Testowanie Hipotez c.d

Lista 6 zad. 1, 3
-1 7, 8, 9, 10 } zadania 1-6

$H: \theta \in \Theta_1$
$K: \theta \in \Theta_2$

Q - zbiór krytyczny

$\bigwedge_{\theta \in \Theta_1} P(Q) \leq \alpha$

$\bigwedge_{\theta \in \Theta_2} P(\overline{Q})$, $P(Q)$
$\Rightarrow 1 - P(Q)$

Producent twierdzi, że grubość produkowanych przez niego płytek ma rozkład normalny $N(20, 4)$. Zmierzono grubość 25 płytek wybranych losowo i obliczono, że średnia z próby $\bar{x} = 18.6$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że przeciętna grubość płytek jest taka jak podaje producent.

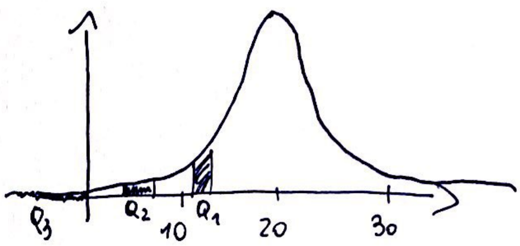
X_k - grubość ktej płytki

X_k - grubość k-tej płytki $X_k \sim N(m, k)$

$X_k \sim N(20, 4)$ według producenta

$H: m = 20$
$K: m < 20$

$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{4}{\sqrt{25}}\right)$



$\begin{cases} P(Q) \leq \alpha & \text{dla } H \text{ prawdziwe lub } m = 20 \\ P(\overline{Q}) \text{ największe} & \text{dla } m < 20 \end{cases}$

$Q = (-\infty, c)$

$\alpha = P(Q) = P(\bar{X} < c) = P\left(\frac{\bar{X} - 20}{\frac{4}{5}} < \frac{c - 20}{\frac{4}{5}}\right) = \Phi\left(\frac{c-20}{\frac{4}{5}}\right)$,
$\alpha = 0{,}05$ gdy $m = 20$

$\Phi\left(-\frac{c-20}{\frac{4}{5}}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 = \Phi(1{,}64)$

$\frac{c-20}{4} \cdot 5 = -1{,}64$

$c = 18{,}69$

$Q = (-\infty, 18.69)$

$\bar{x} = 18{,}6 \in Q$ odrzucamy H.

Waga wyrobu według metki to 10g. Zważono 10 losowo wybranych wyrobów i otrzymano: 9.2 10.1 10.3 9.7 9.5
10.2 9.3 9.9 10.4 9.4

Przyjmując że waga wyrobu ma rozkład normalny na poziomie istotności a) $\alpha=0.1$
b) $\alpha=0.2$

zweryfikować, że $H: m=10$ $K: m\neq 10$
czyli $m_0=10$

X_k - waga k-tego wyrobu $k=1,\dots,10$
$X_k \sim N(m,\sigma)$ σ - nieznane

$$t_{n-1}=\frac{\bar{x}-m_0}{s}\cdot\sqrt{n-1}$$

$\bar{x}$ = średnia = 9.8 , $m=10$

$s^2=0{,}174$

$$t_9=\frac{9.8-10}{\sqrt{0{,}174}}\cdot 3=-1{,}44$$

$Q=(-\infty,-t_\alpha)\cup(t_\alpha,+\infty)$ t_α $v=9$

a) $\alpha=0{,}1$ $p=\frac{\alpha}{2}=0{,}05$, $t_\alpha=1{,}833$, $Q=(-\infty,-1{,}833)\cup(1{,}833,+\infty)$

$-1{,}44\notin Q$

Odp: Nie ma podstaw do odrzucenia H.

b) $\alpha=0{,}2$ $p=\frac{\alpha}{2}=0{,}1$ $t_\alpha=1{,}383$ $Q=(-\infty,-1{,}383)\cup(1{,}383,+\infty)$

$-1{,}44\in Q$

Odp: Odrzucamy H na poziomie $\alpha=0{,}2$

Scanned with CamScanner

Wykonano 8 pomiarów wielkości o rozkładzie normalnym otrzymując:

8.17 8.21 8.05 8.19 8.22 8.06

Zweryfikować hipotezę, że wariancja wyników pomiaru jest równa 0,003 na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$

$X_k \sim N(m, \sigma)$

$H: \sigma^2 = 0{,}003$

$K: \sigma^2 \neq 0{,}003$

Statystyka chi-kwadrat

$$\chi^2_{n-1} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

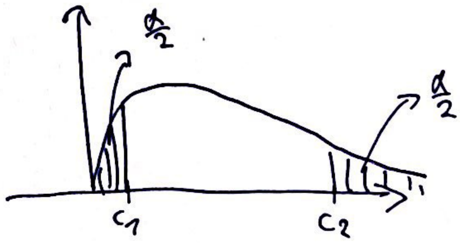
$\bar{x} = 8.14$, $ns^2 = 0{,}0328$, $\chi^2_7 = \frac{0{,}0328}{0{,}003} = 10{,}93$

Czyli $Q = (0, c_1) \cup (c_2, +\infty)$

c_1 z tablic χ^2_7 $v=7$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ $c_1 = 1{,}69$

c_2 $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ $c_2 = 16{,}01$

$Q = (0,\ 1{,}69) \cup (16{,}01,\ +\infty)$



$\chi^2_7 = 10{,}93 \in Q$

Odp: Nie ma podstaw do odrzucenia H.

Sprawdzono symetryczność monetę rzucono 100 razy i 58 razy był orzeł.
Dla $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę o symetryczności monety

$H: p = \frac{1}{2}$ $\qquad$ X_k - wynik k - rzutu

$K: p \neq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $X_k \sim B(1, p)$, $\quad p = P(\text{orzeł})$

↳ (moneta symetryczna gdy szansa na orła/reszkę po 50%)

$$U = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \cdot \sqrt{n} = \frac{\frac{58}{100} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{100} = 1.6$$

$$Q = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$$

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 = \Phi(1{,}96)$$

$$Q = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$$

$$U = 1{,}6 \notin Q$$

Nie ma podstaw do odrzucenia H.

Def. p-wartość (p-value) jest to najmniejszy poziom istotności przy którym dla zaobserwowanej wartości statystyki odrzucamy H.

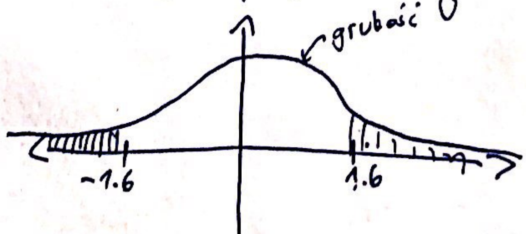
$\alpha < p$ $\quad$ nie ma podstaw do odrzucenia H

$\alpha \geq p$ $\quad$ odrzucamy H.

Przykład. Obliczyć p-wartość dla danych z ostatniego przykładu

$U = 1.6 \quad U \sim N(0,1)$

$$p = P(Q_{\text{najmniejszy}}) = P(U < -1.6 \cup U > 1.6) =$$
$$= 2 \cdot P(U < -1.6) = 2 \cdot \Phi(-1.6) = 2 \cdot [1 - \Phi(1.6)] =$$
$$= 0{,}1096$$



$$Q_{\text{najmn}} = (-\infty, -1.6\rangle \cup \langle 1.6, +\infty)$$