

Laboratorium Podstaw Elektrotechniki

Temat ćwiczenia:

Badanie układów trójfazowych

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Celem i zakres ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie zjawisk występujących w układach trójfazowych, porównanie wyników pomiaru z analizą teoretyczną oraz interpretacja uzyskanych wyników za pomocą wykresów wskazowych.

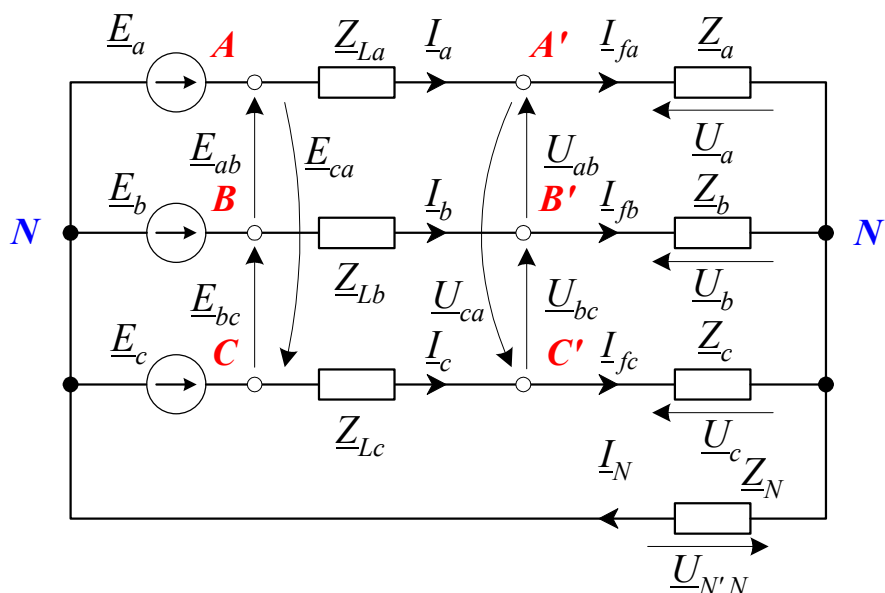
Przedmiotem badań jest sieć trójfazowa, zasilana z symetrycznego źródła napięcia, przy dwóch rodzajach połączeń odbiornika - w gwiazdę oraz trójkąt, zarówno w warunkach pracy normalnej, jak i awaryjnej.

Jeżeli napięcia źródłowe tworzą układ symetryczny, a impedancja obciążenia każdej fazy jest taka sama, to taki układ nazywamy układem **symetrycznym**. Jeśli któryś z tych warunków nie jest spełniony, to taki układ jest układem **niesymetrycznym**.

2. Układy trójfazowe z odbiornikiem połączonym w gwiazdę.

2.1. Zależności ogólne.

Rozpatrzmy przedstawiony na Rys. 2.1 układ trójfazowy. Składa się on z trzech odbiorników $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ połączonych w gwiazdę i zasilanych trzema synchronicznymi źródłami napięcia $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$, połączonymi również w gwiazdę o punkcie neutralnym N .



Rys. 2.1

Przedstawiony układ jest układem czteroprzewodowym, tj. punkty neutralne źródła i odbiornika połączone są dodatkowo tzw. przewodem zerowym o impedancji \underline{Z}_N .

W układzie z odbiornikiem połączonym w gwiazdę stosuje się następujące nazwy wielkości:

- Prądy $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$ - nazywa się prądami przewodowymi, natomiast $\underline{I}_{fa}, \underline{I}_{fb}, \underline{I}_{fc}$ - prądami fazowymi, przy czym:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{fa}, \underline{I}_b = \underline{I}_{fb}, \underline{I}_c = \underline{I}_{fc} \quad (2.1)$$

- Napięcia $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$ nazywa się napięciami fazowymi źródła, a $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$ napięciami fazowymi odbiornika.

- Napięcia $\underline{E}_{ab}, \underline{E}_{bc}, \underline{E}_{ca}$ oraz $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ są to tzw. napięcia międzyfazowe (*dawn. przewodowe*) odpowiednio - źródła i odbiornika. Wynikają one z różnicy napięć fazowych:

$$\underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b, \quad \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c, \quad \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a \quad (2.2)$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b, \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c, \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a \quad (2.3)$$

Niezależnie od impedancji odbiornika, wskazy napięć międzyfazowych tworzą trójkąt, tzn. ich suma jest zawsze równa zero (oznacza to, że układ napięć międzyfazowych zawiera wyłącznie składowe symetryczne zgodną i przeciwną)

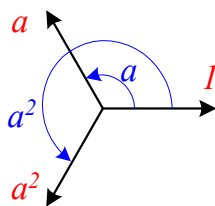
$$\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} + \underline{U}_{ca} = 0, \quad \underline{E}_{ab} + \underline{E}_{bc} + \underline{E}_{ca} = 0 \quad (2.4)$$

Jeżeli impedancje linii zasilających są pomijalnie małe to odpowiednie napięcia międzyfazowe źródła i odbiornika są sobie równe.

W dalszej części niniejszego opracowania zakładać będziemy zgodną kolejność faz źródeł napięcia, czyli:

$$\begin{aligned} \underline{E}_a &= E e^{j\psi} \\ \underline{E}_b &= e^{-j\frac{2\pi}{3}} \underline{E}_a = a^{-1} \underline{E}_a = a^2 \underline{E}_a \\ \underline{E}_c &= e^{j\frac{2\pi}{3}} \underline{E}_a = a \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie: $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ - oznacza – operator obrotu o kąt 120°



Rys. 2.2

W ogólnym przypadku odbiornika połączonego w gwiazdę wyznaczenie prądów w poszczególnych fazach układu odbywa się w następujący sposób:

1. Wyznaczamy napięcie między punktami neutralnymi odbiornika i źródła.:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} \quad (2.6)$$

2. Wykorzystując (2.6) obliczamy napięcia fazowe odbiornika:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} \quad (2.7)$$

3. Przy założeniu, że odbiornik nie zawiera sprzężeń magnetycznych, wyznaczmy prądy w fazach odbiornika oraz w przewodzie zerowym:

$$\underline{I}_{fa} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_{La}}, \quad \underline{I}_{fb} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_{Lb}}, \quad \underline{I}_{fc} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_{Lc}}, \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c \quad (2.8)$$

4. Prądy przewodowe określone są związkami (2.1)

Rozważyć można dwa szczególne przypadki zasilania:

a) $\underline{Z}_N = 0 \quad \underline{Y}_N = \infty$ -

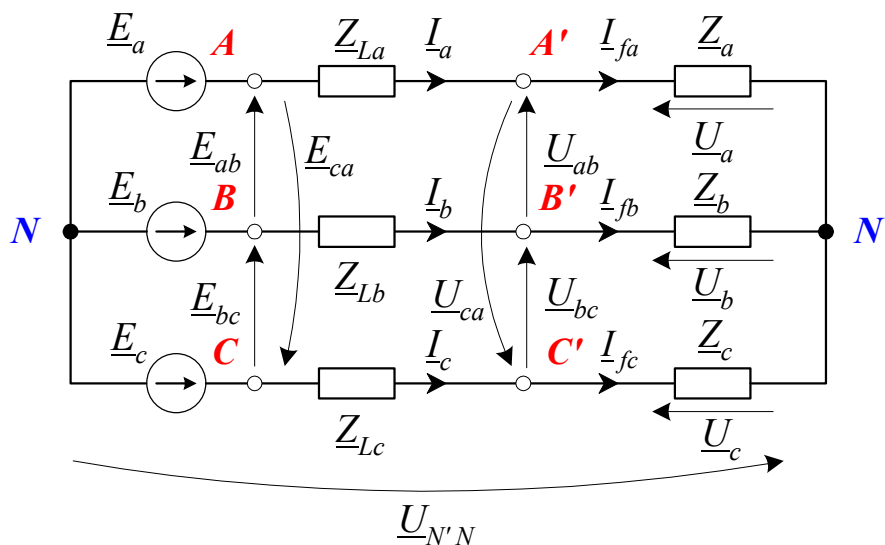
Wówczas dla dowolnych wartości impedancji fazowych (różnych od zera)

$$\underline{U}_{N'N} = 0 \quad (2.9)$$

oraz

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a, \underline{U}_b = \underline{E}_b, \underline{U}_c = \underline{E}_c \quad (2.10)$$

b) $\underline{Y}_N = 0 \quad \underline{Z}_N = \infty$ - jest to zasilanie trójprzewodowe (tzw. odbiornik z izolowanym punktem zerowym) (Rys. 2.3).

