KONSULTACJE

- od 23 października
- wtorek $14^{00}-16^{00}$ p. 1.07 C11
- czwartek $10^{00}-11^{00}$, $17^{00}-18^{00}$ p. 1.07 C11

Równanie różniczkowe Bernoulliego

- równanie, które można zapisać w postaci

$$y'(t) + p(t)y(t) = h(t)\left[y(t)\right]^r \qquad r \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$] równanie A

nazywamy równaniem Bernoulliego

- kiedy $r=0$ to $y'(t)+p(t)y(t)=h(t)$ czyli równanie liniowe
- kiedy $r=1$ to $y'(t)+p(t)y(t)=h(t)y(t)$

stąd $y'(t)+y(t)\left(p(t)-h(t)\right)=0$ zamieniamy $(p(t)-h(t))$ na $g(t)$

stąd $y'(t)+y(t)g(t)=0$

- równanie A sprowadzamy do równania liniowego przez podstawienie $z(t)=(y(t))^{1-r}$

mnożymy równanie A przez $y(t)^{-r}$:

stąd: $y'(t)(y(t))^{-r} + p(t)\underbrace{y(t)\cdot(y(t))^{-r}}_{(y(t))^{1-r}} = h(t)$

jeżeli zróżniczkujemy : $\frac{dz}{dt} = (1-r)\left(y(t)\right)^{-r}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$z'(t)=(1-r)(y(t))^{-r}\,y'(t)$$

prawie to samo

mnożymy przez $\frac{1}{1-r}$: $\frac{1}{1-r}z'(t)=(y(t))^{-r}y'(t)$

$$\frac{1}{1-r}z'(t)+p(t)z(t)=h(t)$$

$$z'(t)+(1-r)p(t)z(t)=(1-r)h(t)$$

- PRZYKŁAD: $y'(t)-\frac{4}{t}y(t)=t\cdot\sqrt{y(t)}$ założenia: $y(t)>0 \quad t>0$

$$y'(t)-\frac{4}{t}y(t)=t\cdot(y(t))^{\frac{1}{2}} \quad \Big/\cdot y(t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'(t) - \frac{4}{t} y(t) = t \cdot (y(t))^{\frac{1}{2}} \quad / \cdot y(t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'(t) \cdot y(t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{t} (y(t))^{\frac{1}{2}} = t$$

$$z(t) = (y(t))^{\frac{1}{2}} \rightarrow z'(t) = \frac{1}{2} y(t)^{-\frac{1}{2}} \cdot y'(t) \quad / \cdot 2$$

$$2z'(t) = y(t)^{-\frac{1}{2}} \cdot y'(t)$$

$$2z'(t) - \frac{4}{t} z(t) = t \quad / : 2$$

$$z'(t) - \frac{2}{t} z(t) = \frac{1}{2} t$$

rozwiązujemy równanie liniowe

$$p(t) = -\frac{2}{t} \qquad h(t) = \frac{1}{2} t$$

$$\int p(t)\,dt = -2 \ln|t| = \ln|t|^{-2}$$

$$e^{\int p(t)\,dt} = e^{\ln|t|^{-2}} = \frac{1}{t^2}$$

czynnik całkujący

równanie mnożymy przez czynnik całkujący

$$z(t) \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} z(t) = \frac{1}{2t}$$

$$\left(z(t) \cdot \frac{1}{t^2}\right)' = \frac{1}{2t}$$

$$z(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \int \frac{1}{2t}\,dt$$

$$z(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2} \ln|t| + c \quad / \cdot t^2$$

$$z(t) = \frac{1}{2} t^2 \ln|t| + c \cdot t^2$$

$$z(t) = y(t)^{\frac{1}{2}}$$

$$(y(t))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} t^2 \ln|t| + c \cdot t^2$$

rozwiązanie

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 \ln|t| + ct^2\right)^2$$

- PRZYKŁAD 2:

$$y'(t) + t\,y(t) = t \cdot y^3(t) \qquad r = 3$$

Pierwsze rozwiązanie: $y = 0$

Pozostałe rozwiązania:

$$y'(t) + t\,y(t) = t \cdot y^3(t) \quad / \cdot t^{-3}$$

$$y'(t) \cdot y^{-3}(t) + t \cdot y^{-2}(t) = t$$

$$y\,(t) + t\,y(t) = t \cdot y\,(t) \qquad / \cdot t$$

$$y'(t) \cdot y^{-3}(t) + t \cdot y^{-2}(t) = t$$

$$z(t) = y^{-2}(t) \qquad z'(t) = -2y^{-3}(t) \cdot y'(t) \qquad | : -2$$

$$-\tfrac{1}{2} z'(t) = y^{-3}(t)\, y'(t)$$

$$-\tfrac{1}{2} z'(t) + t\,z(t) = t \qquad | \cdot (-2)$$

$$z'(t) - 2t\,z(t) = -2t$$

metoda czynnika całkującego

$$\int p(t)\,dt = \int -2t\,dt = -2 \cdot \tfrac{1}{2} t^2 = -t^2$$

$$e^{\int p(t)\,dt} = e^{-t^2} \rightarrow \text{czynnik całkujący}$$

$$z'(t) - 2t\,z(t) = -2t \qquad | \cdot e^{-t^2}$$

$$z'(t)\,e^{-t^2} - 2t\,z(t)\,e^{-t^2} = -2t\,e^{-t^2}$$

$$\left(z(t) \cdot e^{-t^2}\right)' = -2t\,e^{-t^2} \qquad | \cdot \int dt$$

$$\int \left(z(t) \cdot e^{-t^2}\right)' dt = \int -2t\,e^{-t^2}\,dt$$

$$\int -2t\,e^{-t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} -t^2 = u \\ -2t\,dt = du \end{matrix} \right| = \int e^u\,du = e^{-t^2} + c_1$$

