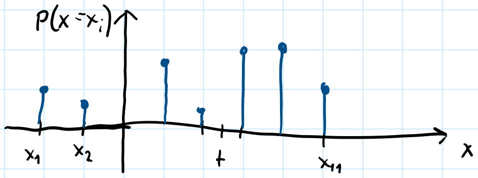
Wykład 5

środa, 27 marca 2019 07:33

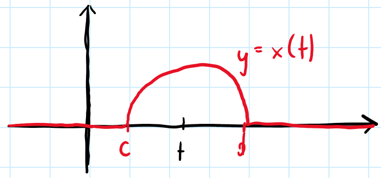
ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE

- przypomnienie: zmienna losowa dyskretna



$$F(t) = P(X<t) = \sum_{i: x_i<t} P(X=x_i)$$

- zmienna losowa



$$F(t) = P(X<t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

- zmienna losowa X jest ciągła, jeśli istnieje nieujemna, całkowalna funkcja $f(x)$, zwana GĘSTOŚCIĄ X, że

$$F(t) = P(X<t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dt$$

- FAKTY:

1. Dystrybuanta $F(t)$ zmiennej losowej X ciągła jest funkcją ciągłą
2. Jeśli $f(x)$ jest ciągła, to $F'(x) = f(x)$
3. X ciągła: $P(X=a) = F(a^+) - F(a) = 0$

$F(t)$ ciągła

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

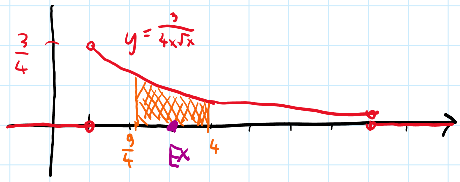
- TWIERDZENIE: $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X, gdy:

1. $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

- PRZYKŁAD: Czy można dobrać stałą c, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x\sqrt{x}} & 1 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

była gęstością?



① $c \geq 0$

② $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{9} \frac{c}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_{9}^{\infty} 0\,dx = c\cdot\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^9 =$

$= -2c\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}c$

$c = \frac{3}{4}$ Odpowiedź: $c = \frac{3}{4}$

- obliczyć: $P\left(\frac{9}{4} < X < 4\right) = \int_{\frac{9}{4}}^{4} \frac{3\,dx}{4x\sqrt{x}} = \frac{3}{4}\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{\frac{9}{4}}^{4} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$
- wartość oczekiwana: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{1}^{9} x\frac{3}{4x\sqrt{x}}\,dx = \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^9 = \frac{3}{2}(3-1) = 3$
- wariancja zmiennej: $Var\,X = E(X^2) - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 3^2 = \int_{1}^{9} x^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx - 9 =$

  własność 4

  $= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 - 9 = \frac{1}{2}(27-1) - 9 = 4$
- odchylenie standardowe: $DX = \sqrt{Var X} = 2$

- WARTOŚCIĄ OCZEKIWANĄ EX zmiennej losowej ciągłej X nazywamy liczbę

  $$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

- własności wartości oczekiwanej:

  ① $E(cX + d) = cEX + d$

  ② $g(x)$ – funkcja całkowalna

  $$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

  gęstość

  ③ $E(X+Y) = EX + EY$

- WARIANCJĄ zmiennej losowej X nazywamy liczbę $Var\,X$

  $$Var X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx$$

- DYSPERSJA (odchylenie standardowe) X to $DX = \sqrt{Var X}$

- własności $Var\,X$

① $\operatorname{Var} X \geq 0$

② $\operatorname{Var} X = 0 \iff P(X=c)=1$

× skoncentrowane w jednym punkcie

③ $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \operatorname{Var} X$

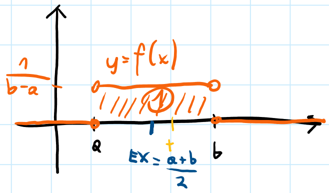
④ $\operatorname{Var} X = E(X^2) - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (EX)^2$

⑤ X, Y - niezależne $\Rightarrow$ $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$

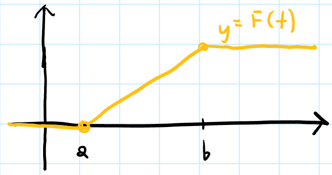
TYPOWE ROZKŁADY CIĄGŁE:

