WYKŁADOWCA

Tomasz Truszkowski
pok. 218 D-1
bez sprawdzania obecności na wykładzie

ZALICZENIE:

Wykład + ćwiczenia → jedno kolokwium

1. Ostatnie zajęcia
2. W sesji egzaminacyjnej (30.06)

Kolokwium: 4 zadania (z każdego rozdziału)

Skrypt Gewerta / Skoczylasa → elementy analizy wektorowej

Zaliczenie: 20 pkt → 1 ; 2 min. 5
3 ; 4 min. 5

Lista zadań: wmat. pwr. edu. pl
↓
pracownicy → Gewert / Skoczylas

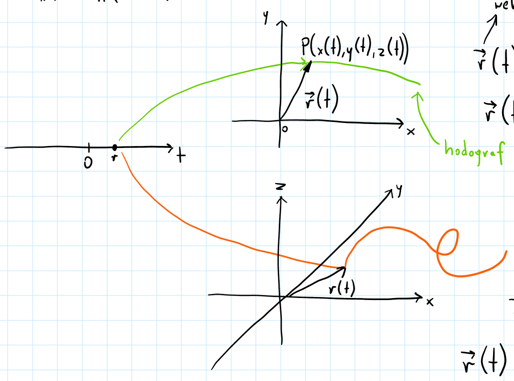
Rozdział I

CAŁKI KRZYWOLINIOWE NIEZORIENTOWANE

FUNKCJE WEKTOROWE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ:

- argumentem są liczby rzeczywiste

$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \vee \quad \vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



wektor wodzący punktu p

$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$

$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

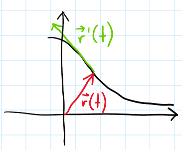
$\vec{r}(t) \to$ różnowartościowa

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$

$\vec{r}(t_1) = r(t_2) \to$ samoprzecięcie krzywej

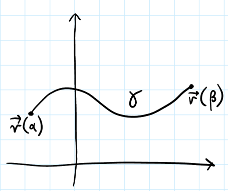
$\vec{r}(t)$ - ciągła
- różniczkowalna $\Leftrightarrow$ składowe $\vec{r}(t)$ mają te własności

$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \to$ wektor stycznej



$\hat{S}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ — wektor stycznej

wersor = wektor o długości 1



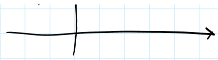
krzywa γ jest łukiem gładkim, jeżeli:

$\gamma = \{\vec{r}(t) : t \in \langle \alpha ; \beta \rangle\}$,

gdzie odwzorowanie $\vec{r}(t)$ jest:

- różnowartościowe
- [illegible]

gdzie odwzorowanie $\vec{r}(t)$ jest



- różnowartościowe
- różniczkowalne w sposób ciągły (klasy C^1) (składowe $\vec{r}(t)$ mają ciągłe pochodne)
- $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ dla $t \in (\alpha; \beta)$

ŁUKI GŁADKIE:

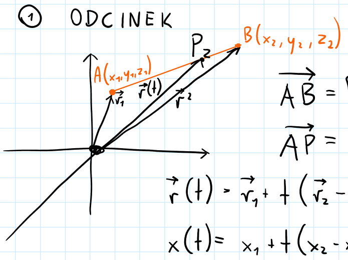
$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad t \in \langle \alpha ; \beta \rangle$$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in \langle \alpha ; \beta \rangle$$

parametryzacja łuku

Ważniejsze łuki R^2 i R^3

① ODCINEK



$$\vec{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{AP} = t \cdot \vec{AB}$$

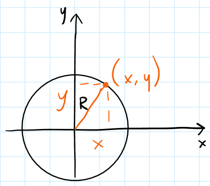
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad t \in \langle 0 ; 1 \rangle$$

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

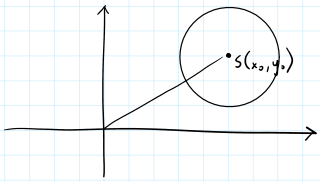
$$y(t) = y_2 + t(y_2 - y_1)$$

$$z(t) = z_2 + t(z_2 - z_1)$$

② OKRĄG

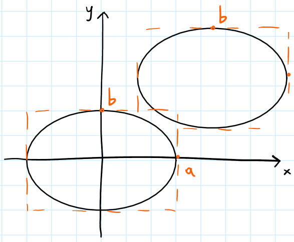


$$x = R\cos t \qquad t \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$$
$$y = R\sin t$$



$$x = x_0 + R\cos t$$
$$y = y_0 + R\sin t$$

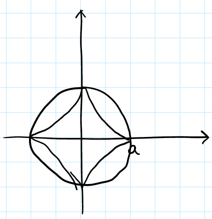
③ ELIPSA



$$x = x_0 + a\cos t$$
$$y = y_0 + b\sin t$$

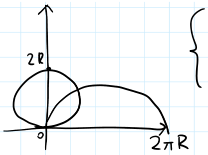
$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

