Materiały: lucc.pl/inf, inf2010.pl, LPF

Kinematyka

1. Otrzymać wzory na prędkość i położenie w jednowymiarowym ruchu jednostajnie przyspieszonym.

1 Otrzymać wzory na prędkość i położenie w jednowymiarowym ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Rozw.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t+\Delta t - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Gdy $a = \frac{dv}{dt} = const \neq 0$ to ruch jednost. przyspieszony.

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = a \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)} \quad \text{- prędkość}$$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$v_0 = v(t = t_0)$$

$v = v(t)$ wiemy, że $\frac{dx}{dt} = v$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right] dt$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + \int_{0}^{t-t_0} a t'\, dt \qquad t' = t - t_0$$

$$x(t) - x_0(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2} \quad \text{- położenie}$$

2. Otrzymać wzory na prędkość i położenie w dwuwymiarowym ruchu jednostajnie przyspieszonym.

② Otrzymać wzory na prędkość i położenie w dwuwymiarowym ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x, v_y) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}(x, y) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$\bar{a} = (a_x, a_y) = const \Leftrightarrow a_x = const,\ a_y = const$ gdy

$a_x = const \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_x = const \Rightarrow v_x = v_{0x} + a_x t$

$a_y = \frac{dy}{dt} = const \Rightarrow v_y = v_{0y} + a_y t$

$\boxed{x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2}$

$\boxed{y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2}$

$$\bar{v} = (v_x, v_y) = (v_{0x} + a_x t,\ v_{0y} + a_y t) = (v_{0x}, v_{0y}) + (a_x, a_y)t =$$

$= \bar{v}_0 + at$, v_0 – ruch w chwili t_0

$\boxed{\bar{v} = v_0 + at}$ – prędkość

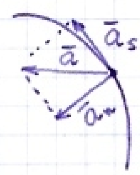
$$\bar{r} = (x, y) = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2,\ y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right) =$$

$$= \bar{r}_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$ – położenie

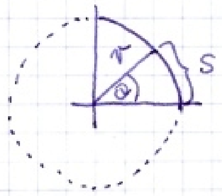
5. Przyspieszenie styczne i normalne na przykładzie ruchu po okręgu ze stałą szybkością.

⑤ Przyspieszenie styczne i normalne na przykładzie ruchu po okręgu ze stałą szybkością.



$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot Q) = r\frac{dQ}{dt} = r \cdot \omega$ to szybkość w ruchu po okręgu o prom. r

$\omega = \frac{dQ}{dt}$ – szybkość kątowa



$$\boxed{\begin{aligned} a_s &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\frac{d\omega}{dt} = \underline{r \cdot \alpha} \\ a_n &= \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \underline{\omega^2 r} \end{aligned}}$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ – przyspieszenie kątowe

Inercjalne i nieinercjalne układy odniesienia

1. Co to jest inercjalny układ odniesienia? Związek z pierwszą zasadą dynamiki Newtona.

(7) Co to jest inercjalny układ odniesienia? Związek z pierwszą zasadą dynamiki Newtona.

Rozw.

Inercjalny układ odniesienia, to układ na który nie oddziałują żadne siły zewnętrzne lub siły równoważące się.

I zasada dynamiki nie obowiązuje we wszystkich układach odniesienia, ale zawsze można znaleźć taki układ, w którym ta zasada jest słuszna. Takie układy nazywamy inercjalnymi układami odniesienia.

2. Transformacja Galileusza. Związek z inercjalnymi układami odniesienia.

(8) Transformacja Galileusza. Związek z inercjalnymi układami odniesienia.

Rozw. (źródło wikipedia.pl)

Jest to transformacja zgodna z klasycznymi wyobrażeniami o czasie i przestrzeni. Transformacja zakłada, że prędkość i położenie są względne. Wartości te widoczne dla dowolnego obserwatora w każdym inercjalnym układzie odniesienia mogą być różne, ale każda z nich jest prawdziwa. Względność oznacza, że prawda jest zależna „od punktu siedzenia". We wszystkich układach zegary obserwatorów mierzą czas absolutny, a więc on nie jest względny. Co więcej wymiary obiektów (liniowe) też są identyczne w każdym układzie nieinercjalnym.

$$\begin{cases} x' = x - u_x t \\ y' = y - u_y t \\ z' = z - u_z t \\ t' = t \end{cases}$$

transformacja Galileusza (między dwoma inercjalnymi układami odniesienia) we współrzędnych kartezjańskich

$(u_x, u_y, u_z) = const$

3

Praca i energia

1. Policz pracę wykonaną przez siłę sprężystości przy przesunięciu ciała z położenia xi do położenia xf.

(13) Policz pracę wykonaną przez siłę sprężystości przy przesunięciu ciała z położenia x_i do x_f.

