

Relatório Sistemas de Controlo

Gonçalo Bastos n 2020238997 e Leonardo Gonçalves n 2020228071

I. INTRODUÇÃO

Este relatório visa a aprovação na cadeira de Sistemas e Controlo. A teoria de Controlo   uma área chave na Engenharia, assim   de realçar a importância da consolidação da matéria lecionada, de modo a ser utilizada posteriormente em outras disciplinas e em situações reais. Tendo isto em consideração, ao longo deste relatório vamos explicar de forma suscetível os raciocínios e as conclusões que obtivemos a partir da resolução dos exercícios propostos nas aulas práticas de Sistemas de Controlo, bem como comprová-los através da simulação em Matlab/Simulink. Ao longo destas resoluções baseamo-nos sobretudo no livro: *Modern Control Engineering 5th Editions*, (K.Ogata, 2010).

II. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

1) Neste problema vamos estudar a influência dos zeros e dos polos na dinâmica da resposta de uma função transferência.

i) No primeiro caso analisamos um sistema com um polo simples.

Para o efeito foi escolhido o sistema:

$$C_1(s) = \frac{1}{Ts + a} \quad (1)$$

, com $a=5$ ou $a=-5$, isto é $s=-5$ e $s=5$, respetivamente.

Através destes dois exemplos foi possível provar que a estabilidade do sinal depende de a . Quando $a < 0$ a resposta a impulso   estável, no caso de $a > 0$ o mesmo já n  se verifica.

Isto pode ser comprovado pela Transformada Inversa de Laplace:

$$C_1(s) = \frac{1}{Ts + a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_1(t) = \frac{1}{T} e^{-at} \quad (2)$$

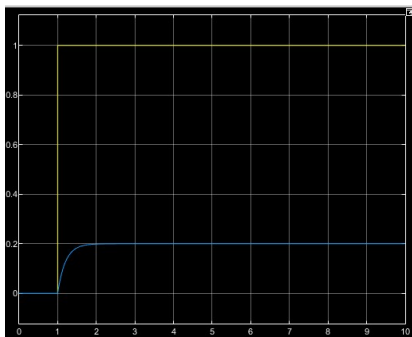


Figure II.1: Resposta do Sistema com valor de a positivo, Resposta Estável.

Pela observação do gráfico podemos afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = 0.2$$

logo o sistema   estável.

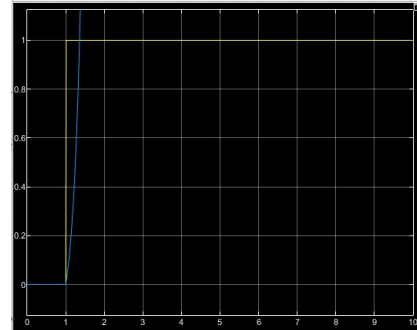


Figure II.2: Resposta do Sistema com valor de a negativo, Resposta Instável.

Neste caso, pela observação do gráfico podemos afirmar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = +\infty$$

o que demonstra que a resposta ao sistema para $a < 0$   instável.

ii) Agora vamos analisar a resposta ao sistema com um polo complexo conjugado.

$$C_2(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \quad (3)$$

,com $a=1$, $b=0$ e $c=3$.

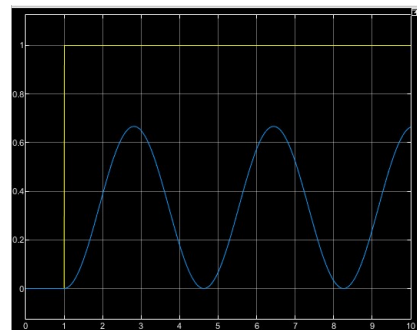


Figure II.3: Resposta do Sistema com 1 Polo Complexo Conjugado.

Neste gráfico   possível verificar que a saída do sistema é uma senoide, cujos polos se encontram sob o eixo imaginário.

iii) Neste terceiro caso vamos analisar a resposta a 2 polos simples distintos, usando uma função do tipo:

$$C_3(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (4)$$

com $a=2$ e $b=7$.

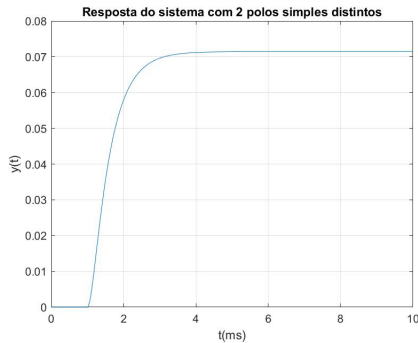


Figure II.4: Resposta do Sistema com 2 Polos Distintos-Sistema Estável.

Como podemos observar na figura II.4 a resposta do sistema é estável, isso deve-se ao facto dos polos estarem ambos no semiplano esquerdo.

Ao analisarmos a resposta do sistema com dois polos simples distintos, porém um desses polos encontra-se no semiplano direito, a resposta do sistema será instável. É possível se observar a resposta instável na seguinte figura, onde $a=-2$ e $b=7$:

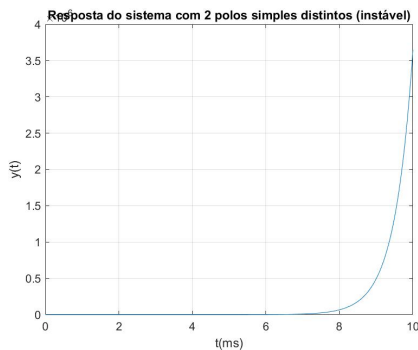


Figure II.5: Resposta do Sistema com 2 Polos Distintos-Sistema Instável.

iv) Nesta alínea vamos observar a resposta a um sistema com dois polos iguais. Pela transformada de Laplace temos que:

$$C_4(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \mathcal{L}^{-1}_{\rightarrow} h_4(t) = te^{-at} \quad (5)$$

com $a=5$

Com base neste resultado podemos afirmar que a resposta do sistema é estável, pois o resultado são duas exponenciais que convergem. Por outro lado, caso o valor real dos polos se situar no eixo positivo das abcissas ($a_j > 0$), pela transformada de Laplace temos duas exponenciais que divergem, sendo assim a resposta do sistema será instável.

Podemos comprovar estes resultados nos seguintes gráficos, obtidos através da simulação no *Matlab*:

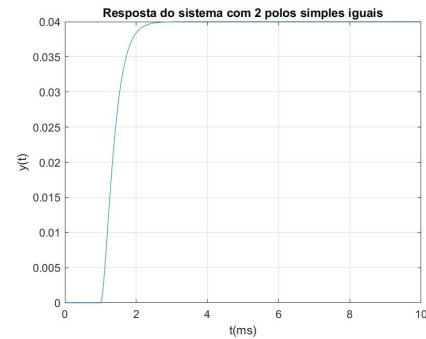


Figure II.6: Resposta do Sistema com 2 Polos Iguais - Sistema Estável.



