Madžarska metoda

Projekt

Borut Zupan

Fakulteta za matematiko in fiziko

2.6.2022

Opis

Madžarska metoda je:

- kombinatorni algoritem za optimizacijo,
- razvil Harold Kuhn,
- rešuje problem dodelitve,
- polinomski čas,
- najslabši primer je $O(n^3)$.

Problem dodelitve je:

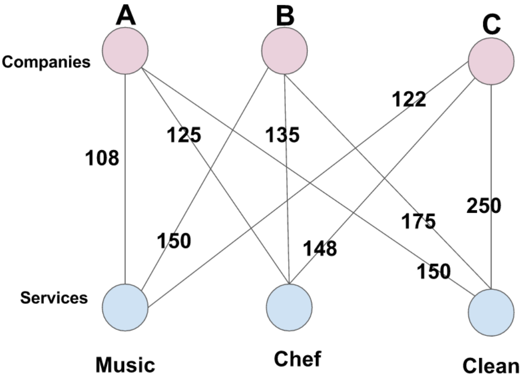
- poseben primer transportnega problema,
- število ponudnikov $=$ število potrošnikov,
- količine ponudbe in povpraševanja so 1.

Graf

Predstavitev z grafom:

- dvodelni graf ponudnikov in potrošnikov,
- količine so 1, zato na vozliščih ni uteži,
- uteži na povezavah predstavljajo ceno storitve.

Primer grafa



Metoda

Madžarska metoda je sestavljena iz dveh delov:

1. redukcija na vrsticah in stolpcih matrike
2. rešitev optimiziramo na iteracijski način

Madžarska metoda deluje, ker prištevanje ali odštevanje konstante vrstici ali stolpcu ne spremeni optimalne reštive.

1. korak

Vsaki vrstici odštej nejn minimalen element. (Če hočeš lahko narediš enako tudi za stolpce). Pojdi na 2. korak.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2. korak

Najdi ničlo. Če v njeni vrstici ali stolpcu ni nobene ničle z zvezdico potem jo označi z zvezdico. To naredi za vsako ničlo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0^* & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3. korak

Pokrij vsak stolpec, ki vsebuje ničlo z zvezdico. Če je pokritih $k = \min\{n, m\}$ stolpcev, potem ničle z zvezdico predstavljajo optimalno rešitev. V tem primeru pojdi na 7. korak, drugače pojdi na 4. korak.

$$\begin{bmatrix} 0^* & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \color{blue}{0^*} & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & 2 & 4 \\ \color{blue}{0} & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

4. korak

Najdi nepokrito ničlo in jo označi s črtico. Če ni nobene ničle z zvezdico v njeni vrstici pojdi na 5. korak. Drugače pokrij vrstico in odkrij stolpec, kjer se nahaja ta ničla z zvezdico. Nadaljuj dokler ni nobene nepokrite ničle več. Pojdi na 6. korak.

$$\begin{bmatrix} 0^* & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 1 \\ 0' & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

5. korak

Konstruiraj zaporedje alternirajočih ničel s črtico in zvezdico na naslednji način. Naj Z_0 predstavlja nepokrito ničlo s črtico iz 4. koraka. Naj Z_1 označuje ničlo z zvezdico v stolpcu ničle Z_0. Z Z_2 označimo ničlo s črtico v vrstici ničle Z_1. Nadaljuj dokler ne prideš do ničle s črtico, ki v svojem stolpcu nima ničle z zvezdico. Odznači vse ničle z zvezdico v tem zaporedju in vse ničle s črtico v tem zaporedju označi z zvezdico. Odstrani vse črtice na ničlah in odkrij vse vrstice in stolpce. Pojdi na 3. korak.

$$\begin{bmatrix} 0^*_{Z_1} & 0'_{Z_2} & 1 \\ 0'_{Z_0} & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0^* & 1 \\ 0^* & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. korak

Najdi najmanji nepokrit element matrike. Prištej ta element vsakemu elementu pokrite vrstice in odštej ta element vsakemu elementu nepokritega stolpca. Pojdi nazaj na 4. korak.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0^* & 0' \\ 0^* & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0^* & 0' \\ 0^* & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. korak

Pokritih je $k = \min\{n, m\}$ stolpcev. Ničle z zvezdico predstavljajo optimalno rešitev.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \color{red}{0^*} \\ 0 & \color{red}{0^*} & 1 \\ \color{red}{0^*} & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & \color{red}{3} \\ 2 & \color{red}{4} & 6 \\ \color{red}{3} & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Primer metode

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&5\end{pmatrix}$$

Step 1

$$\begin{pmatrix}0^*&1&2\\1&3&5\end{pmatrix}$$

Step 2

$$\begin{pmatrix}0^*&1&2\\0&3&5\end{pmatrix}$$

Step 3

$$\begin{pmatrix}0^*&1&2\\0&3&5\end{pmatrix}$$

Step 4

$$\begin{pmatrix}0^*&0&1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

Step 6

$$\begin{pmatrix}0^*&0'&1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

Step 4

$$\begin{pmatrix}0^*&0'&1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

Step 4

$$\begin{pmatrix}0^*&0'&1\\0'&2&4\end{pmatrix}$$

Step 4

$$\begin{pmatrix}0^*&0'&1\\0'&2&4\end{pmatrix}$$

Step 5

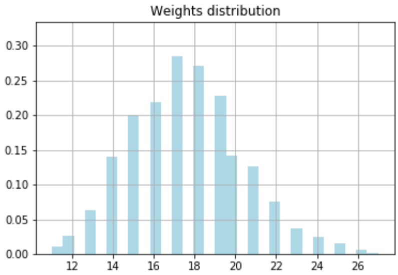
$$\begin{pmatrix}0&0^*&1\\0^*&2&4\end{pmatrix}$$

