Wykład 18 - zbieżność szeregów

niedziela, 27 maja 2018 11:19

SZEREG NAPRZEMIENY

$$\sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Szereg może być zbieżny:

- ZBIEŻNY BEZWZGLĘDNIE

$$\sum_{n}^{\infty} |(-1)^n a_n| \quad \left(\sum_{n}^{\infty} a_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = k < \infty \quad \text{szereg zbieżny}$$

- ZBIEŻNY WARUNKOWO

$$\sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n$$

zbieżny

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \quad \text{rozbieżny}$$

Jeżeli szereg $\sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Kryterium zbieżności Leibniza (kryterium zbieżności warunkowej)

Jeżeli dla szeregu $\sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n$ zachodzi:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. (a_n) jest malejący

} to szereg jest zbieżny.

PRZYKŁADY:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

- Czy ten szereg jest zbieżny bezwzględnie?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \to \text{rozbieżny, bo } \tfrac{1}{2}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}=\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n}\overset{\nearrow 0}{}=1$$

nie jest zbieżny bezwzględnie

- Czy jest zbieżny warunkowo?

Kryterium Leibniza:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}=0$

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1+1}}{n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n}}=\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\underbrace{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}}_{w}$$

to $(w)^2<1$

$$w^2=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3}=\frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1}<1$$

$$\left(1-\frac{n^2+3n+1}{n^3+3n^2+3n+1}\right)$$

jeśli ten warunek zachodzi, to ciąg jest zbieżny warunkowo.

PRZYKŁADY:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n}$$

Kryterium Leibniza:

① $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

② Jeżeli $\frac{\ln(x+1)}{x}$ maleje to $\frac{\ln(n+1)}{n}$ też.

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \qquad f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x+1-1}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} < 0$$

$$1 - \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) < 0$$

$$\ln(x+1) > 1$$
$$x+1 > e$$
$$x > e-1 \qquad \boxed{n > 1}$$

funkcja jest malejąca dla $x > e$
to ciąg jest malejący od $n > 1$

Szereg jest zbieżny warunkowo.