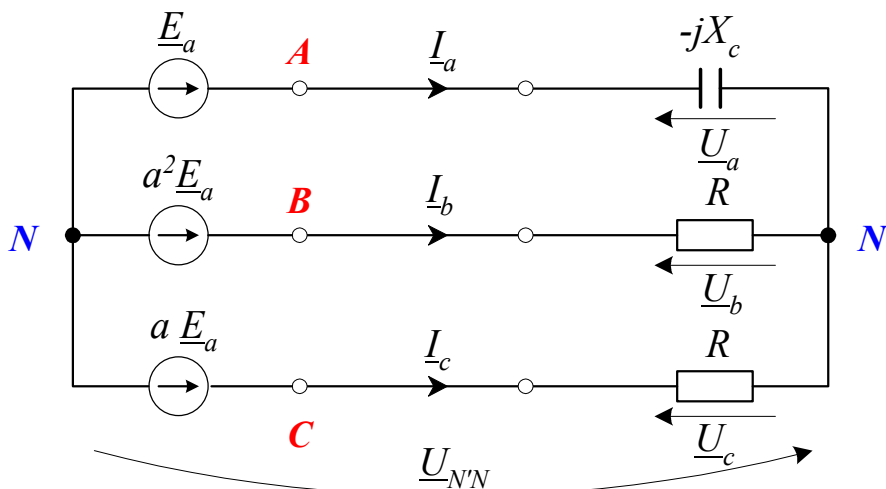


Rys. 2.3

Zachodzi w tym przypadku oczywisty związek

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \quad (2.11)$$

Jako ilustrację rozważmy obwód przedstawiony na Rys. 2.4. W układzie tym w jednej fazie włączono kondensator, a pozostałych dwóch rezystory. Niech dodatkowo spełniony będzie warunek $X_c = R$. Wykażemy, że układ ten można wykorzystać do kontroli kolejności faz, poprzez pomiar napięć w fazach zawierających rezystory.



Rys. 2.4

Uwzględniając w zależności (2.6) zgodną kolejność faz wg (2.5) obliczamy napięcie $\underline{U}_{N'N}$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{1}{-jX_c} \underline{E}_a + \frac{1}{R} \underline{E}_b + \frac{1}{R} \underline{E}_c}{\frac{1}{-jX_c} + \frac{2}{R}} \stackrel{R=X_c}{=} \frac{j \underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c}{2+j} = \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a \quad (2.12)$$

Stąd na podstawie (2.7), wartości zespolone napięć fazowych \underline{U}_b i \underline{U}_c wynoszą

$$\begin{aligned} \underline{U}_b &= \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = a^2 \underline{E}_a - \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a = \left(a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right) \underline{E}_a \\ \underline{U}_c &= \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = a \underline{E}_a - \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a = \left(a - \frac{-1+j}{2+j} \right) \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.13)$$

Po kilku prostych działaniach

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{-1+j}{2+j} = \frac{(-1+j)(2-j)}{5} = \frac{-1+3j}{5} = -\frac{1}{5} + j\frac{3}{5}$$

$$\left| a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right| = \left| -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \right) \right| = \frac{1}{10} \left| -3 - j(5\sqrt{3} + 6) \right| \approx 1.5$$

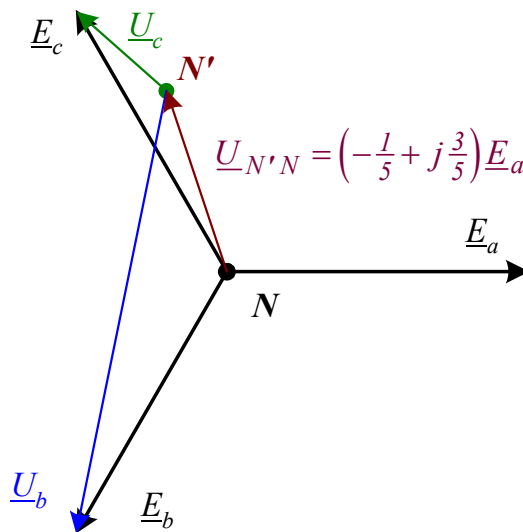
$$\left| a - \frac{-1+j}{2+j} \right| = \left| -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \right) \right| = \frac{1}{10} \left| -3 + j(5\sqrt{3} - 6) \right| \approx 0.4$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} U_b &= \left| a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right| E_a \approx 1.5 E_a \\ U_c &= \left| a - \frac{-1+j}{2+j} \right| E_a = 0.4 E_a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Stwierdzamy więc, że napięcie fazowe w fazie opóźnionej względem fazy, w której włączony został kondensator, jest blisko czterokrotnie większe aniżeli w fazie poprzedzającej tę fazę (por. wykres wskazowy Rys. 2.5).

Jeżeli zatem jako rezystory użyjemy żarówek, wówczas łatwo zaobserwujemy różnicę w jasności ich świecenia, odzwierciedlającą różnicę wartości napięć (2.14).

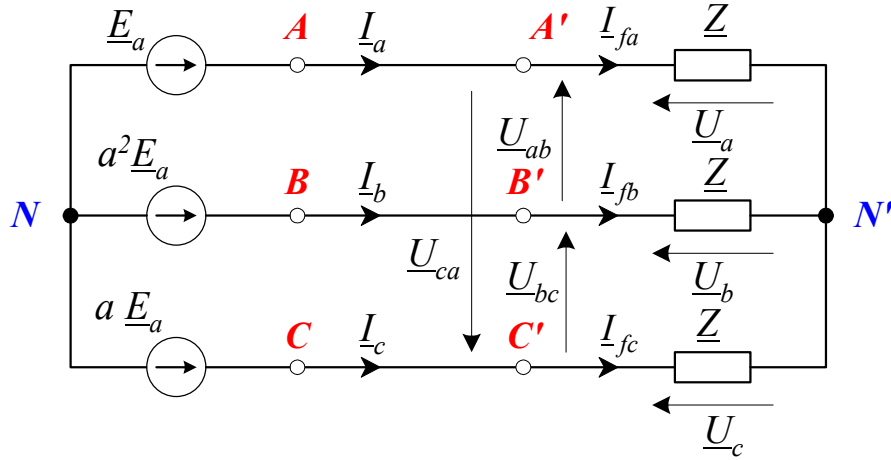


Rys. 2.5

2.2. Układ symetryczny.

W tym przypadku impedancje faz odbiornika są równe i wyrażają się wzorem:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (2.15)$$



Rys. 2.6

Ponieważ suma napięć fazowych symetrycznego źródła zgodnego jest równa zero, tak więc w tym przypadku $\underline{U}_{N'N} = 0$.

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y}(\underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c)}{3\underline{Y}} = 0 \quad (2.16)$$

gdzie: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Uwzględniając dodatkowo (2.7) stwierdzamy, że napięcia fazowe odbiornika (przy pominięciu impedancji przewodów zasilających) wynoszą odpowiednio:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a, \quad \underline{U}_b = \underline{E}_b, \quad \underline{U}_c = \underline{E}_c \quad (2.17)$$

Stąd obliczamy prądy poszczególnych faz :

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} e^{j(\psi - \varphi)} \\ \underline{I}_b &= \frac{\underline{E}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} a^2 e^{j(\psi - \varphi)} = a^2 \underline{I}_a, \\ \underline{I}_c &= \frac{\underline{E}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} a e^{j(\psi - \varphi)} = a \underline{I}_a \end{aligned} \quad (2.18)$$

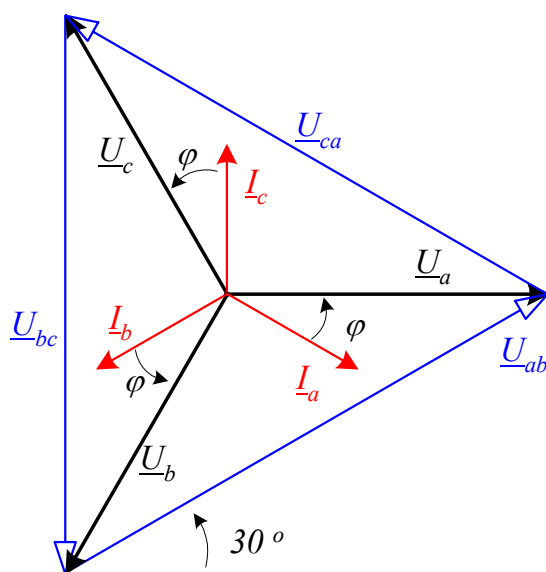
Uwzględniając (2.17) obliczamy napięcia międzyfazowe :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_a - \underline{U}_b = \underline{E}_a - a^2 \underline{E}_a = (1 - a^2) \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j30^\circ} \underline{E}_a \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_b - \underline{U}_c = a^2 \underline{E}_a - a \underline{E}_a = (a^2 - a) \underline{E}_a = -j\sqrt{3} \underline{E}_a \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_c - \underline{U}_a = a \underline{E}_a - \underline{E}_a = (a - 1) \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j150^\circ} \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.19)$$

Moduły napięć międzyfazowych są zatem jednakowe i równe modułowi napięcia fazowego pomnożonego przez $\sqrt{3}$

$$U = \sqrt{3} U_f \quad (2.20)$$

Na Rys. 2.7 przedstawiono przykładowy wykres wektorowy, dla układu symetrycznego z odbiornikiem o charakterze indukcyjnym.