Rozw.

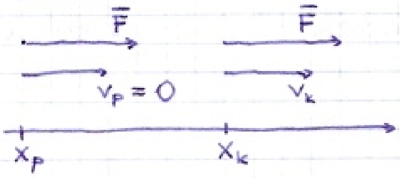
$F_s = -kx$ siła sprężystości

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_i}^{x_f} = \left(\frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}x_f^2\right)k$$

2. Policzyć pracę jaką należy wykonać przyspieszając do prędkości v spoczywającą swobodną cząstkę o masie m, czyli wyprowadzić wzór na nierelatywistyczną energię kinetyczną.

(14) Policzyć pracę jaką należy wykonać przyspieszając do prędkości v spoczywającą swobodną cząstkę o masie m, czyli wyprowadzić wzór na nierelatywistyczną energię kinetyczną E_k

Rozw.



$W = F \cdot s \Rightarrow W = F(x_k - x_p)$

$F = ma$

$F = \text{const} \Rightarrow a = \text{const}$ więc ruch jednostajnie przyspieszony

$v_k = v_p + at \Rightarrow v_k = at$ bo $v_p = 0$

$x_k = x_p + v_p t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x_k = x_p + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{v_k - v_p}{t} \Rightarrow a = \frac{v_k}{t}$

$x_k - x_p = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v_k}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}v_k t$

$W = F(x_k - x_p) = ma(x_k - x_p) = m\frac{v_k}{\cancel{t}} \cdot \frac{1}{2}v_k \cancel{t} = \frac{1}{2}mv_k^2 = \underline{\frac{1}{2}mv^2}$

Ten sam rezultat możemy otrzymać dla dowolnej siły.

$$W = \int_{x_p}^{x_k} F dx = \int_{x_p}^{x_k} ma dx = \int_{x_p}^{x_k} m\frac{dv}{dt}dx = \{dx = v \cdot dt\} =$$

$$= \int_{t_p}^{t_k} m\frac{dv}{dt} v dt = m\int_{t_p}^{t_k} v\frac{dv}{dt}dt = m\int_{v_p=0}^{v_k} v dv = \frac{1}{2}mv_k^2$$

3. Podaj trzy równoważne definicje siły potencjalnej.

(15) Podaj trzy równoważne definicje siły potencjalnej.

Rozw.

1. Jeśli istnieje jednoznaczna funkcja $f(\bar{r})$, taka że $F = -\mathrm{grad}\,\mathcal{U} = -\nabla \mathcal{U}$ to siła F jest siłą potencjalną zachowawczą.
2. Siła $\bar{F}$ jest potencjalna gdy wykonana przez nią praca nie zależy od drogi, a jedynie od punktów położenia początkowego $(\bar{r}_A)$ i końcowego $(\bar{r}_B)$, tzn. $W_{\bar{r}_A \bar{r}_B} = \mathcal{U}(\bar{r}_A) - \mathcal{U}(\bar{r}_B)$
3. Jeśli $\bar{F}$ jest siłą potencjalną to praca wykonana przez $\bar{F}$ na dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru.

5. Napisz równanie wiążące siłę z energią potencjalną.

(17) Napisz równanie wiążące siłę z energią potencjalną.

Rozw.

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \xrightarrow{1D} \frac{d}{dx}$$ i siła $F(x)$ jest związana z energią potencjalną zależnością:

$$F(x) = -\frac{d\,\mathcal{U}(x)}{dx}$$ (o ile E_p istnieje)

Całkując powyższe równania:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{d\mathcal{U}}{dx}\cdot dx = -\mathcal{U}(x) + \mathcal{U}(x_0)$$

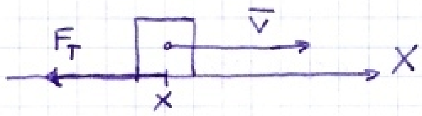
$$\mathcal{U}(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + \mathcal{U}(x_0)$$ – ten wzór dostarcza nam równoważny warunek istnienia E_p

8. Pokaż, że siła tarcia nie jest siłą potencjalną.

(20) Pokaż, że siła tarcia nie jest siłą potencjalną.

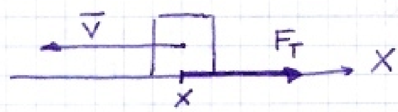
Rozw.

