Wykład 1

czwartek, 4 października 2018   11:05

INFO

- brak ćwiczeń
- dwa kolokwia × 3 zadania × 5 pkt = max. 30 pkt
- dwie kartkówki lub 4 kartkówki → pkt za aktywność
- 1 plus = 1 pkt za aktywność (max. 4)
  lub kartkówki
- max. 34 pkt → 15 pkt na zaliczenie
- obecność obowiązkowa, max. 3 nieobecności
- poprawka: 5 zadań × 5 pkt / 12,5 na zaliczenie
- kolos I: 29.11.2018
- kolos II: 24.01.2019
- zasady oceniania: www.wmat.pwr.edu.pl / pracownicy / Joanna Balbus / informacje dla studentów / listy zadań

  lista zadań Gewerte i Skoczylasa

- konsultacje: pokój 107 / C-11

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I RZĘDU

- równaniem różniczkowym zwyczajnym I-ego rzędu nazywamy równanie w postaci: $F(t, y, y') = 0$

  postać uwikłana; pochodna $y' = \frac{dy}{dt}$

- równania różniczkowe I-ego rzędu można też zapisać: $y'(t) = f(t, y(t))$ 1.1

  $y' = \frac{dy}{dt}$

- rozwiązaniem równania 1.1 nazywamy każdą różniczkowalną funkcję, która spełnia to równanie dla każdego t z pewnego przedziału.

- wykres każdej funkcji, która jest rozwiązaniem równania 1.1 nazywamy krzywą całkową.

- rozwiązanie równania to całka równania.

- przykład: $y'(t) = 2y(t)$

$$y(t) = e^{2t}$$
$$y'(t) = 2e^{2t}$$
$$\underline{2e^{2t} = 2e^{2t}}$$

rozwiązanie dla każdego t

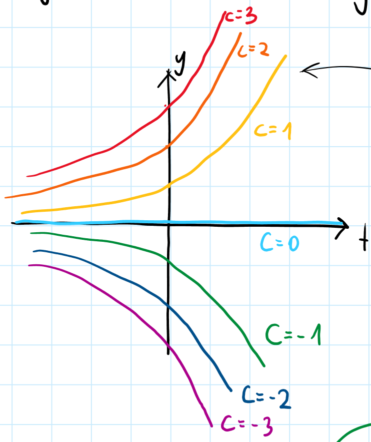
$$y(t) = 2e^{2t}$$
$$y'(t) = 4e^{2t}$$
$$\underline{4e^{2t} = 2 \cdot y(t) = 2 \cdot 2e^{2t}}$$

ogólnie: $y(t) = C \cdot e^{2t}$ gdzie $C \in \mathbb{R}$

$y'(t) = 2Ce^{2t}$ $y' = 2Ce^{2t} = 2Ce^{2t}$

ogólnie: $y(t) = C\cdot e$ gdzie $C \in \mathbb{K}$

$$y'(t) = 2Ce^{2t} \qquad y' = 2Ce^{2t} = 2Ce^{2t}$$



krzywe całkowe

jeśli $C=1$, mamy tylko jedno rozwiązanie, jeden wykres

1.2

- warunek postaci $y(t_0) = y_0$ nazywamy warunkiem początkowym lub warunkiem Cauchy'ego
- równanie 1.1 uzupełnione warunkiem 1.2, tzn. $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(1) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y(t) = Ce^{2t} \\ y(1) = C\cdot e^2 = 2 \end{matrix} \rightarrow C = 2e^{-2} \rightarrow y(t) = 2e^{-2}\cdot e^{2t}$$

$$\hookrightarrow y(t) = 2e^{-2+2t}$$

- rozwiązaniem zagadnienia początkowego $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

na przedziale $[t_0, t_0+a]$ nazywamy funkcję, która spełnia to równanie na przedziale $[t_0, t_0+a]$, która jest różniczkowalna na tym przedziale i która spełnia warunek początkowy

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE I RZĘDU O ZMIENNYCH ROZDZIELNYCH

- równanie różniczkowe, które możemy zapisać w postaci $y'(t) = g(t)\cdot h(y)$ nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych
- jeżeli dla pewnego y_0 $h(y_0) = 0$ to funkcja stała $y(t) = y_0$ jest jednym z rozwiązań tego równania

$$\int y'(t) = \int 0$$

1.4

- inne rozwiązania tego równania: $y'(t) = g(t)\cdot h(y)$ chcemy podzielić przez h

$$\frac{dy}{dt} = g(t)\cdot h(y) \qquad h(y)\neq 0$$

Inne rozwiązania tego równania: $y'(t) = g(t)\,h(y)$

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)\,dt \rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\,dt$$

- TWIERDZENIE: jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(y)$ są ciągłe, przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego y, to całka równania 1.4 dana jest wzorem

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

- Przykład: $y'(t) = 2y(t)$

$$h(y) = y$$

$$g(t) = 2$$

nie mamy zależności w równaniu

$$y = 0$$

zakładamy, że $y \neq 0$

$$y'(t) = 2y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y \rightarrow \frac{dy}{y} = 2dt \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2dt$$

$$\ln|y(t)| = 2t + c$$

$$y(t) = e$$

$$\ln|y(t)| = 2t + c$$

$$y(t) = e^{2t} + c$$

$$\ln|y(t)| = 2t + \ln|c|$$

$$\ln|y(t)| - \ln|c| = 2t$$

$$\ln\left|\frac{y(t)}{c}\right| = 2t$$

$$y(t) = c \cdot e^{2t}$$

- Przykład 2: $t^2 y' = \sin\frac{1}{t} \qquad t \neq 0$

$$t^2 \frac{dy}{dt} = \sin\frac{1}{t} \quad \Big/ : t^2 \quad \Big| \cdot dt$$

$$dy = \frac{1}{t^2} \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$$

$$\int dy = \int \frac{1}{t^2} \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$$

$$y$$

$$\int \frac{1}{t^2} \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{t} = u \\ -\frac{1}{t^2}dt = du \end{array} \right| = -\int \sin u\,du = \cos u = \cos\frac{1}{t} + c_1$$

$$y(t) = \cos\frac{1}{t} + c$$

• Przykład 3: $\begin{cases} (1+t^2)\,y' = 2t\,y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $(1+t^2)\frac{dy}{dt} = 2t\,y^2 \quad /:(1+t^2)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t\,y^2}{1+t^2} \quad /:y^2$$

$$g(t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad h(y) = y^2$$

$$h(y) = 0 \rightarrow y = 0 \qquad y \neq 0$$

warunek niespełniony, więc ta funkcja nie jest rozwiązaniem

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$-\frac{1}{y} \qquad \ln|1+t^2| + c$$

$$-\frac{1}{y} = \ln|1+t^2| + c$$

$$y(t) = -\frac{1}{\ln|1+t^2| + c}$$

$$y(1) = 1$$

$$y(1) = \frac{-1}{\ln 2 + c} = 1$$

$$-1 = \ln 2 + c$$

$$-1 - \ln 2 = c$$

$$y(t) = -\frac{1}{\ln|1+t^2| - 1 - \ln 2}$$