Wykład 5 - całka powierzchniowa zorientowana

środa, 11 kwietnia 2018 23:13

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|\,du\,dv$$

$\Sigma: z = z(x,y) \quad (x,y) \in D$

$\iint = \iint$

3. Środek masy pola Σ:

$S(x_0, y_0, z_0)$

$$x_0 = \frac{\iint_{\Sigma} x\,\delta(x,y,z)\,dS}{\iint_{\Sigma} \delta(x,y,z)\,dS}$$

$$y_0 = \frac{\iint_{\Sigma} y\,\delta(x,y,z)\,dS}{m(\Sigma)}$$

$$z_0 = \frac{\iint z\,\delta(x,y,z)\,dS}{m(\Sigma)}$$

4. Momenty bezwładności płata Σ o gęstości masy $\delta(x,y,z)$ względem

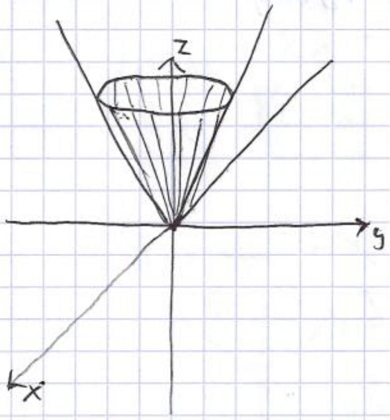
osi OX: $I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\,\delta(x,y,z)\,dS$

osi OY: $I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2)\,\delta(x,y,z)\,dS$

osi OZ: $I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)\,\delta(x,y,z)\,dS$

punktu $O(0,0,0)$: $I_0 = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\,\delta(x,y,z)\,dS$

Przykład: Oblicz masę części powierzchni $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \le z \le 4$ o gęstości masy: $\delta(x,y,z) = x^2 z$



$$\Sigma: \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v \end{cases} \qquad D: \begin{cases} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 1; 4 \rangle \end{cases}$$

$\vec{r_u} = [-v\sin u, v\cos u, 0]$

$\vec{r_v} = [\cos u, \sin u, 1]$

$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = [v\cos u, v\sin u, -v]$

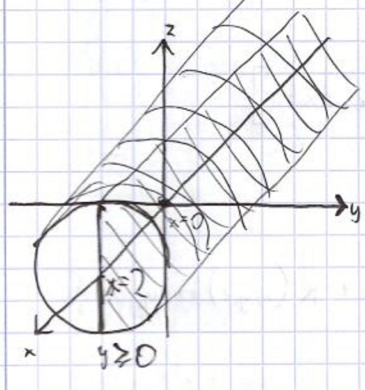
$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2}\,v$

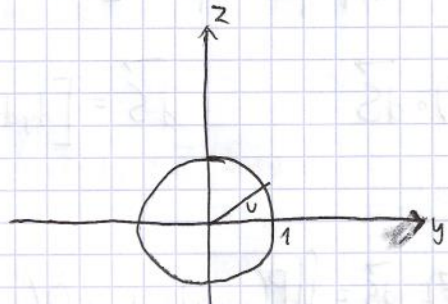
PRZYKŁAD:

Obliczyć masę części walca $y^2 + z^2 = 1$ ograniczonej płaszczyznami

PRZYKŁAD:

Obliczyć masę części walca $y^2+z^2=1$ ograniczonej płaszczyznami $x=0$, $x=2$, $y=0$ $(y\geq 0)$ o gęstości powierzchniowej $\delta(x,y,z)=y^2$





$$\begin{cases} x=v \\ y=\cos u \\ z=\sin u \end{cases} \qquad R=1 \qquad \begin{cases} u\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \\ v\in\langle 0;2\rangle \end{cases}$$

$\vec{r_u}=[0,-\sin u,\cos u]$

$\vec{r_v}=[1,0,0]$

$\vec{r_u}\times\vec{r_v}=[0,\cos u,\sin u]$

$|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|=1$

$$m(\Sigma)=\iint_\Sigma y^2\,dS=\iint_D \cos^2 u\cdot 1\,du\,dv=$$

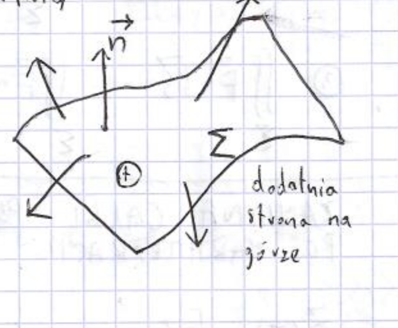
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}du\int_0^2\cos^2 u\,dv=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du=$$

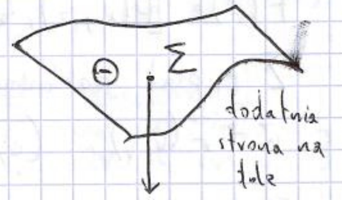
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\,du=\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]=\pi$$