Figure II.7: Resposta do Sistema com 2 Polos Iguais - Sistema Instável.

v) Agora vamos analisar um sistema com dois polos e um zero.

$$C_5(s) = \frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)} \quad (6)$$

Primeiramente vamos analisar o caso de o zero estar próximo de um dos polos. Para isso definimos: $a=1$, $b=2$, $c=1.001$, e obtivemos a seguinte simulação:

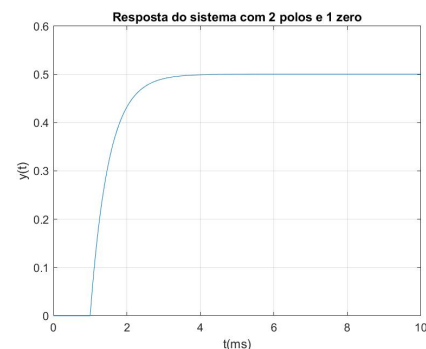


Figure II.8: Resposta do Sistema com 2 Polos e 1 Zero- Perto do Polo

De seguida analisamos o caso de o zero se encontrar longe de um dos polos, para isso definimos $c=100$, de modo que obtivemos a seguinte figura:

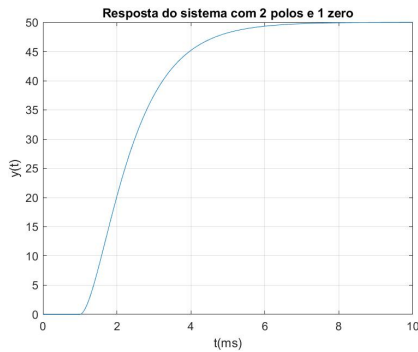


Figure II.9: Resposta do Sistema com 2 Polos e 1 Zero - Longe do Polo

Nesta alínea é possível concluir que a aproximação do zero a um dos polos apenas afeta a dinâmica do sistema e não a sua estabilidade.

- vi) Nesta sexta alínea vamos analisar sistemas com polos nos semiplanos esquerdo e direito do plano s. Consideramos a seguinte expressão:

$$C_6 = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)} \quad (7)$$

com: $[a \ b \ c \ d] = [1 \ 5 \ 7 \ -9]$;

Observamos a seguinte figura:

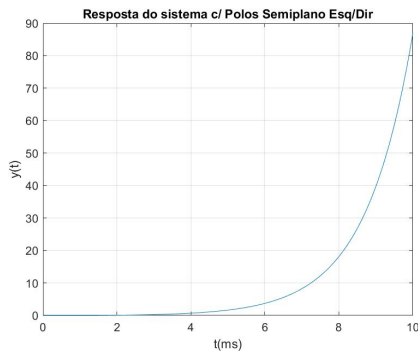


Figure II.10: Resposta do Sistema com Polos no Semiplano Esquerdo e Direito

Pela observação da figura é possível afirmar que a resposta do sistema é instável. Ter apenas um polo no semiplano direito é condição suficiente para que a resposta do sistema ser instável.

- vii) Por último, neste exercício vamos observar o caso de um sistema com um zero no semiplano esquerdo ou direito e dois polos no semiplano esquerdo.

$$C_6 = \frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)} \quad (8)$$

com: $[a \ b \ c] = [1 \ 5 \ -3]$;

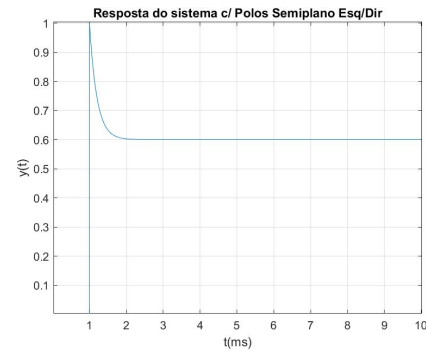


Figure II.11: Resposta do Sistema com um zero e dois polos

- 2) Neste exercício vamos analisar um sistema de controlo na existência de uma perturbação, temos o seguinte sistema:

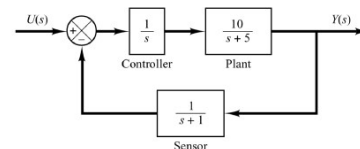


Figure II.12: Diagrama de blocos de um sistema de controlo sem derivadas na entrada

O sistema representado na figura anterior tem uma entrada de referência e outra entrada para o distúrbio. Como este é um sistema invariante no tempo é possível obter a sua saída completa somando as duas saídas de cada entrada individualmente.

Primeiramente assumimos que a entrada de referência $R(s)$ é zero, desta forma obtemos a resposta ao distúrbio $C_D(s)$:

$$C_D(s) = [(0 - H(s)C_D(s))G_1(s) + D(s)]G_2(s) \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} D(s) \quad (10)$$

Analogamente, calculamos a componente $R(s)$, com $D(s)=0$

$$C_R(s) = [R(s) - H(s)C_R(s)]G_1(s)G_2(s) \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow C_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) \quad (12)$$

Portanto,

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow C(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) \\ &\quad + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) \\ \Leftrightarrow C(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) \\ &\quad + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) \\ \Leftrightarrow C(s) &= \left[\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \right] \begin{bmatrix} D(s) \\ R(s) \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o efeito da perturbação na saída para diferentes cenários, usando um degrau unitário para $R(s)$ e sendo:

$$G_2(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 9}$$

Com a observação das diferentes saídas observamos que com $D(s)$ constante e $G_1(s)$ maior do que 1, quanto maior for $H(s)$ maior será a perturbação inicial. No caso da senoide a saída comporta-se de forma semelhante, diminui a sua amplitude progressivamente até estabilizar num valor proporcional a $D(s)$. No caso de $G_1(s)$ ser menor do que 1 verificou-se que o sistema é estável, tendo-se observado neste caso, que o valor onde o sistema estabiliza é tanto menor, quanto maior for $H(s)$.

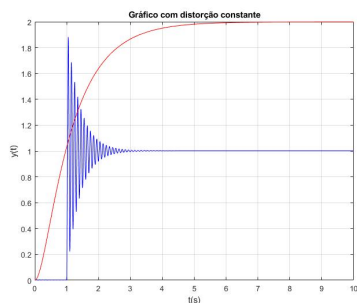


Figure II.13: Gráfico com distorção constante.

Agora analisamos o caso de $D(s)$ ser uma senoide e $G_1(s)$ menor do que 1, a resposta do sistema também é uma senoide cuja amplitude varia inversamente com o valor de $H(s)$. Quando $G_1(s)$ é maior do que 1 obtivemos a mesma perturbação inicial obtida no caso de $D(s)$ constante, contudo a resposta a impulso termina numa senoide de amplitude muito menor, concluindo-se que quanto maior for o valor de $H(s)$ menor será o valor no qual o sistema termina como senoide.

Por último analisamos o caso de $D(s)$ ser um ruído branco e $G_1(s)$ menor do que 1, a resposta do sistema

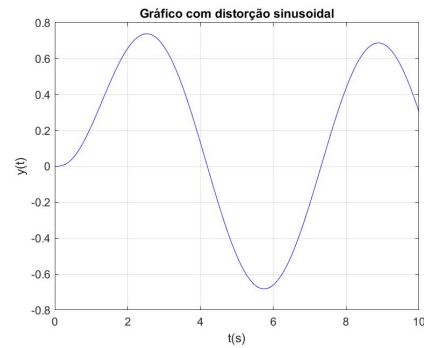


Figure II.14: Gráfico com distorção sinusoidal.

também será um ruído branco, cuja amplitude varia inversamente com o valor de $H(s)$. Com $G_1(s)$ maior do que 1 o comportamento da saída é idêntico aos casos anteriores, a saída é um ruído branco de amplitude muito menor, verificando a mesma relação dos casos anteriores.