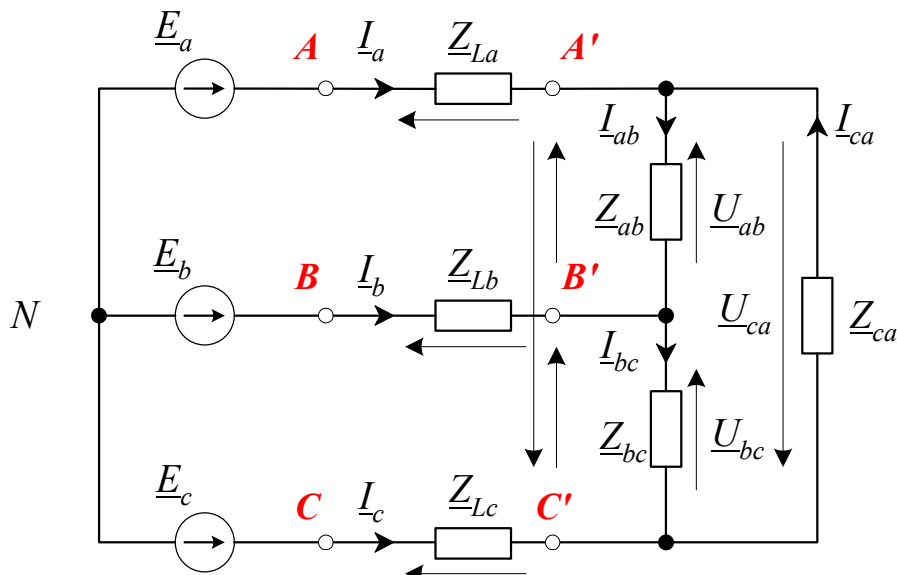


Rys. 2.7

3. Układy trójfazowe z odbiornikiem połączonym w trójkąt.

3.1. Zależności ogólne.

Drugim podstawowym układem odbiornika jest połączenie impedancji fazowych w tzw. trójkąt Rys. 3.1.



Rys. 3.1

Zachodzą w tym przypadku następujące (oczywiste) związki oraz właściwości:

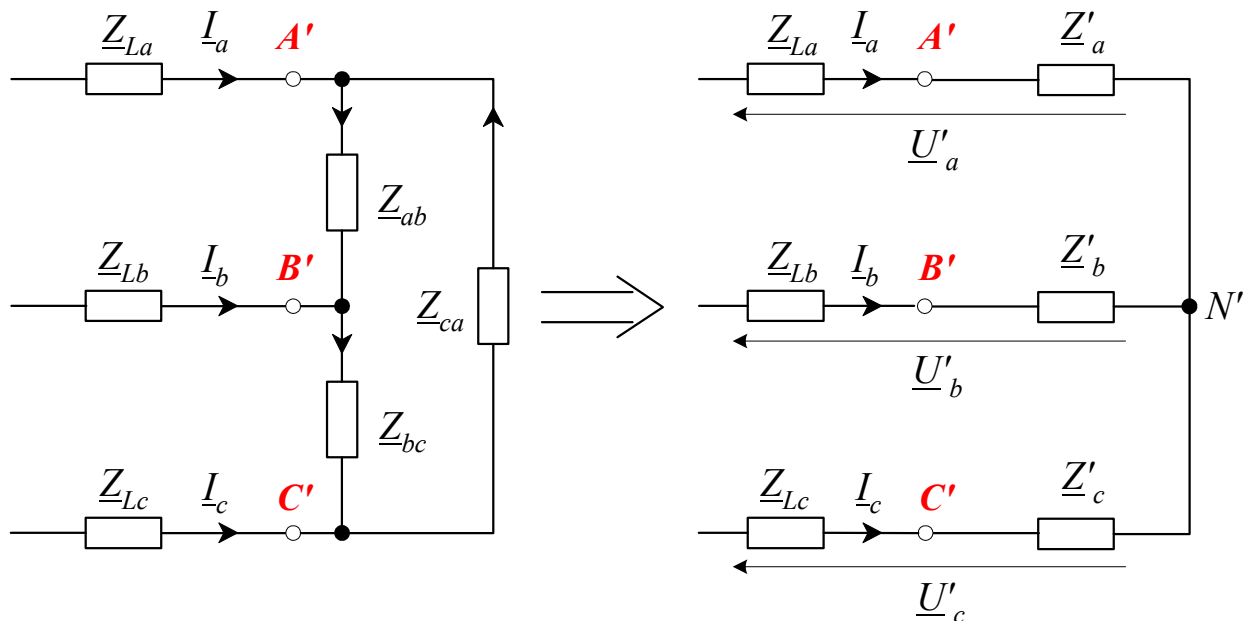
- odbiornik jest zasilany zawsze linią trójprzewodową ,
- prądy przewodowe stanowią różnice prądów fazowych

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}, \quad \underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}, \quad \underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \quad (3.1)$$

- napięcia fazowe odbiornika równe są napięciom międzyfazowym.

Obliczanie prądów w obwodzie może być przeprowadzane w następujący sposób:

1. Zamieniamy trójkąt w równoważną gwiazdę (zał. (3.2))



Rys. 3.2

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}, \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}, \quad \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} \quad (3.2)$$

2. Wykorzystując wzór (2.6) obliczamy zastępcze napięcie $\underline{U}_{N'N}$ ($\underline{Y}_N = 0$)

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}'_a + \underline{Z}_{La}}, \quad \underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}'_b + \underline{Z}_{Lb}}, \quad \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}'_c + \underline{Z}_{Lc}} \quad (3.4)$$

3. Prądy w fazach zastępczej gwiazdy odpowiadają prądom przewodowym układu z Rys. 3.1

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a \underline{U}'_a, \quad \underline{I}_b = \underline{Y}_b \underline{U}'_b, \quad \underline{I}_c = \underline{Y}_c \underline{U}'_c \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\underline{U}'_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}'_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}'_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} \quad (3.6)$$

4. Z odpowiednich "oczek" wyznaczamy napięcia fazowe odbiornika:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{E}_a - \underline{E}_b + \underline{Z}_{Lb} \underline{I}_b - \underline{Z}_{La} \underline{I}_a \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_b - \underline{E}_c + \underline{Z}_{Lc} \underline{I}_c - \underline{Z}_{Lb} \underline{I}_b \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_c - \underline{E}_a + \underline{Z}_{La} \underline{I}_a - \underline{Z}_{Lc} \underline{I}_c \end{aligned} \quad (3.7)$$

5. Ostatecznie prądy fazowe wynoszą

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}, \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}, \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} \quad (3.8)$$

Jeżeli impedancje linii są równe zero, wówczas kolejność wyznaczania prądów ulega zmianie.

Bezpośrednio na podstawie napięć źródłowych obliczamy napięcia fazowe

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= \underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a\end{aligned}\quad (3.9)$$

Następnie wg (3.8) wyznaczamy prądy fazowe, na podstawie których (stosując (3.1)) otrzymujemy prądy przewodowe.

Uwaga.

Należy zaznaczyć, że o ile zawsze jest spełniony warunek $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$, to niekoniecznie musi zachodzić $\underline{I}_{ab} + \underline{I}_{bc} + \underline{I}_{ca} = 0$.

Podobnie w przypadku gwiazdy - dla napięć międzyfazowych zawsze obowiązuje $\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} + \underline{U}_{ca} = 0$, natomiast nie musi być $\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 0$.

