SZEREG POTĘGOWY

$$\sum_{n}^{\infty} c_n (x-s)^n$$

s – środek szeregu

Dla jakich wartości x szereg jest zbieżny?

$x \in (a,b) \to$ przedział zbieżności

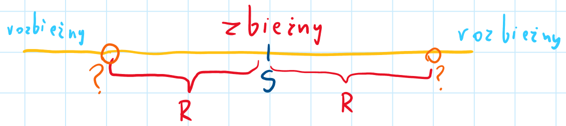
R – promień zbieżności

$x \in (s-R,\ s+R)$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{c_n}\right|}$$

$\to$ twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda
Tw. C.-H.

Cauchy'ego – Hadamarda Wzór Dla Promienia



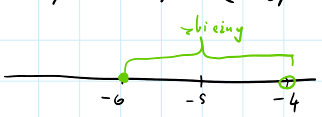
$x = s - R$
$x = s + R$

PRZYKŁADY

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2} \qquad s=-5 \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+2}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to 1}\frac{\sqrt{n+1}+2}{\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = 1$$

$$x \in (-5-1;\ -5+1) = (-6,-4)$$



$$x=-6 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6+5)^n}{\sqrt{n}+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$$

$$x=-4 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4+5)^n}{\sqrt{n}+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{2}<1 \text{ rozbieżny}$$

$$x=-4 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4+5)^n}{\sqrt{n}+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{2} < 1 \text{ rozbieżny}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}+2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}} = 1$$

$0<1 \rightarrow$ na mocy kryterium ilorazowego szereg jest rozbieżny

Leibniz:

$$\underbrace{(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0 \ ; \ (2)}_{\text{Ciąg zbieżny}} \text{ Monotoniczność} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \qquad f'(x) = \frac{(\sqrt{x}+2)0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 1}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+2)^2} > 0 \qquad < 0$$

$\rightarrow$ funkcja malejąca, więc ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}+2}$ też jest malejący!

czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2}$ jest zbieżny dla $x \in \langle -6; -4)$

PRZYKŁAD 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-6)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(x-3))^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n!}$$

$$s=3 \qquad c_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{(n!)}}{2\cdot \cancel{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

$R \rightarrow \infty$

szereg