SZEREGI LICZBOWE

Szereg liczbowy → suma ciągu

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots$$

Szereg zbieżny $\sum_{i}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ suma częściowa

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ → szereg zbieżny

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ → szereg rozbieżny

Przykład

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$S_2 = \frac{2-1}{2!} = \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} = \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}}_{} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} = S_2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} =$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{3!}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{4-1}{4!} = S_3 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{4!}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n!}}_{0}\right) = 1$$

Do stwierdzenia, czy szereg jest zbieżny czy nie, służą nam kryteria zbieżności.

KRYTERIUM CAŁKOWE

$f(x) \geq 0$, monotoniczna $f(n)$ - ciąg wybrany z funkcji dla $n \in N$

$f(x) \geqslant 0$, monotoniczna $\quad f(n)$ - ciąg wybrany z funkcji dla $n \in \mathbb{N}$

Wtedy $\int_a^\infty f(x)\,dx$ i $\sum_{i=a}^\infty f(i)$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Przykład:

$$\sum_{i=5}^\infty \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)} \quad \text{badamy całkę} \quad \int_5^\infty \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \ln\ln x \\ dt = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & \infty & 5 \\ \hline t & \infty & \ln\ln 5 \end{array} \end{array} \right| = \int_{\ln\ln 5}^\infty \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_{\ln\ln 5}^\infty = \lim_{T\to\infty}(\ln T - \ln\ln\ln 5)$$

∞

Całka jest rozbieżna, więc szereg też jest rozbieżny

FAKT

$$\sum_i^\infty \frac{1}{n^p} - \left\{ \begin{array}{ll} p > 1 & \to \text{zbieżny} \\ p \leqslant 1 & \to \text{rozbieżny} \end{array} \right\} \to \text{to samo dla } \sum_i^\infty \frac{1}{p^n}$$

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ to:

1. $\sum_n b_n$ zbieżny $\to \sum_n a_n$ też zbieżny
2. $\sum_n b_n$ rozbieżny $\to \sum_n a_n$ też rozbieżny

KRYTERIUM ILORAZOWE

$0 \leqslant a_n, \quad 0 \leqslant b_n$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ i $0 < k < \infty$

to oba szeregi są równocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Przykład

Kryterium porównawcze:

$\sum \frac{3n-1}{6n^3+2n-1} \qquad \frac{3}{5}\sum\frac{1}{n^2}$ zbieżny bo $p > 1$

$$\sum \frac{3n-1}{6n^3+2n-1} \qquad \frac{3}{5}\sum \frac{1}{n^2} \text{ zbieżny bo } 2>1$$

najwyższe potęgi

$$0 \leqslant \frac{3n-1}{6n^3+2n-1} \leqslant \frac{3n}{5n^3} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{n^2}$$

Kryterium ilorazowe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^4-n-1} \qquad \sum_{n} \frac{1}{n^3} \text{ zbieżny } (3>1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^4-n-1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3}{n^4-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}})}{n^4(1-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^4}})} = 1$$

ponieważ to jest zbieżne, nasz szereg też jest zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{5}{n^2}}-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{5}{n^2}}-1}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}}{e^{\frac{5}{n^2}}-1}$$

$$= \frac{\pi}{5}$$

$$0 < \frac{\pi}{5} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\overset{\to 0}{\frac{\pi}{n}}}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\overset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}}-1}{\frac{5}{n^2}} = 1$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{\pi}{5}\sum n$$

szereg rozbieżny

Jeżeli $\sum_{n}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to $\sum_{n}^{\infty} a_n$ jest ciągiem rozbieżnym.

KRYTERIUM D'ALEMBERTA

przydatne dla $n!$

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} >1 & \rightarrow \text{rozbieżny} \\ =1 & \rightarrow ? \\ <1 & \rightarrow \text{zbieżny} \end{cases}$$

KRYTERIUM CAUCHY'EGO

przydatne dla k^n

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} >1 \to \text{rozbieżny} \\ =1 \to ? \\ <1 \to \text{zbieżny} \end{cases}$$

Przykład

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}}$$

Kryterium D'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right| = \frac{(n+1)(n+1)^n \cdot n!}{(n+1\ n! \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\to$ szereg rozbieżny

Przykład 2: Tw. Cauchy'ego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n n^{n\cdot n}}{(n+1)^{n\cdot n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^n}{(n+1)^n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2}}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{0}$$

rozbieżny

Przykład 3:

$$\frac{\sin x}{\cancel{n}} = six = 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}$$

kryt. d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3(n+1))!(4(n+1))!}{(5(n+1)!)!(2(n+1)!)!} \cdot \frac{(5n)!(2n)!}{(3n)!(4n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)\cancel{(4n)!}\cancel{(5n)!}\cancel{(2n)!}}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)\cancel{(5n)!}(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\cancel{(3n)!}\cancel{(4n)!}} =$$

$$= \frac{3^3 4^4 \cancel{n^7} + (\ldots)}{5^5 2^2 \cancel{n^7}(1+\ldots)} = \frac{3^3 4^3}{5^5} = \frac{1728}{3125} < 1$$

szereg zbieżny