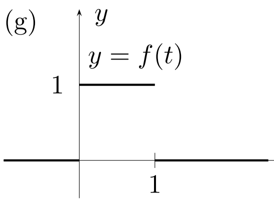
(d) odcinek paraboloidy o średnicy D i wysokości H, oś obrotu.

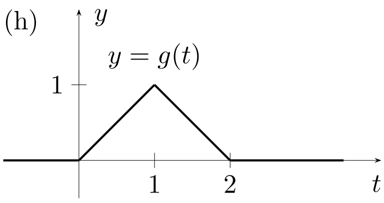
Ćwiczenia trzynaste

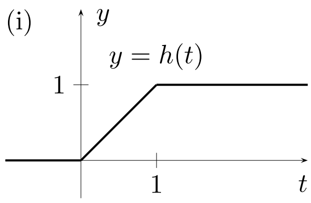
66. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

(a) $2t-1$; (b) $\sin 2t$; (c) t^2;

(d) te^{-t}; (e) $e^{2t}\cos 2t$; (f) $\sinh t$;

(g)


(h)


(i)


67. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

(a) $\dfrac{1}{s+2}$; (b) $\dfrac{s}{s^2+4s+5}$; (c) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$; (d) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)\left(s^2+4\right)}$;

(e) $\dfrac{s^2+1}{s^2\left(s^2-1\right)^2}$; (f) $\dfrac{s+9}{s^2+6s+13}$; (g) $\dfrac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$; (h) $\dfrac{3s^2}{\left(s^3-1\right)^2}$; (i) $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$.

68. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

(a) $y'-y=1, \quad y(0)=1$; (b) $y'-2y=\sin t, \quad y(0)=0$;

(c) $y''+y'=0, \quad y(0)=1, y'(0)=1$; (d) $y''+3y'=e^{-3t}, \quad y(0)=0, y'(0)=-1$;

(e) $y''-2y'+2y=\sin t, \quad y(0)=0, y'(0)=1$; (f) $y''-2y'+y=1+t, \quad y(0)=0, y'(0)=0$;

(g) $y''+4y'+4y=t^2, \quad y(0)=0, y'(0)=0$; (h) $y''+4y'+13y=te^{-t}, \quad y(0)=0, y'(0)=2$.

*** 69.** Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty funkcji:

(a) $\sin^4 t$; (b) $\cos 4t \cos 2t$; (c) $t^2\cos t$; (d) $t\sinh 3t$;

(e) $te^t\cos t$; (f) $e^{3t}\sin^2 t$; (g) $\mathbf{1}(t-2)\sin(t-2)$; (h) $\mathbf{1}(t-1)e^{t-1}$.

*** 70.** Obliczyć sploty par funkcji:

(a) $f(t)=e^t, \ g(t)=e^{2t}$; (b) $f(t)=\cos 3t, \ g(t)=\cos t$; (c) $f(t)=\mathbf{1}(t), \ g(t)=\sin t$; (d) $f(t)=e^t, \ g(t)=t$.

*** 71.** Korzystając ze wzoru Borela wyznaczyć funkcje, których transformaty dane są wzorami:

(a) $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$; (b) $\dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)}$; (c) $\dfrac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}$; (d) $\dfrac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$.

Ćwiczenia czternaste

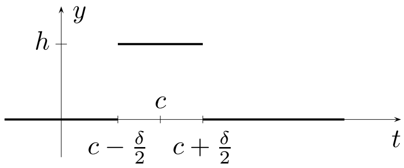
72. Korzystając z definicji wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji:

(a) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \pi; \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ (c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > 1; \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla} \quad |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1; \end{cases}$ (e) $f(t) = e^{-|t|}$; (f*) $f(t) = e^{-at^2}$, $a \neq 0$.

