

# Lee - Leit - Sistemas e Sinais

## Trabalho Pratico (Matlab)

### Folha 1 - Introdução ao Matlab

#### Preparação teórica

##### Introdução

O Matlab é um ambiente de trabalho dedicado ao cálculo científico, métodos numéricos e processamento de sinal. A principal característica do Matlab é que qualquer variável declarada é uma matriz portanto, em princípio, qualquer operação entre duas variáveis é uma operação matricial. Se a matriz for de dimensões  $1 \times 1$  é um escalar e se for de dimensão  $1 \times N$  é um vector. Pode também ser de dimensão superior a 2, i.e., pode ser uma matriz de 3, 4, 5 ou mais dimensões.

O Matlab é uma linguagem interpretada portanto, cada comando é executado quando se faz *return*. É no entanto possível executar funções e scripts, assim como executáveis exteriores através dum *shell*.

Considere a seguinte matriz  $2 \times 2$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- calcule  $B = A \cdot A$
- calcule  $C$  = produto ponto a ponto de  $A$  com  $A$
- calcule  $A^{-1}$
- calcule o inverso ponto a ponto de  $A$ ,  $1/A$
- faça uma rotação vertical das linhas da matriz
- faça uma rotação horizontal das colunas da matriz

#### Trabalho prático

##### Exercício 1: declaração de matrizes e funções.

- declare um eixo temporal discreto  $t$  de dimensão  $N = 1024$ , para  $t_1 = 0, \dots, t_N = 2$  s, utilizando a função *linspace* [faça *help linspace*]. Qual o intervalo de tempo entre cada amostra em segundos? Procure uma outra forma de fazer o mesmo eixo temporal sem utilizar a função *linspace*. E se quiser fazer um eixo temporal de  $[-2, 2]$  segundos?
- construa agora uma função  $s(t) = \sin(x)$  onde  $x = \omega_0 t$ . Se quisermos um seno de frequência  $f_0 = 10$  Hz, como fazer? Construa o vector  $s$  em função do vector  $t$  do número anterior.
- queremos agora aumentar a amplitude da função  $s(t)$  para um valor  $A = 4.3$ .
- vamos agora construir uma nova função  $g(t) = \exp(-\alpha t)$ , onde  $\alpha = 2$ . Determine o vector  $g$ .
- utilizando a função *plot* represente os vectores  $s$  e  $g$ , primeiro em duas figuras separadas, depois no mesmo gráfico (função *hold*) e em seguida em dois gráficos da mesma figura utilizando a função *subplot*. Coloque legendas nos eixos do tempo e amplitude e títulos nos vários gráficos.
- determine agora a função  $h(t) = g(t)s(t)$  [faça *help \**]. Represente  $h(t)$ .

##### Exercício 2: funções particulares.

- construa a "função" Dirac unidade  $\delta(n)$  que vale 1 para  $n = n_0$  e vale zero para qualquer outro valor de  $n$ . Representa a função para vários valores de  $n_0$ . Verifique a utilização da função *zeros* e *ones* do Matlab.
- faça o *help* da função *function*, que explica como realizar um função do Matlab. Realizar o exemplo da média.
- aplicar ao caso da "função" Dirac unidade, criando a função *dirac-unit* que tem como parâmetros de entrada o intervalo de definição  $[n_1, n_2]$  e a posição do Dirac  $n_0$ . O que se passa se  $n_0$  não se encontra entre  $n_1$  e  $n_2$ ?
- faça *help for*, que indica como fazer ciclos "for". Imagine que quer fazer um sinal no qual o Dirac unidade se repete com um período de 10 amostras ("pente de Diracs"). Como fazer, utilizando a função definida acima? Represente.
- vamos agora fazer o mesmo sinal periódico utilizando as capacidades matriciais do Matlab, e em particular o comando matricial "repmat". Para descobrir como funciona construa uma pequena matriz  $3 \times 3$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

mathend000#

O separador é ','. Agora faça  $B=A(:)$ . Qual o resultado? Imagine como pode utilizar esta função para criar um sinal periódico tendo um período  $T_0$ . Aplicar ao caso do Dirac unidade e compare a complexidade da solução do problema com o ciclo *for*.

- fazer agora a "função" degrau unidade definida no intervalo  $n_1, n_2$  e que vale zero até um certo instante  $n_0$  a partir do qual passa a valer 1. O que se passa se  $n_0$  não se encontra entre  $n_1$  e  $n_2$ . Construa e represente a *function degrau-unit*.

## Folha 2 - Sinais discretos em Matlab

### Preparação teórica

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = u[n] - u[n - 20]$ .