$$z(t) \cdot e^{-t^2} = e^{-t^2} + c_1 \qquad | \cdot e^{t^2}$$

$$z(t) = 1 + c\,e^{t^2}$$

$$z(t) = y^{-2}(t)$$

$$y^{-2}(t) = 1 + c\,e^{t^2} \qquad / \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$y(t) = \left(1 + c\,e^{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE II-EGO RZĘDU

- Równanie różniczkowe w postaci

$$y''(t) = f(t, y(t)\, y'(t)) \qquad \} \text{ równanie } B$$

nazywamy równaniem różniczkowym drugiego rzędu

- funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania B na pewnym przedziale (a, b) jeżeli jest dwukrotnie różniczkowalna na (a, b)

- funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania B na pewnym przedziale (a,b) jeżeli jest dwukrotnie różniczkowalna na (a,b) oraz spełnia równanie B
- zagadnieniem początkowym ((Cauchy'ego) nazywamy równanie B uzupełnione warunkami

$$y(t_0)=y_0 \qquad y'(t_0)=y_1$$

- równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu:
- rozważmy równanie postaci

$$y''(t)=f(t,y'(t))$$

W równaniu tym nie występuje funkcja $y(t)$

Równanie tego typu sprowadzamy do równania pierwszego rzędu przez podstawienie $y'(t)=u(t)$.

$$y'(t)=u(t)$$

$$y''(t)=u'(t)$$

stąd $\quad u'(t)=f(t,u(t))$

- PRZYKŁAD

$$y''(t)=1+(y'(t))^2$$

$$y'(t)=u(t) \qquad\qquad u'(t)=\frac{du}{dt}$$

$$u'(t)=1+(u(t))^2 \qquad \Big/ : 1+(u(t))^2$$

$$\frac{du}{dt\,(1+(u(t))^2)}=1 \rightarrow \frac{du}{1+(u(t))^2}=dt$$

$$\int\frac{du}{1+(u(t))^2}=\int dt \rightarrow \operatorname{arctg} u(t)=t+c$$

$$-\frac{\pi}{2}<t+c<\frac{\pi}{2}$$

$$u(t)=\operatorname{tg}(t+c)$$

$$y'(t)=\operatorname{tg}(t+c)$$

$$\int y'(t)\,dt=\int \operatorname{tg}(t+c)\,dt$$

$$\int \operatorname{tg}(t+c)\,dt=\int\frac{\sin(t+c)}{\cos(t+c)}\,dt=\left|\begin{matrix}\cos(t+c)=z\\ -\sin(t+c)dt=dz\end{matrix}\right|=-\int\frac{1}{z}\,dz=-\ln|\cos(t+c)|$$

$$y(t)=-\ln|\cos(t+c)|+c_1$$

$\dots \cos(t+c) \dots \quad |-\sin(t+c)\,dt = dz| \quad \dots$

$$y(t) = -\ln|\cos(t+c)| + c_1$$

- PRZYKŁAD 2:

$$\begin{cases} y''(t) - \frac{1}{t} y'(t) = e^t t \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

$$y''(t) - \frac{1}{t} y'(t) = e^t t$$

$$y'(t) = u(t)$$

$$y''(t) = u'(t)$$

$$u'(t) - \frac{1}{t} u(t) = e^t t$$

$$\int p(t)\,dt = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| = \ln|t|^{-1}$$

$$e^{\int p(t)\,dt} = e^{\ln|t^{-1}|} = \frac{1}{t}$$

$$u'(t)\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} u(t) = e^t$$

$$\left(u(t)\cdot\frac{1}{t}\right)' = e^t \qquad \Big| \int dt$$

$$u(t)\cdot\frac{1}{t} = e^t + c$$

$$u(t) = te^t + ct$$

$$y'(t) = u(t) = te^t + ct$$

$$y'(t) = te^t + ct$$

$$\int y'(t)\,dt = \int te^t + ct\,dt$$

$$\int e^t t\,dt = \begin{vmatrix} f = t & g' = e^t \\ f' = 1 & g = e^t \end{vmatrix} = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$$

$$y(t) = te^t - e^t + \frac{1}{2}ct^2 + c_1$$

warunki początkowe:

$$y'(1) = e + c = 2$$

$$c = 2 - e$$

$$y(1) = 1\cdot e^1 - e + \frac{1}{2}c + c_1 = \frac{1}{2}c + c_1 = 1$$

$$c_1 = 1 - \frac{1}{2}c = 1 - \frac{1}{2}(2-e) = 1 - 1 + \frac{e}{2} = +\frac{e}{2}$$

$$c_1 = 1 - \frac{1}{2}c = 1 - \frac{1}{2}(2-e) = 1 - 1 + \frac{e}{2} = +\frac{e}{2}$$

$$y(t) = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 \cdot (2-e) + \frac{1}{2}e$$