Z powyższej uwagi wynikają następujące wnioski dla odbiorników niesymetrycznych:

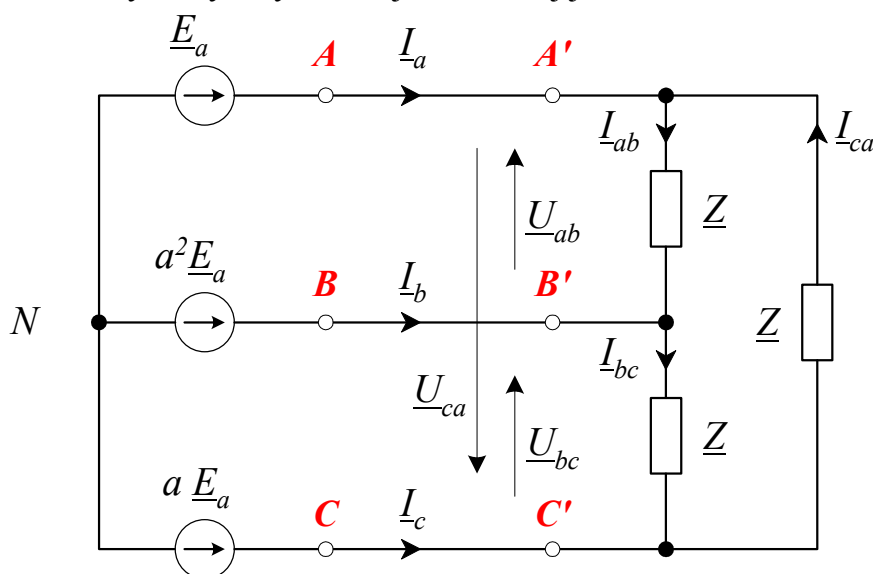
W przypadku gwiazdy, ogólnie nie można na podstawie napięć międzyfazowych "odtworzyć" napięć fazowych, natomiast dla trójkąta - prądów fazowych na podstawie prądów przewodowych.

3.2. Układ symetryczny.

Jeżeli układ odbiorczy jest symetryczny, tzn. gdy impedancje fazowe są sobie równe Rys. 3.3,

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad (3.10)$$

to ze względu na równość modułów napięć źródłowych, prądy w fazach odbiornika oraz prądy przewodowe również będą posiadać jednakowe moduły, a wskazy tych wielkości tworzyć będą odpowiedni układ symetryczny, o kolejności takiej jak źródło.



Rys. 3.3

Przyjmując zerową impedancję linii oraz symetryczne – zgodne zasilanie - możemy napisać:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= \underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b = \sqrt{3} e^{j30^\circ} \underline{E}_a = \sqrt{3} E e^{j(\psi+30^\circ)} = U e^{j(\psi+30^\circ)} \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c = -j\sqrt{3} \underline{E}_a = a^2 \underline{U}_{ab} = \sqrt{3} E e^{j(\psi-90^\circ)} = U e^{j(\psi-90^\circ)} \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j150^\circ} \underline{E}_a = a \underline{U}_{ab} = \sqrt{3} E e^{j(\psi+150^\circ)} = U e^{j(\psi+150^\circ)}\end{aligned}\quad (3.11)$$

gdzie: $\underline{E}_a = E e^{j\psi}$

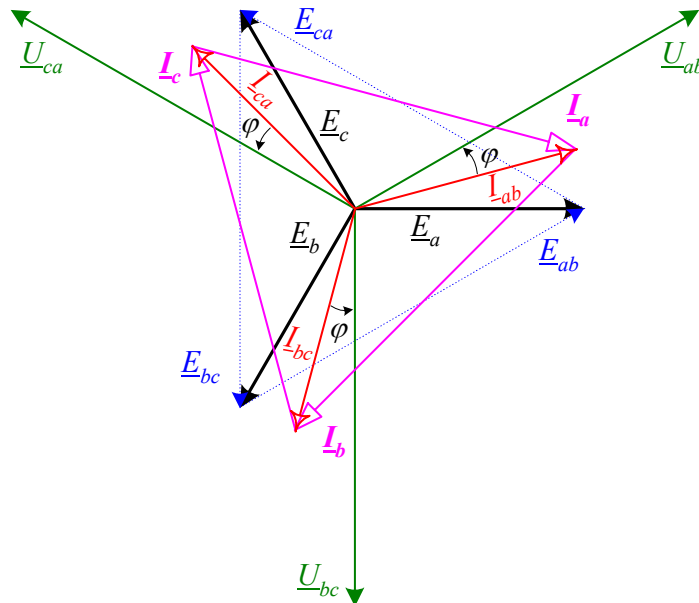
$$\begin{aligned}\underline{I}_{ab} &= \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(30^\circ + \psi - \varphi)} \\ \underline{I}_{bc} &= \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(\psi - 90^\circ - \varphi)} \\ \underline{I}_{ca} &= \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(\psi + 150^\circ - \varphi)}\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (1 - a) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{-j30^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi - \varphi)} \\ \underline{I}_b &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (a^2 - 1) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{-j150^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi - 120^\circ - \varphi)} = a^2 \underline{I}_a \\ \underline{I}_c &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (a - a^2) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{j90^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi + 120^\circ - \varphi)} = a \underline{I}_a\end{aligned}\quad (3.13)$$

Z ostatnich zależności możemy stwierdzić, że w układzie symetrycznym z odbiornikiem połączonym w trójkąt, moduły prądów przewodowych są $\sqrt{3}$ razy większe od modułów prądów fazowych odbiornika.

$$I = \sqrt{3} I_f \quad (3.14)$$

Przykładowy wykres wskazowy, uwzględniający wszystkie powyższe zależności, dla odbiornika o charakterze indukcyjnym ($\varphi = 15^\circ$), przedstawiono na Rys. 3.4.



Rys. 3.4

4. Moc w układach trójfazowych

4.1. Zależności ogólne

Moc czynna pobierana przez odbiornik trójfazowy równa się sumie mocy dostarczonej do poszczególnych faz układu. Dla odbiornika niesymetrycznego można zapisać ją następująco:

Dla gwiazdy:

$$P = P_a + P_b + P_c = \operatorname{Re} \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \operatorname{Re} \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \operatorname{Re} \underline{U}_c \underline{I}_c^* = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c \quad (3.15)$$

Dla trójkąta:

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = \operatorname{Re} \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \operatorname{Re} \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \operatorname{Re} \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = U_{ab} I_{ab} \cos \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \cos \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \cos \varphi_{ca} \quad (3.16)$$

Analogiczna sytuacja zachodzi w przypadku mocy biernej oraz pozornej

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = \operatorname{Im} \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \operatorname{Im} \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \operatorname{Im} \underline{U}_c \underline{I}_c^* = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c \quad (3.17)$$

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} = \operatorname{Im} \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \operatorname{Im} \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \operatorname{Im} \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = U_{ab} I_{ab} \sin \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \sin \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \sin \varphi_{ca} \quad (3.18)$$

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* = U_a I_a e^{j\varphi_a} + U_b I_b e^{j\varphi_b} + U_c I_c e^{j\varphi_c} \quad (3.19)$$

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_{ab} + \underline{S}_{bc} + \underline{S}_{ca} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = U_{ab} I_{ab} e^{j\varphi_{ab}} + U_{bc} I_{bc} e^{j\varphi_{bc}} + U_{ca} I_{ca} e^{j\varphi_{ca}} \quad (3.20)$$

W przypadku odbiornika symetrycznego równość modułów napięć oraz prądów fazowych pozwala na stosowanie uproszczonych zależności

$$\begin{aligned} P &= 3P_f = 3U_f I_f \cos \varphi = 3R I_f^2 \\ Q &= 3Q_f = 3U_f I_f \sin \varphi = 3X I_f^2 \\ \underline{S} &= 3\underline{S}_f = 3U_f I_f e^{j\varphi} = 3\underline{Z} I_f^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Po dodatkowym uwzględnieniu związków między napięciami fazowymi i międzyfazowymi dla odbiornika połączanego w gwiazdę oraz prądami fazowymi i przewodowymi w przypadku odbiornika połączanego w trójkąt otrzymujemy uniwersalne wzory na poszczególne moce, wyrażone wyłącznie za pomocą napięcia międzyfazowego i prądu przewodowego.