Rys. 1



$F_T < 0$

Rys. 2



$F_T > 0$

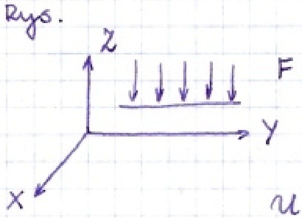
Na powyższych rysunkach widać, że siła tarcia F_T nie jest jednoznacznie określona w x bo zależy także od prędkości v. Siły zależne od prędkości nie są siłami potencjalnymi.

9. Znajdź energię potencjalną jednorodnego pola grawitacyjnego.

(21) Znajdź energię potencjalną jednorodnego pola grawitacyjnego.

Rozw.

Rys.



$F = -(0, 0, mg)$

Energia potencjalna

$$U(\vec{r}) = -(0, 0, mg) \cdot (r - r_0) + U(\vec{r_0}) =$$
$$= mg(z - z_0) + U(\vec{r_0})$$

wysokość nad pow. Ziemi $\quad U(r) - U(r_0) = mg(z - z_0)$

Otrzymaliśmy energię potencjalną jednorodnego pola grawitacyjnego w pobliżu Ziemi i w małej przestrzeni.

10. Znajdź energię potencjalną siły sprężystości.

(22) Znajdź energię potencjalną siły sprężystości.

Rozw.

Przykładem jednowymiarowej siły potencjalnej jest siła sprężystości $F=-kx$, gdzie x - wychylenie z poła równowagi.

$$\mathcal{U}(x) = -\int_{x_0}^{x}(-kx)dx + \mathcal{U}(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 + \mathcal{U}(x_0)$$

$\mathcal{U}(x)$ to energia pot. siły sprężystości.

7

11. Pokazać, że siła grawitacji jest siłą potencjalną i znaleźć grawitacyjną energię potencjalną układu dwóch mas m1, m2 znajdujących się w odległości r.

(23) Pokazać, że siła grawitacji jest siłą potencjalną i znaleźć grawitacyjną energię potencjalną układu dwóch mas m_1, m_2 znajdujących się w odległości r.

Rozw.

$$F_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad F_G \text{ - siła grawitacji}$$

Energia potencjalna siły grawitacji.

$$\mathcal{U}(r) = -\int_{r_0}^{r}\left(\frac{Gm_1m_2}{r^3}\right)r\,dr + \mathcal{U}(r_0) = -\int_{r_0}^{r}\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr + \mathcal{U}(r_0) =$$

$$= -\frac{Gm_1m_2}{r}\Big|_{r_0}^{r} + \mathcal{U}(r_0) = \frac{Gm_1m_2}{r_0} - \frac{Gm_1m_2}{r} + \mathcal{U}(r_0)$$

Z powyższego całkowania można zobaczyć, że siła grawitacji jest siłą potencjalną ponieważ wykonana przez nią praca nie zależy od drogi a jedynie od r i r_0 tzn. $W_{\vec{r}_0\vec{r}} = \mathcal{U}(\vec{r}_0) - \mathcal{U}(\vec{r})$

Fizycznie uzasadnione jest przyjęcie $r_0 \to \infty$ wtedy $\frac{Gm_1m_2}{r} \to 0$ i przyjmujemy $\mathcal{U}(r_0 \to \infty) = 0$ gdyż nieskończenie odległe od siebie masy nie oddziałują grawitacyjnie, więc

$\mathcal{U}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$. Jest to energia (grawitacyjna) potencjalna układu dwóch mas m_1 i m_2 znajdujących się w odległości r.

14. Zasada zachowania energii mechanicznej

(24) Zasada zachowania energii mechanicznej.

Rozw.

$E = E_k + U(r)$ E. mech. = E. kinet. + E. potenc.

Praca wykonana przez siłę poten. jest równa różnicy energii kinetycznych cząstki.

$W_{\bar{r}_A \bar{r}_B} = \int_{\bar{r}_A}^{\bar{r}_B} \bar{F} d\bar{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k_B} - E_{k_A}$ więc otrzymamy

$U(\bar{r}_A) - U(\bar{r}_B) = E_{k_B} - E_{k_A} \Rightarrow U(\bar{r}_A) + E_{k_A} = U(\bar{r}_B) + E_{k_B} = const$

Pokazaliśmy, że energia mech. cząstki w polu siły pot. jest stała.

$E = U(r) + E_K = U(r) + \frac{1}{2} m v^2 = const$

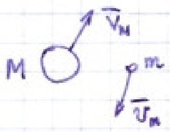
To zasada zachowania energii mechanicznej.

