Wykład 3

środa, 13 marca 2019 07:32

# KONSULTACJE

- piątki g. 11-12 C-11, p.206
- kolos poprawkowy → do ustalenia

# PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE - PRZYKŁADY

Lista 2 zadanie 3

(1) Wiadomo, że 3% badanych elementów ma skazy. Do ich wykrycia stosuje się test. Jeśli element ma skazę, w 95% test jest pozytywny. W 90% test nie wykazuje wady, gdy element jej nie ma.

a) jakie jest prawdopodobieństwo że elem. ma skazę, jeśli wynik testu jest pozytywny

b) jakie jest prawdopod. że element ma skazę, jeśli test jest dwukrotnie pozytywny?

a) $s$ – element ma skazę $\qquad P(s) = 3\% = 0{,}03$

$+$ – test pozytywny

$\bar{s} = d$

$P(+|s) = 0{,}95$

$P(-|d) = 0{,}9 \rightarrow P(+|d) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$$P(s|+) = \frac{P(+|s)\cdot P(s)}{P(+)} = \frac{P(+|s)\cdot P(s)}{P(+)} = \frac{0{,}95\cdot 0{,}03}{0{,}95\cdot 0{,}03 + 0{,}1\cdot 0{,}97} = 0{,}227 \qquad (22{,}7\%)$$

$s, d \rightarrow$ rozłączne

$\underbrace{P(d) = 0{,}97 \qquad P(s) = 0{,}03}_{}$

spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

$$P(+) = P(+|s)\cdot P(s) + P(+|d)\cdot P(d)$$

b) $$P(s|++) = \frac{P(++|s)\cdot P(s)}{P(++)} = \frac{P(++|s)\cdot P(s)}{P(++|s)\cdot P(s) + P(++|s)\cdot P(d)} = \frac{0{,}95^2\cdot 0{,}03}{0{,}95^2\cdot 0{,}03 + 0{,}1^2\cdot 0{,}97} = 0{,}736 = 73{,}6\%$$

element ma skazę, test 2 razy przeprowadzany

| | | |
|---|---|---|
| + | − | $P(++|s) = P(+|s)\cdot P(+|s) = (0{,}95)^2$ |
| − | + | $P(+-|s) = 0{,}95\cdot 0{,}05$ |
| + | + | $P(+-|s) = 0{,}05\cdot 0{,}95$ |
| − | − | $P(--|s) = 0{,}05\cdot 0{,}05$ |

c) $P(s|+++) = 0{,}964 \qquad (96{,}4\%)$

d) $P(d|-) = 0{,}9983 \qquad (99{,}83\%)$

# NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

- jeśli mielibyśmy $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

zajście zdarzenia B nie zmienia prawdopodobieństwa zdarzenia A

- jeśli mielibyśmy $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

zajście zdarzenia $B$ nie zmienia prawdopodobieństwa zdarzenia $A$

- DEFINICJA: zdarzenia $A, B$ są niezależne $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- DEFINICJA: Zdarzenia $A_1, A_2 \ldots A_n$ są niezależne, jeśli dla danego układu $k$ różnych zdarzeń spośród nich $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots$ $k = 2, 3 \ldots n$

- WŁASNOŚCI

1. Jeśli zdarzenia $A, B$ są rozłączne i $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ to $A, B$ nie są niezależne bo $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ sprzeczne z $P(A) \cdot P(B) \neq 0$

2. $\Omega, A$ są zawsze niezależne, bo $P(\underbrace{\Omega \cdot A}) = P(A) = P(A) \cdot \underbrace{1} = P(A) \cdot P(\Omega)$

3. $A, B$ są niezależne to $A, \bar{B}$ są niezależne
   $\bar{A}, B$ są niezależne
   $\bar{A}, \bar{B}$ są niezależne

4. Własność 3 zachodzi dla większej liczby zdarzeń.

*** ZADANIE DODATKOWE**

Uzasadnić, że jeśli zdarzenia $A, B$ są niezależne, to zdarzenia $\bar{A}, \bar{B}$ są niezależne.