- Dla gwiazdy:

$$U = \sqrt{3} U_f, \quad I = I_f \quad (3.22)$$

- Dla trójkąta:

$$I = \sqrt{3} I_f, \quad U = U_f \quad (3.23)$$

A zatem zależności (3.21) przyjmują postać

$$\begin{aligned} P &= 3U_f I_f \cos \varphi = \underbrace{3 \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi}_{\text{dla gwiazdy}} = \underbrace{3U \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi}_{\text{dla trójkąta}} = \sqrt{3} U I \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} U I \sin \varphi, \quad \underline{S} = \sqrt{3} U I e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

4.2. Wybrane układy do pomiaru mocy.

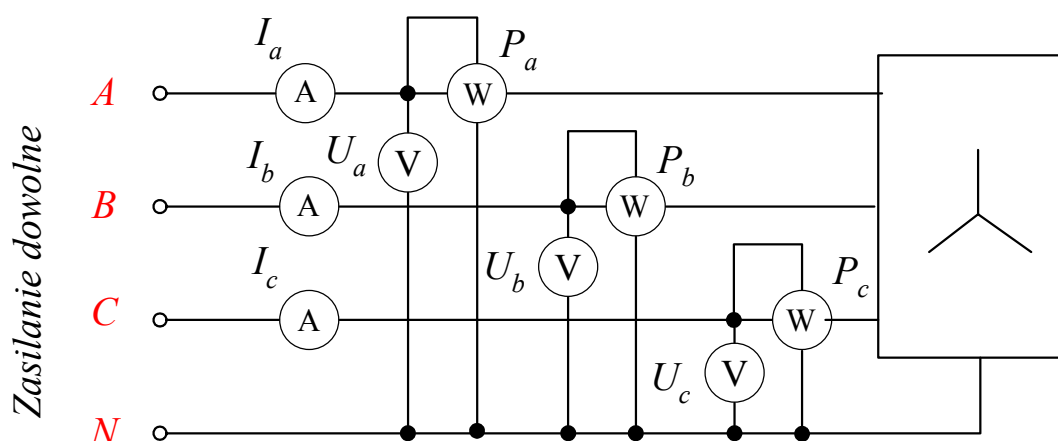
4.2.1. Pomiar mocy w układzie czteroprzewodowym.

a) Zasilanie dowolne, odbiornik niesymetryczny połączony w gwiazdę.

$$P = P_a + P_b + P_c \quad (4.1)$$

$$S = U_a I_a + U_b I_b + U_c I_c \quad (4.2)$$

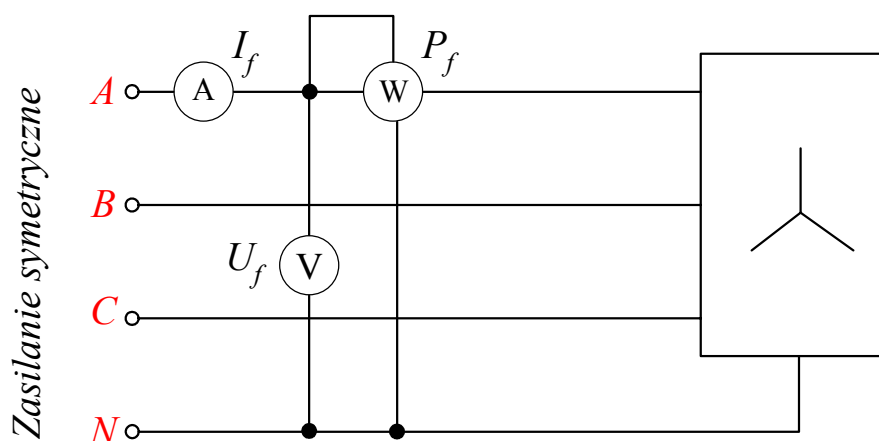
$$Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.3)$$



Rys. 4.1 Układ do pomiaru mocy za pomocą trzech watomierzy

b) Zasilanie symetryczne, odbiornik symetryczny połączony w gwiazdę, z punktem neutralnym.

$$P = 3P_f, \quad S = 3U_f I_f, \quad Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.4)$$

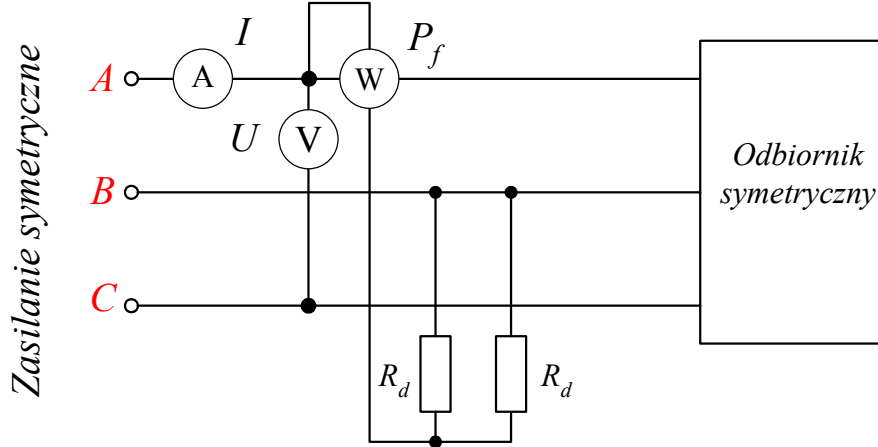


Rys. 4.2 Układ do pomiaru mocy za pomocą jednego watomierza

4.2.2. Pomiar mocy w układach trójprzewodowych

a) Zasilanie symetryczne, odbiornik symetryczny – dowolne połączenie odbiornika.

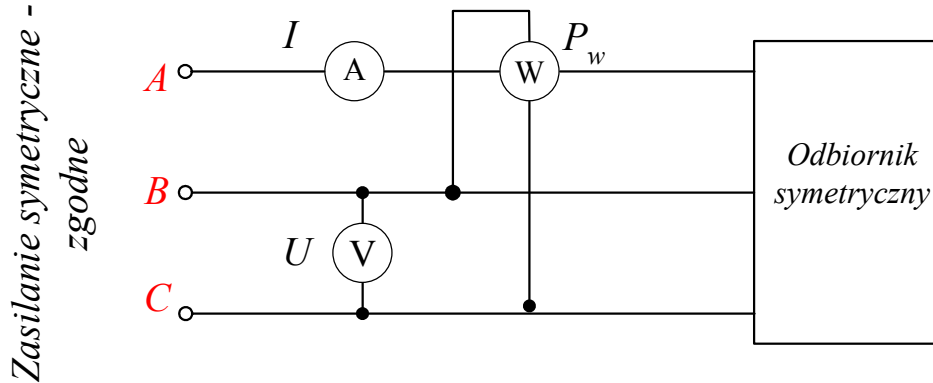
$$P = 3P_f, \quad S = \sqrt{3}UI, \quad Q = \pm\sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.5)$$



Rys. 4.3 Układ z tzw. sztucznym punktem zerowym.

b) Układ do bezpośredniego pomiaru mocy biernej.

$$Q = \sqrt{3}P_w \quad (4.6)$$



Rys. 4.4

Wzór (4.6) wykażemy dla przypadku odbiornika połączanego w gwiazdę

$$\begin{aligned} P_w &= \operatorname{Re} \underline{U}_w \underline{I}_w^* = \operatorname{Re} \underline{U}_{bc} \underline{I}_a^* = \operatorname{Re} \left\{ -j\sqrt{3} \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = -\sqrt{3} \operatorname{Re} \left\{ jU_a e^{j\psi_{u_a}} I_a e^{-j\psi_{i_a}} \right\} = \\ &= -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j e^{j\varphi} \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j \cos \varphi - \sin \varphi \right\} = \\ &= -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j (\cos \varphi + j \sin \varphi) \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j \cos \varphi - \sin \varphi \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.7)$$

A zatem

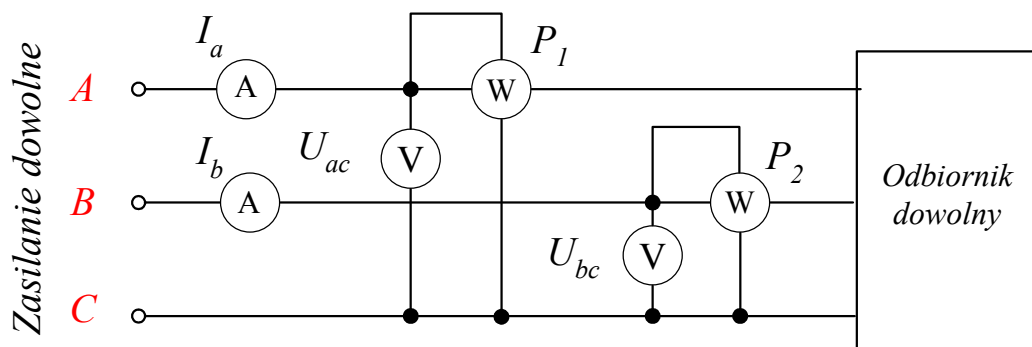
$$P_w = \sqrt{3} Q_f = \sqrt{3} \frac{Q}{3} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (4.8)$$

Stąd otrzymujemy (4.6).

c) Zasilanie dowolne, odbiornik symetryczny lub niesymetryczny, połączenie odbiornika dowolne.