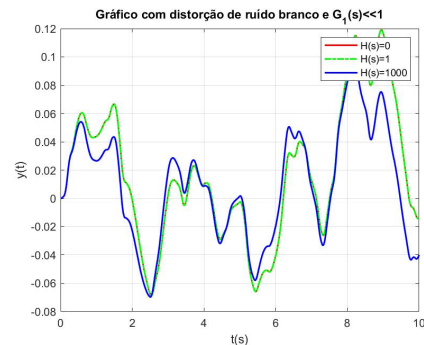


Figure II.15: Gráfico com ruído branco e $G(s) \ll 1$ com diferentes valores de $H(s)$.

Concluimos que a saída do sistema vai de acordo ao distúrbio $D(s)$. No caso de $G_1(s)$ maior do que 1 obtém-se uma senoide que diminui de amplitude até chegar ao ponto onde a resposta ganha a forma $D(s)$. $H(s)$ influencia o sistema tanto na amplitude como na intensidade da senoide ou do ruído. Quando $G_1(s)$ é menor do que 1 a resposta do sistema vai ser igual à entrada, sendo que $H(s)$ apenas influencia o valor da amplitude da senoide ou do ruído.

III. ESPAÇO DE ESTADOS

- 1) Neste exercício vamos Usar o simulink para Simule o comportamento do sistema utilizando o diagrama de blocos da Fig. III.1 e as representações em espaço de estados. E vamos verificar que são equivalentes

Para calcular a representação em espaço de estados iremos considerar os estados x_1, x_2, x_3 de acordo com a figura seguinte. Ao considerar as saídas do controlador, planta e sensor, como estados obtemos as seguintes

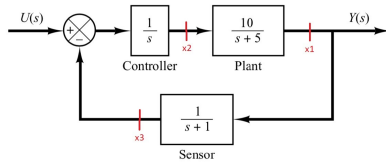


Figure III.1: Estados através do metodo 1.

Funções Transferência:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5} \quad (15)$$

$$\frac{X_2(s)}{-X_3(s) + u(s)} = \frac{1}{s} \quad (16)$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (17)$$

$$Y(s) = X_1(s) \quad (18)$$

Que podem ser reescritas em forma de sistema como:

$$\begin{cases} sX_1(s) = -5X_1(s) + 10X_2(s) \\ sX_2(s) = -X_3(s) + u(s) \\ sX_3(s) = -X_3(s) + X_1(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Finalmente podemos escrever a representação em espaço de estados sob a forma matricial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (19)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (20)$$

ou seja;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * u(t) \quad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} * u(t) \quad (22)$$

Usando o simulink obtemos a resposta do sistema com base na representação em espaço de estados

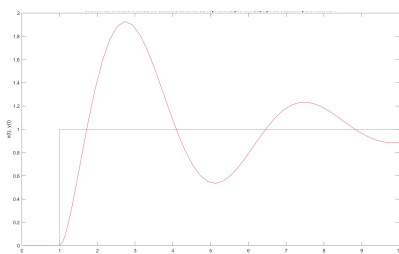


Figure III.2: Resposta do sistema representado em espaço de estados a um degrau

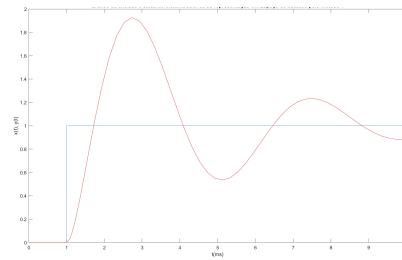


Figure III.3: Resposta do sistema a um degrau utilizando o diagrama de blocos

Por fim utilizando o diagrama de blocos obtemos:

Concluimos que são equivalentes, como queríamos mostrar.

- 2) Para a solução deste exercício queremos obter a função de transferência para isso vamos assumir que os deslocamentos x e y são medidos a partir das respectivas posições estacionárias na ausência da entrada u . Utilizando a segunda lei de Newton $\vec{F} = \vec{m} * \vec{a}$ e a Lei de Hooke, tendo em atenção as orientações do sistema:

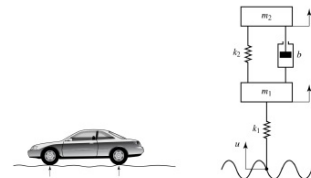


Figure III.4: Sistema mecanico de suspensão para automóveis

Obtemos as equações:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= k_1(u - x) + k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) \\ m_2 \ddot{y} &= -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\xrightarrow{L} \begin{aligned} [(m_1 s^2 + bs(k_1 + k_2))]X(s) &= (bs + k_2)Y(s) + k_1 U(s) \\ (m_2 s^2 + bs + k_2)Y(s) &= (bs + k_2)X(s) \end{aligned}$$

Finalmente podemos obter a partir destas equações a Função de Transferência de malha fechada $\frac{Y(s)}{U(s)}$ basta eliminar $X(s)$

$$X(s) = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2}{b_2 + k_2} * Y(s) \quad (23)$$

Obtemos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(s^2 m_2 + bs + k_2)}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + (k_1 m_2 + (m_1 + m_2)k_2)s^2 + k_1 bs + k_1 k_2} \quad (24)$$

E o mesmo para $\frac{X(s)}{U(s)}$:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + (k_1m_2 + (m_1 + m_2)k_2)s^2 + k_1bs + k_1k_2} \quad (25)$$

A função de transferência deste sistema será, então, a soma destas duas parcelas.

Ainda com as equações que determinadas acima, que caracterizam o sistema podemos obter a representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = y \\ z_3 = z'_1 \\ z_4 = z'_2 \end{cases}$$

$$z'_3 = \frac{-k_1(z_1 - u) + k_2(z_2 - z_1) + b(z_4 - z_3)}{m_1}$$

$$z'_4 = \frac{-k_2(z_2 - z_1) - b(z_4 - z_3)}{m_2}$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ z'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & \frac{-b}{m_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} * u(t) \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + [0] * u(t) \quad (27)$$

Vamos agora proceder as simulações utilizamos os valores: $m_1 = 20$; $m_2 = 100$; $k_1 = 120000N/m$; $K_2 = 100N/m$; $b = 5000N/ms$

IV. RESPOSTA TRANSITÓRIA E REGIME PERMANENTE

A resposta temporal de um sistema de controlo consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta em regime permanente. Pela resposta transitória nos entendemos aquela que vai do estado inicial ao estado final. Resposta em regime permanente pertence-se identificar como o sistema se comporta quando o t tende para infinito. Assim a resposta do sistema $c(t)$ pode ser escrita como:

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

1. Considerando o seguinte sistema:

Sabendo a função transferência em malha fechada do sistema de 2ª ordem representado temos:

$$(R(s) - c(s))E(s) = C(s)$$

$$\Leftrightarrow E(s)R(s) - E(s)C(s) = C(s)$$

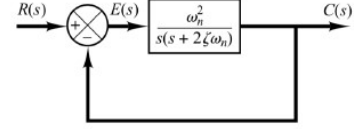


Figure IV.1: Sistema genérico de 2ª ordem

$$\Leftrightarrow C(s)(1 + E(s)) = E(s)R(s)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{E(s)}{1 + E(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (28)$$

Sabendo que $R(s) = \frac{1}{s}$, a expressão de saída para uma entrada em degrau será:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{s} \quad (29)$$

- Efeito da parte real e imaginária dos polos na resposta do sistema:

$$s^2 + 2s\zeta\omega_n = 0$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Verifica-se que se trata de dois polos complexos conjugados em que a parte real é $-\zeta\omega_n$ e a parte imaginária é $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} t)$$

Concluimos através desta expressão que a parte real dos polos tem influência sobre a amplitude do sinal enquanto a parte imaginária tem influência sobre a oscilação do sinal.

