Analiza matematyczna 1 (2017/2018)

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań* obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek odpowiadających kolejnym wykładom. Na ćwiczeniach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem (*). Zadania oznaczone literą są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy zadań umieszczono zestawy zadań z I i II kolokwium oraz z egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także z egzaminu na ocenę celującą.

Ambitnych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca

---

Lista pierwsza

---

1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:
(a) „Wrocław był stolicą Polski”; (b) „liczba 333333 jest podzielna przez 9”;
(c) „$a^2 + b^2 = c^2$”; (d) „trójkąt o bokach 9, 9, 20 jest równoramienny”;
(e) „$2^5 \geqslant 32$”; (f) „$\Delta = b^2 - 4ac$”.

2. Napisać zaprzeczenia zdań:
(a) „jem śniadanie i słucham »Trójki«”;
(b) „kwadrat nie jest pięciokątem”;
(c) „przez Poznań przepływa Odra lub Warta”;
(d) „jeśli funkcja f jest rosnąca, to funkcja $-f$ jest malejąca”;
(e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 oraz przez 3”.

3. Ocenić prawdziwość zdań złożonych:
(a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$”;
(b) „$(-1)^{44} = -1$ lub 2018 jest liczbą parzystą”;
(c) „funkcja $g(x) = \sin x + \cos(\pi/12)$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ – nieparzysta”;
(d) „jeżeli Piotr jest ojcem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra”;
(e) „liczba 2016 jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z końcowych trzech cyfr jest podzielna przez 8”.

*Zadania zaczerpnięto z książek: *Analiza matematyczna 1 (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, *Wstęp do analizy i algebry* oraz *Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą.*

4. Używając tylko kwantyfikatorów, spójników logicznych oraz relacji $=$, $\neq$, $<$, $\leqslant$ zapisać stwierdzenia:
(a) funkcja f nie jest rosnąca na przedziale $[a,b]$;
(b) $x \in [p,q)$;
(c) układ równań $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań;
(d) równanie $x^7+3x^5+1=0$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste;
(e) liczba 2017 jest pierwsza.

5. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:
(a) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^x=27$; (b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2+4x+3>0$; (c) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x^2+y^3=0$;
(d) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} xy=0$; (e) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} (y\leqslant x)\vee(y>x)$; (f) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} \sin x+\cos(x+y)=0$.

6. Dla par zbiorów A, $B\subset\mathbb{R}$ wyznaczyć $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, A^c, B^c:
(a) $A=(0,5)$, $B=[0,7]$; (b) $A=(-\infty,3)$, $B=[-1,\infty)$; (c) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$.
Wskazać te pary A, B, dla których $A\subset B$.

7. (P) Funkcje kwadratowe sprowadzić do postaci iloczynowej (jeżeli istnieje) i naszkicować ich wykresy:
(a) $f(x)=-x^2+x$; (b) $f(x)=2x^2+1$; (c) $f(x)=x^2+x+\frac{1}{4}$;
(d) $f(x)=x^2+2x-3$; (e) $f(x)=-2x^2-2x+\frac{3}{2}$; (f) $f(x)=-x^2-3x-\frac{9}{4}$.

Lista druga

---

8. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:
(a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$; (b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2+2}$; (c) $f(x)=\sqrt{16-x^4}$; (d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$.

9. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych przedziałach:
(a) $f(x)=3+2x$, $(-\infty,\infty)$; (b) $f(x)=x^2$, $(-\infty,0]$.

10. Niech f na przedziale będzie funkcją monotoniczną i dodatnią. Określić monotoniczność funkcji $1/f$. Korzystając z powyższego naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych przedziałach:
(a) $\dfrac{1}{1+x^4}$, $(-\infty,0)$; (b) $\dfrac{-1}{1+2^x}$, $(-\infty,\infty)$; (c) $\dfrac{1}{2+\cos x}$, $(0,\pi)$; (d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$, $(4,\infty)$.

11. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych przedziałach:
(a) $f(x)=x^3$, $(-\infty,\infty)$; (b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(0,\infty)$.

