Wykład 6

środa, 3 kwietnia 2019 07:38

ROZKŁAD NORMALNY

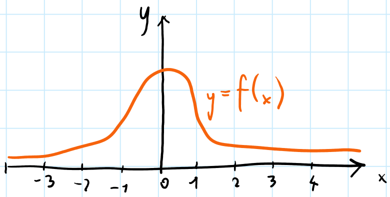
(twierdzenie graniczne)

$X \sim N(0,1)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

$\Phi(t)$ – dystrybuanta z.l. $N(0,1)$

$\Phi(t) = P(x<t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

- wartości $\Phi(t)$ podawane w tablicach



- PRZYKŁAD: Niech $X \sim N(0,1)$. Obliczyć, korzystając z tablic,

a) $P(X < 1{,}21) = \int_{-\infty}^{1,21} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(1{,}21) = 0{,}8869$

b) $P(X < -1{,}21) = P(X > 1{,}21) = 1 - P(X \leqslant 1{,}21) = 1 - \Phi(1{,}21) =$

$= 1 - 0{,}8869 = 0{,}1131$

funkcja parzysta
$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

c) $P(-3{,}5 < X < 2{,}34) = \Phi(2{,}34) - \Phi(-3{,}5) = 0{,}99358 - (1 - 0{,}99774) =$

$= 0{,}9933474$

zapisać na tablicach

- FAKT I: $Y \sim N(m, \sigma)$ to $\frac{Y-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

standaryzacja Y

$P(Y<t) = P(\underbrace{\frac{Y-m}{\sigma}}_{N(0,1)} < \frac{t-m}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$

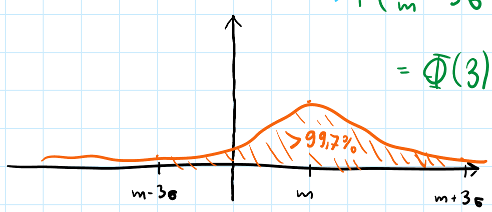
- FAKT II:

Jeśli $X \sim N(m, \sigma)$ to $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) > 0{,}997$

$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = P(-3 < \underbrace{\frac{X-m}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} < 3) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}99865 - 1 =$

$= 0{,}9973$



- PRZYKŁAD: statystyki np. w medycynie

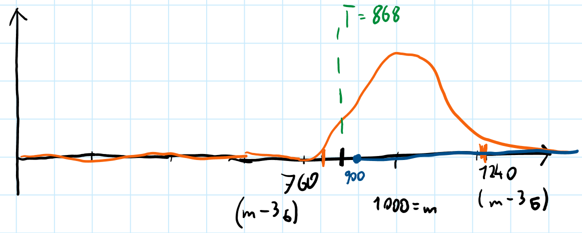
- jeżeli $t > 3{,}5 \to \Phi(t) \approx 1$
  $t < -3{,}5 \to \Phi(t) \approx 0$

- PRZYKŁAD:

Czas sprawnej pracy silników pewnego typu ma rozkład normalny z parametrami 1000, 80. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a) silnik pracuje krócej niż 400 dni?
b) silnik pracuje dłużej niż 900 dni?
c) jaki powinien być okres gwarancji, aby na 95% silnik pracował przez cały okres gwarancji?

X - czas pracy silnika $\quad X \sim N(1000, 80)$



a) $P(X<400) = P\Big(\underbrace{\frac{X-1000}{80}}_{\sim N(0,1)} < \underbrace{\frac{400-1000}{80}}_{-\frac{60}{8}}\Big) = \Phi(-7{,}5) = 0$

b) $P(X>900) = 1 - P(X \leqslant 900) = 1 - P\Big(\frac{X-1000}{80} \leqslant \frac{900-1000}{80}\Big) = 1 - \Phi\big(-\frac{5}{4}\big) = 1 - 1 + \Phi(1{,}25) =$
$= 0{,}8944$

c) T - okres gwarancji

$P(X \geqslant T) > 0{,}95$

$1 - P(X<T) > 0{,}95 \to P(X<T) < 0{,}05$

STANDARYZACJA: $P\Big(\underbrace{\frac{X-1000}{80}}_{\sim N(0,1)} < \frac{T-1000}{80}\Big) = \underbrace{\Phi\Big(\frac{T-1000}{80}\Big)}_{\Phi(-a) = 1-\Phi(a)} < 0{,}05$