④ ASTEROIDA



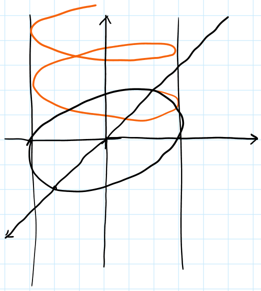
$$x = a\cos^3 t$$
$$y = b\sin^3 t$$

⑤ CYKLOIDA



$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

⑥ LINIA ŚRUBOWA NA WALCU

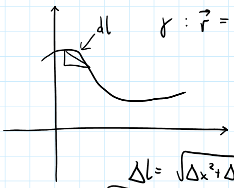


$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$

$t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ – jeden zwój

h – skok lini śrubowej

ELEMENT DŁUGOŚCI ŁUKU



$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$

$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\sqrt{[x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1)]}$

$\sqrt{(x'(t^*) \cdot \Delta t)^2 + (y'(t^{**}) \cdot \Delta t)^2} =$

$\Delta l = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, \Delta t$

$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ (w R^2)

$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$

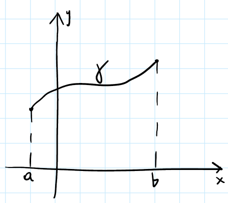
$dl = |r'(t)|\, dt$

WZÓR NA DŁUGOŚĆ ŁUKU:

$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), \; t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$$|\gamma| = \int_\alpha^\beta |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$



$\gamma = \int_a^b 1 + f'^2(x)\, dx \quad x \in \langle a; b \rangle$

$\gamma : \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$

$x'(x) = 1$

$y'(x) = f'(x)$

PRZYKŁAD

Obliczyć długość jedneko łuku cykloidy o parametryzacji

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \; a > 0$$

$x'(t) = a(1 - \cos t)$

$y'(t) = a \sin t$

$$\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right]}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+1}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4a\left[-1-1\right] = 8a$$

$$\frac{t}{2} \in \langle 0;\pi\rangle \Rightarrow \sin\frac{t}{2} \geq 0$$

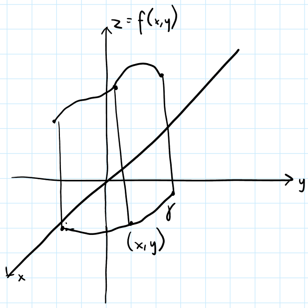
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

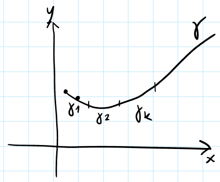
$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$

$\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} = 1$

CAŁKA KRZYWOLINIOWA NIEZORIENTOWANA



$f(x,y)$ – funkcja ograniczona określona na krzywej γ



$P = \{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n\}$ – podział łuku

Δl_k – długość łuku γ_k

$\max \Delta l_k = \delta(P)$ – średnia podziału P

$\gamma_k = A_k(x_k, y_k)$ – punkty pośrednie

$x(t_k), y(t_k)$

Suma całkowa:

$$S(P, f, A_k) = \sum_{k=1}^{n} f(A_k)\cdot \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta l_k$$

Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(A_k)\cdot \Delta l_k$$

i nie zależy ona od wybranego podziału P oraz punktów pośrednich, to wartość tej granicy nazywamy całką krzywoliniową z funkcji f po łuku γ

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl \quad , \quad \int_\gamma f(x,y,z)\,dl$$

Zapis jednolity: $\int_\gamma f(\vec{r})\,dl$

R^3

Wartości: $\int_\gamma (f+g)\,dl = \int_\gamma f\,dl + \int_\gamma g\,dl$

$$\int \alpha \cdot f\,dl = \alpha \int f\,dl$$

$\alpha \in R$

TWIERDZENIE:

Zamiana całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną po parametrze:

Jeżeli $f(x,y,z)$ – funkcja ciągła na łuku gładkim

$\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in \langle \alpha; \beta\rangle$

to $$\int_\gamma f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

to $\int_\gamma f(x,y,z)\,dl = \int_a f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

W R^2:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

$$= \int_a^b f(\vec{r}(t))\sqrt{\vec{r}\,'(t)}\,dt$$

dla wielu γ

PRZYKŁAD:

γ – części okręgu $x^2+y^2=R^2$ leżąca w I ćwiartce

$$\gamma: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad t \in \left\langle 0; \tfrac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$x' = -R\sin t$$
$$y' = R\cos t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cdot R^2 \cos t \sin t\,dt = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\,dt =$$

$$= \begin{matrix} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{matrix} = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,du = R^3 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}R^3$$