Niniejsza metoda jest podstawową metodą pomiaru mocy czynnej w układach trójfazowych zasilanych linią trójprzewodową. Nazywa się ona **metodą Arona** lub metodą dwóch watomierzy (Rys. 4.5).

Jedynym warunkiem stosowania tej metody jest zasilanie trójprzewodowe, tzn. $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$.



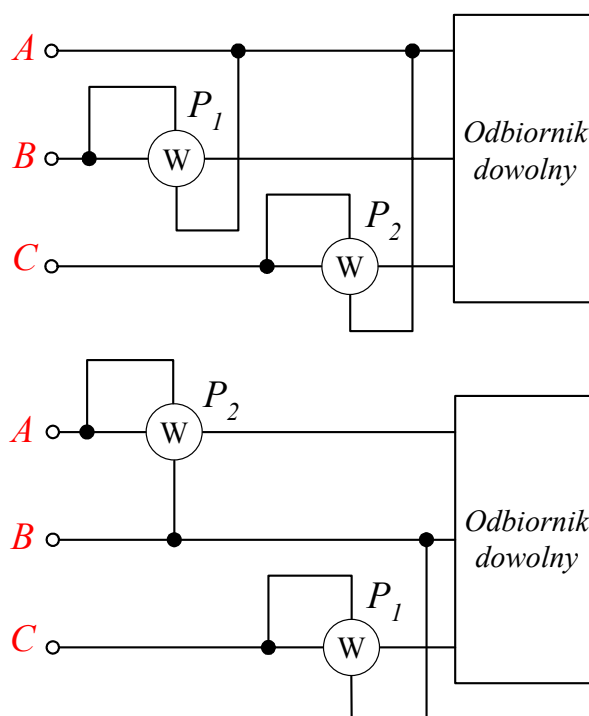
Rys. 4.5 Układ podstawowy metody Arona

Według tej metody moc czynna pobierana przez układ równa jest sumie wskazań obu watomierzy.

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.9)$$

Jeżeli jeden z watomierzy "próbuję" wychylić się w niewłaściwą stronę, to należy zamienić kolejność dowolnych zacisków prądowych bądź napięciowych tego watomierza, a jego wskazanie uwzględnić w sumie (4.9) ze znakiem "minus".

Poniżej na Rys. 4.6 przedstawiono inne - równoważne sposoby włączania watomierzy.



Rys. 4.6 Równoważne sposoby włączania watomierzy w metodzie Arona.

Wzór (4.9) udowodnimy zakładając, że odbiornik połączony jest w gwiazdę:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} + \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (\underline{U}_a - \underline{U}_c) \underline{I}_a^* + (\underline{U}_b - \underline{U}_c) \underline{I}_b^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* - \underline{U}_c (\underline{I}_a^* + \underline{I}_b^*) \right\} = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* - \underline{U}_c (-\underline{I}_c^*) \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* \right\} = P_a + P_b + P_c = P
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Jeżeli układ jest symetryczny, to za pomocą metody dwóch watomierzy można mierzyć również moc bierną. Przyjmując tak jak poprzednio, że odbiornik połączony jest w gwiazdę, a zasilanie jest symetryczne – zgodne, obliczymy różnicę wskazań watomierzy

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_2 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} - \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (a^2 - a) \underline{U}_a (a^2 \underline{I}_a)^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (a^2 - a) \underline{U}_a a \underline{I}_a^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (1-a^2) \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ (a^2 - a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ -j\sqrt{3} U_a I_a e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \mathbf{Re} \left\{ -j e^{j\varphi} \right\} = \\
 &= \sqrt{3} U_a I_a \mathbf{Re} \left\{ -j (\cos \varphi + j \sin \varphi) \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \sin \varphi = \sqrt{3} Q_a = \sqrt{3} Q_f = \frac{1}{\sqrt{3}} Q
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Stąd, ostatecznie całkowita moc bierna odbiornika symetrycznego wynosi

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \tag{4.12}$$

Dla odbiornika symetrycznego można bezpośrednio wyrazić wskazania watomierzy w funkcji argumentu impedancji. Zależności te pozwolą określić zakres kąta fazowego, przy których wskazania poszczególnych watomierzy będą ujemne.

Zapiszmy wskazania watomierzy w nieco innej postaci:

$$P_1 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} = U_{ac} I_a \cos \varphi_1, \quad P_2 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = U_{bc} I_b \cos \varphi_2 \tag{4.13}$$

Na podstawie wcześniejszych rozważań :

$$\varphi_1 = \psi_{u_{ac}} - \psi_{i_a} = \psi_{u_a} - 30^\circ - \psi_{i_a} = \varphi - 30^\circ \tag{4.14}$$

$$\varphi_2 = \psi_{u_{bc}} - \psi_{i_b} = \psi_{u_b} + 30^\circ - \psi_{i_b} = \varphi + 30^\circ$$

$$U_{ac} = U_{bc} = U = \sqrt{3} U_f, \quad I_a = I_b = I_f$$

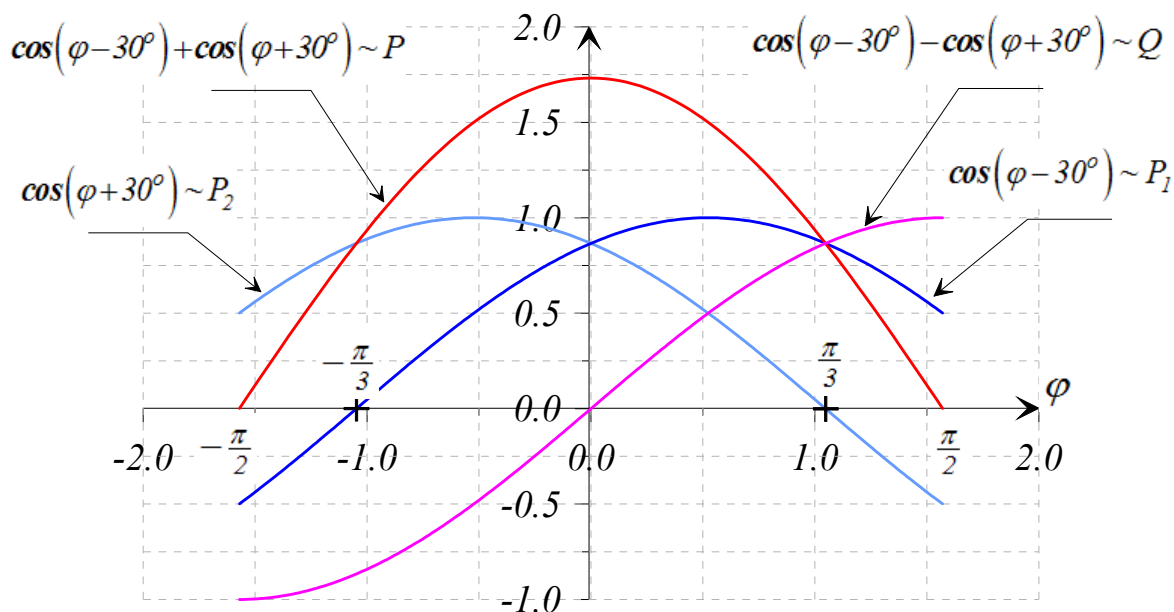
Stąd otrzymujemy

$$P_1 = \sqrt{3} U_f I_f \cos(\varphi - 30^\circ), \quad P_2 = \sqrt{3} U_f I_f \cos(\varphi + 30^\circ) \tag{4.15}$$

Uwzględniając zatem zależność (4.15) w (4.9) i (4.12) można napisać

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{3} U_f I_f \left[\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ) \right] \\
 Q &= 3 U_f I_f \left[\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ) \right]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wyznaczone zależności zostały zilustrowane na poniższym wykresie