12. Podać wzory funkcji złożonych $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:
(a) $f(x)=x-1$, $g(x)=3x+2$; (b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^2$;
(c) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4$; (d) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x+1}$.

13. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:
(a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; (b) $f(x)=3-\sqrt{4-x^2}$, $(-2\leqslant x\leqslant 0)$; (c) $f(x)=2^{x-1}$;
(d) $f(x)=\log(x+2)$; (e) $f(x)=-x^4$, $(x\leqslant 0)$; (d) $f(x)=x^2-4x$, $(x\leqslant 2)$.

14. (P) Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

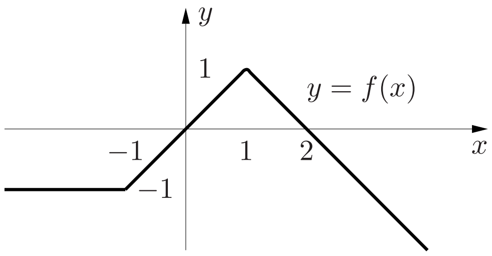
(a) $\log_6 3 + \log_6 12$; (b) $\log_3 18 - \log_3 2$; (c) $9 \log_6 \sqrt[3]{36}$;

(d) $3 \log_2 3 \cdot \log_3 4$; (e) $3 \log_4 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_4 3 + 3 \log_4 2 - \log_4 6$; (f) $\frac{\log_2 54 - \log_2 6}{\log_2 27 - \log_2 9}$.

Lista trzecia

---

15. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = f(x) - 5$; (b) $y = f(x-1)$; (c) $y = -f(x)$; (d) $y = f(-x)$;
(e) $y = f(x)/2$; (f) $y = f(3x)$; (g) $y = |f(x)|$; (h) $y = f(|x|)$.

16. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y = (x+1)^4$; (b) $y = \sqrt{x-2}$; (c) $y = \frac{1}{(x+3)^2}$;

(d) $y = 2^{x+1}$; (e) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; (f) $y = 4^{|x|}$;

(g) $y = 5 + \log_2 x$; (h) $y = |\log 100x|$; (i) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{|x|}{9}$.

17. (P) Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y = \sin 3x$; (b) $y = \sin \frac{x}{2}$; (c) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

(d) $y = 1 + \sin x$; (e) $y = \frac{1}{2} \sin x - 1$; (f) $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

18. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = |\cos x|$; (b) $y = \sin x - \left|\frac{\sin x}{2}\right|$; (c) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

19. Uzasadnić tożsamości trygonometryczne:

(a) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; (b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; (c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$;

(d) $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$; (e) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$; (f) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

Dla jakich kątów α są one prawdziwe?

20. Podane funkcje wyrazić za pomocą sinusa i cosinusa wielokrotności kąta α:

(a) $\sin^2\alpha$; (b) $\cos^2\alpha$; (c) $\sin^4\alpha$; (d) $\cos^4\alpha$.

21. (P) Podaj wartości wyrażeń:

(a) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{1}{2}$; (b) $\operatorname{arc\,ctg}1\cdot\operatorname{arc\,tg}1$; (c) $\frac{\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right)}{\arcsin 1}$; (d) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}-\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$.

22. Wyznaczyć dziedziny funkcji:

(a) $f(x)=\arcsin(2x+1)$; (b) $f(x)=\arccos\left(x^2+3/4\right)$;

(c) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,ctg}2^x$.

Lista czwarta

---

23. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

(a) $a_n=\frac{2+\cos n}{3-2\sin n}$; (b) $a_n=\sqrt[n]{2^n-1}$; (c) $a_n=1-\sqrt{n}$;

(d) $a_n=\sqrt{n+8}-\sqrt{n+3}$; (e*) $a_n=\frac{1}{4^1+1}+\frac{1}{4^2+2}+\ldots+\frac{1}{4^n+n}$.

24. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

(a) $a_n=\frac{2n+1}{n+2}$; (b) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$; (c) $a_n=\frac{n!}{10^n}$;

(d) $a_n=\frac{1}{n^2-6n+10}$; (e) $a_n=\frac{4^n}{2^n+3^n}$; (f) $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

25. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n}{n+4}=-1$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$.

26. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+4}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2+1}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^{30}}{\left(n^3+1\right)^{20}}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-4^n}{5^n-4^{n+2}}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3+1}}$.

27. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left\lfloor n\sqrt{12}\right\rfloor}{\left\lfloor n\sqrt{3}\right\rfloor}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\sin n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

28. Obliczyć granice z liczbą e:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-2}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{5n}\right)^n\left(\frac{5n+1}{2n}\right)^n$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\ln n}{\ln n}\right)^{\ln n^2}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n-(n+2)^n}{(n+2)^n-(n+3)^n}$.

29. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1\right)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2^n - 3^n)$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$.

Lista piąta

---

30. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^5 = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to\ 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

31. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}$; (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^4-16}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$; (f) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; (g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+1}{3^x+2}$;

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; (k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+2}{x+1}$; (l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

32. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sgn} x$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$.

33. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cos \dfrac{1}{x^2} = 0$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sin x}{x^2} = 0$.

34. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arc\,tg} x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}$; (h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x+2}$; (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\pi - x^e}{x-1}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} [1+\operatorname{tg}(2x)]^{\operatorname{ctg} x}$; (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[6]{1-x}}{x}$;

35. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^{11}+1}{(x-1)^{10}}$; (c) $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+2}{x+1}$; (e) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x-2^x}$; (f) $f(x) = \dfrac{2x^2+\sin x}{x}$;

(g) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x-1}$; (h) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$; (i) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin x - 1}$.

Lista szósta

36. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla}\, x < 0, \\ a + b\sin x & \text{dla}\, 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ 1 & \text{dla}\, x > \pi/2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} + 1 & \text{dla}\, x < -1, \\ b - 2x & \text{dla}\, x \geqslant -1; \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{dla}\, x < -1, \\ 2x & \text{dla}\, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3 + bx & \text{dla}\, x > 0. \end{cases}$

Naszkicować wykres funkcji z przykładu (a).

37. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+x+2} & \text{dla } x \neq 1,\, 2 \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x^2) - \ln(x^2+1)} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

38. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

(a) $x^3 + 6x - 2 = 0,\ [0,1]$; (b) $x \sin x = 7,\ \left[2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$; (c) $\ln(x+2) + x = 0,\ [-1,0]$;

(d) $\left(\sqrt{x}+1\right)^7 = 2 - x,\ [0,1]$; (e) $3^x + x = 3,\ [0,1]$; (f) $2^x + 8^x = 11,\ [1,2]$.

Wyznaczyć rozwiązania równania (a) 0.125.

(*) Dlaczego jedynym rozwiązaniem równania $x + \log_2 x + 3^x = 11$ jest $x = 2$?

39. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

(a) $f(x) = x^3\ (x \in \mathbb{R})$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$;

(c) $f(x) = \sqrt{x}\ (x > 0)$; (d) $f(x) = \cos x\ (x \in \mathbb{R})$.

Lista siódma

40. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = \left|x^2 - x\right|,\quad x_0 = 1$; (b) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x),\quad x_0 = 0$; (c) $f(x) = \max\left\{x^2, 4\right\},\quad x_0 = 2$.

Naszkicować wykresy tych funkcji.

41. Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na pewnym przedziale, obliczyć pochodne funkcji:

(a) $y = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$; (b) $y = \dfrac{f\left(x^2\right)}{x}$; (c) $y = e^{-x} f\left(e^x\right)$;

(d) $y = f(x) \cos g(x)$; (e) $y = \sqrt{f^2(x) - g^2(x)}$; (f) $y = \operatorname{arc\,tg}\left[f(x)g(x)\right]$;

(g) $y = \ln \dfrac{f(x)}{g(x)}$; (h) $y = \operatorname{tg} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; (i) $y = f(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

42. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

(a) $3\cos x + \operatorname{tg} x$; (b) $e^x\left(x^2 - 3x + 1\right)$; (c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$; (d) $e^{-x}(5x+1)^2$;

(e) $\ln\left(x^4+1\right)\operatorname{tg}\sqrt{x}$; (f) $e^{1/x}\operatorname{arc\,tg}(4-x)$; (g) $\ln\left(\sin^2 x + 1\right)$; (h) $\sqrt{\arcsin x^2}$;

(i) $\dfrac{4}{\left(x^2+1\right)^3}$; (j) $\dfrac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$; (k) $\left(e^{2x}+1\right)^5$; (l) $(\sin x)^x$ $(0 < x < \pi)$;

(m) $(\arcsin x + \arccos x)^2$; (n) $\ln(2x) + \ln\dfrac{3}{x}$; (o) $\dfrac{\ln 2017}{x^2+1}$; (p) $e^5 \sin 2x + \sqrt{\pi}\cos 3x$.

