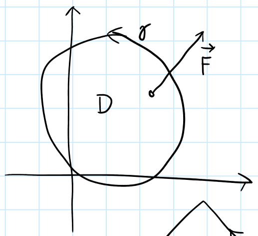
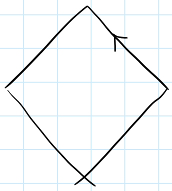
TERMINY ZALICZEŃ:

- ostatni wykład
- poprawka: 30.06, godz. 11^{15}, s. 104 D-1

Twierdzenie Greena:



$$\oint_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$



$$\vec{F}(x,y) = [-y, x]$$

$$\oint_\gamma (\underset{P}{-y}\,dx + \underset{Q}{x}\,dy) = \iint_D [1-(-1)]\,dx\,dy = 2 \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{=|D|} = 2|D|$$

Wyrażenie pola obszaru D przez całkę krzywoliniową po jego brzegu dodatnio zorientowanym:

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_\gamma x\,dy - y\,dx$$

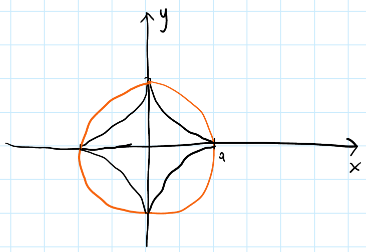
$$\vec{F} = [-y, 0] \rightarrow \oint_\gamma -y\,dx = \iint_D -(-1)\,dx\,dy = 1$$

$$|D| = \oint_\gamma -y\,dx$$

$$\vec{F} = [0, x] \rightarrow \oint_\gamma x\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy = |D|$$

PRZYKŁAD: Pole ograniczone asteroidą

Asteroida: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$



$$x' = -3a\cos^2 t \sin t$$

$$y' = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2\cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\,dt =$$

$$= 2\int_0 \cos^2 t \sin t (\cos t + \sin t)\, dt = \int_0 \cos t \sin t \, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3a^2}{16}\left[2\pi - \frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{3}{8}\pi a^2$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

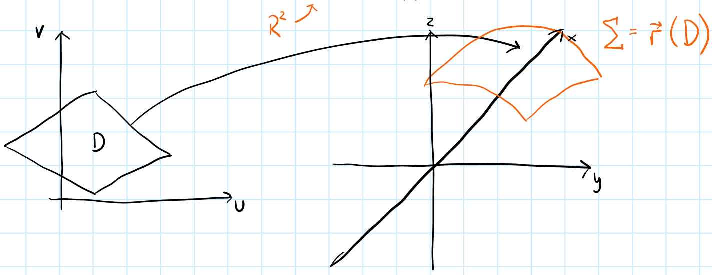
Rozdział 3

Całki powierzchniowe

Płaty powierzchniowe

Odwzorowania $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$



$\vec{r}(u,v) = [x(u,v) ; y(u,v) ; z(u,v)]$ } parametryzacja płata Σ $\quad u, v \to$ parametry

$(u,v) \in D$

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \to$ ciągłe, $\quad \vec{r}(u,v) \to$ funkcja klasy $C^1(D)$

$$\vec{r_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$$\vec{r_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left[\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$\vec{N} \to$ wektor normalny do powierzchni Σ / $\vec{n}$ – wersor normalny

$$\vec{N} = \vec{r_u} \times \vec{r_v}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$$

Płat powierzchniowy gładki

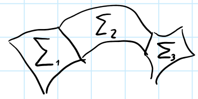
Niech $D \to$ obszar regularny w $\mathbb{R}^2$

$\Sigma = \vec{r}(D) \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{r} = \vec{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \qquad (u,v) \in D$

Odwzorowanie $\vec{r}$ jest różnowartościowe, klasy C^1

Wektor $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0}$ dla $(u,v) \in \operatorname{Int} D$

