

KOLOKWIVUM

- godzina 7⁰⁰
- długopisy → poza czerwonym
- kartka A4, lub kilka
- kalkulator → każdy poza graficznym
- dokument ze zdjęciem
- komórki wyłączyć przed wejściem

DRGANIA → raczej nie będzie na kolokwium

METODY RÓŻNICZKOWE

równania jednorodne

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = f(x)$$

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = 0$$

$$y = e^{rx} \quad y' = r e^{rx} \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$\Delta > 0 \rightarrow r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} \quad y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$

$\Delta < 0 \rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

METODA PRZEWIDYWAŃ

$$y = y_{0j} + y_{12j}$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \sin mx; \quad y_1 = a \sin mx + b \cos mx$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 8x^3 - 36x; \quad y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = e^x \quad y_1 = m e^x \quad y_1 = (a + bx) e^x$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 25x^2 e^x \quad y_1 = (ax^2 + bx + c) e^{3x}$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 2x \cos x \quad y_1 = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x$$

DRGANIE

- ruch harmoniczny wokół położenia równowagi

DRGANIA SWOBODNE

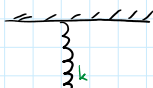
$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0 \quad \leftarrow \text{ogólne równanie}$$

ω_0 – częstość drgań własnych układu

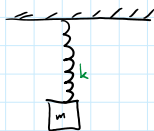
$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + \omega_0 x = 0$$

\uparrow tłumienie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \quad \text{– częstość drgań tłumiących}$$



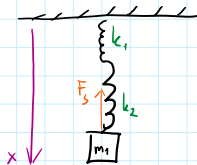
k – współ. sztywności sprężyny



k - wsp. sztywności sprężyny



$$k_z = k_1 + k_2$$



$$\frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$F_s = k \cdot \Delta x$$

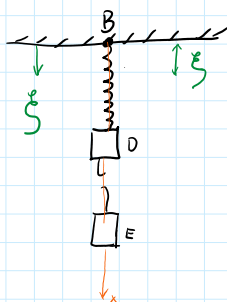
\uparrow tłumik \sim siłownik



c - wsp. tłumienia

$$R = c \cdot \dot{x}$$

PRZYKŁAD



$$m_D = 1,6 \text{ kg}$$

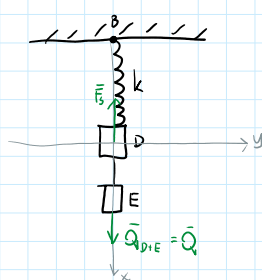
$$m_E = 2,4 \text{ kg}$$

$$\xi = 2 \sin 5t \text{ [cm]} = 0,02 \sin 5t \text{ [m]}$$

$$c = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Wyznaczyć równanie ruchu ciężarków D i E oddając ich ruch do osi OX. Początek układu przyjęj w położeniu spoczynku ciężarków D i E. Pręt łączący ciężarki jest nieważki i nieodkształcalny.

W chwili, gdy do ciężarka D dla $t=0$ podczepiono ciężar E, punkt B zaczyna wykonywać ruch wg. równania ξ



$$m\ddot{a} = \bar{F}$$

$$(m_D + m_E) \ddot{x} = \bar{Q} - \bar{F}_s$$

$$(m_D + m_E) = m$$

$$m\ddot{x} = \bar{Q} - \bar{F}_s$$

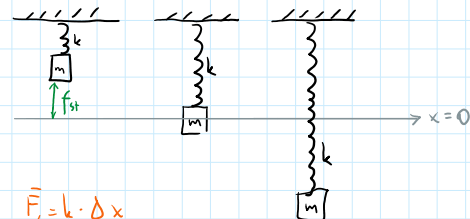
$$m\ddot{x} = m g - k(f_{st} + x - \xi)$$

$$f_{st} = ?$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\bar{F}_s = k \cdot \Delta x$$

$$\bar{F}_s = k \cdot (f_{st} + x - \xi)$$



$$\bar{F}_s = k \cdot \Delta x$$

$$\bar{F}_s = k \cdot (f_{st} + x)$$

↑ wykreślenie statyczne

$$0 = m g - k(f_{st} + x - \xi)$$

• w momencie przed wprowadzeniem układu ze stanu równowagi:

$$0 = m g - k f_{st} \rightarrow m g = k f_{st} \rightarrow f_{st} = \frac{m g}{k}$$

$$m\ddot{x} = m g - k\left(\frac{m g}{k} + x - 0,02 \sin 5t\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - mg - kx - k0,02 \sin 5t$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{k}{m}0,02 \sin 5t$$

$$\ddot{x} + 100x = 2 \sin 5t \rightarrow \omega_0^2 = 100 \rightarrow \omega_0 = 10 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

• równanie różniczkowe drugiego rzędu, więc $x = x^* + x^{**}$

$r=2$ ↗

$$\ddot{x} + 100x = 0$$

$$r^2 + 100 = 0$$

$$\Delta = -400 < 0$$

$$x^* = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = 10$$

$$x^* = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

$$\ddot{x} + 100x = 2 \sin 5t$$

$$x^{**} = a \sin 5t + b \cos 5t$$

$$\dot{x} = 5a \cos 5t - 5b \sin 5t$$

$$\ddot{x} = -25a \sin 5t - 25b \cos 5t$$

$$-25a \sin 5t - 25b \cos 5t + 100a \sin 5t + 100b \cos 5t = 2 \sin 5t$$

$$75a \sin 5t + 75b \cos 5t = 2 \sin 5t$$

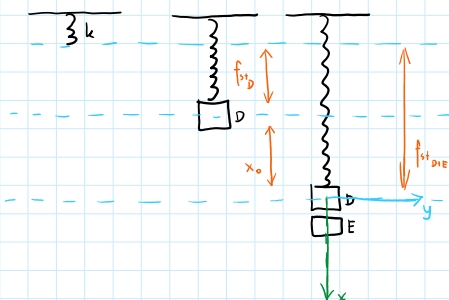
$$b=0 \quad 75a \sin 5t = 2 \sin 5t \rightarrow a = 0,027$$

$$x^{**} = 0,027 \sin 5t$$

$$x = x^* + x^{**}$$

$$x = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t + 0,027 \sin 5t$$

$$c_1 = ? \quad c_2 = ?$$



$$t=0$$

$$x_0 = -f_{stE}$$

$$f_{st} = \frac{m_E g}{k}$$

$$x_0 = -f_{stE} = -\frac{m_E g}{k} = -0,059$$

$$x(0) = -0,059 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 0,027 \cdot 0 \rightarrow c_1 = -0,059$$

$$t=0 \rightarrow \dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{x} = -10c_1 \sin 10t + 10c_2 \cos 10t + 0,135 \cos 5t$$

$$\dot{x}(0) = 0 = 10c_2 + 0,135 \rightarrow c_2 = -0,0135$$

Rozwiązanie: $x = -0,059 \cos 10t - 0,0135 \sin 10t + 0,027 \sin 5t$