Wykład 12

wtorek, 8 stycznia 2019 07:41

DYNAMIKA

- różnica między dynamiką a kinematyką: masa
- siły działające na układ, masa układu
- jeśli $a=0$, układ w stanie spoczynku lub w ruchu jednostajnym
- IV prawo dynamiki: $\frac{d}{dt}(mv_1 + mv_2 + \ldots + mv_n) = P_1 + P_2 + \ldots + P_N$
- V prawo dynamiki: prawo grawitacji: $ma = P = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE RUCHU SWOBODNEGO

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt} = P\right)$$

$$m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}} = \bar{P}$$

XYZ:

$$m\bar{a}_x = \sum \bar{P}_{ix} \qquad m\bar{a}_y = \sum \bar{P}_{iy} \qquad m\bar{a}_z = \sum \bar{P}_{iz}$$

$$m\ddot{x} = \sum \bar{P}_{ix} \qquad m\ddot{y} = \sum \bar{P}_{iy} \qquad m\ddot{z} = \sum \bar{P}_{iz}$$

Układ walcowy ← poza kolokwium

$$ma_\rho = m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\rho\right) = \sum \bar{P}_{i\rho}$$

$$ma_\varphi = m\left(\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\rho}{dt}\right) = \sum \bar{P}_{i\varphi}$$

$$ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum \bar{P}_{iz}$$

$$ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\Theta - r\Theta^2\right) = \sum \bar{P}_{ir}$$

$$ma_\Theta = m\left(r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\Theta + r\varphi^2\sin\Theta\cos\Theta\right) = \sum P_{i\rho}$$

$$ma_\varphi = m\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\Theta + r\ddot{\varphi}\sin\Theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\Theta}\cos\Theta\right) = \sum \bar{P}_{i\varphi}$$

I ZADANIE DYNAMIKI

- mamy masę i równanie ruchu, wyliczamy siły

$$P = ma = m\ddot{r}$$

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$$

$$P_x = m\ddot{x} \qquad P_y = m\ddot{y} \qquad P_z = m\ddot{z}$$

• wyznaczamy wartość i kierunek

$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

$\cos(P, i) = \frac{P_x}{P}$ $\cos(P, j) = \frac{P_y}{P}$ $\cos(P, k) = \frac{P_z}{P}$

PRZYKŁAD I:

m

$r = a\cos kt + b\sin kt$

$a, b \rightarrow$ stałe $[m]$

$k \rightarrow$ stała $[\frac{1}{s}]$

$x = a\cos kt$ $y = b\sin kt$ $z = 0$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$P_x = m\ddot{x} = -mk^2 a\cos kt$

$P_y = m\ddot{y} = -mk^2 b\sin kt$

zwrot

$P = m\ddot{r} = -mk^2(a\cos kt + b\sin kt) = -mk^2 r$

wartość

$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2}$

ZADANIE II

• znamy masę i siły, chcemy wyznaczyć równanie ruchu

$m\ddot{r} = P(t, r, v)$

PRZYKŁAD I:

warunki początkowe

$a = const$ $r(0) = r_0$, $v(0) = V_0$

$\ddot{r} = \frac{P}{m}$

$v = \dot{r} \xrightarrow{\text{szukany}} r$

$\ddot{r} = \frac{P}{m}$ $\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m}$ $\frac{dr}{dt} = V$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \frac{P}{m} dt$ $\int_{r_0}^{r} dr = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0 + \frac{P}{m}t)\,dt$

$v - V_0 = \frac{P}{m}t$ $r - r_0 = V_0 t + \frac{Pt^2}{2m}$

$v = V_0 + \frac{P}{m}t$ $r = r_0 + v_0 t + \frac{Pt^2}{2m}$

PRZYKŁAD II:

SZUKANE: DANE:

PRZYKŁAD II:

SZUKANE:

$v = v(t)$?

$x = x(t)$?

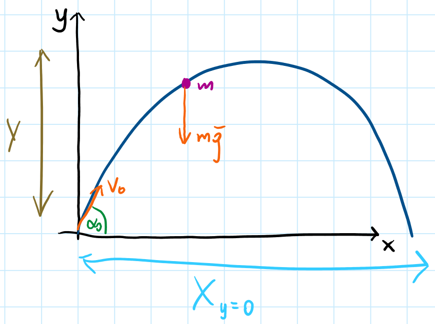
$y = y(t)$?

DANE:

m

V_0

α_0



$m\ddot{x} = 0$

$m\ddot{y} = -mg$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$

$v_x = c_1$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$

$v_y = -gt + c_2$

$t_0 = 0 \rightarrow v_x(t_0) = V_0 \cos\alpha_0 = c_1$

$\underbrace{v_x = V_0 \cos\alpha_0}$

$t_0 = 0 \rightarrow v_y(0) = v_0 \sin\alpha$

$v_y = -gt + v_0 \sin\alpha$

$v = v(t)$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha_0 + g^2 t^2}$

$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$

$x = v_0 t \cos\alpha_0 + c_3$

$t_0 = 0 \rightarrow x(t_0) = 0 = c_3 \rightarrow c_3 = 0$

$\underbrace{x = v_0 t \cos\alpha_0}$

$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha_0$

$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0 + c_4$

$t_0 = 0 \rightarrow y(t_0) = 0 = c_4$

$\underbrace{y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0}$

$$y = x \,tg\,\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2$$

$X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0$

X_{max} dla $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$

$X_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

$Y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$

Y

PRZYKŁAD III

DANE

m

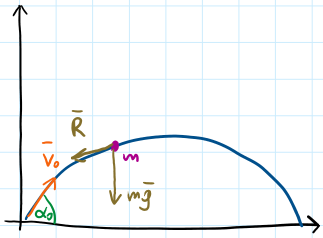
α_0

$R = -kv_m$

SZUKANE

$x(t)$

$y(t)$



$$m\ddot{x} = -kmv_x$$

$$\ddot{x} = -kv_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

$$\int_{v_{ox}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{ox}}\right) = -kt$$

$$\ln\frac{v_{ox}}{v_x} = kt$$

$$v_x = v_{ox}e^{-kt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{ox}e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = v_{ox}\int e^{-kt}\,dt$$

$$x = \frac{v_{ox}}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$

$$m\ddot{y} = -mg - mkv_y$$

$$\ddot{y} = -g - kv_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y$$

$$\int_{v_{oy}}^{v_y} \frac{dv_y}{g+kv_y} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{1}{k}\ln\left(\frac{g+kv_y}{g+kv_{oy}}\right) = -t$$

$$\ln\left(\frac{g+kv_{oy}}{g+kv_y}\right) = kt$$

$$v_y = \frac{1}{k}\left(\frac{g+kv_{oy}}{e^{kt}} - g\right)$$

$$\int_0^y dy = \frac{1}{k}\int_0^t \left[(g+kv_{oy})e^{-kt} - g\right]dt$$

$$y = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{k}\left(g+kv_{oy}\right)\left(1-e^{-kt}\right) - gt\right]$$

TOR RUCHU: Pozbycie się czasu.

$$y = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{k}\left(g + kv_0\sin\alpha\right)\frac{k}{v_0\cos\alpha}x - \frac{g}{k}\ln\frac{v_0\cos\alpha}{v_x}\right]$$