- Análise da resposta transitória de uma resposta sub-amortecida:

Seja $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ e partindo $C(s)$ em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \mathcal{L}^{-1} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t);$$

$$\frac{2\zeta\omega_n}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \mathcal{L}^{-1} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

$$C(s)\mathcal{L}^{-1}c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t))$$

- Tipo de sistema e erro em regime permanente:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Pela análise do sistema podemos concluir que se trata de um sistema de tipo 1, pois $G(s)$ tem um polo na origem.

Logo:

- Para uma entrada em degrau:

$$E(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = 0$$

- Para uma entrada em rampa:

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{k}$$

- Para uma entrada em parábola:

$$E(s) = \frac{1}{s^3} \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + G(s)} = \infty$$

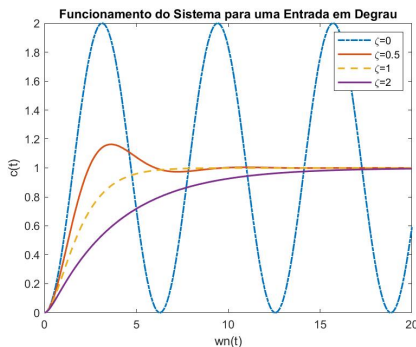


Figure IV.2: Funcionamento do sistema para uma entrada em Degrau

Podemos concluir que para uma entrada em rampa o erro aumenta em função de ζ , contudo se ζ for nulo a resposta será sinusoidal, o que torna o erro variável. No caso de uma entrada em degrau o erro é sempre nulo excepto quando ζ é igual a 0. Para uma entrada em parábola o erro é infinito.

2. Neste segundo exercício vamos projetar um controlador que permita obter uma percentagem de overshoot $P.O. = 15\%$ e com tempo de pico $t_p = 1.2[s]$.

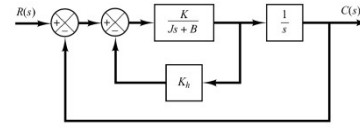


Figure IV.3: Controlo de um motor DC.

Simplificando a função de transferência em malha fechada obtém-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (30)$$

Sendo um sistema de segunda ordem:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{JK}}$$

Substituindo pelos valores do enunciado temos:

$$P.O. = 15\% \iff M_p = 0.15$$

$$M_p = e^{-(\frac{\zeta}{1-\zeta^2})\pi} \iff \zeta = 0.54$$

$$t_p = 1.2s \iff t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \iff \omega_d = 2.618$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.11$$

Calculando agora os valores de K e K_h , para $J=B=1$:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \iff K = J\omega_n^2 = 9.68$$

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = 0.244$$

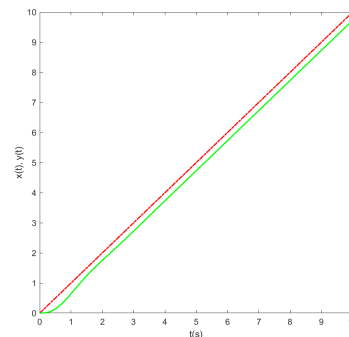


Figure IV.4: Simulação do funcionamento do sistema para uma entrada em rampa.

3. Nesta terceira alínea vamos simular o sistema massa-mola-amortecedor, representado na figura seguinte, para condições iniciais não nulas.

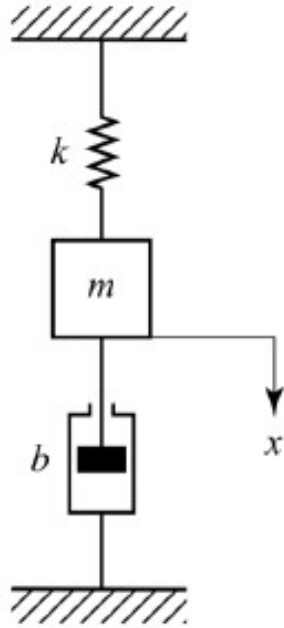


Figure IV.5: Sistema mecânico massa-mola-amortecedor

A equação do sistema é dada por:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

sendo $x(0) = 0.2[m]$ e $\dot{x}(0) = 1.5[m/s]$ e definimos $k = 1[N/m]$, $m = 1[kg]$ e $b = 2$.

Desta forma, a equação do estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (31)$$

E a equação de saída:

$$y(t) = [10] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{1} & -\frac{2}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + [10] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (32)$$

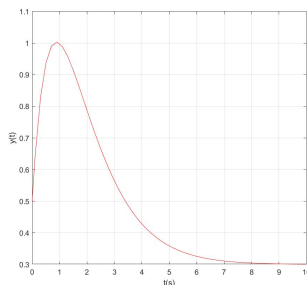


Figure IV.6: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor

4. Nesta alínea vamos aplicar o critério de estabilidade de Routh, o qual permite concluir se existem ou não raízes instáveis em uma equação polinomial sem recorrer à sua resolução. Ao aplicar este critério conseguimos retirar informações sobre a estabilidade absoluta diretamente dos coeficientes da equação característica.

Dado o seguinte sistema:

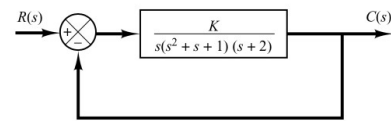


Figure IV.7: Resposta do sistema massa-mola-amortecedor

A função de transferência para malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

A partir da função transferência retiramos a equação característica, da qual vamos retirar os coeficientes necessários para aplicar o critério de Routh:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

os coeficientes são:

$$a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 3; a_3 = 2; a_4 = K$$

Utilizando o critério de Routh obtivemos:

$$b_1 = \frac{7}{3}; b_2 = K; c_1 = (2 - \frac{9}{7}K); d_1 = K$$

Organizando os coeficientes de modo a garantir estabilidade, temos que:

$$(2 - \frac{9}{7}K) > 0, K > 0 \iff 0 < K < \frac{14}{9} \quad (33)$$

Agora analisamos 2 casos, o primeiro com $K = 0.75$ sistema estável e o segundo com $K = 2$ sistema instável.

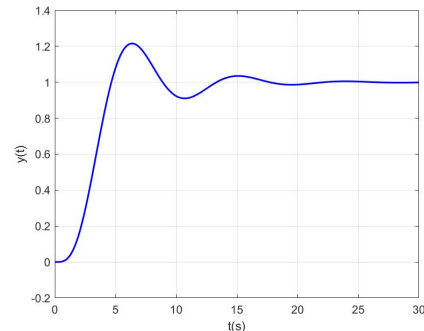
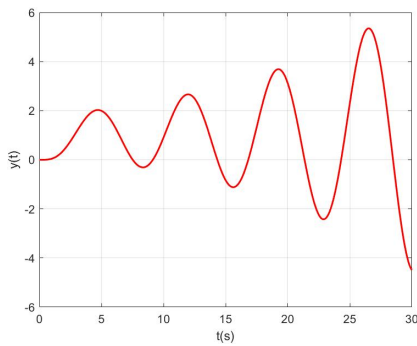


Figure IV.8: Simulação do sistema para k=0.75 (Estável)

Figure IV.9: Simulação do sistema para $k=2$ (Instável)

Como era expectável os resultados calculados anteriormente são demonstrados graficamente.