8

15. Zasada zachowania energii mechanicznej układu dwóch mas m, M oddziałujących grawitacyjnie. Rozważyć przypadek M>>m.

(27) Zasada zachowania energii mechanicznej układu dwóch mas m, M oddziałujących grawitacyjnie. Rozważyć przypadek M >> m.

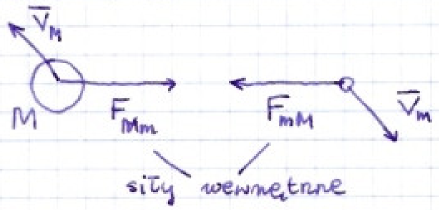
Rozw.



$E = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{GmM}{r}$

Przypadek, gdy $M >> m$ to $\frac{m}{M} << 1$ i wtedy można przyjąć że $v_M \simeq const$

Uzasadnienie



c.d. 27

$$\frac{d}{dt}\left(M\cdot \bar{v}_M + m\cdot \bar{v}_m\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M\frac{d\bar{v}_M}{dt} = -m\frac{d\bar{v}_m}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{v}_M}{dt} = -\frac{m}{M}\frac{d\bar{v}_m}{dt}$$

$\left|\frac{d\bar{v}_M}{dt}\right| << \left|\frac{d\bar{v}_m}{dt}\right|$ Możemy, więc przyjąć układ odniesienia związany z dużą masą (jest on w przybliżeniu inercjalny, bo $\bar{v}_M \simeq const$).

W układzie odniesienia związanym z dużą masą M energia układu mas

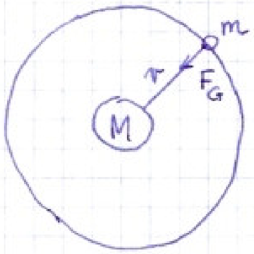
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \qquad (M >> m)$$

16. Planeta o masie m krąży wokół gwiazdy o masie M (M>>m) po orbicie kołowej o promieniu r. Znaleźć całkowitą energię mechaniczną tego układu mas.

28 Planeta o masie m krąży wokół gwiazdy o masie M (M>>m) po orbicie kołowej o promieniu r. Znaleźć całkowitą energię mechaniczną tego układu mas.

Rozw.

Przykładem jest układ: Ziemia - Słońce



$$\frac{m}{M} << 1$$

Energia: $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$

Siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

zatem energia całkowita układu:

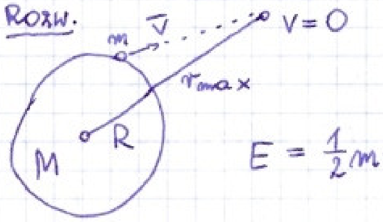
$$U = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r} < 0$$

$$U = -\frac{GmM}{2r}$$

17. Znaleźć prędkość ucieczki z kulistej planety o masie M i promieniu R. (Druga prędkość kosmiczna)

(29) Znaleźć prędkość ucieczki z kulistej planety o masie M i promieniu R (II pręd. kosmiczna)

Rozw.



$$E = -\frac{GmM}{r_{max}}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r_{max}}$$

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_{max}}\right)}$$

Aby ciało uciekło z pola gr. to $r_{max} \to \infty$

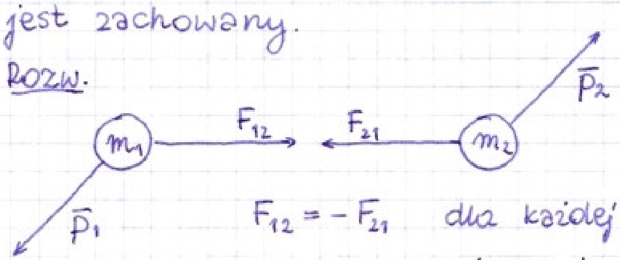
$$v_{II} = \lim_{r_{max} \to \infty} \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_{max}}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Zasada zachowania pędu

1. Pokazać, że pęd izolowanego układu dwóch cząstek, które oddziałują ze sobą siłami wewnętrznymi jest zachowany.

(30) Pokazać, że pęd izolowanego układu dwóch cząstek, które oddziałują ze sobą siłami wewnętrznymi jest zachowany.

Rozw.



