Wykład 10

czwartek, 20 grudnia 2018 11:18

METODA UZMIENNIANIA STAŁEJ

- rozważmy układ równań $y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$ $\quad A$
- niech $Y(t)$ będzie macierzą fundamentalną rozwiązań stowarzyszonych układu jednorodnego $y'(t) = A(t)y(t)$ $\quad B$
- szukamy rozwiązań $y(t)$ układu jednorodnego B w postaci

$$y(t) = Y(t) \cdot C(t)$$

gdzie $C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \cdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}$

- wtedy $y'(t) = Y'(t) \cdot C(t) + Y(t) \cdot C'(t) = A(t)Y(t)C(t) + Y(t)C'(t)$
- ponieważ $y(t)$ jest rozwiązaniem układu niejednorodnego to

$$y'(t) = A(t)y(t) + h(t) = A(t)Y(t)C(t) + h(t)$$

- stąd otrzymujemy $Y(t)C'(t) = h(t)$

POSTAĆ ROZWIĄZANIA OGÓLNEGO RÓWNANIA LINIOWEGO NIEJEDNORODNEGO

- niech $n \in \mathbb{N}$ i $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem o niepustym wnętrzu...

>> SLAJD! <<

PRZYKŁAD:

- rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - e^{-t} \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - 6e^{-t} \end{cases}$$

- rozwiązujemy układ jednorodny

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) \end{cases}$$

niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -2$

wektor własny: $\lambda_1 \to v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 \to v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Stąd: $y_1 = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad y_2 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- dalej rozwiązujemy układ równań ze względu na C_1' i C_2'

$$\begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} \\ 3e^{-3t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -6e^{-t} \end{bmatrix}$$

- korzystając np. z Cramera mamy $C_1'(t) = 4e^{2t}$ oraz $C_2'(t) = 9e^{t}$

- całkując powyższe: $C_1(t) = 2e^{2t} + D_1 \qquad C_2(t) = 9e^{t} + D_2$

- rozwiązanie układu:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) = (2e^{2t}+D_1)\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} + (9e^{t}+D_2)\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Podsumowanie: koniec układów równań → metoda Eulera i metoda uzmienniania stałych

TRANSFORMATA LAPLACE'A

- niech $f(t)$ będzie funkcją określoną na $[0, +\infty)$. Transformatą Laplace'a funkcji f nazywamy funkcję

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}s = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

- transf. Laplace'a jest dobrze określona tylko dla funkcji o wzroście podwykładniczym, tzn. takich, dla których stałe C i M

>> SLAJD << $\quad |f(t)| \leqslant Me^{ct}$

PRZYKŁAD

- $\mathcal{L}\{1\}s = \int_0^{+} e^{-st} \cdot 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T =$

$= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$

- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+} e^{-st} \cdot e^{at}\,dt = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{a-s}e^{T(a-s)} - \frac{1}{a-s}\right] =$

$= \frac{1}{s-a} \qquad$ gdy $s > a$

$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{a-s} e^{(a-s)T} - \frac{1}{a-s} =$

$= \frac{1}{s-a}$ gdy $s > a$

TRANSFORMATY WAŻNIEJSZYCH FUNKCJI

będą na kolokwium podane

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$

TRANSFORMATY POCHODNYCH

- dążymy do tego, żeby rozwiązywać równania z użyciem transformaty
- jeśli istnieją transformaty funkcji $f(t)$ oraz $g(t)$, $c \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$$

- transformata pochodnej:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

gdzie $F(s) \to$ transformata $f(t)$

METODA OPERATOROWA

Przykład

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

- $Y(s) \to$ transformata $y(t)$
- nakładamy transformatę na obie strony równania

$$\mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} - 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

- korzystamy z wzorów na pochodne transformat:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

- wyliczamy $Y(s)$ korzystając z warunków początkowych

$Y(s) = \frac{s^2-4s+5}{\ldots}$

- wyliczamy $Y(s)$ korzystając z warunków początkowych

$$Y(s) = \frac{s^2-4s+5}{(s-2)(s+1)(s-3)}$$ to była poprawka

- ułamki proste:

$$\frac{s^2-2s+1}{(s-2)(s+1)(s-3)} = \frac{-\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3} + \frac{\frac{5}{6}}{s+1}$$ to się zmieni

- stąd:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) + \frac{5}{6}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) =$$

$$= \mathcal{L}\{-\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{6}e^{-t}\}$$

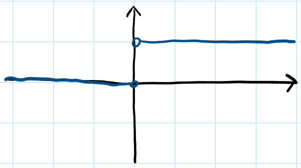
- rozwiązanie: zdejmujemy transformatę

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{6}e^{-t}$$

to też się zmieni

FUNKCJA HEAVYSIDE'A

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$



WŁASNOŚCI TRANSFORMATY LAPLACE'A

- $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
- $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
- $\mathcal{L}\{1(t-\tau) f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$

PRZYKŁAD

$f(t) = \cos 3t$

- z własności $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ oraz $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$

$\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{1}{3} \frac{\frac{s}{3}}{\ldots} = \frac{s}{\ldots}$

• z własności: $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ oraz $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{1}{3} \frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2+9}$$

PRZYKŁAD II:

$$f(t) = t^{15}$$

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

$$\mathcal{L}\{t^{15}\} = \mathcal{L}\{t^{15} \cdot 1\} = (-1)^{15} \cdot \frac{d^{15}}{ds^{15}} \mathcal{L}\{1\} = -\frac{d^{15}}{ds^{15}} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{15!}{s^{16}}$$

PRZYKŁAD III:

$$f(t) = e^{-t} t^3$$

$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$

$$\mathcal{L}\{e^{-t} t^3\} = \frac{6}{(s+1)^4}$$

PRZYKŁAD 4

$$f(t) = 1(t-2)e^t$$

$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{1(t-\tau) f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$

$$\mathcal{L}\{1(t-2)e^t\} = \mathcal{L}\{1(t-2)e^{t-2+2}\} = e^2 \mathcal{L}\{1(t-2)e^{t-2}\} =$$

$$= e^2 \cdot e^{-2s} \frac{1}{s-1} = e^{2(1-s)} \frac{1}{s-1}$$

SPLOT FUNKCJI

• niech $f(t)$ i $g(t)$ będą całkowalne na każdym przedziale $[0,T]$ gdzie $T > 0$

splot funkcji $f(t)$ i $g(t)$:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \, d\tau$$

PRZYKŁAD:

$f(t) = t^2 \qquad g(t) = 2t$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot 2(t-\tau) \, d\tau = 2\int_0^t (\tau^2 t - \tau^3) \, d\tau = \frac{1}{6} t^4$$

WŁASNOŚCI SPLOTU

• $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

• $f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$

- $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
- $f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$
- $[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$
- $[c f(t)] * g(t) = c\,(f(t) * g(t))$