5. Nesta alínea é pedido que analise o erro em regime permanente para entradas em degrau, rampa e parábola.

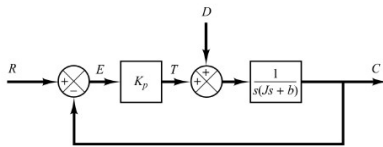


Figure IV.10: Sistema de controlo com perturbação

Fazendo $R = 0$, obtém-se a seguinte função de transferência da perturbação para a saída:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k_p} = L(s)$$

Assim sendo, para uma entrada em degrau, oo erro do regime permanente será:

$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{Js^2 + bs + k_p} = \frac{1}{k_p}$$

No caso de uma entrada em rampa:

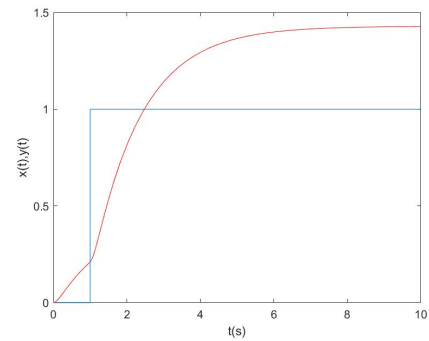
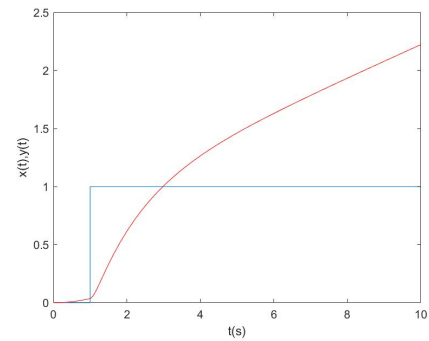
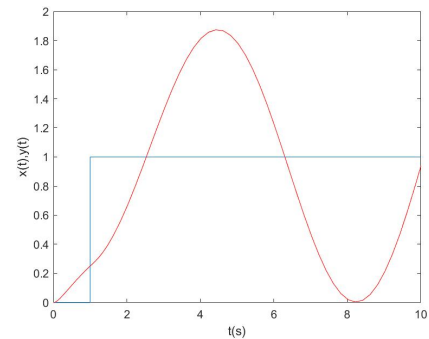
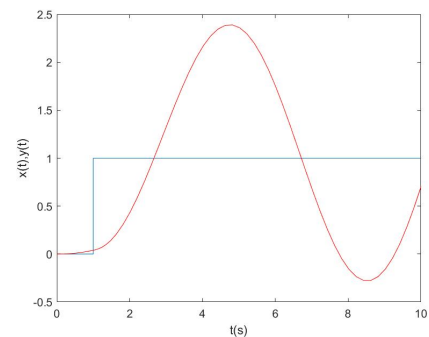
$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{Js^2 + bs + k_p} = \infty$$

E para uma entrada em parábola temos:

$$e(t)_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2(Js^2 + bs + k_p)} = \infty$$

Para analisar o efeito da perturbação $D(t)$ na saída usamos uma entrada em degrau. Sendo $J = 1, b = 10, K_p = 17$.

Pela análise dos gráficos é possível verificar que alternado o controlador a saída torna-se instável, conclui-se assim que esta não tem erro em regime permanente.

Figure IV.11: Simulação do sistema para $D(s) = 3$ Figure IV.12: Simulação do sistema para $D(s)$ em rampaFigure IV.13: Simulação do sistema para $D(s) = 3$ com um controlador integralFigure IV.14: Simulação do sistema para $D(s)$ em rampa com um controlador integral

V. LUGAR DE RAÍZES

- 1) Neste exercício queremos projetar um compensador de avanço para $G(s)$ apresentado abaixo, de forma a ter polos em malha fechada em $s = -6.0 \pm 2.0j$, onde $G(s)$ se encontra numa malha de realimentação negativa unitária.

$$G(s) = \frac{5}{s(s+2)}$$

Primeiramente vamos encontrar o lugar de raízes do sistema, e como sabemos os polos e zeros de malha aberta são $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, e dois zeros no infinito:

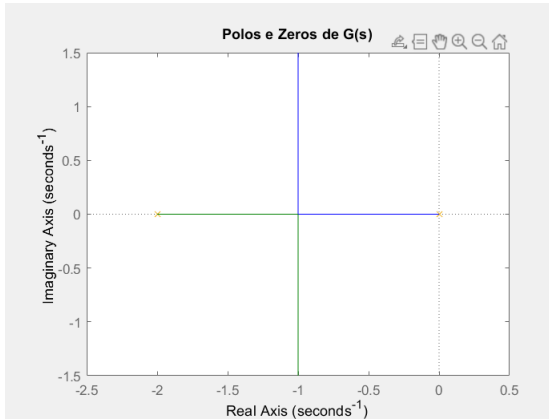


Figure V.1: Polos e Zeros do sistema $G(s)$

Como os polos em malha fechada requeridos não pertencem ao lugar de raízes, só alterar o valor de K não chega para chegar aos mesmos.

Vamos então analisar a condição de fase sobre a malha fechada do sistema mais compensador:

$$\angle[1 + G(s)G_c(s)] = \pi + 2\pi n$$

$$G_c(s) = \pm 180 - \angle s - \angle(s+2) = \pm 180 - 161.565 - 153.435 = 135$$

Então, para satisfazer a condição de fase é preciso acrescentar 135° à fase do sistema, pelo que temos que usar um compensador de avanço. Vamos determinar os parâmetros de $G_c(s)$ através do Método 2:

$$G_c(s) = K * \frac{s + z_0}{s + p_0}$$

Vamos colocar um zero igual a um polo de malha aberta de $G(s)$, para que $z_0 = -2$:

$$G(s) = \frac{5(s+2)}{s(s+2)} \Leftrightarrow G(s) = \frac{5}{s}$$

$$\angle G(s) = -\angle s = 161.565$$

$$\angle G_c(s) = 180 - 161.565 = 18.435$$

Como sabemos z_0 , vamos então obter p_0 :

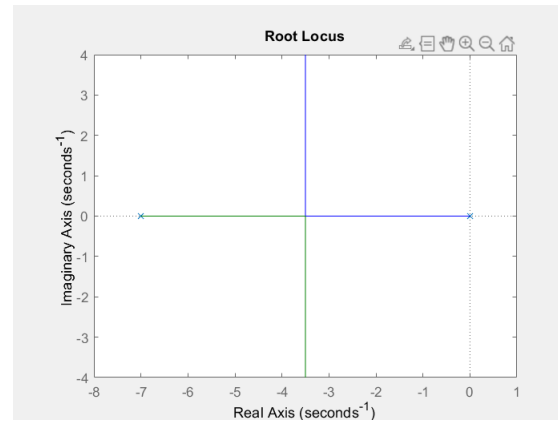


Figure V.2: Lugar de raízes do sistema com compensador obtido em matlab

$$tg(18.435) = \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow x = 7 \Leftrightarrow p = -7$$

Como agora já sabemos z_0 e p_0 , vamos encontrar K que satisfaz a condição do seguinte módulo:

$$|K * \frac{s + p_0}{s + z_0} * \frac{5}{s(s+2)}| = 1$$

$K = 8$ (Através da análise do gráfico do lugar de raízes em matlab da figura 34).

