Wykład 4

czwartek, 25 października 2018 11:16

RÓWNANIE 2-EGO RZĘDU

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

jeżeli $y''(t) = f(t, y'(t))$

stosujemy $v(t) = y'(t)$

$$v'(t) = f(t, v(t))$$

Rozważmy równanie

$$y''(t) = f(y(t), y'(t)) \qquad A$$

$$y'(t) = v(y(t))$$

Równanie A sprowadzamy do równania rzędu I-ego przez podstawienie

$$y'(t) = v(y(t))$$

$$y''(t) = \underbrace{\frac{dv(y(t))}{dy}}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{y'} = \frac{dv}{dy} \cdot y'(t)$$

Dla uproszczenia będziemy czasami pisać $y(t) = y$

Funkcja v jest funkcją zmiennej y.

$$\frac{dv}{dy} \cdot y'(t) = f(y(t), v(y(t)))$$

PRZYKŁAD

$$y''(t) = [y'(t)]^2$$

$$y'(t) = v(y(t))$$

Liczymy pochodną $y''(t) = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v(y)$

$$\frac{dv}{dy} \cdot v(y) = [v(y(t))]^2$$

$y(t) = y \rightarrow \frac{dv}{dy} \cdot v(y) = (v(y))^2 \qquad /: v(y) \quad v(y) \neq 0$

$$\frac{dv}{dy} = v(y) \qquad /: v \quad \cdot dy$$

$$\frac{dv}{v(y)} = dy$$

$$\int \frac{dv}{v(y)} = \int dy$$

$$\ln|v(y)| = y + \ln|c_1|$$

$$\ln\left|\frac{v(y)}{c_1}\right| = y$$

$$\ln\left|\frac{v(y)}{c_1}\right| = y$$

$$v(y) = c_1 \cdot e^y$$

$$y'(t) = c_1 \cdot e^{y(t)}$$

$$\frac{dy}{dt} = c_1 \cdot e^{y(t)} \quad / : e^y \quad \cdot dt$$

$$\frac{dy}{e^{y(t)}} = c_1 \cdot dt$$

$$\int \frac{dy}{e^{y(t)}} = \int c_1\, dt \longrightarrow \int e^{-y(t)} dy = \int c_1\, dt$$

$$-e^{-y(t)} = c_1 \cdot t + c_2$$

$$e^{-y(t)} = -c_1 \cdot t - c_2$$

$$-y(t) = \ln\left|-c_1 t - c_2\right|$$

$$y(t) = -\ln\left|-c_1 t - c_2\right|$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE 2-EGO RZĘDU

- równaniem różniczkowym liniowym 2-ego rzędu nazywamy równanie w postaci

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t) \qquad B$$

- funkcje $p(t)$ i $q(t)$ nazywamy współczynnikami równania, natomiast funkcję $h(t)$ wyrazem wolnym
- jeżeli $h(t) \equiv 0$ to równanie B nazywamy równaniem liniowym jednorodnym, w przeciwnym wypadku mówimy, że jest to równanie liniowe niejednorodne
- zagadnieniem początkowym będziemy nazywali równanie B uzupełnione o warunki początkowe $y(t_0) = y_0$ i $y'(t_0) = y_1$

TWIERDZENIE O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA B

- jeżeli funkcje $p(t)$, $q(t)$ i $h(t)$ są ciągłe na przedziale (a,b) oraz jeżeli $t_0 \in (a,b)$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale (a,b)

ROZWAŻMY RÓWNANIE LINIOWE JEDNORODNE

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \qquad C$$

- jeżeli funkcje $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ są rozwiązaniami

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \qquad C$$

- jeżeli funkcje $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ są rozwiązaniami równania C, to funkcja

$$y(t) = \alpha \cdot \varphi(t) + \beta \cdot \psi(t)$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

też jest rozwiązaniem tego równania.

- funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są rozwiązaniami równania C, zatem

$$\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0$$

$$\psi''(t) + p(t)\psi'(t) + q(t)\psi(t) = 0$$

- sprawdzimy, czy funkcja postaci $y(t) = \alpha \cdot \varphi(t) + \beta \cdot \psi(t)$ jest rozwiązaniem równania C

$$y(t) = \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)$$

$$y'(t) = \alpha\varphi'(t) + \beta\psi'(t)$$

$$y''(t) = \alpha \cdot \varphi''(t) + \beta\psi''(t)$$

$$\alpha \cdot \varphi''(t) + \beta \cdot \psi''(t) + p(t)\left[\alpha \cdot \varphi'(t) + \beta \cdot \psi'(t)\right] + q(t)\left[\alpha \cdot \varphi''(t) + \beta \cdot \psi''(t)\right] = 0$$

$$\alpha \cdot \varphi''(t) + \beta \cdot \psi''(t) + \alpha \cdot p(t) \cdot \varphi'(t) + \beta \cdot p(t) \cdot \psi'(t) + \alpha \cdot q(t) \cdot \varphi''(t) + \beta \cdot q(t)\psi''(t) = 0$$

$$\alpha\underbrace{\left(\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t) \cdot \varphi''(t)\right)}_{0} + \beta\underbrace{\left(\psi''(t) + p(t)\psi'(t) + q(t)\psi(t)\right)}_{0} = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

to oznacza, że funkcja $y(t) = \alpha \cdot \varphi(t) + \beta \cdot \psi(t)$ jest rozwiązaniem równania C

- ta własność dotyczy tylko równań liniowych, nie dotyczy innych typów równań.

UKŁAD FUNDAMENTALNY RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO

- parę rozwiązań $y_1(t)$, $y_2(t)$ równania liniowego jednorodnego określoną na przedziale (a,b) nazywamy układem fundamentalnym tego równania, jeżeli na tym przedziale spełniony jest warunek:

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

OBNIŻANIE RZĘDU RÓWNANIA LINIOWEGO JEDNORODNEGO

- jeżeli funkcja $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \neq 0)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego, to przez podstawienie

- jeżeli funkcja $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \neq 0)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego, to przez podstawienie

$$y(t) = \varphi(t) \cdot \int z(t)\,dt$$

równanie C sprowadzi się do równania liniowego rzędu I-ego

PRZYKŁAD:

- Rozwiązać równanie $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$

wiedząc, że funkcja $\varphi(t) = e^{-2t}$ jest jednym z rozwiązań.

$\varphi(t) = e^{-2t}$ $\longrightarrow$ rozwiązanie szczególne, bez stałych c; rozwiązanie ze stałą c nazywamy rozwiązaniami ogólnymi.

- Szukamy rozwiązania ogólnego mając rozwiązanie szczególne

$$y(t) = e^{-2t} \cdot \int z(t)\,dt$$

$$y'(t) = -2e^{-2t} \cdot \int z(t)\,dt + e^{-2t} \cdot z(t)$$

$$y''(t) = 4e^{-2t} \cdot \int z(t)\,dt + (-2e^{-2t})\,z(t) + (-2e^{2t})\,z(t) + e^{-2t} \cdot z'(t)$$

$$y''(t) = \underbrace{\cancel{4e^{-2t} \cdot \int z(t)\,dt}} \underbrace{- 4e^{-2t} \cdot z(t)} + e^{-2t} \cdot z'(t) \underbrace{- \cancel{2e^{-2t} \cdot \int z(t)\,dt}} \underbrace{+ e^{-2t} \cdot z(t)} \underbrace{- \cancel{2e^{-2t} \int z(t)\,dt}} = 0$$

$$y''(t) = -3e^{-2t} z(t) + e^{-2t} z'(t) = 0 \qquad | : e^{-2t}$$

$$-3z(t) + z'(t) = 0$$

$$z'(t) = 3z(t) \qquad | : z(t) \qquad z'(t) = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{z(t)} = 3\,dt$$

$$\int \frac{dz}{z(t)} = \int 3\,dt$$

$$\ln|z(t)| = 3t + \ln|c_1|$$

$$\ln \frac{z(t)}{c_1} = 3t \longrightarrow z(t) = c_1 e^{3t}$$

- wstawiamy funkcję z do podstawienia i będziemy mieli rozwiązanie ogólne

$$y(t) = e^{-2t} \cdot \int c_1 e^{3t}\,dt$$

$$y(t) = e^{-2t}\left(c_1 \cdot \frac{1}{3} e^{3t} + c_2\right)$$

$$y(t) = \frac{c_1 e^{t}}{3} + c_2 e^{-2t}$$

ZA TYDZIEŃ: KARTKÓWKA

08.11.2018

Równania różniczkowe 1-ego rzędu