PŁAT ZORIENTOWANY:

- płat, na którym określono stronę dodatnią
- wektor normalny jest zawsze skierowany od strony ujemnej do dodatniej
- na płatach zorientowanych określamy pola ~~zorientowane~~ wektorowe
- $\vec{n}=\dfrac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|}$ ← wektor normalny

$\vec{P}=[P(x,y,z),Q(x,y,z),R(\ldots)]$





$$m(\Sigma)=\iint_\Sigma x^2 z\,dS=\sqrt{2}\iint_D v^3(\cos^2 u)\cdot v\,du\,dv=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}du\int_1^4 v^4\cos^2 u\,dv=$$

$$m(\Sigma) = \iint_{\Sigma} x^2 z\, dS = \sqrt{2} \iint_{D} v^3 (\cos^2 u) \cdot v\, du\, dv = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} du \int_1^4 v^4 \cos^2 u\, dv =$$

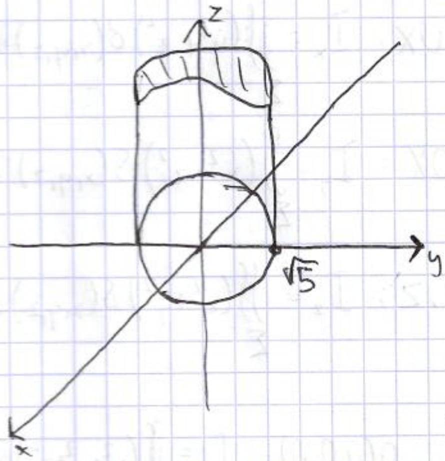
$$= \frac{\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du \,(4^5 - 1) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot 1023 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{1023}{10} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \pi$$

PRZYKŁAD:

sigma

Oblicz moment bezwładności wzgl. OZ płata powierzchni $z = xy$ wyciętego walcem kołowym o równaniu $x^2+y^2 = 5$, jeżeli gęstość masy na płacie Σ dana jest funkcją $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$



$$D: \begin{cases} \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ \varrho \in \langle 0; \sqrt{5} \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \\ y = \varrho \sin\varphi \end{cases}$$

$$|J| = \varrho$$

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2+y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dS =$$

$$\Sigma: \begin{cases} z = xy \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

$$I_z = \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy = \iint \varrho^2 \cdot \varrho\, d\varphi\, d\varrho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int \varrho^3\, d\varrho = \frac{25}{2} \pi$$

CAŁKA POWIERZCHNIOWA ZORIENTOWANA

z pola wektorowego $\vec{F}(\vec{r})$ po płacie zorientowanym Σ

Płat o orientacji przeciwnej: $-\Sigma$

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{dS} \qquad \vec{dS} = [dy\,dz,\ dz\,dx,\ dx\,dy]$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{dS} = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dz\, dx + R(x,y,z)\, dx\, dy$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{S} = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

całka zorientowana ($\vec{S}$)

$$\iint_{\Sigma} \left[\vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{n}(\vec{r})\right] dS$$

całka niezorientowana (S) bez strzałki

WŁASNOŚCI PODSTAWOWE:

① LINIOWOŚĆ

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F} + \vec{G}) \circ d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{F} \circ d\vec{S} + \iint_{\Sigma} \vec{G} \circ d\vec{S}$$

②

$$\iint (\alpha \vec{F}) \circ d\vec{S} = \alpha \iint_{\Sigma} \vec{F} \circ d\vec{S}$$

③ $$\iint_{-\Sigma} \vec{F} \circ d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \vec{F} \circ d\vec{S}$$

ZAMIANA CAŁKI POWIERZCHNIOWEJ NA CAŁKĘ PODWÓJNĄ PO PARAMETRACH:

$\vec{F}(\vec{r}) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] \rightarrow$ pole wektorowe ciągłe

Σ – płat zorientowany gładki (kawałkami) o parametryzacji

$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$

$$\iint_{\Sigma} \left[\vec{F}(\vec{r}) \circ \vec{n}(\vec{r})\right] dS = \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \, |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \, du\,dv =$$

$$= \iint_{D} \left[\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \circ (\vec{r_u} \times \vec{r_v})\right] du\,dv$$

Wtedy $$\iint_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{S} = \pm \iint_{D} \left[\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \circ (\vec{r_u} \times \vec{r_v})\right] du\,dv$$

PRZYKŁAD:

Dla płata – wykresu funkcji $z = z(x,y)$ $\qquad \vec{r} = [x, y, z(x,y)]$

$\vec{r_x} = [1, 0, \ldots]$

Dla płata - wykresu funkcji $z = z(x,y)$

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{dS} \overset{\pm}{=} \iint\limits_{D} \left[-P z_x - Q z_y + R \right] dx\,dy$$