$F_{12} = -F_{21}$ dla każdej cząstki można napisać równanie Newtona

$$\frac{d\bar{p}_1}{dt} = F_{12} \qquad \frac{d\bar{p}_2}{dt} = F_{21}$$

Jeśli zdefiniujemy pęd całkowity układu

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{21} = F_{12} - F_{21} = 0$$

czyli $\bar{p} = const$

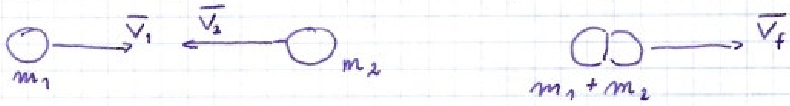
Pęd tego układu jest zachowany.

3. Dwie cząstki o masach m1, m2 i prędkościach v1, v2 zderzają się doskonale niesprężyście. Znaleźć prędkość cząstek po zderzeniu.

(32) Dwie cząstki o masach m_1, m_2 i prędkościach v_1 i v_2 zderzają się doskonale niesprężyście. Znaleźć prędkość cząstek po zderzeniu.

Rozw.

przed zderzeniem po zderzeniu



$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2$ $\bar{p}_f = (m_1 + m_2)\bar{V}_f$

$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_f$

$m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 = (m_1 + m_2)\bar{V}_f$

$$\bar{V}_f = \frac{m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2}{m_1 + m_2}$$

4. Dwie cząstki o masach m1, m2 i prędkościach v1, v2 zderzają się centralnie doskonale sprężyście. Znaleźć prędkości cząstek po zderzeniu, a następnie rozważyć przypadek m1=m2.

(33) Dwie cząstki o masach m_1, m_2 i prędkościach v_1, v_2 zderzają się centralnie doskonale sprężyście. Znaleźć prędkości cząstek po zderzeniu, a następnie rozważyć przyp. $m_1 = m_2$

Rozw.

przed po

Zasada zachowania pędu:

$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_{1f} + \bar{p}_{2f}$

$m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 = m_1\bar{V}_{1f} + m_2\bar{V}_{2f}$

E_k przed zderzeniem: $E_{k_1} + E_{k_2} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$

E_k po zderzeniu: $E_{k_f} + E_{k_{2f}} = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$

$E_{k_1} + E_{k_2} = E_{k_{1f}} + E_{k_{2f}}$

$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$

$$\begin{cases} m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 = m_1\bar{V}_{1f} + m_2\bar{V}_{2f} \\ \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$ ruch jednowymiarowy

12

c.d. 33

$$\begin{cases} m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_2) \\ m_1 (V_1^2 - V_{1f}^2) = m_2 (V_{2f}^2 - V_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_2) \\ V_1 + V_{1f} = V_{2f} + V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - V_{1f}) = m_2 (V_{2f} - V_2) \\ V_{2f} = V_2 - V_1 - V_{1f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ V_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 \end{cases}$$

$$V_{1f} = \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2}$$

$$V_{2f} = \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{m_1 + m_2}$$

Możemy to rozw. zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} V_{1f} \\ V_{2f} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} m_1 - m_2 & 2m_2 \\ 2m_1 & m_2 - m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

WYNIK

Przypadek: $m_1 = m_2$

$$\begin{bmatrix} V_{1f} \\ V_{2f} \end{bmatrix} = \frac{1}{2m_1} \begin{bmatrix} 0 & 2m_1 \\ 2m_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_{1f} = V_2 \\ V_{2f} = V_1 \end{matrix}$$

Bryła sztywna

*1. Znajdź moment bezwładności jednorodnego pręta o masie M i długości L względem prostopadłej do pręta osi: a) symetralnej, b) przechodzącej przez jeden z końców pręta.

a) symetralnej

$$I = \int_m x^2 dm = \left| dm = \frac{M}{L} dx \right| = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} ML^2$$

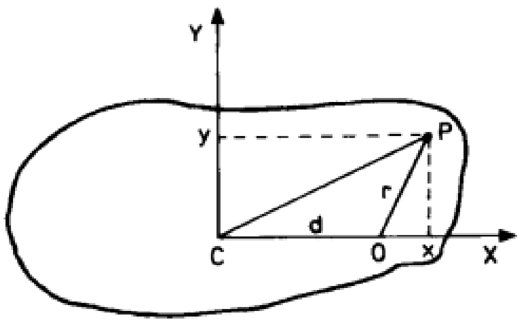
b) przechodzącej przez jeden z końców pręta

$$I = \int_m x^2 dm = \left| dm = \frac{M}{L} dx \right| = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

2. Wyprowadzić twierdzenie Steinera.

Korzystamy wtedy z twierdzenia Steinera: różnica momentów bezwładności względem dwóch różnych równoległych osi, z których jedna przechodzi przez środek masy ciała, równa jest iloczynowi masy ciała i kwadratu odległości d między tymi osiami

$$I - I_C = md^2 \tag{1.3}$$



Rys. 1.1.
Ilustracja do dowodu twierdzenia Steinera

Dowód twierdzenia Steinera jest prosty. Rozważania matematyczne przeprowadzamy w płaszczyźnie przekroju ciała prostopadłego do obu równoległych osi obrotu. Prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich ma początek w punkcie c osi środkowej. Położenie równoległej osi obrotu wyznacza punkt 0 na osi X układu współrzędnych (patrz rys. 1.1).