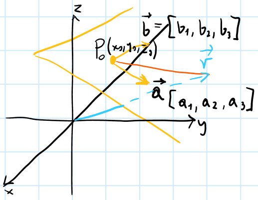
Przy tych założeniach zbiór Σ nazywamy płatem powierzchniowym gładkim płatem powierzchniowym gładkim



Suma skończonej liczby płatów gładkich → płat kawałkami gładki

WAŻNIEJSZE PŁATY POWIERZCHNIOWE

① PŁASZCZYZNA

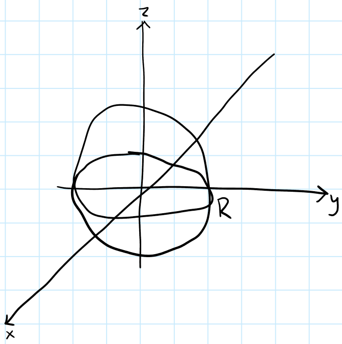


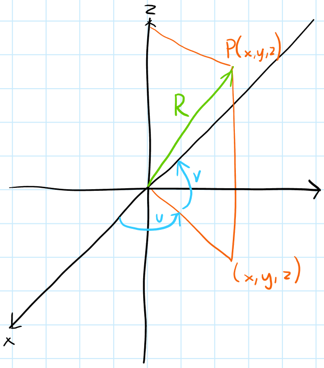
$$\vec{r} = \vec{r_0} + u\vec{a} + v\vec{b}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

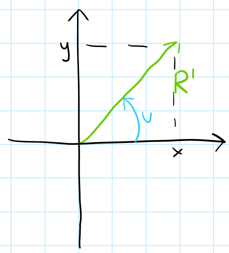
② SFERA

Powierzchnia kuli → $x^2+y^2+z^2=R^2$





$R' = R\cos v$

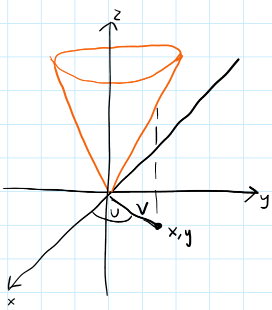


$x = R'\cos u$
$y = R'\sin u$

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\sin v \end{cases} \qquad D: \begin{cases} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{cases}$$

③ STOŻEK

$z = k\sqrt{x^2+y^2}$

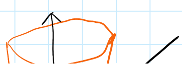


$x = v\cos u$
$y = v\sin u$
$z = kv$

$u \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$v \in \langle 0, R \rangle$ (może być $\langle 0; \infty)$)

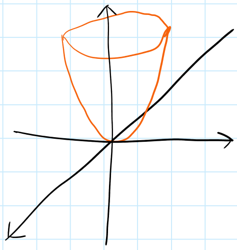
④ PARABOLOIDA

$z = k(x^2+y^2)$



$\{ x = v\cos u$

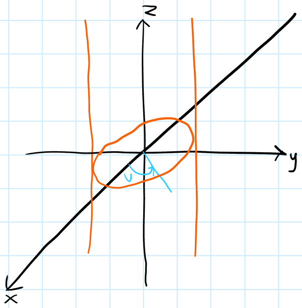
$z = k(x^2+y^2)$



$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = k v^2 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} u \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0; R \rangle \end{cases}$$

⑤ WALEC



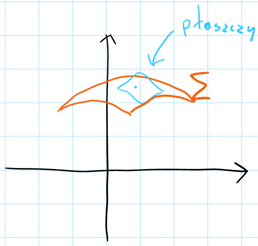
$$\begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v \end{cases}$$

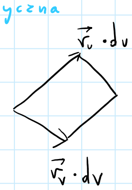
$$\begin{cases} u \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0; H \rangle \end{cases}$$ lub...