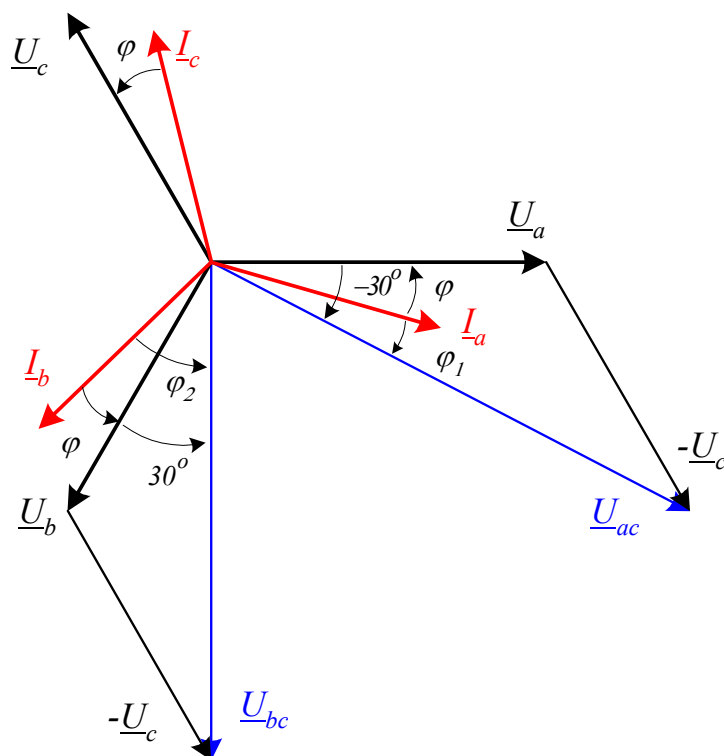
Rys. 4.7 Wykresy zależności wyrażen odpowiadających wskazaniom poszczególnych watomierzy oraz ich sumie i różnicy

Można zauważyć, że watomierz P_1 będzie wskazywał wartość ujemną dla odbiornika o charakterze pojemnościowym, gdy

$$\varphi_1 = \varphi - 30^\circ < -90^\circ \Rightarrow \varphi < -60^\circ$$

Analogicznie, watomierz P_2 dla odbiornika o charakterze indukcyjnym, jeżeli

$$\varphi_2 = \varphi + 30^\circ > 90^\circ \Rightarrow \varphi > 60^\circ$$

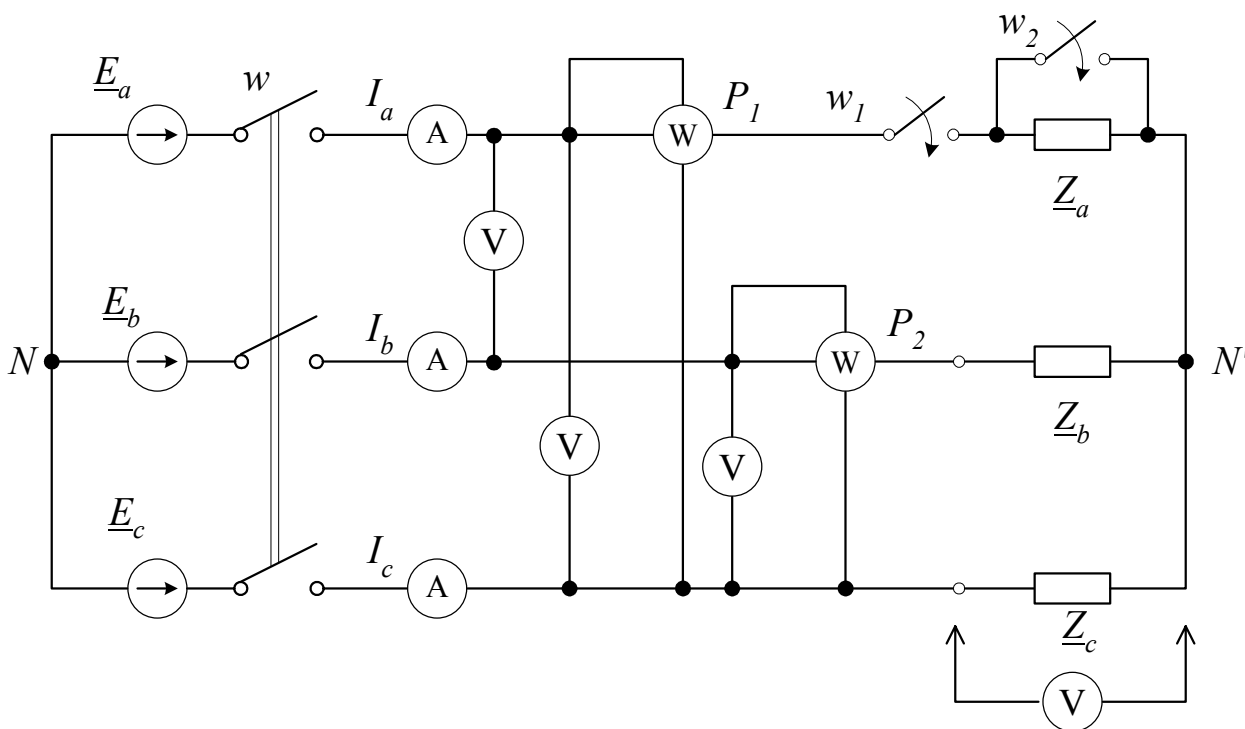


Rys. 4.8 Wykres wskazowy układu trójfazowego - symetrycznego, przy obciążeniu indukcyjnym

5. Opis badanych układów

5.1. Odbiornika połączony w gwiazdę.

Schemat układu pomiarowego jest przedstawiony na Rys. 5.1. Układ jest zasilany z sieci 400/230 V przez autotransformator trójfazowy. Układ odbiorczy stanowią trzy odbiorniki o charakterze rezystancyjnym bądź pojemnościowym połączone w gwiazdę.



Rys. 5.1 Schemat badanego układu trójfazowego z odbiornikiem połączonym w gwiazdę

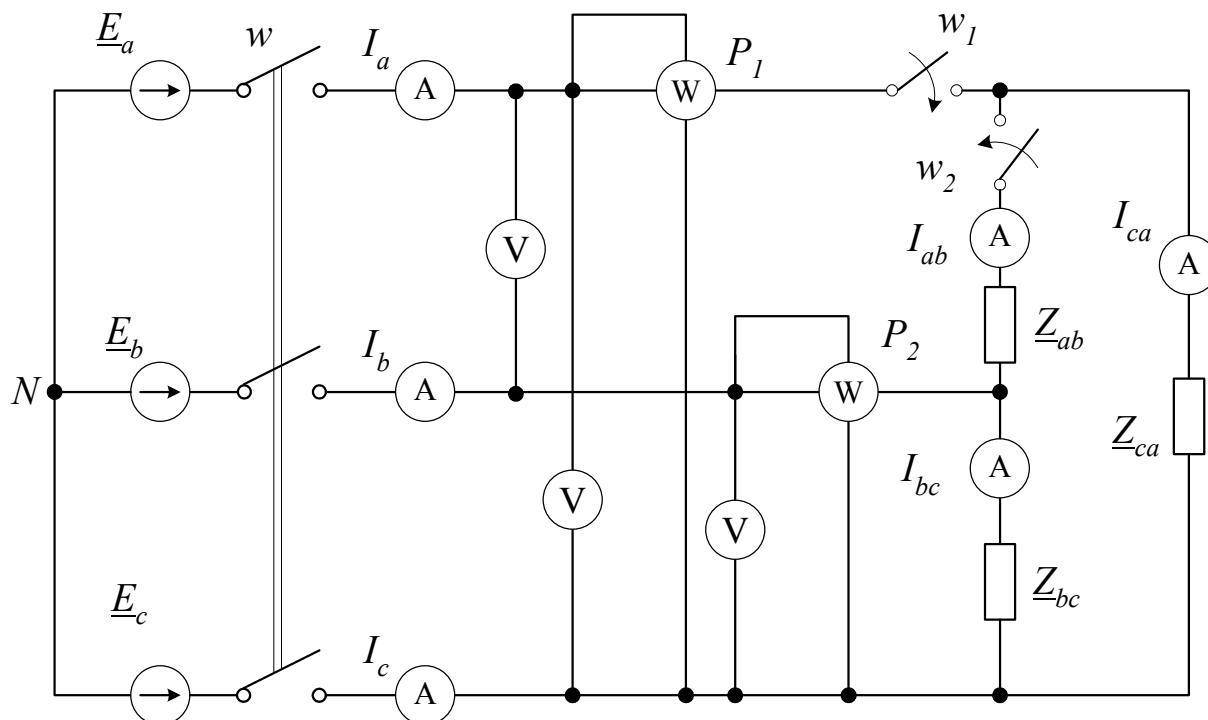
Badanie układu przeprowadza się dla następujących warunków pracy:

- Odbiornik symetryczny (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty), $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$,
- Nastawienie różnych wartości rezystancji gwiazdy (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = \frac{1}{2}R$,
- Przerwę w jednej z faz układu (klucze w_1 otwarty), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = \infty$,
- Zwarcie jednej fazy odbiornika (klucze w_1 i w_2 – zamknięte), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = 0$,
- Układ niesymetryczny – $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = -jX_c$, $X_c = R$ (Rys. 2.4).