Jeżeli odległość obu osi obrotu wynosi d, to zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa dla współrzędnych punktu P ciała mamy

$$r^2 = (x-d)^2 + y^2 = (x^2 + y^2) + d^2 - 2dx.$$

Mnożąc obie strony tej zależności przez elementarną masę $dm = dV = dSdz = (dxdy)dz$ i całkując po objętości całego ciała otrzymujemy

$$\int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm + d^2 \int dm - 2d \int xdm.$$

Korzystając z definicji osiowego momentu bezwładności (W1.10) oraz z definicji środka masy ciała (1.1) mamy, w naszym przypadku

$$\int r^2 dm = I, \quad \int (x^2 + y^2) dm = I_c, \quad \int xdm = mx_c = 0$$

W ten sposób uzyskaliśmy zależność wyrażającą twierdzenie Steinera (1.3).

Dynamika ruchu obrotowego

1. Na cząstkę znajdującą się w położeniu określonym wektorem r działa siła F. Znaleźć związek pomiędzy momentem pędu cząstki i momentem siły F. Kiedy moment pędu cząstki jest stały?

41 Na cząstkę znajdującą się w położeniu określonym wektorem r działa siła F. Znaleźć związek pomiędzy momentem pędu cząstki i momentem siły F. Kiedy mom. pędu jest stały?

Rozw.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\times\bar{p}) = \frac{d\bar{r}}{dt}\times p + \bar{r}\times\frac{d\bar{p}}{dt} = \underbrace{\bar{v}\times m\bar{v}}_{0} + \bar{r}\times\bar{F} =$$

$= \bar{r}\times\bar{F} = \bar{\tau}$ czyli pochodną momentu pędu jest moment siły

moment siły to $\bar{\tau} = \bar{r}\times\bar{F}$; $\bar{L} = const$ gdy nie działają żadne zewnętrzne momenty sił to $I\cdot\omega = const$

13

2. Otrzymać zależność między momentem pędu i prędkością kątową obracającej się wokół stałej osi bryły sztywnej o momencie bezwładności I.

42 Wyprowadzić zależność momentu pędu obracającej się wokół stałej osi bryły sztywnej o momencie bezwładności I od jej prędkości kątowej.

Rozw.

$\bar{L}$ – moment pędu

$$\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i = \sum_i (0,0,L_i) = (0,0,\sum_i L_i) = (0,0,\sum_i m_i r_i^2\omega) =$$

$$= (\sum_i m_i r_i^2)(0,0,\omega) = I(0,0,\omega)$$

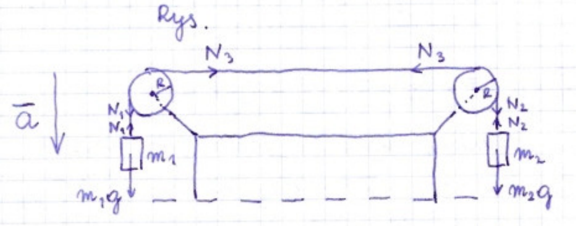
$\bar{L} = I\cdot\omega$ – prędkość kątowa

5. Z dwóch stron układu dwóch identycznych bloczków o momencie bezwładności I i promieniu R zawieszono na bardzo lekkiej lince dwie różne masy m1, m2. Znajdź przyspieszenie mas i siły naprężenia linki.

45 Z dwóch stron układu dwóch identycznych bloczków o momencie bezwładności I i promieniu R zawieszono na bardzo lekkiej lince dwie różne masy m_1, m_2. Znajdź przyspieszenie mas i siły naprężenia linki.

Rozw.