$\vec{r} = [x, y, z(x,y)]$

$\vec{r}_x = [1, 0, z_x]$

$\vec{r}_y = [0, 1, z_y]$

$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = [-z_x, -z_y, 1]$

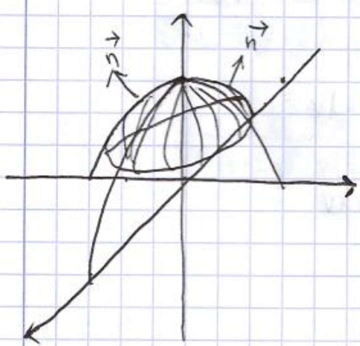
STRUMIEŃ POLA:

Strumień pola $\vec{F}(\vec{r})$ przez powierzchnię zorientowaną Σ:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{dS}$$

PRZYKŁAD:

Oblicz strumień pola $\vec{F}(x,y,z)$ o składowej $\vec{F}(x,y,z) = [x, -y, 2z]$ przez górną stronę płata paraboloidy: $z = 5 - x^2 - y^2$ $\cancel{\Sigma = 5 - x^2 - y^2}$ odciętego płaszczyzną: $z = 1$



$$\Phi_{\Sigma}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz - y\,dz\,dx + 2z\,dx\,dy$$

$$5 - (x^2 + y^2) = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} u \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 2 \rangle \end{cases}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = 5 - v^2 \end{cases}$$

$\vec{r}_u = [-v\sin u, v\cos u, 0]$

$\vec{r}_v = [\cos u, \sin u, -2v]$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = [-2v^2\cos u, -2v^2\sin u, -v]$

$\vec{n} = [2v^2\cos u, 2v^2\sin u, v]$

$$\iint_D \left(2v^3\cos^2 u - 2v^3\sin^2 u + (10-2v^2)v\right) du\,dv =$$

$$\cancel{= 2\int_0^{2\pi} du \int v^3 (\cos 2u - \sin^2 u + 2v)\, dv}$$

$$= 2\int_0^{2\pi} du \int_0^2 v^3 \cos 2u\, dv + 2\int_0^{2\pi} du \int_0^2 (5v - v^3)\, dv = 2\left[\int_0^{2\pi} \cos 2u\, du \int_0^2 v^3\, dv + 2\pi\left(\frac{5v^2}{2} - \frac{v^4}{4}\right)\Big|_0^2\right] =$$

$$= 4\pi(10-4) = 24\pi$$

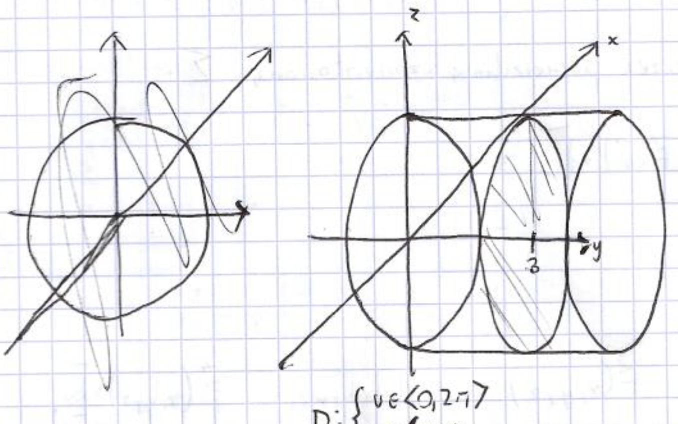
PRZYKŁAD:

Obliczyć całkę

$$\iint_\Sigma (2x+y)\,dy\,dz + (y^2 - z)\,dz\,dx + (z+xy)\,dx\,dy = (1)$$

Σ – wewnętrzna strona bocznej powierzchni walca

$x^2 + z^2 = 5$, $0 \leq y \leq 3$



$$\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos u \\ y = v \\ z = \sqrt{5}\sin u \end{cases}$$

$\vec{r_u} = [-\sqrt{5}\sin u, 0, \sqrt{5}\sin u]$

$\vec{r_v} = [0, 1, 0]$

$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = [-\sqrt{5}\cos u, 0, -\sqrt{5}\sin u]$

$$D: \begin{cases} u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

$$(1) = \iint_D \left[(2\sqrt{5}\cos u + v)(-\sqrt{5}\cos u) + (\sqrt{5}\sin u + \sqrt{5}\cdot v\cdot \cos u)(-\sqrt{5}\sin u)\right] du\,dv =$$

$$= \iint_D (-10\cos^2 u - 5\sin^2 u - \sqrt{5}\, v\cos u - 5v\cos u \sin u)\, du\,dv =$$

$$= \iint_D (-5 - 5\cos^2 u)\, du\,dv - \sqrt{5}\iint_D v(\cos u + \sqrt{5}\cos u \sin u)\, du\,dv = \ldots$$