Wskazówka. (f*) Wykorzystać równość $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

73. Niech c, $h \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji



74. Pokazać, że jeżeli $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$, to:

(a) $\mathcal{F}\{f(t)\cos \alpha t\} = \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega - \alpha) + \hat{f}(\omega + \alpha)\right]$; (b) $\mathcal{F}\{f(t)\sin \alpha t\} = \dfrac{1}{2i}\left[\hat{f}(\omega - \alpha) - \hat{f}(\omega + \alpha)\right]$.

75. Korzystając z własnści transformaty Fouriera oraz z wyników poprzednich zadań obliczyć transformaty funkcji:

(a) $f(t) = e^{-3|t-1|}$; (b) $f(t) = te^{-|t|}$; (c) $f(t) = e^{-4t^2-4t-1}$;

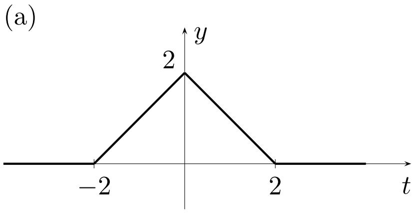
(d) $f(t) = \begin{cases} \cos \dfrac{t}{2} & \text{dla} \quad |t| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \pi; \end{cases}$ (e) $f(t) = \begin{cases} 2\cos t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \pi; \end{cases}$ (f) $f(t) = [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-4)] \cdot t$;

(g) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t} \cos t$; (h) $f(t) = e^{-|t|} \cos \dfrac{t}{2}$; (i) $f(t) = e^{-|t|} \sin 2t$.

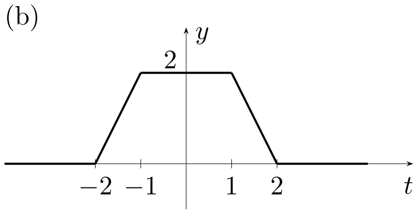
Uwaga. $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$ – funkcja Heaviside'a.

*** 76.** Korzystając z zadania 80 oraz transformaty Fouriera pochodnej wyznaczyć transformaty funkcji:

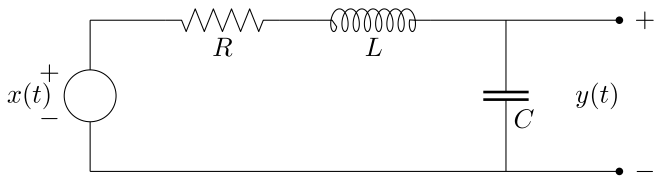
(a)



(b)



*** 77.** W obwodzie RLC, napięcie $x(t)$ jest sygnałem wejściowym, a napięcie $y(t)$ sygnałem wyjściowym (rys.).



Wyznaczyć trnsformatę Fouriera sygnału wyjściowego $y(t)$.

78. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $t^2 f''(t) + 2f'''(t)$, jeżeli $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

79. Wyznaczyć funkcje, których transformaty Fouriera mają postać:

(a) $\dfrac{1}{1+2i\omega}$; (b) $\dfrac{1}{4+\omega^2}$; (c) $\dfrac{e^{2i\omega}}{1+i\omega}$; (e) $\dfrac{\sin\omega\cos\omega}{2\omega}$; (f) $\dfrac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$;

80. Obliczyć sploty podanych par funkcji i ich transformaty Fouriera:

(a) $f(t) = g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$,

(b) $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, $g(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t)$,

(c) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t}$, $g(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-2t}$,

(d) $f(t) = g(t) = e^{-t^2}$.

Ćwiczenia piętnaste (II kolokwium - przykładowe zestawy)

Zestaw A

1. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \left(x^2 - y\right) e^{2y-x}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 1)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\alpha = \pi/3$ z dodatnią częścią osi Ox.
2. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y+1}{\sqrt{x}}$.
3. Jednorodna figura składa się z kwadratu o boku 2 i dołączonego do niego półkola o promieniu 1. Wyznaczyć położenie środka masy tej figury.
4. Obliczyć objętośc bryły U ograniczonej powierzchniami:
$$x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2 - 3,\ z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zestaw B

1. Znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$ w trójkącie
$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 1, y \geqslant 1, x + y \leqslant 4\right\}.$$
2. Cienka jednorodna płytka o masie M ma kształt trójkąta równobocznego o boku a. Obliczyć moment bezwładności płytki względem jej osi symetrii.
3. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^3}$, gdzie $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ y \leqslant 0\right\}$.
4. Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = e^{-t}$.