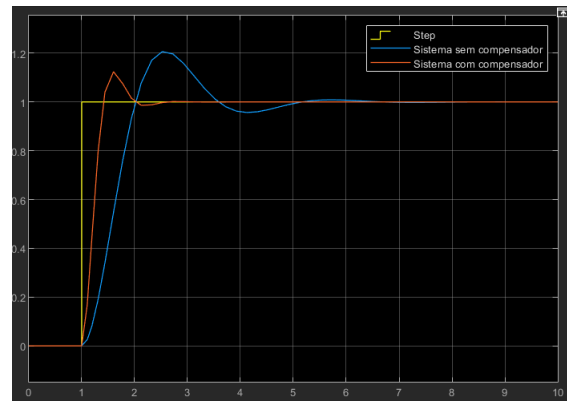


Figure V.3: Simulação simulink do sistema com e sem compensador para entrada em degrau

Através da análise dos gráficos das figuras 35 e 36 podemos concluir que a adição do compensador causou as seguintes melhorias:

- Na entrada em degrau, o tempo em regime transitório é menor, logo o sistema é mais rápido a reagir ao sinal.
- Na entrada em rampa de declive 1, podemos observar que o erro de seguimento irá ser menor com o compensador, isto devido ao sistema equivalente possuir um K resultante maior (uma vez que o erro de entrada em rampa é $\frac{1}{K}$ para o tipo de sistema representado, tipo 1).

Concluimos assim que os compensadores podem ajudar a obter o sistema pretendido e que o compensador de

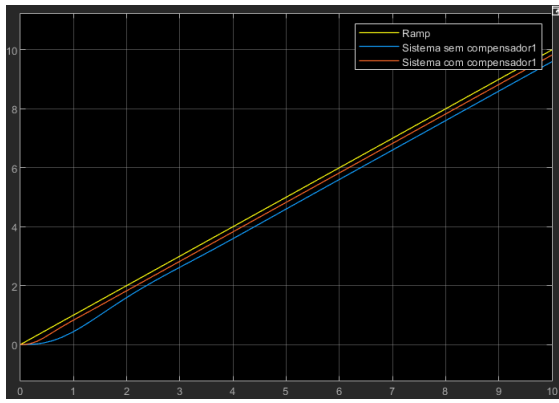


Figure V.4: Simulação simulink do sistema com e sem compensador para entrada em rampa

avanço, neste caso, irá beneficiar o sistema em quase todos os tipos de entrada.

- 2) Neste exercício pretende-se projetar um compensador em atraso para $G(s)$ apresentado a seguir, de forma a melhorar em 5 vezes a capacidade de seguimento em rampas, sendo que $G(s)$ se encontra numa malha de realimentação negativa unitária.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)}$$

Para estes sistemas, o erro em regime permanente é dado por $E(t) = \frac{1}{K_v}$, e como se trata de um compensador em atraso, vamos aumentar K_v para melhorar a resposta em regime permanente:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s * G_c(s) * H(s) * G(s)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) \approx \frac{z_0}{p_0} = 5$$

Para isto, temos que nos certificar que os polos e os zeros do compensador estão o mais próximo possível uns dos outros, para afetar ao mínimo o lugar de raízes do sistema, o que equivale a uma resposta transitória alterada, mas para evitar isso, colocamos os polos e os zeros muito perto da origem, para terem fases semelhantes. Então, para este compensador, escolhi $z_0 = 0.1$ e $p_0 = 0.02$, por forma a garantir um aumento em 5 vezes de K_v .

$$G_c(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.02}$$

Vamos então simular este sistema com e sem compensador, para observar as diferenças em ambos os casos. Como podemos observar, no que diz respeito à entrada em degrau (figura 37), a resposta em regime transitório piora um pouco, devido à pequena diferença de fase entre o polo e o zero do compensador, por mais perto que estejam um do outro. Isso dá origem ao efeito de cauda, ao acrescentar um ramo ao lugar de raízes perto da origem, que faz com que o sistema reaja de forma mais lenta.

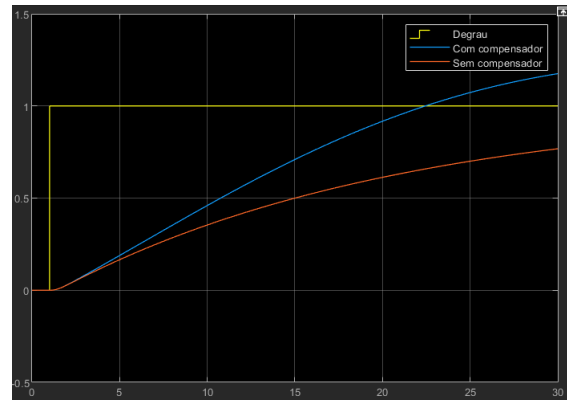


Figure V.5: Simulação simulink da saída do sistema com e sem compensador para entrada em degrau

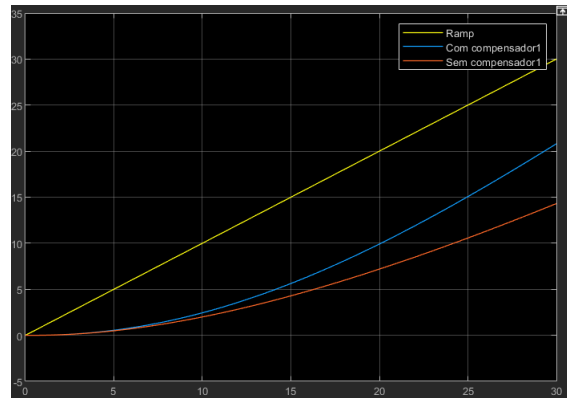


Figure V.6: Simulação simulink da saída do sistema com e sem compensador para entrada em rampa

No que toca à entrada em rampa, nota-se o efeito do compensador, com uma capacidade de seguimento melhorada (sinal azul mais perto do amarelo em comparação com o vermelho, da figura 34).

Quanto aos erros, foi medido diferenças entre os sinais de segundos para o sistema com compensador, e de segundos, o que nos dá um melhoramento na capacidade de vezes, o que é bastante perto do pedido, se alterar a resposta transitória.

3)

Neste exercício é nos pedido para projetar o zero do controlador representado na figura a seguir, de modo a garantir certos parâmetros.

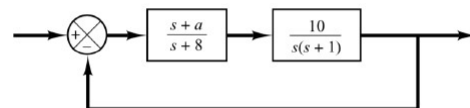


Figure V.7: Projeto do zero do controlador através do lugar de raízes

Para podermos usar o método das raízes, é necessário converter o controlador para um formato conhecido. Primeiro temos de calcular a função de transferência e retiramos a equação característica do sistema em malha

fechada:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{10(s+a)}{s(s+8)(s+1)} = 0 \Leftrightarrow s^3 + 9s^2 + 18s + 10a = 0$$

Obtemos então:

$$1 + \frac{K}{s^3 + 9s^2 + 18s} = 0; K = 10a$$

Assim conseguimos extrair as condições de módulo e fase, e analisamos o sistema através do lugar de raízes:

$$K = \frac{1}{|G_c(s)G(s)H(s)|} \Leftrightarrow K = |s^3 + 9s^2 + 18s|$$

$$\angle G(s)H(s) = \pi \pm 2\pi \Leftrightarrow -\angle(s^3 + 9s^2 + 18s) = \pi \pm 2\pi$$

Assim, através do lugar de raízes calculado em matlab podemos retirar o polo correspondente que é: $p = -0.9 \pm j2.06$

Podemos agora calcular o valor de K que vai transformar estes polos em polos de malha fechada do sistema, e por consequência determinar a :

$$K = |s^3 + 9s^2 + 18s| = 27.96$$

$$a = \frac{K}{10} \simeq 2.8$$

Podíamos também determinar os parâmetros a cima referidos de outra maneira, através do método analítico. Com isso descobrimos K e a , mas também o valor da frequência natural não amortecida ω_n .