CAŁKA POWIERZCHNIOWA NIEZORIENTOWANA

ELEMENT POWIERZCHNI PŁATA

dS





$\left.\begin{matrix} du \\ dv \end{matrix}\right\}$ małe liczby dodatnie / małe przyrosty

$$|\vec{r_u}\, du \times \vec{r_v}\, dv| = |\vec{r_u} \times \vec{r_v}|\, du\, dv$$

$$dS = |\vec{r_u} \times \vec{r_v}|\, du\, dv$$

Pole płata:

$$|\Sigma| = \iint_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}|\, du\, dv$$

Jeśli płat Σ jest wykresem funkcji $g(x,y) \in D$

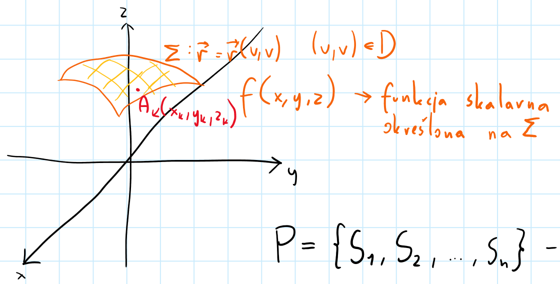
$$\vec{r} = [x, y, g(x,y)] \qquad \vec{r_x} \times \vec{r_y} = \left[-\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{-\partial g}{\partial y}, 1\right]$$

$$\vec{r_x} = \left[1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right] \qquad |\vec{r_x} \times \vec{r_y}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

$$\vec{r_y} = \left[0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right]$$

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

CAŁKA POW. NIEZORIENTOWANA:



$P = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ - podział płata Σ

$d_k = \sup d(P,Q)$

$(P,Q) \in S_k$

$\max\limits_{k=1\dots n} d_k = \delta(P)$ ← średnica podziału

Jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(A_k) \cdot \Delta S_k$$

i nie zależy od wyboru podziału i punktów pośrednich, to wartość tej granicy nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną z funkcji (skalarnej) $f(x,y,z)$ po płacie Σ:

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS$$

Własność: liniowość

$$\iint_\Sigma (f+g)\, dS = \iint_\Sigma f\, dS + \iint_\Sigma g\, dS$$

$$\iint_{\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n} f\, dS = \sum_{=1} \iint_{\Sigma_k} f\, dS$$

$$\iint_\Sigma \alpha f\, dS = \alpha \iint_\Sigma f\, dS \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie:

Zamiana całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójną po parametrach:

Jeśli $f(x,y,z)$ - funkcja ciągła na płacie (kawałkami) gładkim Σ o parametryzacji:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$

to $$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, |\vec{r}_x \times \vec{r}_v|\, du\, dv$$

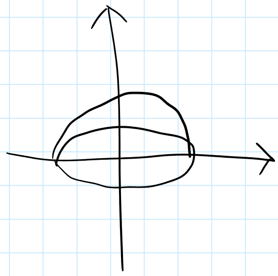
gdy płat Σ - wykres funkcji $z = z(x,y) \quad (x,y) \in D$

PRZYKŁAD:

Oblicz całkę po Σ

$$\iint_\Sigma z\,dS \qquad \Sigma - \text{półsfera}: x^2+y^2+z^2=4 \qquad z \geq 0$$

$$\begin{cases} x = 2\cos u \cos v \\ y = 2\cos v \sin u \\ z = 2\sin v \end{cases} \qquad D: \begin{cases} u \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$$



$$\vec{r_u} = [-2\sin u \cos v, 2\cos u \cos v, 0]$$

$$\vec{r_v} = [-2\cos u \sin v, -2\sin u \sin v, 2\cos v]$$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = [4\cos u \cos^2 v, 4\sin u \cos^2 v, 4\sin v \cos v]$$

$$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = 4\sqrt{\cos^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = 4\sqrt{\cos^2 v} = 4\cos v =$$

$$\iint_\Sigma z\,dS = \iint_D 2\sin v \cdot 4\cos v\,du\,dv = 8\iint_D \sin v \cos v\,du\,dv =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin v}_{t} \cos v\,dv = 8\int_0^{2\pi} du \int_0^1 t\,dt = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 8\pi$$