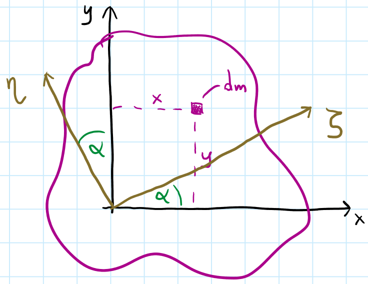
TRANSFORMACJA OBROTOWA

- osie główne układu – osie, względem których liczymy moment bezwładności, obracając coś wg. osi głównych – będzie się obracać bezproblemowo



$$\eta = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

$$\xi = y\sin\alpha + x\cos\alpha$$

$$I_\eta,\ I_\xi,\ I_{\eta\xi}$$

$$I_\eta = \int_m \xi^2 dm = \int_m \left(y^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha + x^2\cos^2\alpha\right) dm = \int_m y^2\sin^2\alpha\, dm + \int 2xy\sin\alpha\cos\alpha\, dm + \int x^2\cos^2\alpha\, dm =$$

$$= I_x\sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha + I_y\cos^2\alpha$$

$$I_\xi = \int_m \eta^2 dm = \int\left(y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + x^2\sin^2\alpha\right) dm = I_x\cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha + I_y\sin^2\alpha$$

$$D_{\eta\xi} = \int_m \eta\,\xi\, dm = \int (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\, dm = D_{xy}\cos^2\alpha - D_{xy}\sin^2\alpha - I_y\sin\alpha\cos\alpha + I_x\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= D_{xy}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(I_x - I_y)$$

$$D_{\eta\xi} = D_{xy}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,\frac{I_x - I_y}{2}$$

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + D_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2D_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,arctg\,\frac{2D_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

$$I_1 = I_{min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}$$

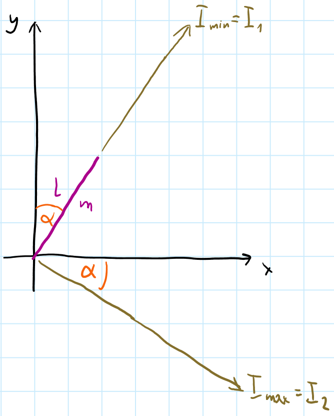
$$I_\xi = I_1\cos^2\alpha + I_2\sin^2\alpha$$

$$I_\eta = I_1\sin^2\alpha + I_2\cos^2\alpha$$

$$D_{\eta\xi} = \frac{(I_1 - I_2)}{2}\sin 2\alpha$$

PRZYKŁAD

PRZYKŁAD



$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$I_2 = I_{max} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_1 = I_{min} = 0$$

$$D_{12} = 0$$

$$I_x = ? \qquad I_y = ? \qquad D_{xy} = ?$$

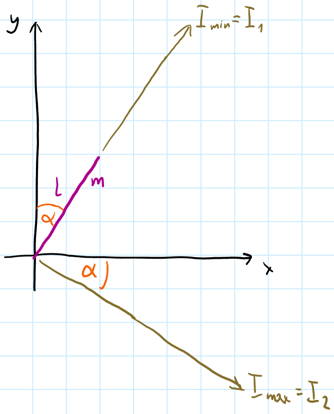
- układ z prętem o dł. l, masie m.
- chcemy znaleźć układ osi dowolnych

$$I_y = I_1 \cos^2\alpha + I_2 \sin^2\alpha = \frac{ml^2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{ml^2}{12}$$

$$I_x = I_1 \sin^2\alpha + I_2 \cos^2\alpha = \frac{ml^2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{ml^2}{4}$$

$$D_{xy} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{12} ml^2$$

- chcemy znaleźć układ osi głównych



$$I_x = \frac{ml^2}{4}$$

$$I_y = \frac{ml^2}{12}$$

$$D_{xy} = \frac{-\sqrt{3}}{12} ml^2$$

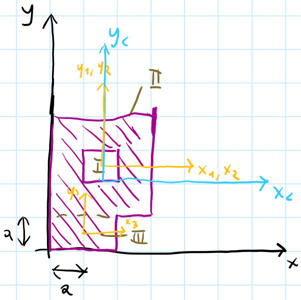
$$I_{min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2} = \frac{ml^2}{6} - \frac{1}{2} ml^2 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2} = \frac{ml^2}{6} + \frac{1}{2} ml^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{6} ml^2 = \frac{ml^2}{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2D_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = 30^\circ$$