Rys.



dane:

m_1, m_2, I, R

szukane:

$a, N_1, N_2, N_3 = ?$

14

c.d. 45

1) $m_1 a = m_1 g - N_1$

2) $m_2 a = N_2 - m_2 g$

3) moment sił działających na blok

$\tau = N_1 \cdot R - N_3 \cdot R \cdot \sin 90^\circ + \underbrace{mg \cdot 0 + m \cdot 0}_{\text{środek masy}}$

$\tau = (N_1 - N_3) R$

$\tau = I \cdot \alpha$

$I \cdot \alpha = (N_1 - N_3) \cdot R$

4) $I \cdot \alpha = (N_3 - N_2) \cdot R$

5) $a = \alpha \cdot R$

1) + 2)

$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g + N_2 - N_1$

3) + 4)

$2I \frac{a}{R^2} = N_1 - N_2$

$\left(m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}\right) a = (m_1 - m_2) g$

$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}$ Znając przyspieszenie możemy już obliczyć naprężenie linki.

***7. Policz energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się z szybkością kątową omega wokół stałej osi.**

Ruch drgający

1. Rozwiązać równanie ruchu oscylatora harmonicznego prostego z warunkami początkowymi: a) x(t=0)=x0 i v(t=0)=0, b) x(t=0)=0 i v(t=0)=v0. Jaka jest częstość i amplituda tych drgań?

(48) Rozwiązać równanie ruchu oscylatora harmonicznego prostego z warunkami początkowymi: a) $x(t=0)=x_0$ $v(t=0)=0$ b) $x(t=0)=0$ $v(t=0)=v_0$ Jaka jest częstość i amplituda tych drgań.

Rozw.

a) $\begin{cases} x(t=0)=x_0 \\ v(t=0)=0 \end{cases}$

1) $x(t=0) = A_1 e^{i\omega_0 t_0} + A_2 e^{-i\omega_0 t_0} = x_0$

$A_1' = A_1 e^{i\omega_0 t_0}$

$A_2' = A_2 e^{-i\omega_0 t_0}$

$A_1' + A_2' = x_0$

15

2) $v(t=t_0) = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}\right)\Big|_{t=t_0} =$

$= i\omega_0 (A_1' - A_2') = i\omega_0 (A_1 e^{i\omega_0 t_0} - A_2 e^{-i\omega_0 t_0}) = 0$

$i\omega_0 (A_1' - A_2') = 0$

$\begin{cases} A_1' - A_2' = 0 \\ A_1' + A_2' = x_0 \end{cases} \iff A_1' = A_2' = \frac{x_0}{2}$

Rozw. z tymi war. początkowymi

$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = \underbrace{(A_1' e^{-i\omega_0 t_0})}_{A_1} e^{i\omega_0 t} + \underbrace{(A_2' e^{i\omega_0 t_0})}_{A_2} e^{-i\omega_0 t} =$

$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{-i\omega_0 t_0} e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t_0} e^{-i\omega_0 t}\right) = x_0 \frac{e^{i\omega_0 (t-t_0)} + e^{-i\omega_0 (t-t_0)}}{2} =$

$= x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0)) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\varphi = -\omega_0 t_0$

jeśli $t_0 = 0$ to $x(t) = x_0 \cos \omega t$

b) $\begin{cases} x(t=0)=0 \\ v(t=0)=v_0 \end{cases}$

1) $x(t=t_0) = A_1 e^{i\omega_0 t_0} + A_2 e^{-i\omega_0 t_0} = 0$

$A_1' = A_1 e^{i\omega_0 t_0}$; $A_2' = A_2 e^{-i\omega_0 t_0}$; $A_1' + A_2' = 0$

2) $v(t=t_0) = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}\right)\Big|_{t=t_0} =$

$= i\omega_0 (A_1 e^{i\omega_0 t_0} - A_2 e^{-i\omega_0 t_0}) = i\omega_0 (A_1' - A_2') = v_0$

$\begin{cases} A_1' + A_2' = 0 \\ A_1' - A_2' = \frac{v_0}{i\omega_0} \end{cases} \iff A_1' = \frac{v_0}{2i\omega_0}, \quad A_2' = -\frac{v_0}{2i\omega_0}$

Rozw.

$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = (A_1' e^{-i\omega_0 t_0}) e^{i\omega_0 t} + (A_2' e^{i\omega_0 t_0}) e^{-i\omega_0 t} =$

$= \frac{v_0}{\omega_0}\left(\frac{e^{i\omega_0 (t-t_0)} - e^{-i\omega_0 (t-t_0)}}{2i}\right) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin[\omega_0 (t - t_0)]$

$= \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$; $\varphi = -\omega_0 t_0$

amplituda $\frac{v_0}{\omega_0}$, częstość $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

2. Policzyć częstość drgań wahadła matematycznego o masie m i długości l

(49) Policzyć częstość drgań wahadła matematycznego o masie m i długości l.