Para isso escrevemos os polos em função de ω_n e de $\zeta = 0.7$:

$$s = \omega_n * \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0.7\omega_n \pm j\omega_n 0.714$$

Ao substituirmos a expressão das raízes de malha fechada com isto, e ao igualar a parte real/imaginária a 0. Mas como já sabemos o valor dos polos pretendidos (retirado do lugar de raízes), isso facilita os cálculos para obter ω_n :

$$\begin{aligned} -0.9 \pm j2.06 &= -0.7\omega_n \pm j\omega_n 0.714 \Leftrightarrow -0.7\omega_n = \\ \Leftrightarrow \omega_n &= 1.43 \end{aligned} \quad (34)$$

Vamos agora analisar o resultado obtido caso o sistema fosse de 2º ordem. Considerando os polos de interesse acima e o valor de ω_n , podemos encontrar o sistema de 2º ordem correspondente através de:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)} = \frac{1.43^2}{s(s + 1.43)}$$

Se $G(s)$ for posto numa malha de realimentação negativa unitária, temos a expressão padrão de um sistema de

2º ordem, com polos de malha fechada iguais aos pretendidos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1.43^2}{s^2 + (-3 + 4i)}$$

Determinamos então os tempos de subida, pico e estabelecimento deste sistema:

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right) \approx 45.57$$

No sistema original (calculado através de um script em matlab):

- Tempo de subida: 0.6491 s
- Tempo de pico: 1.5394 s
- Tempo de estabelecimento: 3.9317 s

No sistema de 2º ordem:

- Tempo de subida: 2.297 s
- Tempo de pico: 3.076 s
- Tempo de estabelecimento: 2.997s

Através da similaridade dos valores acima calculados com os obtidos no sistema original, podemos concluir que o sistema pode ser aproximado por um sistema de 2º ordem (com dois polos em ω_n e $K = 27.96$).

VI. DIAGRAMAS DE BODE E DE NYQUIST

- 1) O diagrama de Bode permite estudar a resposta em frequência através de dois gráficos: um gráfico do logarimo da magnitude e o outro do ângulo de fase. Estes dois gráficos são usados para a representação de resposta em frequência, invariante no tempo, de sistemas de controlo. Neste exercício vamos esboçar o diagrama de Bode da seguinte função $G(s)$:

$$G(s) = \frac{4(s+20)}{s(s+30)(s^2 - 300s + 6000)} \quad (35)$$

Pretendemos verificar se o sistema em causa é de fase mínima.

$$G(s) = \frac{4s + 80}{s^4 - 270s - 3000s^2 + 180000s} \quad (36)$$

A função $G(s)$ deu origem ao seguinte traçado:

Pela figura e análise do sistema, podemos concluir que o sistema $G(s)$ é de fase não mínima, pois possui dois polos no semiplano direito.

- 2) Nesta alínea vamos analisar para um processo $G(s)$ dado por:

$$G(s) = \frac{20(s+4)}{s(s^2 + 2s + 10)(s+3)} \quad (37)$$

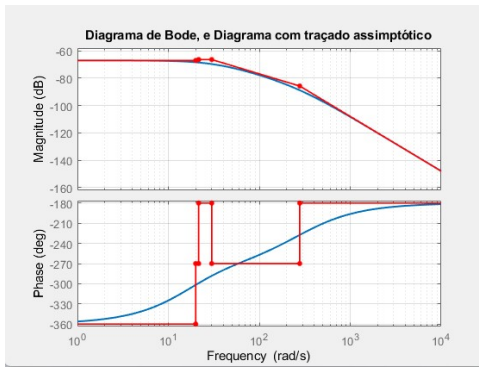


Figure VI.1: Diagrama de Bode

$$\Leftrightarrow G(s) = \frac{20s + 80}{s^4 + 5s^3 + 16s^2 + 30s} \quad (38)$$

Pretendemos esboçar o diagram de Bode e calcular as margens de fase e de ganho e as respectivas frequências.

A margem de ganho é calculada por:

$$G_m = \frac{1}{|G(jw)|}$$

logo, $G_m = -2,12dB$

A margem de fase é calculada por:

$$P_m = \angle G(jw)$$

$$\text{Logo, } P_m = -19,64(deg)$$

E as frequências são respetivamente:

$$w_c = w, \angle G(jw) = -180 \Leftrightarrow w = w_c = 3,02(rad/s)$$

$$w_p = w, |G(jw)| = 1 \Leftrightarrow w = w_p = 3,37(rad/s)$$

Podemos confirmar este resultado usando a função `margin()` do Matlab, a qual demonstra o resultado na seguinte figura:

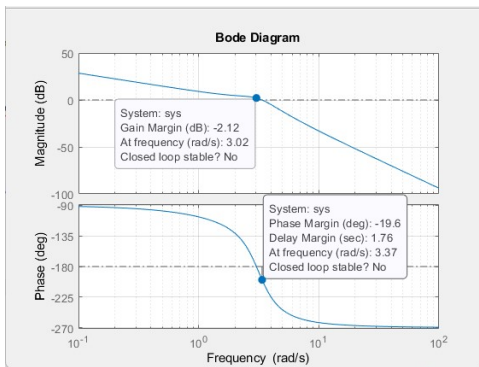


Figure VI.2: Diagrama de Bode

Um sistema de fase mínima é estável se $G_m > 1eP_m > 0$, logo o sistema é instável.

Com o valor de margem de fase P_m) e a frequência w_p conseguimos determinar o atraso temporal máximo:

$$t_{max} = \frac{P_m}{w_p} = 5,83s$$

- 3) Agora vamos considerar uma planta $G(s)$ inserida numa malha de realimentação negativa tal que:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(s+8)} \quad (39)$$

Pretendemos esboçar o diagrama de Nyquist e verificar se o sistema é estável para alguns valores de K.

Pela observação do traçado de Nyquist podemos contar as voltas que o traçado dá á volta do ponto $-1+j0$. Este sistema é de fase mínima logo não tem polos e zeros no semiplano direito.

Vemos que o traçado dá a volta pelo sentido dos ponteiros do relógio com raio infinito, assim sendo para dar a volta completa o ponto -1 é enrolado 2 vezes.

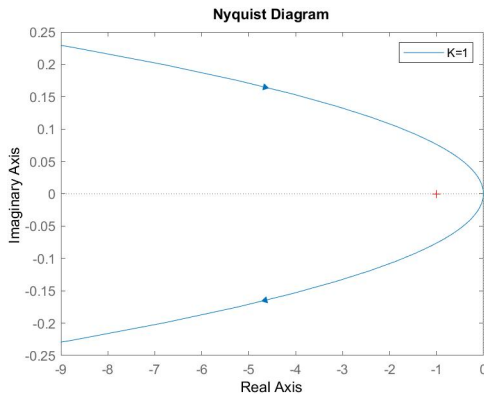


Figure VI.3: Traçado de Nyquist

Pela análise da função característica, $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, o sistema original irá sempre intercepar o ponto -1 duas vezes no sentido horário, logo $N_{-1} = 2$. A partir da equação de malha aberta $G(s)H(s)$ obtemos o número de polos no semiplano direito, neste caso são dois polos na origem e um polo em $s = -8$. Logo não temos nenhum polo na zona de estabilidade, $N_{polos} = 0$. Logo temos que:

$$Z = N + P \iff Z = 2$$

Para o sistema ser estável $Z = 0$ e o ponto $-1+j0$ não pode ser enrolado. Logo, concluímos que independentemente do valor de K o sistema será sempre instável.