$1 - \Phi\big(-\frac{T-1000}{80}\big) < 0{,}05 \to \underbrace{\Phi\big(-\frac{T-1000}{80}\big)}_{\text{funkcja rosnąca}} > 0{,}95 = \Phi(1{,}65)$

$-\frac{T-1000}{80} > 1{,}65 \to T < 868$

Okres gwarancji mniejszy niż 868 dni

NIEZALEŻNOŚĆ ZMIENNYCH LOSOWYCH

- zmienne losowe $X_1, X_2 \dots X_n$ są niezależne $\Leftrightarrow$ dla każdych liczb $t_1, t_2 \dots t_n$

$$P(X_1<t_1) \cap P(X_2<t_2) \cap \dots \cap P(X_n<t_n) = P(X_1<t_1) \cdot P(X_2<t_2) \cdot \dots \cdot P(X_n<t_n)$$

- niech $(X, Y) \to$ dwie zmienne

$$P(X<t \cap Y<u) \underset{def}{=} F(t,u)$$

$P(X<t \cap Y<u) \underset{def.}{=} F(t,u)$

$X,Y \rightarrow$ wektory niezależne $\rightarrow P(X<t)P(Y<u)$

- WŁASNOŚCI:

① $F(t,u) = F_x(t) \cdot F_y(u)$

② $\frac{\partial^2 F(t,u)}{\partial u \partial t} \underset{def}{=} \underbrace{f(t,u)}_{\text{gęstość } (X,Y)}$

③ $X,Y \rightarrow$ niezależne

$f(t,u) = f_x(t) \cdot f_y(u)$

- TWIERDZENIE:

Jeżeli $X_1, X_2 \dots X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_k \sim N(m_k, \sigma_k)$ to

$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots \sigma_n^2}}\right)$ $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$

- TWIERDZENIA GRANICZNE:

① SŁABE PRAWO WIELKICH LICZB

Jeśli $X_1, X_2 \dots X_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i skończonej wariancji $\left(\underset{(i=1,2\dots)}{Var X_i = c^2 < \infty} \rightarrow EX_i = m < \infty\right)$ to

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}_{\text{średnia sumy zmiennych losowych}} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$

- WŁASNOŚCI

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m$$

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} Var X_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} c^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot c^2 = \frac{c^2}{n}$$

- PRZYKŁAD:

a) $X_k \sim B(1, \frac{1}{4})$ $k = 1, 2 \dots$ $EX_k = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[\text{wg. prawdopodobieństwa}]{} \frac{1}{4}$

b) $X_k \sim B(1, p)$ to $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \rightarrow P$

② CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE

Jeśli $X_1, X_2 \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji (wartości oczekiwane też są skończone) to

Jeśli $X_1, X_2 \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonej wariancji (wartości oczekiwane też są skończone) to

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{Var \sum_{k=1}^{n} X_k}} < t\right) = \Phi(t)$$

- WNIOSEK :

Jeśli $X_1, X_2 \dots$ to ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i skończonej wariancji $Var\,X_k = c^2$ $(EX_k = a)$ $k = 1, 2 \dots$, to

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - na}{\sqrt{nc^2}} < t\right) = \Phi(t)$$

jakaś stała

- PRZYKŁAD:

Czas obsługi klienta jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\alpha = 0{,}5$ min. Jakie jest prawdopodobieństwo że czas obsługi 200 takich klientów przekroczy 420 minut?

$k = 1, 2 \dots 200$ $\quad$ X_k – czas obsługi klienta

X_k – rozkład wykładniczy z $\alpha = 0{,}5$ min

$EX_k = \frac{1}{\alpha} = 2$ $\quad$ $Var\,X_k = \frac{1}{\alpha^2} = 4$

$$P\left(\sum_{k=1}^{200} X_k > 420\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{200} X_k \leqslant 420\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{k=1}^{200} X_k - 200\cdot 2}{\sqrt{200\cdot 4}} < \frac{420 - 200\cdot 2}{\sqrt{200\cdot 4}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(0{,}71) = 1 - 0{,}7611 = 0{,}2389$$