Rozw.

$$ma_s = F_s$$

$F_s = mg \cdot \sin\alpha$ (małe wychylenia α, takie że $\sin\alpha \simeq \alpha$)

$$F_s = -mg \cdot \alpha$$

$$ma_s = F_s$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_s$$

$$ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ to jest częstość drgań

3. Policzyć częstość drgań wahadła fizycznego o masie m i momencie bezwładności I zawieszonego w odległości d od środka masy.

(50) Policzyć częstość drgań wahadła fizycznego o masie m i momencie bezwładności I zawieszonego w odległości d od środka masy.

Rozw.

$I\alpha = \tau$, $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\vec{\tau} = \vec{d} \times m\vec{g}$, $|\vec{\tau}| = mgd\sin\theta$

$I\alpha = -mgd\sin\theta$ dla małych $\sin\theta \simeq \theta$

$$I\alpha = -mgd\theta$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd\theta}{I} = 0$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ to częstość drgań

5. Napisać równanie ruchu oscylatora tłumionego. Podać przybliżony wzór rozwiązania dla bardzo słabego tłumienia drgań i przedstawić to rozwiązanie na rysunku.

(52) Napisać równanie ruchu oscylatora tłumionego. Podać przybliżony wzór rozwiązania dla bardzo słabego tłumienia drgań i przedst. to rozwiązanie na rys.

Rozw.

siła tłumienia

$$ma = -kx - bv$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

równanie charakterystyczne $(x = e^{\lambda t})$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4mk$$

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

c.d. (52)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - częstość drgań osc. harmonicznego prostego (bez drgań)

Ruch drgający wtedy gdy:

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \omega_0^2 \iff \frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

wtedy

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} - i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = -\frac{b}{2m} - i\omega$$

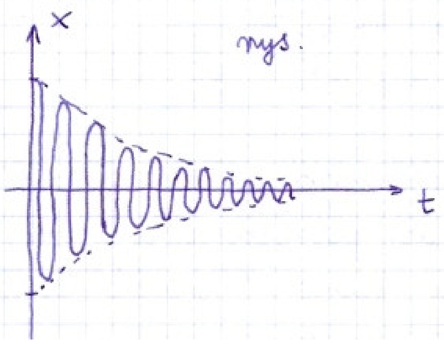
$$\lambda_2 = -\frac{b}{2m} + i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = -\frac{b}{2m} + i\omega$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ - częstość

Równanie:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{bt}{2m}} e^{-i\omega t} + A_2 e^{-\frac{bt}{2m}} e^{i\omega t} = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}\right)$$

rys.



bardzo słabe tłumienie

$$\frac{b}{2m} \ll \omega_0$$

8. Rozwiązać równanie oscylatora harmonicznego prostego z siłą wymuszającą F=Acos(wt) i warunkami początkowymi x(t=0)=x0, v(t=0)=0. Kiedy zachodzi rezonans? Znaleźć zależność amplitudy drgań rezonansowych od czasu.

(55) Rozw. równanie osc. harmonicznego prostego z siłą wymuszającą $F = A\cos\omega t$ i war. początkowymi $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = 0$. Kiedy zachodzi rezonans? Znaleźć zależność amplitudy drgań rezonansowych od czasu.

Rozw.

$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$ - ogólne

$x(t=0) = a_1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} = x_0 \Rightarrow a_1 = x_0 - \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$v(t=0) = a_2 \omega_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

równanie:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t =$$

$$= x_0 \cos\omega_0 t - \alpha\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2} = x_0 \cos\omega_0 t -$$

$$- \frac{\alpha}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0}$$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t - \frac{\alpha}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0}$$

Gdy $\omega = \omega_0$, czyli częstość siły wymuszającej staje się równa częstości drgań własnych to amplituda drgań z czasem dąży do nieskończoności. Jest to zjawisko rezonansu (wychodzi duża, ale skończona wartość)

Dla $\omega = \omega_0$:

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0}\left\{ x_0 \cos\omega_0 t - \frac{\alpha}{\omega + \omega_0} \cdot \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0}\right\} =$$

$$= x_0 \cos\omega_0 t - \frac{\alpha}{2\omega_0} \cdot \frac{d}{d\omega}\cos\omega t \Big|_{\omega = \omega_0} =$$

$$= x_0 \cos\omega_0 t - \frac{\alpha}{2\omega_0}(-\sin\omega_0 t)t =$$

$$= x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\alpha}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Rezonans (bez tłumienia)