## PRZYKŁAD

Trzy moduły programu antywirusowego pracują niezależnie. 1 wykrywa 90% wirusów, 2 – 80%, 3 – 70%.

a) jaki % wirusów wykrywają łącznie

b) jaki % wirusów wykrywa 3 moduł, a nie wykrywa ani 1, ani 2

a) $A_i$ – wirus wykryty przez moduł $i = 1, 2, 3$

$P(A_1) = 0{,}9 \qquad P(A_2) = 0{,}8 \qquad P(A_3) = 0{,}7$

$A_1, A_2, A_3$ są niezależne

$A$ – wirus wykryty przez 1 z 3 modułów

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ → przynajmniej 1 moduł wykrywa wirusa

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$ I sposób (dwa razy wzór na sumę zdarzeń, skorzystanie z niezależności)

$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) =$ II sposób (prawo de Morgana)

$= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \underbrace{1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3)}_{\text{własność 3}} = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994$ (99,4%)

b) $P(A_3 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \underset{\text{własność 3}}{=} P(A_3) \cdot P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}014 = 1{,}4\%$

# ZMIENNA LOSOWA

## DYSTRYBUANTA ZMIENNEJ LOSOWEJ

$\Omega, A, P$

DEFINICJA:

- zmienną losową $X$ nazywamy funkcję $X: \Omega \to R$, że $\bigwedge_{t \in R} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}$ jest zdarzeniem
- dystrybuantą zmiennej losowej $X$ nazywamy funkcję $F: R \to [0,1]$ że $F(t) = P(X<t) = P(\omega : X(\omega) < t)$, $t \in R$

## PRZYKŁAD

Z talii 52 kart (do brydża) losujemy jednocześnie 2 karty. Niech $X$ określa liczbę pików wśród 2 wylosowanych kart.

$$\Omega = \{\{k_1, k_2\}, k_1 \neq k_2, k_i \in \{1 \ldots 52\}\}$$

$\Omega$ ma $\binom{52}{2}$ wyników

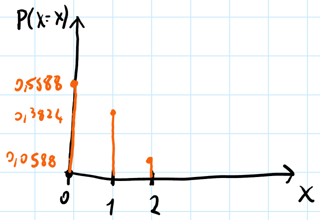
liczba wylosowanych pików

$X: \Omega \to R$

$X \in \{0, 1, 2\}$

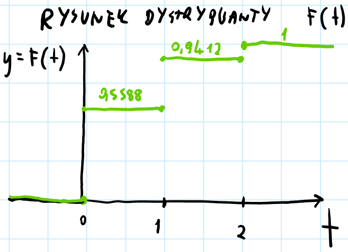
$$P(X=0) = \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = 0{,}5588 \qquad P(X=1) = \frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{39}{1}}{\binom{52}{2}} = 0{,}3824$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = 0{,}0588$$




$$F(t) = P(X<t) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & t \leq 0 \\ P(X=0) = 0{,}5588 & 0 < t \leq 1 \\ P(X=0 \cup X=1) = 0{,}5588 + 0{,}3824 = 0{,}9412 & 1 < t \leq 2 \\ P(X=0 \cup X=1 \cup X=2) = 1 & 2 < t \end{cases}$$

RYSUNEK DYSTRYBUANTY $F(t) = P(X<t)$



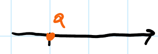

$F(0) = P(X<0) = P(\emptyset) = 0$

$F(1$

## FAKT:

Niech $F(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej $X$. Uzasadnić, że:

1) $P(X \geqslant a) = 1 - F(a)$ bo $P(X \geqslant a) = 1 - \underbrace{P(X < a)}_{F(a)} = 1 - F(a)$



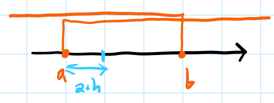

2) $a < b$, $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$


$P(a \leqslant X < b) = P(\underbrace{X \geqslant a}_{A} \cap \underbrace{X < b}_{B}) = P(X \geqslant a) + P(X < b) - P(X \geqslant a \cup X < b) =$

prawd. iloczynu zdarzeń

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$


$= 1 - F(a) + F(b) - 1 =$




3) $P(X = a) = \underbrace{F(a^+)}_{\lim\limits_{t \to a^+} F(t)} - F(a)$

$P(X = a) = P(\lim\limits_{h \to 0^+} (a \leqslant X < a + h)) = \lim\limits_{h \to 0^+} [F(a+h) - F(a)] = F(a^+) - F(a)$