① Rozkład jednostajny na przedziale $[a,b]$ ma gęstość $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$



$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

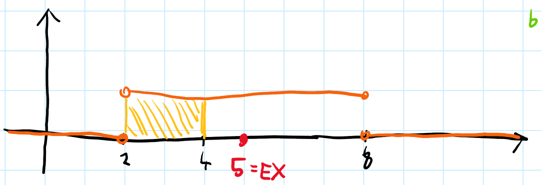


$EX = \frac{a+b}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{Var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$

• PRZYKŁAD: Poziom cieczy X w zbiorniku ma rozkład jednostajny na $[2,8]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że poziom cieczy jest większy niż 4? Podaj wariancję i tej cieczy

$$P(X<4) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{4} \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6} x \Big|_2^4 = \frac{1}{3}$$

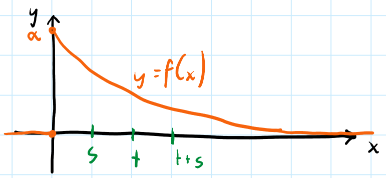
$\frac{1}{b-a}$



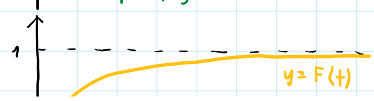
$EX = \frac{2+8}{2} = 5$ $\qquad$ $\operatorname{Var} = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$

② ROZKŁAD WYKŁADNICZY Z PARAMETREM α, $\alpha > 0$

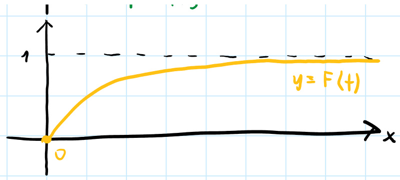
ma gęstość: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \ldots e^{-\alpha t} \end{cases}$



$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\alpha t}, & t\geq 0\end{cases}$$



$$EX=\frac{1}{\alpha} \qquad VarX=\frac{1}{\alpha^2}$$

- rozkład wykładniczy ma tzw. własność „braku pamięci", tzn.

$$\bigwedge_{s,t>0} P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$$

„jeżeli urządzenie pracuje dłużej niż do chwili s, to zaczynamy liczenie od chwili s"

bo $P(X>s+t \mid X>s)=\frac{P((X>s+t)\cap(X>s))}{P(X>s)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\frac{1-F(t+s)}{1-F(s)}=$

$$=\frac{1-[1-e^{-\alpha(s+t)}]}{1-[1-e^{-\alpha s}]}=\frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}}=e^{-\alpha t}=1-[1-e^{-\alpha t}]=1-F(t)=P(X>t)$$

- PRZYKŁAD: Czas pracy diody ma rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha=10^{-3}$. Wiadomo, że dioda działała przez 1000 dób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie działać co najmniej przez 3000 dób? Podać wartość oczekiwaną i wariancję diody.

X – czas pracy diody

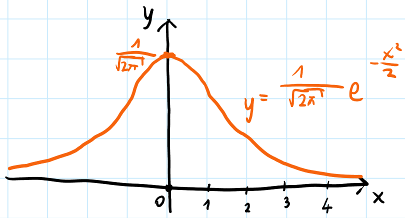
$$P(\underbrace{X>3000}_{t+s} \mid X>\underbrace{1000}_{s}) \underset{\text{własność braku pamięci}}{=} P(X>2000)=1-F(2000)=1-[1-e^{-10^{-3}\cdot 2000}]=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

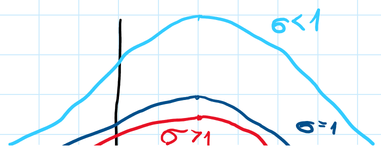
$$EX=\frac{1}{\alpha}=1000$$

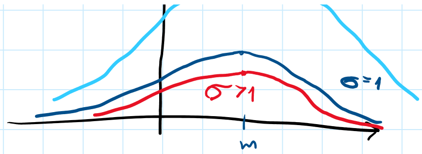
$$VarX=\frac{1}{\alpha^2}=10^6$$

(3) ROZKŁAD NORMALNY z parametrami $m\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$

- oznaczenie: $N(m,\sigma)$
- gęstość: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in\mathbb{R}$
- narysować gęstość $N(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$







$EX = m$ $\qquad$ $VarX = \sigma^2$