43.* Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$, jeżeli:

(a) $f(x) = x + \ln x,\ \ y_0 = e + 1$; (b) $f(x) = \cos x - 3x,\ \ y_0 = 1$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x},\ \ y_0 = 3$; (d) $f(x) = x^3 + 3^x,\ \ y_0 = 4$.

44. (P) Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{2}$, $(1, f(1))$; (b) $f(x) = \ln\left(x^2+e\right)$, $(0, f(0))$; (c) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

(d) $f(x) = \sqrt{2^x+1}$, $(3, f(3))$; (e) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $\left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; (f) $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$, $(x_0, 1)$.

45. (a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

(b) Wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\dfrac{\pi}{4}$ z osią Ox.

(c) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

(d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

(e) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy.

46.* (a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200\,\mathrm{m}$. Kąt przy wierzchołku tego trójkata, zmierzony z dokładnością 0.01 rad wynosi $\pi/3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

(b) Objętość kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością $1\,\mathrm{cm}^3$, wynosi $36\pi\,\mathrm{cm}^3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnośścią można obliczyć średnicę tej kuli?

(c) Do szybu puszczono swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością 0.1 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł 4.1 s? Przyjąć $g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$.

(d) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

47. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(2^x+1\right)}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\sin\frac{\pi}{2}x}{\ln x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$; (f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arc\,ctg} x$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; (h) $\lim\limits_{x\to\pi^-}(\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; (i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; (k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$; (l) $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)^x$;

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$; (n) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$; (o) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

Lista ósma

48. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; (b) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$; (c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$;

(d) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$; (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$; (f) $f(x) = xe^{-3x}$;

(g) $f(x) = x\ln^2 x$; (h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; (i) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

49. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2$; (b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; (c) $f(x) = \frac{2^x}{x}$;

(d) $f(x) = (x+1)e^{-x}$; (e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$; (f) $f(x) = \left|x^2 - 5x - 6\right|$;

(g) $f(x) = x\ln x$; (h) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; (i) $f(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

50. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x,\ [1,5]$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2},\ [-2,2]$;

(c) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{9-x}$; (d) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|},\ [-1,4]$;

(e) $f(x) = 1 - \left|9 - x^2\right|,\ [-5,1]$; (f) $f(x) = \sin^3 x - 6\sin x,\ [-\pi/2, \pi/2]$;

(g) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$; (h) $f(x) = \arcsin x + \arccos(1-x)$.

51. (P) Obliczyć f', f'' funkcji:

(a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; (b) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$; (c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

(d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; (e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; (f) $f(x) = x^3\ln x$.

52. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

(a) $f(x) = x(x-1)(x-3)$; (b) $f(x) = xe^{-x}$; (c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$;

(d) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$; (e) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; (f) $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$;

(g) $f(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin 2x$; (h) $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; (i) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Lista dziewiąta

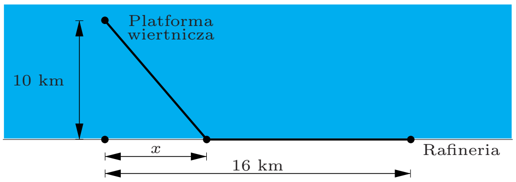
53. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

(a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$; (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

(d) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$; (e) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; (f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

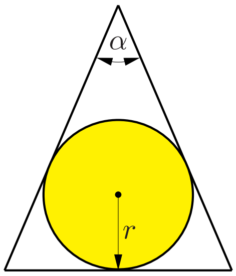
(g) $f(x) = xe^{2x}$; (h*) $f(x) = \sin x + \sin 3x$; (i) $f(x) = x^2 \ln x$.

54. Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od prostoliniowego brzegu. Ropa z platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

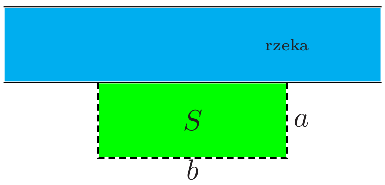


55. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $22.50\,\mathrm{m}^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\,\mathrm{m}^2$ blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

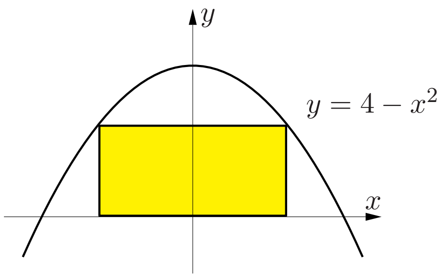
56. Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkata równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



57. Jakie powinny być wymiary a, b prostokątnego pola o powierzchni S, którego naturalnym bokiem jest prostoliniowy brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?



58. W parabolę o równaniu $y = 4 - x^2$ wpisano prostokąt, w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.



Lista dziesiąta

59. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :

(a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$;

(c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$; (d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

60. Napisać wzory Maclaurina z n-tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

(a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$; (b) $f(x) = \cosh x$; (c) $f(x) = \cos x$; (d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

61. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

(a) $\operatorname{tg} x \approx x, \ |x| \leqslant \frac{\pi}{12}$; (b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2, \ |x| \leqslant 0.1$;

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \ |x| \leqslant 0.25$; (d) $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \ |x| < 0.1$.

62. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

(a) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3}; (b) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3};

(c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4}; (d) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5}.

Lista jedenasta

63. Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny obliczyć:

(a) $\int\limits_{-2}^{1} (2x-1)\,dx$; (b) $\int\limits_{2}^{3} x^2\,dx$.

Wskazówka. Zastosować odpowiednio wzory

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, (b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

64. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

(a) $\int\limits_{1}^{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; (b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1}\,dx$; (c) $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{x^2+1}$;

(d) $\int\limits_{-1}^{2} x\left(1+x^3\right) dx$; (e) $\int\limits_{1}^{2} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx$; (f) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

65. Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{2n}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n} + \ldots + \sqrt{n+n}\right)\right] = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

66. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

(a) $\int \left(x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x}\right) dx$; (b) $\int \frac{(1-x)\,dx}{1+\sqrt{x}}$; (c) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

(d) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x - \sin x}$; (e) $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$; (f) $\int e^{-x} \cdot 3^{2x}\,dx$.

67.* Znaleźć wielomian najniższego stopnia, który:

(a) w punkcie $x = 1$ ma minimum lokalne właściwe, a w punkcie $x = 3$ maksimum lokalne, a ponadto w punkcie $x = 0$ przyjmuje wartość 2;

(b) dla $x = 2$ ma punkt przegięcia wykresu, przy czym wartość wielomianu i jego pochodna są w tym punkcie równe odpowiednio 1 i 2.

68. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$; (b) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 3x$; (c) $y = \frac{1}{x^2},\ y = x,\ y = 4$;

(d) $y = 1,\ y = \frac{4}{x^2+1}$; (e) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$; (f) $y = x + \sin x,\ y = x,\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$;

(g) $y = x^2,\ x = y^2$; (h) $yx^4 = 1,\ y = 1,\ y = 16$; (i) $y^2 = -x,\ y = x - 6,\ y = -1,\ y = 4$.

Lista dwunasta

---

69. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int xe^{-3x}\,dx$; (b) $\int (x+1)^2 e^x\,dx$; (c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}\,dx$; (d) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

(e) $\int x^2 \sin x\,dx$; (f) $\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; (g) $\int \ln(x+1)\,dx$; (h) $\int \arccos x\,dx$;

(i) $\int e^{2x} \sin x\,dx$; (j) $\int \sin x \sin 3x\,dx$; (k) $\int \sin 3x \cos x\,dx$; (l) $\int \cos x \cos 5x\,dx$;

(m) $\int \sin^2 x\,dx$; (n) $\int \cos^4 x\,dx$; (o) $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$; (p*) $\int x \sin x e^x\,dx$.