Pomiarowi podlegają prądy w przewodach zasilających, moc odbiornika (metoda dwóch watomierzy) i napięcia w różnych częściach układu (fazowe odbiornika, międzyfazowe oraz napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika).

5.2. Odbiornik połączony w trójkąt.

Schemat układu jest przedstawiony na Rys. 5.2. Układ odbiorczy stanowią trzy odbiorniki o charakterze rezystancyjnym połączone w trójkąt.



Rys. 5.2 Schemat badanego układu trójfazowego z odbiornikiem połączonym w trójkąt

Niesymetrię układu odbiorczego osiąga się przez:

- Ustawienie różnych wartości rezystancji trójkąta, np. $\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R$, $\underline{Z}_{ab} = \frac{1}{2}R$,
- Przerwę w jednej z faz układu trójkątowego (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty),
- Przerwę w przewodzie zasilającym trójkąt (klucz w_1 – otwarty, w_2 – zamknięty).

6. Program ćwiczenia

1. Zmontować układ pomiarowy według schematu na Rys. 5.1.
2. Nastawić na trzech danych rezystorach suwakowych jednakowe wartości rezystancji R według wskazań prowadzącego ćwiczenia. Zmierzyć i zanotować wartości rezystancji.
3. Zamknąć wyłącznik w i zmierzyć kolejno wszystkie napięcia w układzie. Odczytać wskazania amperomierzy i watomierzy. Zmierzone wartości wpisać do tabeli 1a.
4. Wykonać podobne jak w p.6.3 pomiary w przypadkach, gdy:
 - a) Rezystancja fazy A została zmniejszona do ok. $0.5 R$,
 - b) Przerwa w fazie A - klucz w_1 otwarty, w tym przypadku napięcie na odbiorniku tej fazy powinno być zmierzone pomiędzy punktem N' a zaciskiem wyłącznika w_1 po stronie zasilania,
 - c) Stan zwarcia fazy A odbiornika - klucze w_1 oraz w_2 zamknięte.
5. W miejsce rezystora w fazie A włączyć kondensator, którego reaktancja jest równa jednakowym rezystancjom w fazach B i C. Wykonać pomiary analogicznie jak w p.6.3.

6. Zmontować układ połączeń według schematu na Rys. 5.2.
 7. Wykonać pomiary napięć, prądów i mocy:
 - a) Podczas symetrycznej pracy układu - jednakowe wartości impedancji (rezystancji) odbiornika $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R$, (klucze w_1 i w_2 zamknięte),
 - b) Przy przerwie w jednej z gałęzi trójkąta - klucz w_2 otwarty,
 - c) Przy przerwie w przewodzie zasilającym - klucz w_1 otwarty, w_2 zamknięty,
 - d) Nastawić różne wartości rezystancji odbiornika: np. $\underline{Z}_{ab} \approx 0.5R$, $\underline{Z}_{bc} \approx 0.75R$, $\underline{Z}_{ca} = R$.
- Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 2a, według podanego wzoru.

7. Opracowanie sprawozdania

1. Przedstawić krótko przedmiot i zakres badań, schematy układów pomiarowych.
2. Zanotować wartość rezystancji i reaktancji elementów badanego obwodu.
3. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów w punktach 6.3 i 6.4 a-c oraz 6.5 wykonać wykresy wskazowe na płaszczyźnie zespolonej przyjmując symetryczne zasilanie. Wyznaczyć wykreślnie położenie topograficzne punktu N' oraz wykreślić napięcia fazowe odbiornika.
4. Dla przyjętego układu symetrycznego napięć fazowych i danych impedancji fazowych odbiorników, dla wszystkich stanów pracy układu, obliczyć wartości zespolone napięcia $\underline{U}_{N'N}$, napięć fazowych i prądów. Wyniki obliczeń wpisać kolejno do wierszy tabeli 1b. Porównać obliczone wartości $\underline{U}_{N'N}$ z wartościami otrzymanymi metodą wykreślną. Porównać obliczone wartości skuteczne prądów z wynikami pomiarów. Nanieść wskazy prądów na wykresy wykonane w p.7.3.
5. Dla przyjętego symetrycznego układu zasilającego napisać wartości zespolone napięć międzyfazowych, na które włączone są cewki napięciowe watomierzy i obliczone wartości zespolone prądów. Obliczyć moce: $\underline{S}_1 = \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^*$; $\underline{S}_2 = \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^*$ oraz moc czynną $P_{obl} = \text{Re}(\underline{S}_1 + \underline{S}_2)$. Porównać obliczoną wartość P_{obl} z sumą wskazań watomierzy zanotowanych w tabeli 1a. Obliczenia wykonać dla wszystkich stanów pracy układu.
6. Wykonać analogiczne czynności dla układu z odbiornikiem połączonym w trójkąt, dla wszystkich stanów pracy układu. Obliczone wartości wpisywać do tabeli 2b.

8. Pytania kontrolne

1. Przedstawić metodę obliczania prądów w układzie trójfazowym przy symetrycznym układzie odbiorników połączonych w gwiazdę (trójkąt).
2. Przedstawić metodę obliczenia prądów w układzie trójfazowym przy niesymetrycznym układzie odbiorników połączonych w gwiazdę (trójkąt).
3. Jak obliczamy napięcie $\underline{U}_{N'N}$ między punktami neutralnymi układu zasilającego i układu odbiorczego przy połączeniu w gwiazdę ?
4. Jak należy wykonać pomiar napięcia fazowego w fazie, w której występuje przerwa ?
5. Przedstawić sposób obliczenia prądu podczas zwarcia jednej z faz układu trójfazowego, przy połączeniu odbiorników w gwiazdę.
6. Jak można przy danym układzie wskazów napięć zasilających symetrycznych międzyfazowych wyznaczyć potencjał punktu neutralnego N' układu odbiorników niesymetrycznych połączonych w gwiazdę, znając wartości skuteczne ich napięć fazowych ?
7. Narysować układ do pomiaru mocy czynnej w układach trójfazowych metodą dwóch watomierzy .
8. Przedstawić warunki stosowania metody dwóch watomierzy dla układów trójfazowych niesymetrycznych.
9. Udowodnić, że w metodzie dwóch watomierzy moc czynna układu trójfazowego równa się sumie wskazań watomierzy (dla gwiazdy i trójkąta).
10. Dla jakich odbiorników kolejność faz ma podstawowe znaczenie, tak że włączenie napięcia o niewłaściwej kolejności może zakłócić pracę urządzeń.
11. Omówić działanie układu do kontroli kolejności faz. Jak zmieni się procedura wyznaczania kolejności faz jeżeli kondensator zastąpimy cewką indukcyjną (dławikiem) ?

9. LITERATURA

S. Bolkowski: *Teoria obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa 1995.

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Wypełnioną tabelkę (wzór):

Politechnika Wrocławska Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii	Nazwiska i imiona osób danej grupy ćwiczeniowej (wykonujących ćwiczenie)	Rok. Grupa. (dzień tyg.) n/p Grupa lab.
<i>LABORATORIUM PODSTAW ELEKTROTECHNIKI</i>		
Data ćwiczenia:	Temat:	Ocena:
Nr ćwiczenia:		

2. Cel ćwiczenia
3. Aktualny schemat pomiarowy badanego układu
4. Tabele pomiarowe
5. Dla każdej z tabel przykład obliczeniowy dla wybranego wiersza tabeli
6. Wykresy wskazowe napięć i prądów
7. Wnioski, uwagi, spostrzeżenia

UWAGA:

Zarówno schemat układu pomiarowego, jak i realizacja poszczególnych punktów ćwiczenia może ulec zmianie na życzenie prowadzącego ćwiczenie.

Wzory Tabel

Pomiary w układzie trójfazowym z odbiornikiem połączonym w gwiazdę.

Tabela 1a – pomiary

[illegible]

Tabela 1b – obliczenia

[illegible]

Pomiary w układzie trójfazowym z odbiornikiem połączonym w trójkąt.

Tabela 2a – pomiary

[illegible]

Tabela 2b – obliczenia

[illegible]