Zestaw C

1. Uzasadnić, że wśród wszytkich prostopadłościanów o objętości V sześcian ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.
2. Zmienić kolejność całkowania w całce
$$\int_0^2 dy \int_{-2+\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x, y)\, dx.$$
Naszkicować obszar całkowania.
3. Obliczyć całkę z funkcji $f(x, y, z) = z$ po obszarze V ograniczonym płaszczyznami $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Naszkicować obszar V.
4. Rozwiązać równanie różniczkowe $y'' + 2y' + 5y = -5$ z zerowymi warunkami początkowymi.

Zestaw D

1. Sprawdzić, że funkcja $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$ spełnia warunek $x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, gdzie $x,\ y > 0$.
2. Całkę podwójną z funkcji $f(x, y)$, po obszarze D ograniczonym krzywymi $y = 2 - x^2$, $x = |y|$, $y = -2$ zamienić na całki iterowane na dwa sposoby. Narysować obszar D.
3. Obliczyć pole części powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ leżącej wewnątrz paraboloidy $2z = x^2 + y^2$. Sporządzić rysunek.
4. Obliczyć całkę potrójną z funkcji $f(x, y, z) = x$ po obszarze $V : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $z \geqslant 0$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{\sqrt{n}+1}$.
3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{8}{y^2}$.
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:$z = \sqrt{25-(x^2+y^2)}$, $z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$.
5. Jednorodna figura składa się z trójkąta równobocznego o boku 2 i dołączonego do niego półkola o promieniu 1. Wyznaczyć położenie środka masy tej figury.
6. Znaleźć przekształcenie Laplace'a funkcji $f(t) = t - 1$.

Zestaw B

1. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach
$$z = x^2 + y^2,\ z = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$
Sporządzić rysunek.
2. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji $f(x,y) = x + y^2 - 2\ln(xy)$.
3. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_1^{16} dx \int\limits_{\log_4 x}^{\log_2 x} f(x,y)\,dy$.
4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
5. Jednorodna figura ma kształt kwadratu o polu 4, z którego boku wycięto półkole o promieniu 1. Wyznaczyć położenie środka masy tej figury.
6. Metodą transformaty Laplace'a rozwiązać zagadnienie początkowe $y' + 2y = e^t$, $y(0) = -1$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x,y) = xy + x$ na zbiorze D ograniczonym łukami parabol $y = 1 - x^2$ i $y = x^2 - x$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{n3^n}$.

3. Obliczyć pole części powierzchni $x^2+y^2+z^2=4$ leżącej wewnątrz stożka $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+15x$ w punktach, w których są one równoległe do płaszczyzny $6x-2y-z=0$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x}$.

6. Jednorodna płytka o masie M ma kształt kwadratu o boku a. Obliczyć moment bezwładności płytki względem przekątnej. Sporządzić rysunek.

Zestaw D

1. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=y-x^2+2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt $\pi/6$ z dodatnim zwrotem osi Ox. W którym z ośmiu geograficznych kierunków: N, W, S, E, NW, NE, SW, SE szybkość wzrostu funkcji f w punkcie $(-1/2,-1)$ jest największa?
   Uwaga. N-północ, W-zachód, S-południe, E-wschód.

2. Na płaszczyźnie zaznaczyć obszar D ograniczony krzywą $x=y^2+1$ i prostymi $y=x$, $y=1$ i $y=\sqrt{3}$. Następnie obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dxdy.$$

3. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych: (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$; (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

4. Wyznaczyć szereg Maclaurina funkcji $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^2-2}$. Określić promień jego zbieżności i obliczyć pochodne $f^{(17)}(0)$, $f^{(18)}(0)$.

5. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $z=3-y^2$, $z=2y$, $x=0$, $x=1$. Sporządzić rysunek.

6. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$ w punkcie $(0,1,-1)$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{5^n+3^n}{n!}$.

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^{3-y}+e^x+e^{y-x}$.

4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2+x^2} f(x,y)\,dy.$$

5. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego półpierścienia o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R.

6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach: $x^2+y^2=1$, $z=4-\left(x^2+y^2\right)$, $z=2$.

Zestaw B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2 - x}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,ctg} n$.

3. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji $f(x,y) = (y+2)\sqrt{x} + \frac{4}{xy}$.

4. Narysować obszar całkowania i nastepnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_{-1}^{12} dx \int\limits_{|x|-3}^{x^2-2x} f(x,y)\, dy$.

5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach
$$z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},\ z = 6 - \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$
Sporządzić rysunek.

6. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = y^3 + \sqrt{1 - x^2y^2}$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy.

Zestaw C

1. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = xy - x - y$ na zbiorze D ograniczonym prostą $y = x+2$ i parabolą $y = x^2 - 4$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x+4)^n$.

3. Obliczyć pole części powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ leżacej wewnątrz paraboloidy $2z = x^2 + y^2$. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x,y) = \ln\left(2 + x^2y - y^2\right)$ w punkcie, w którym jest ona równoległa do płaszczyzny $2y + z = 0$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x}$.

6. Jednorodna płytka o masie M ma kształt trójkata prostokątnego o przyprostokątnych p i q. Obliczyć moment bezwładności płytki względem przyprostokątnej p. Sporządzić rysunek.

Zestaw D

1. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

2. Funkcję $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$ oraz jej drugą pochodną rozwinąć w szeregi Maclaurina i podać promienie ich zbieżności.

3. Obliczyć pole części powierzchni $z = x^2 + y^2$ leżącej między płaszczyznami $z = 1$ i $z = 4$. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y) = \left(2x - y^2\right)e^{x-y}$ w punkcie $(1,1)$ oraz wersor $\boldsymbol{v}$, dla którego $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1,1)$ ma wartość najmniejszą.

5. Obliczyć całkę potrójną z funkcji $f(x,y,z) = x + y + z$, po obszarze ograniczonym płaszczyznami $2x + y = 2$, $x + y = 2$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Narysować obszar całkowania.

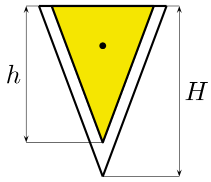
6. Wykorzystując transformatę Laplace'ea rozwiązać równanie różniczkowe rzędu drugiego $y'' + y' - 2y = 1$ z warunkami $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Egzamin na ocenę celującą

Zestaw z 2016 r.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3\ln\left(n^2+1\right)-2\ln\left(n^3+1\right)\right)$.

2. Wafelek do loda ma kształt stożka wydrążonego o wysokości H z jednakową grubością ścianek (rysunek). Masa lodowa (stożek) wypełniająca wafelek ma wysokość h $(h < H)$. Przyjmując, że wafelek i masa są jednorodne, a gęstość masy jest 2 razy większa od gęstości wafelka, wyznaczyć położenie środka masy całego loda.



3. Kątem nachylenia gładkiej powierzchni w ustalonym jej punkcie nazywamy kąt ostry między płaszczyzną styczną w tym miejscu, a poziomem. Obliczyć średni kąt nachylenia wzgórza o równaniu
$$z=\frac{1}{4}-x^2-y^2 \quad (z \geqslant 0).$$

4. Trzy boki czworokąta wypukłego mają długość 1. Jaka powinna być długość czwartego boku czworokąta oraz jak powinien być on ukształtowany, aby miał największe pole?

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2016.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2016.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2012.

[4] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.

[5] Z.Skoczylas, *Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą*, Wrocław 2016.