Step 3

Čas na naključnih matrikah

Vzemimo 1000 matrik velikost 10×10 z elementi iz enakomerne porazdelitve s spodnjo mejo 1 in zgornjo mejo 10. Poženemo madžarsko metodo za problem minimalne cene in dobimo:

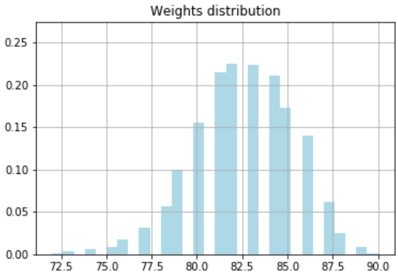
- povprečen čas: 0.00236
- max čas: 0.012192
- min čas: 0.000561



Čas na naključnih matrikah

Če poženemo na istih matrikah madžarsko metodo za problem maksimalne cene oz. profita, se čas izvedbe algoritma ne spremeni.

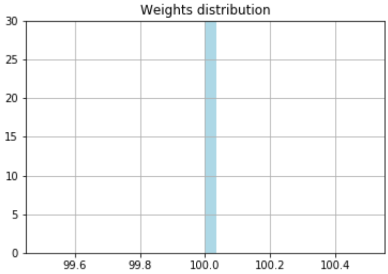
- povprečen čas: 0.00236
- max čas: 0.011481
- min čas: 0.000614



Čas na naključnih matrikah

Povečajmo velikost matrike na 100×100, ostale parametre pa pustimo enake.

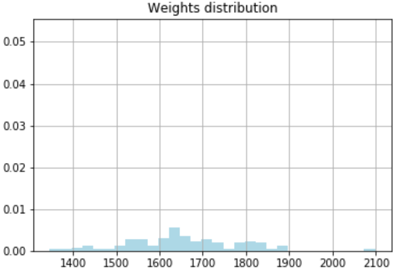
- povprečen čas: 1.627091
- max čas: 2.503931
- min čas: 0.536118



Čas na naključnih matrikah

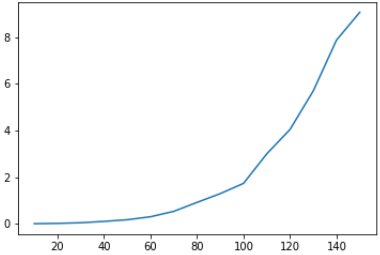
Povečajmo še interval enakomerne porazdelitve na $[1, 1000]$

- povprečen čas: 2.385538
- max čas: 3.534982
- min čas: 1.405796



Čas v odvisnosti od velikosti

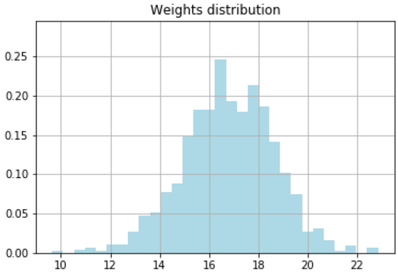
Graf, ki prikaže kako je povprečen čas izvedbe algoritma odvisen od velikosti matrike cen.



Normalna porazdelitev

1000 normalno porazdeljenih 10×10 matrik z povprečjem 3 in standardno deviacijo 1

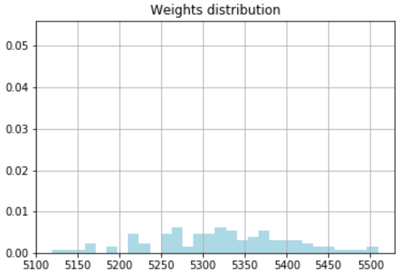
- povprečen čas: 0.003358
- max čas: 0.008787
- min čas: 0.000778



Normalna porazdelitev

100 normalno porazdeljenih 100×100 matrik z povprečjem 100 in standardno deviacijo 20

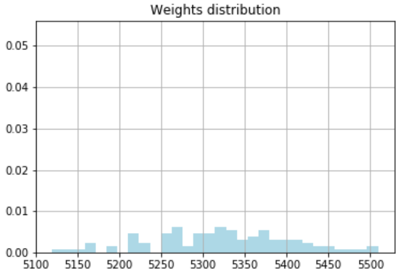
- povprečen čas: 5.220417
- max čas: 11.904078
- min čas: 3.463367



Normalna porazdelitev

100 normalno porazdeljenih 100×100 matrik z povprečjem 100 in standardno deviacijo 20

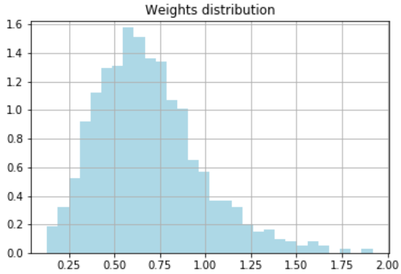
- povprečen čas: 5.220417
- max čas: 11.904078
- min čas: 3.463367



Beta porazdelitev

1000 beta porazdeljenih 100×100 matrik z $\alpha = 0.5$ in $\beta = 0.5$ in *min* problemom.

- povprečen čas: 0.003324
- max čas: 0.063679
- min čas: 0.000769



Beta porazdelitev

1000 beta porazdeljenih 100×100 matrik z $\alpha = 0.5$ in $\beta = 0.5$ in *max* problemom.

- povprečen čas: 0.003218
- max čas: 0.009227
- min čas: 0.000797