70. Metodą całkowania przez części obliczyć całki oznaczone:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} xe^{-x}\,dx$; (b) $\int\limits_{0}^{1} x^2 e^{2x}\,dx$; (c) $\int\limits_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

(d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x\,dx$; (e) $\int\limits_{0}^{\pi} x(1+\cos x)\,dx$; (f) $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

71. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; (b) $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x}\,dx$; (c) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$; (d) $\int x \sin\left(x^2+4\right) dx$;

(e) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}$; (f) $\int (5-3x)^{10}\,dx$; (g) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; (h) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

(i) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; (j) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; (k) $\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; (l) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

72. Obliczyć całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

(a) $\int\limits_0^\pi \sin x e^{\cos x}\,dx,\ \cos x = t;$ (b) $\int\limits_1^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}},\ 1+x=t;$

(c) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx,\ \sqrt{1+x}=t;$ (d) $\int\limits_1^e \ln x\,dx,\ \ln x = t;$

(e) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)},\ x=t^2;$ (f) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx,\ x=3\sin t;$ (g) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}},\ e^x=t.$

73. (P) Obliczyć całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7};$ (b) $\int \frac{dx}{x+5};$ (c) $\int \frac{5\,dx}{(2-7x)^3};$ (d) $\int \frac{8\,dx}{9x+20}.$

Lista trzynasta

---

74. Obliczyć całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29};$ (b) $\int \frac{(6x+3)\,dx}{x^2+x+4};$ (c) $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2-10x+29};$ (d) $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2+6x+2}.$

75. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)};$ (b) $\int \frac{x^2\,dx}{x+1};$ (c) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2};$ (d) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-9};$

(e) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$ (f) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{2x^2+x+1};$ (g) $\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18};$ (h) $\int \frac{dx}{x(x^2-4)};$

(i) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20};$ (j) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5};$ (k) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)};$ (l) $\int \frac{x\,dx}{x^4-1}.$

76. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \sin^3 x\,dx;$ (b) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx;$ (c) $\int \cos^4 x\,dx;$

(d) $\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx;$ (e) $\int \cos^2 x\cos 2x\,dx;$ (f*) $\int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx.$

77. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x};$ (b) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx;$ (c) $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x};$

(d) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x};$ (e) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x};$ (f) $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^3 x};$

(g) $\int \frac{dx}{\cos x};$ (h) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x};$ (i) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}.$

Lista czternasta

78. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ x=0,\ y=0$; (b) $4y=x^2,\ y=\dfrac{8}{x^2+4}$; (c) $y=\ln x,\ x=e,\ y=-1$;

(d) $y=\operatorname{tg}x,\ y=\operatorname{ctg}x\ (0<x<\pi/2)$; (e) $y=\sqrt{9-x^2},\ y=1,\ y=2$; (f) $y=2^x,\ y=4^x,\ y=16$.

79. Obliczyć długości krzywych:

(a) $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1},\ 2\leqslant x\leqslant 3$; (b) $y=x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1$; (c) $y=2\sqrt{x^3},\ 0\leqslant x\leqslant 11$;

(e) $y=e^x,\ \dfrac{1}{2}\ln 2\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\ln 3$; (g) $y=\dfrac{x^5}{10}+\dfrac{1}{6x^3},\ 1\leqslant x\leqslant 2$; (h) $y=1-\ln\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

80. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

(a) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2x-x^2,\ Ox$; (b) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\sqrt{5},\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}},\ Oy$;

(c) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\operatorname{tg}x,\ Ox$; (d) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ Oy$;

(e) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^3,\ Oy$; (f) $T\colon 1\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x},\ Oy$;

(g) $T\colon 1\leqslant x\leqslant 4,\ \dfrac{4}{x}\leqslant y\leqslant 5-x,\ Ox$; (h) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\sin x+\cos x,\ Ox$;

(i) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\sin x,\ y=2$; (j) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x-x^2,\ x=2$.

81. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów funkcji f wokół wskazanych osi:

(a) $f(x)=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ Ox$; (b) $f(x)=\sqrt{4+x},\ -4\leqslant x\leqslant 2,\ Ox$;

(c) $f(x)=\ln x,\ 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\ Oy$; (d) $f(x)=|x-1|+1,\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ Oy$;

(e) $f(x)=\sqrt{4-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ Ox$; (f) $f(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{x}{3}\right),\ 1\leqslant x\leqslant 3,\ Ox$;

(g) $f(x)=\dfrac{x-1}{9},\ 1\leqslant x\leqslant 10,\ Oy$; (h) $f(x)=\dfrac{x^2}{2},\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\ Oy$.

82. (a) Siła rozciągania sprężyny jest wprost proporcjonalna do jej wydłużenia (współczynnik proporcjonalności wynosi k). Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości l rozciągnąć do długości L.

(b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D=2\,\mathrm{m}$, a długość $L=6\,\mathrm{m}$. Obliczyć pracę, jaką potrzeba wykonać, aby opróżnić zapełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Masa właściwa wody $\gamma=1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

83. (a) Punkt materialny zaczął poruszać się prostoliniowo z prędkością początkową $v_0=10\,\mathrm{m/s}$ i przyspieszeniem $a_0=2\,\mathrm{m/s^2}$. Po czasie $t_1=10\,\mathrm{s}$ punkt ten zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1=-1\,\mathrm{m/s^2}$. Znaleźć położenie punktu po czasie $t_2=20\,\mathrm{s}$ od chwili rozpoczęcia ruchu.

(b) Dwie cząstki elementarne położone w odległości $d=36$ zaczynają zbliżać się do siebie z prędkościami odpowiednio $v_1(t)=10t+t^3$, $v_2(t)=6t$, gdzie $t\geqslant 0$. Po jakim czasie nastąpi zderzenie tych cząstek?

Przykładowe zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

I kolokwium

Zestaw A

1. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{5^x}{5^x - 25}$.

2. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach i następnie obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n+1} + 2^{2n+1}}$.

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ w punkcie $x_0 = \sqrt{3}$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 3x + 2}$.

Zestaw B

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + n^3 + 1} - n^2\right)$.

2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji $f(x) = e^{\sqrt{2x - x^2}}$. Następnie obliczyć jej pochodną.

3. Sformułować twierdzenie Bolzano i uzasadnić, że równanie $2^x + x = 5$ ma tylko jedno rozwiązanie.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} [x(\ln(1 + x) - \ln x)]$.

Zestaw C

1. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{dla } 0 < x \leqslant 1, \\ bx^2 - 2 & \text{dla } 1 < x \end{cases}$ była ciągła na $\mathbb{R}$.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n + 2}{3n + 1}\right)^{12n - 5}$.

3. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = xe^{-x}$, która jest równoległa do prostej $y = e^2$.

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3}$.

Zestaw D

1. Znaleźć dziedzinę naturalną funkcji $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$ i obliczyć $f'(x)$.

2. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach i zastosować je do obliczenia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + 2n^2 + 3}$.

3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^3}{x^3 + x}$.

4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^{x^3 - 1}$ w punkcie (x_0, e^7).

II kolokwium

Zestaw A

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$.

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ na przedziale $[0, 2]$.

3. Całkując przez części obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{2\pi} x \cos \dfrac{x}{2}\, dx$.

4. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox figury ograniczonej krzywą $y = \sin x$ i prostą $y = 2x/\pi$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

Zestaw B

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 1/x + \ln x$.

2. Podać wymiary prostokątnej działki wytyczonej z obszaru w kształcie półkola o promieniu R tak, aby miała ona największe pole.

3. Przez podstawienie $x = t^2$ $(t \geqslant 0)$ obliczyć całkę $\int \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\, dx$. Następnie wyznaczyć funkcję pierwotną F funkcji podcałkowej spełniającą warunek $F(1) = 2/3$.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = \sin^4 x$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x - x - x^3/3$.

2. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \approx 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2$ dla $|x| \leqslant 0.1$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x^2$ i prostą $x = 0$. Sporządzić rysunek.

