Podstawowe elementy teorii Układów Liniowych Stacjonarnych:

1^0 Funkcje podstawowe

Skok jednostkowy
$$1(t)=\begin{cases}1, \text{ dla } t>0\\ 0, \text{ dla } t<0\end{cases}$$

Skok jednostkowy w punkcie t_0
$$1(t-t_0)=\begin{cases}1, \text{ dla } t>t_0\\ 0, \text{ dla } t<t_0\end{cases}$$

Okno prostokątne (t_1,t_2)
$$1(t-t_1)-1(t-t_2)=\begin{cases}1, \text{ dla } t\in(t_1,t_2)\\ 0, \text{ dla } t\notin(t_1,t_2)\end{cases}$$

Impuls Diraca
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, \text{ dla } t=0\\ 0, \text{ dla } t\neq 0\end{cases}$$

Impuls Diraca w punkcie t_0
$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, \text{ dla } t=t_0\\ 0, \text{ dla } t\neq t_0\end{cases}$$

2^0 Działania z udziałem impulsu Diraca

$$\frac{d}{dt}\left[1(t)\right]=\delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[1(t-t_0)\right]=\delta(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau=1(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)dt$$

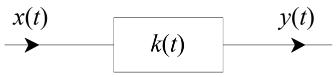
$$x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\cdot\delta(t) \qquad x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\cdot 1=x(t_0)$$ - własność filtracyjna

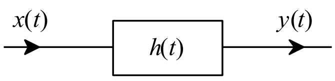
3^0 Splot i jego własności

Przemienność	$S(t)=x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)x(t-\tau)d\tau=y(t)*x(t)$
Łączność	$\left[x(t)*y(t)\right]*z(t)=x(t)*\left[y(t)*z(t)\right]=x(t)*y(t)*z(t)$
Rozdzielność względem dodawania (odejmowania)	$\left[x(t)\pm y(t)\right]*z(t)=x(t)*z(t)\pm y(t)*z(t)$
Różniczkowanie	$\frac{d}{dt}\left[x(t)*y(t)\right]=x(t)*\frac{d}{dt}\left[y(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[x(t)\right]*y(t)$
Przesunięcie w dziedzinie czasu	$x(t-t_0)*y(t)=x(t)*y(t-t_0)=S(t-t_0)$
Splot z impulsem Diraca i pochodną impulsu Diraca	$x(t)*\delta(t)=x(t)$ $x(t)*\delta'(t)=x'(t)$ $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$ $x(t)*\delta'(t-t_0)=x'(t-t_0)$

4^0 Całka Duhamela i całka splotu



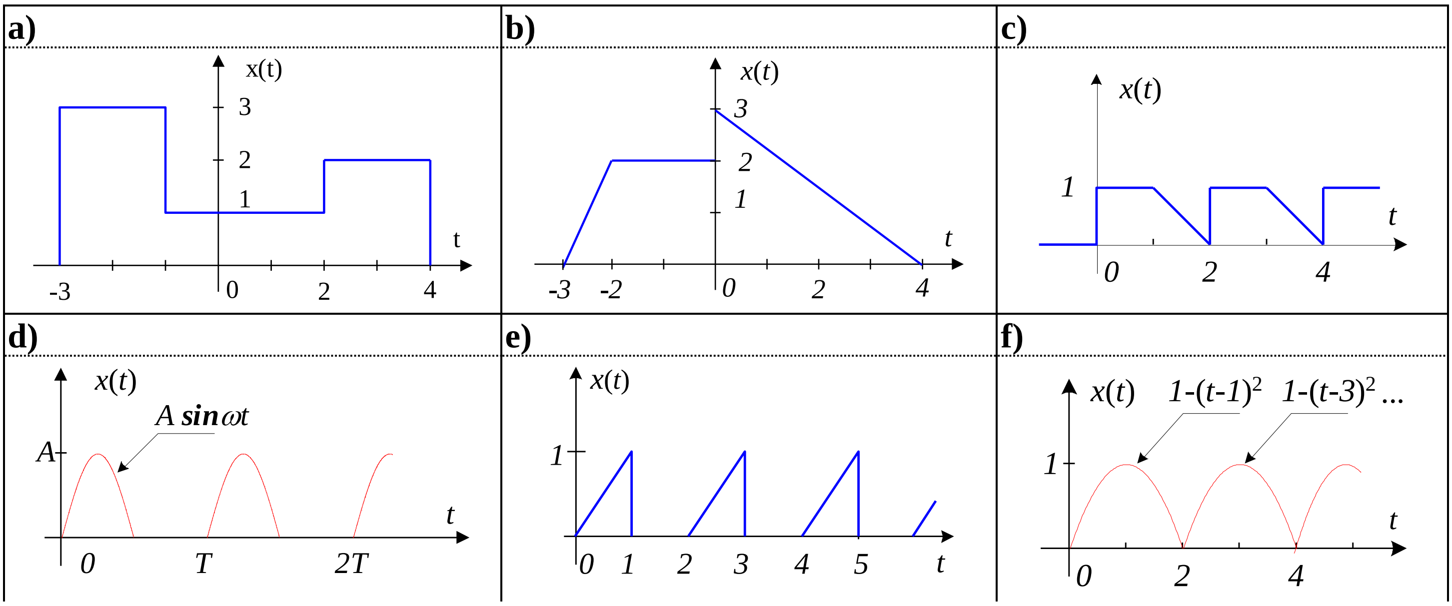
$$y(t)=\frac{d}{dt}\left[x(t)*k(t)\right]$$ - Całka Duhamela



$$y(t)=x(t)*h(t)$$ - Całka splotu

Zadanie 1.

