PRAWDOPODOBIEŃSTWO - PRZYKŁADY

Przykłady

- W produkcji firmy A jest 2% braków, w produkcji firmy B jest 3% braków. Losujemy jeden produkt z A oraz jeden z B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

  a) przynajmniej jeden z nich jest dobry

  b) tylko jeden z nich jest dobry

  $\Omega = \{(d,d), (d,w), (w,d), (w,w)\}$

  jakość elementu z A   jakość elementu z B

  $P(d,d) = 0,98 \cdot 0,97$

  $P(d,w) = 0,98 \cdot 0,03$

  $P(w,d) = 0,02 \cdot 0,97$

  $P(w,w) = 0,02 \cdot 0,03$

  sumują się do 1 zgodnie z teorią

  $A = \{(d,d), (d,w), (w,d)\}$

  a) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(w,w) = 1 - 0,0006 = 0,9994 = 99,94\%$

  b) $B = \{(d,w), (w,d)\} = 0,98 \cdot 0,03 + 0,02 \cdot 0,97 = 0,0488 = 4,88\%$

- W pudle jest 16 płytek dobrych i 4 wadliwe. Losujemy jednocześnie 3 płytki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich będą co najmniej 2 dobre?

  $\Omega = \{(p_1, p_2, p_3) : p_i \in \{d, w\}\}$ Ω ma $\binom{n}{k} \to \binom{16+4}{3}$ elementów

  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{20}{3}$ = kalkulator „nCr” $\to 1140$ elem. jednakowo prawdopodobne

  $A = A_2 \cup A_3$ A_2 - 2 dobre z 3 wylosowanych
  co najmniej 2 dobre A_3 - 3 dobre z 3 wylosowanych

  $P(A_2) = \frac{\text{liczba elem. w zdarzeniu } A_2}{\text{liczba elem. } \Omega} = \frac{\binom{16}{2}\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{8}{19}$

  $P(A_3) = \frac{\text{liczba elem. } A_3}{\text{liczba elem. } \Omega} = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{28}{57}$

  $P(A) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - \underbrace{P(A_2 \cup A_3)}_{= \emptyset \text{ zbiór rozłączny}} = 0,91$

- Dane są $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

- Dane są $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(\bar{B})=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$.
  Obliczyć:

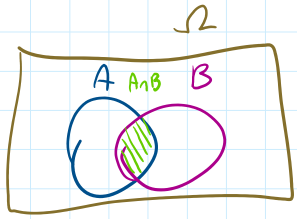
  a) $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

  b) $P(A\setminus B) = P(A)-P(A\cap B) = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

  c) $P(\bar{A}\cup\bar{B}) \overset{I}{=} P(\overline{A\cap B}) = 1-P(A\cap B)=\frac{5}{6}$

  $\overset{II}{=} P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cap\bar{B}) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(\overline{A\cup B}) =$

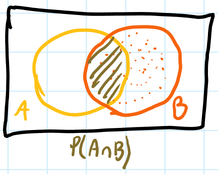
  $= \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-(1-P(A\cup B)) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$



$A\cap\Omega = A\cap(B\cup\bar{B}) =$
$=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}) = A\setminus B$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

- Mamy (Ω, P). Niech $P(B)>0$



- prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A przy warunku B, $P(B)>0$, nazywamy liczbę

$$P(A|B) \underset{def}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) =$$

$$P(A)>0 \rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

sytuacja odwrotna

- PRZYKŁAD:
  Rzucamy 2 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia różnej liczby oczek, jeśli:

  a) suma oczek wynosi 11

  b) suma oczek wynosi 10

  $\Omega = \{(k,l) : k,l\in\{1,2\ldots 6\}\}$ → Ω ma 36 elementów jednakowo prawdopodobnych

  $A = \{(k,l) : k\neq l : k,l\in\{1,2\ldots 6\}\}$ → A ma 30 elem. jedn. prawdopodobnych

  $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

  a) $B = \{(5,6),(6,5)\} \subset A$ → podzbiór

  $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ warunek jest podzbiorem zdarzenia, więc $P(A|B)=1$

  b) $B_1 = \{(6,4),(4,6),(5,5)\}$

  $P(A|B_1) = \frac{P(A\cap B_1)}{\ldots} = \frac{\frac{2}{36}}{\ldots} = \frac{2}{\ldots}$

b) $B_1 = \{(6,4),(4,6),(5,5)\}$

$$P(A|B_1) = \frac{P(A\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{2}{3}$$

„jaka jest szansa na moje zdarzenie"

$A\cap B_1 = \{(6,4),(4,6)\}$

$P(B_1) = \frac{3}{36}$

• - dowolne zdarzenia z Ω

- TWIERDZENIE

Jeśli: $P(B)>0$ to funkcja $P(\bullet|B)$ jest **PRAWDOPODOBIEŃSTWEM**

- zadanie dodatkowe / domowe: uzasadnić aksjomaty na

- wniosek: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

- TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE CAŁKOWITYM

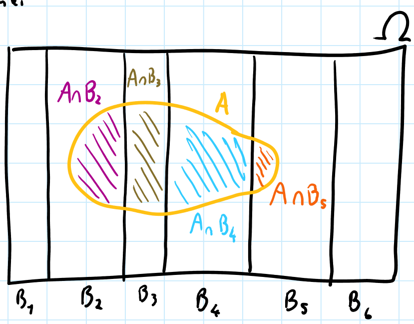
Jeśli zdarzenia $B_1, B_2 \dots$ spełniają warunki:

① $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

② $B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$

③ $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2 \dots$

to $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$



$$A = A\cap\Omega = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\underbrace{(A\cap B_i)}_{\text{zdarzenia parami rozłączne}}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A\cap B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

Często zdarzenia B_i nazywamy czynnikami. Jeśli suma B_i jest Ω, to jeśli znamy $P(A)$ możemy obliczyć prawdopodobieństwa tych zdarzeń warunkowych

- wniosek: WZÓR BAYESA („mamy zdarzenie A, jaka jest szansa że zaszła B_k?")

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$$

- PRZYKŁAD:

Bezpiecznik w urządzeniu pochodzi z jednej z 3 firm z prawdopodobieństwami odpowiednio $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Prawdopodobieństwo, że będzie działał przez dany okres T dla poszczególnych firm wynosi 0,9, 0,8, 0,6.

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że bezpiecznik będzie działał przez dany czas T?

b) bezpiecznik działa przez okres T. Do której z firm należy z największym prawdopodobieństwem?

c) bezpiecznik przestał działać przed upływem czasu T. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodził z drugiej firmy?

c) bezpiecznik przestał działać przed upływem czasu T. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodził z drugiej firmy?

$B_i \to$ bezpiecznik pochodzi z firmy $i = 1, 2, 3$ $\quad C \to$ bezpiecznik działa przez okres T

$P(B_1) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(C|B_1) = 0{,}9$

$P(B_2) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(C|B_2) = 0{,}8$

$P(B_3) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(C|B_3) = 0{,}6$

a) $P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(C|B_i) \cdot P(B_i) = 0{,}9 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{31}{40} = 0{,}775$

$B_1, B_2, B_3 \to$ spełniają założenia o prawdopodobieństwie całkowitym

b) ~ która z liczb $P(B_1|C)$ $P(B_2|C)$ $P(B_3|C)$ jest największa?

$P(B_1|C) = \frac{P(C|B_1) \cdot P(B_1)}{P(C)} = \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{31}{40}} = \frac{9}{31}$

wzór Bayesa

$P(B_2|C) =$