- 4) Agora vamos voltar a analisar a estabilidade de um sistema com um atraso temporal pelo traçado de Nyquist:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s} e^{-2s} \quad (40)$$

Como este sistema é de fase mínima, este apenas será estável se o número de enrolamentos do ponto $-1+j0$ for zero ($N_{-1} = 0$). Logo para garantir a estabilidade do sistema temos de encontrar o valor de K que garanta que o ponto $-1+j0$ não seja envolvido pelo traçado de Nyquist, ou seja todos os pontos que cruzam o eixo real

do traçado de Nyquist estejam á direita do ponto $-1+j0$. Pela observação do gráfico do traçado de Nyquist observamos que o ponto onde este cruza o eixo real é $x = -1,27$, logo:

$$K(-1,27) = -1 \iff K = 0,78$$

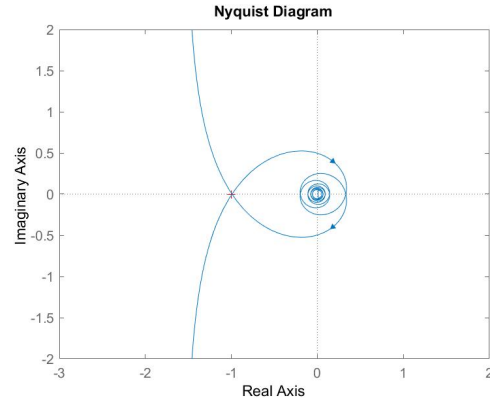


Figure VI.4: Traçado de Nyquist

- 5) Agora pretendemos calcular o ganho do controlador de modo a obter uma margem de fase $M_p = 50^\circ$.

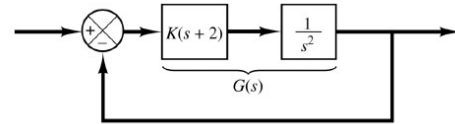


Figure VI.5: Margem de Ganho vs Atraso Temporal

Temos um sistema de fase mínima, pelo que temos a seguinte função transferência de malha fechada:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2} \quad (41)$$

Calculando a frequência correspondente a uma fase de $180 + 50 = 230^\circ$ pela expressão de fase

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \omega = 2,38$$

O valor de K é:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \iff K = 3$$

Logo o atraso temporal máximo para garantir estabilidade do sistema é:

$$M_p = \omega * t_0 \iff t_0 = \frac{23}{8}\pi = 1,69s$$

VII. CONTROLADOR PID

Neste exercício vamos projetar o seguinte controlador PID, utilizando o método de Ziegler-Nichols:

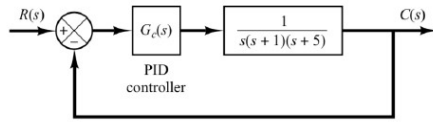


Figure VII.1: Controle PID pelo método de Ziegler-Nichols

Como podemos verificar este sistema é de tipo 1, logo temos de usar o segundo método de Ziegler-Nichols, o qual consiste em fazer variar o ganho até o sistema atingir o limite de estabilidade. Para isso precisamos de determinar o valor crítico para K que atinja esse limite.

Primeiro determinamos a equação de transferência em malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

Agora vamos aplicar o critério de Routh para determinar o K_p para o qual o sistema se mantém estável.

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p$$

$$\begin{bmatrix} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30-K_p}{6} & 0 \\ s^0 & K_p & 0 \end{bmatrix}$$

Logo calculando o valor de K no limiar de estabilidade: $K_p < 30 : K_{CR} = 30$.

Substituindo s por jw na equação e substituindo K_{CR} por 30 na equação característica obtivemos:

$$(jw)^3 + 6(jw)^2 + 5(jw) + 30 = 0$$

A partir desta equação conseguimos determinar a frequência de oscilação sustentada, o período de oscilação sustentada, o K_p , o T_i e o T_d , sendo os seus valores nominais os seguintes:

$$K_p = 0.6 * K_{CR} = 18$$

$$T_i = 0.5 * P_{CR} = 1,4$$

$$K_I = 12,81$$

$$T_0.125 * P_{CR} = 0,35$$

$$K_D = K_p * T_d = 6,32$$

Com base nestes valores podemos escrever a função transferência do controlador PID:

$$G_C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s}$$

$$\Leftrightarrow C(s) = 18 + 6.32s + \frac{12.81}{s} = \frac{6.3(s + 1.4)^2}{s}$$

Este exercício visa projetar um controlador de modo que o sistema fique próximo de um sistema de 2º grau, para isso precisamos de um Overshoot de aproximadamente 6.

Considerando o seguinte formato para o controlador:

$$G_C(s) = \frac{K(s+a)^2}{s}$$

Pelo método de Ziegler-Nichols de forma a obter o Overshoot pretendido vem que $K = 27$ e $a = 0,2$. Isto resulta no seguinte controlador:

$$G_C(s) = \frac{27(s+0.2)^2}{0.2}$$

Na figura seguinte e está representado a resposta do sistema para um controlador com Overshoot elevado e o segundo controlador já com o ajuste do Overshoot:

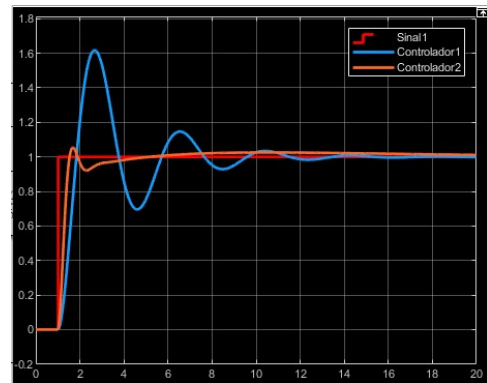


Figure VII.2: Controle PID pelo método de Ziegler-Nichols

VIII. TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO

O objetivo deste trabalho de Investigação é analisar o funcionamento do Preditor de Smith numa planta de segunda ordem à minha escolha com um controlador proporcional. O preditor de Smith tem como objetivo minimizar efeitos indesejados devido ao atraso existente na planta do sistema. O atraso no domínio s corresponde a um polinómio de ordem infinita cujos polos são todos reais, sendo que quanto maior for o número de polos, pior será a estabilidade do sistema.

O processo de implementação consiste em projetar um controlador G_C para controlar uma planta $G(s)$, sem ter em conta o atraso. Depois usando métodos já conhecidos como o lugar das raízes ou o diagrama de Bode projetamos o controlador. Desta forma iríamos projetar o preditor de Smith tendo em conta o diagrama de blocos da figura seguinte.

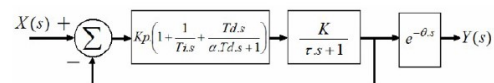


Figure VIII.1: Diagrama de blocos simplificado da planta controlada pelo PID usando o Preditor de Smith