PRZYKŁAD II

- wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności



$\rho = 1 \frac{g}{cm^2}$

$A_1 = a^2$ $\quad x_1 = 1{,}5a \quad y_1 = 2{,}5a$

$A_2 = 9a^2$ $\quad x_2 = 1{,}5a \quad y_2 = 2{,}5a$

$A_3 = 2a^2$ $\quad x_3 = a \quad y_3 = 0{,}5a$

– osie odniesienia figur

1. Dzielimy figurę na figury proste.
2. Wyznaczamy środek ciężkości
   - pole powierzchni
   - środki ciężkości

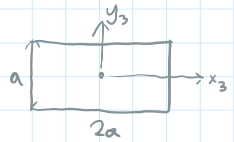
$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{-A_1 + A_2 + A_3} = 1{,}4a$$

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{-A_1 + A_2 + A_3} = 2{,}1a$$

3. Wyznaczamy momenty bezwładności względem osi centralnych
   - momenty bezwł. względem środków figur

$I_{x_1} = \frac{a^4}{12}$ $\quad I_{x_2} = \frac{81a^4}{12}$ $\quad I_{x_3} = \frac{2a^4}{12}$

$I_{y_1} = \frac{a^4}{12}$ $\quad I_{y_2} = \frac{81a^4}{12}$ $\quad I_{y_3} = \frac{8a^4}{12}$



$I_{x_3} = \frac{ma^2}{12}$ → r = max. droga po osi (czyli od $-\frac{1}{2}a$ do $\frac{1}{2}a$, r=a)

$I_{y_3} = \frac{m(2a)^2}{12}$ $\quad m = a \cdot \rho = 2a^2$

- momenty dewiacji

$D_{x_1y_1} = 0$ $\quad D_{x_2y_2} = 0$ $\quad D_{x_3y_3} = 0$

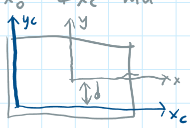
- nas interesuje moment bezwł. względem osi niebieskiej

4. Wyznaczamy moment bezwładności względem środka układu x_c, y_c

$I_{x_c} = I_{x_1} + md^2 \qquad m = A_1 d^2$

$I_x = I_{x_c} - md^2$

$I_{x_0} = I_{x_c} + md^2$



d – odległość między osiami

$$I_{x_c} = -\left(I_{x_1} + A_1(y_c - y_1)^2\right) + \left(I_{x_2} + A_2(y_c - y_2)^2\right) + \left(I_{x_3} + A_3(y_c - y_3)^2\right) = 13{,}07a^4$$

$$I_{y_c} = -\left(I_{y_1} + A_1(x_c - x_1)^2\right) + \left(I_{y_2} + A_2(x_c - x_2)^2\right) + \left(I_{y_3} + A_3(x_c - x_3)^2\right) = 7{,}7a^4$$

$$D_{x_cy_c} = -\left(D_{x_1y_1} + A_1(x_1 - x_c)(y_1 - y_c)\right) + D_{x_2y_2} + A_2(x_2 - x_c)(y_2 - y_c) + D_{x_3y_3} + A_3(x_3 - x_c)(y_3 - y_c) = 1{,}6a^4$$

współrzędne środka ciężkości! dla dewiacji

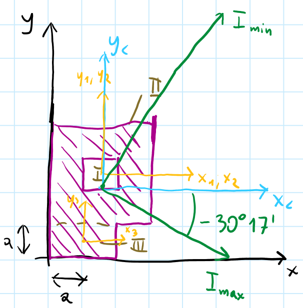
5. Przechodzimy do osi głównych.

$$I_{min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2} = 7,26a^4$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2} = 13,51a^4$$

I_{x_c}
I_{y_c}

$$\alpha = \frac{1}{2} arctg \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x} = -30°47'$$



• jeżeli $D_{12} < 0$ to kąt między osiami będzie ostry

* może być na kolokwium