Przedstawione na rysunkach sygnały zapisać w postaci analitycznej wykorzystując skok jednostkowy $1(t)$ oraz impuls Diraca $\delta(t)$. Następnie wyznaczyć pochodne tych sygnałów i przedstawić ich przebiegi na wykresach.



Zadanie 2.

Wyznaczyć sploty następujących funkcji:

a) $\mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t)$

b) $t \cdot \mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t)$

c) $t \cdot \mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t+2)$

d) $t \cdot \mathbf{1}(t-1) * \boldsymbol{\delta}(t-2)$

e) $e^{-t}\mathbf{1}(t) * e^{2t}\mathbf{1}(t)$

f) $e^{-2t}\mathbf{1}(t) * e^{-5t}\mathbf{1}(t-3)$

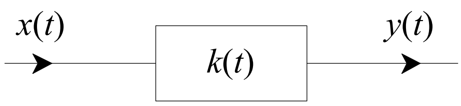
g) $e^{-at}\mathbf{1}(t) * \left[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)\right]$

h) $e^{-2t}\mathbf{1}(t) * (\mathbf{sin}\,3t)\mathbf{1}(t)$

Zadanie 3.

Układ posiada odpowiedź jednostkową

$$k(t) = \left[1 + 3 \cdot e^{-t}\right]\mathbf{1}(t)$$



Wyznaczyć odpowiedź $y(t)$ na wymuszenie $x(t)$

a) $x(t) = t \cdot \mathbf{1}(t)$

b) $x(t) = 2\boldsymbol{\delta}(t) + 3 \cdot \mathbf{1}(t) + 4 \cdot e^{-t}\mathbf{1}(t)$

c) $x(t) = 2 \cdot 1(t-3) + 3\boldsymbol{\delta}(t-2) + 3\boldsymbol{\delta}'(t-1)$

d) $x(t) = 4(\mathbf{sin}\,2t)\mathbf{1}(t)$

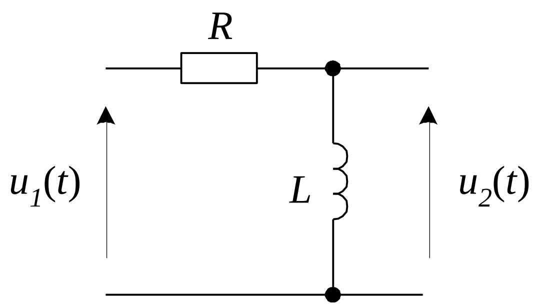
A.G.,T.S.,Z.W. '07
A.S. Cz.S. P.R.®
TS'13rev17

Zadanie 4.

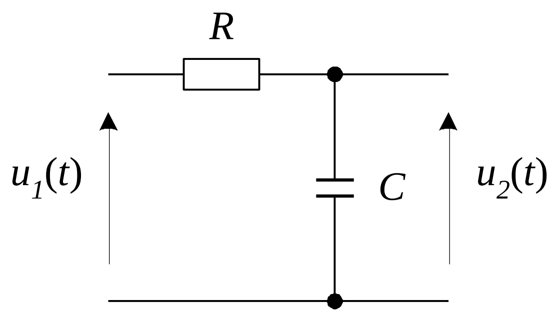
1^0 Wyznaczyć odpowiedź jednostkową $k(t)$ i impulsową $h(t)$.

2^0 Zapisać przebieg $u_2(t)$ wykorzystując całkę Duhamela ($k(t)$) oraz całkę splotową ($h(t)$).

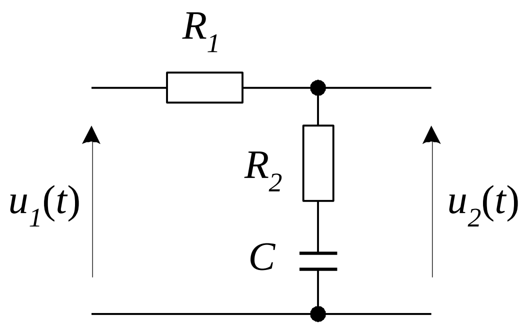
a)



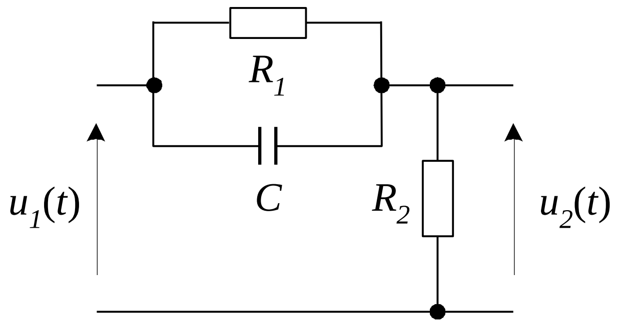
b)



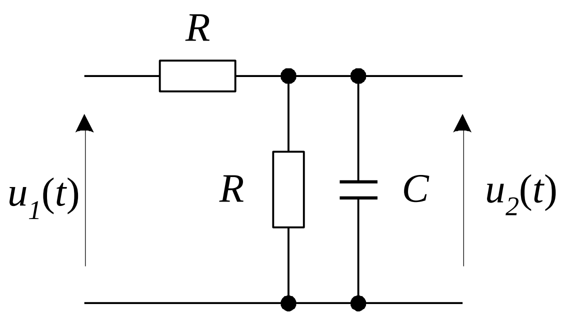
c)



d)



e)



f)