4. Obliczyć całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = 1/\left(x^3 + 4x\right)$. Sprawdzić otrzymany wynik.

Zestaw D

1. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$.

3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = x$, $x + y = 2$. Sporządzić rysunek.

4. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \operatorname{arc\,ctg} x\, dx$.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $y = \ln x$, $\quad x = e^2$, $\quad y = -1$. Sporządzić rysunek.

2. Metodą podstawiania obliczyć całkę $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$.

3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+9}-n}{\sqrt{n^2+4}-n}$.

4. W przedziale $[-3,4]$ wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\sin \pi x}$.

6. Dobrać parametry p, q tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} e^x+x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ x^2+px+q & \text{dla } 0 < x \end{cases}$ miała pochodną w punkcie $x_0 = 0$. Narysować wykres otrzymanej funkcji.

Zestaw B

1. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.

2. Obliczyć całkę $\int \frac{(4x+6)\,dx}{x^2+4x+13}$.

3. Wyznaczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x^5)}{\sin(2x^2)\sin(3x^3)}$.

4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ wokół osi Ox.

5. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 \ln x$.

6. Wyznaczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)(n+1)!}{n^2\,(n!+4)}$.

Zestaw C

1. Obliczyć całkę $\int x^2 \sin x\, dx$.

2. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = (x-3)e^x$.

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez krzywe: $y = 3x^2 - 6x$, $y = 6 + 3x - 3x^2$. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, która jest prostopadła do prostej $x + 2y - 3 = 0$.

5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{n^2+3n+1}$.

6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$.

Zestaw D

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykres funkcji $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ oraz prostą $y = 1/2$. Sporządzić rysunek.

2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = (2-x)e^{2x}$.

3. Obliczyć całkę $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+25}$.

4. Pokazać, że równanie $x + \ln x - 2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2^n+1)\left(3^{n+1}+2\right)}{6^n+5}$.

6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x-1}}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Obliczyć granicę ciągu $a_n = n\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)$.

2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-2}$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = \left(x^2+2x-1\right)e^{-x}$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, wykresem paraboli $y = x^2+3$ i styczną do niej w punkcie o odciętej $x_0 = 3$. Sporządzić rysunek.

5. Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?

6. Podstawiając $\operatorname{arc\,tg} x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\ln(2\operatorname{arc\,tg} x)\,dx}{1+x^2}$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw B

1. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\dfrac{x^2+x+4}{x^3+4x}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x^2+2x+1}{2x-1}$ oraz starannie go naszkicować.

3. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \dfrac{1}{2^n\left(\sqrt{2^{2n}+1}-2^n\right)}$.

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} 2x \ln x$.

6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji: $y = 0$, $y = \ln x$, $y = \ln(1-x)$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = \left(x^2-6x+2\right)e^{x}$ jest jednocześnie malejąca i wklęsła.

4. Narysować i obliczyć pole obszaru ograniczonego osią Ox, wykresem funkcji $y = x^3$ i styczną do niego w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.

5. Z kawałków blachy w kształcie koła o promieniu R wycinamy prostokątne podkładki. Wyznaczyć ich wymiary tak, aby odpady były najmniejsze.

6. Podstawiając $\sin x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\displaystyle\int \sin x \cos x \operatorname{arc\,tg} \sin x \, dx$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(\operatorname{tg} x)$.

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $g(x) = \dfrac{3x^2+4x-5}{2-3x}$ oraz starannie go naszkicować.

3. Obliczyć granicę ciągu $y_n = 3n\left(\sqrt{4n^2-1} - 2n\right)$.

4. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła.

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

6. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\dfrac{6x}{4-9x^2}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

Egzamin na ocenę celującą (luty 2016 r.)

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej n rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{n}$ zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.

2. Jakie wartości może przyjąć granica $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f\left(x^2\right)}{f(x)}$, gdy f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,1)$ i dodatnią na $(0,1)$?

3. Znaleźć wielomian, który tylko w -1 i 2 ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w 0 ma punkt przegięcia.

4. Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$ $(a \geqslant 0)$. Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru $\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ wokół osi Oy. Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół osi oddalonej o R $(R > r)$ od jego środka.