- represente o sinal  $x[n]$
- represente o sinal  $x[-n]$
- represente o sinal  $x[8 - n]$
- calcule a energia  $\epsilon_x$  do sinal  $x[n]$
- calcule a energia  $p_x$  do sinal  $x[n]$ . Dificuldades ?

**Exercício 2:** considere o sinal  $x[n] = \exp[(-0.1 + j0.3)n]$ .

- calcule o módulo  $|x[n]|$  e a fase  $\angle x[n]$  do sinal  $x[n]$
- represente o módulo e a fase de  $x[n]$  em função de  $n$

### Trabalho prático

**Exercício 1:** operações com sinais e funções.

- atraso temporal:* partindo da função  $s(r)$  realizada no trabalho 1 construir uma função do Matlab capaz de realizar um atraso temporal de  $n_0$  amostras, i.e., em entrada  $s[n]$  e em saída  $s[n - n_0]$  onde  $n_0$  é um número inteiro positivo ou negativo.
- dobragem no tempo:* uma função muito útil, nomeadamente na operação de convolução é a dobragem temporal. Construir uma função do Matlab que permita obter como saída uma versão dobrada em relação ao eixo do tempo do sinal original, i.e., entra  $s[n]$  e sai  $s[-n]$  (explorar função *fliplr*).
- soma e produto - energia:* explorar as funções *sum* e *prod*. Aplicar estas funções num modo eficiente de calcular a energia contida num sinal  $s[n]$ , dada por

$$\epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2[n]$$

- potência: como é sabido, a potência é a energia por unidade de tempo de onde, utilizando o resultado anterior, pretende-se calcular a potência do sinal num determinado intervalo de  $N$  amostras (explorar a função *mean*, pode-se utilizar sempre ?).

**Exercício 2:**

Construa uma função porta a partir de dois degraus unidade, um atrasado em relação ao outro, de forma que

$$x[n] = u[n] - u[n - n_0]$$

onde a função degrau unidade já foi estudada no trabalho anterior e o atraso temporal definido acima. Represente o resultado. Faça agora uma dobragem em relação ao eixo do tempo, determinando  $x[-n]$ .

**Exercício 3:**

Gerar a função complexa

### Exercício 3:

Gerar a função complexa

$$x[n] = \exp(-0.1 + j0.3)n \quad \text{com} \quad -10 \leq n \leq 10$$

mathend000#

Representar o seu módulo, fase, parte real e parte imaginária numa única figura, particionada em quatro sub figuras. Cada figura terá o respectivo eixo, legendas e título [utilizar a função *stem* para a representação].

## Folha 3 - Convolução

### Preparação teórica

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = u[n] - u[n - n_0]$  mathend000# como o sinal de entrada de um sistema de resposta impulsiva  $h[n]$  mathend000# dada por

$$h[n] = a^n x[n]$$

mathend000#

onde  $a = 0.9$  mathend000# é uma constante.

- represente  $x[n]$  mathend000# e  $h[n]$  mathend000#.
- efectue o cálculo literal do sinal de saída  $y[n]$  mathend000# do sistema.

**Exercício 2:** considere a seguinte equação de diferenças representando a relação entre a entrada  $x[n]$  mathend000# e a saída  $y[n]$  mathend000# de um sistema linear invariante no tempo,

$$y[n] - y[n - 1] + 0.9y[n - 2] = x[n]$$

- calcule e faça um esboço da resposta impulsiva do sistema  $h[n]$  mathend000#
- calcule e faça um esboço da resposta indicial do sistema  $a[n]$  mathend000#
- trata-se de um sistema estável ? Porquê ?

### Trabalho prático

**Exercício 1:** considere o sinal porta rectangular  $x[n] = u[n] - u[n - 20]$  mathend000# como o sinal de entrada de um sistema de resposta impulsiva  $h[n]$  mathend000# dada por

$$h[n] = a^n x[n]$$

mathend000#

onde  $a = 0.9$  mathend000# é uma constante.

- verifique o cálculo do exercício 1 a) da preparação com o Matlab criando uma função própria utilizando, em particular, as funções de atraso e dobragem já desenvolvidas no trabalho anterior.
- faça uma segunda verificação utilizando a função de convolução própria do Matlab.
- compare e comente os resultados em termos de diferenças e semelhanças, precisão e tempo de cálculo (funções *tic*, *toc*, *etime*, *clock*, *cputime*, etc...) assim como em termos de operações, função *flops*.

### Exercício 2:

Temos uma sequência de pontos  $x[n]$  mathend000# formando um sinal triangular de duração  $N = 10$  mathend000# amostras e de amplitude  $A = 4$  mathend000#. Construa  $x[n]$  mathend000# de forma eficiente. Filtre a sequência  $x[n]$  mathend000# com um filtro  $h[n]$  mathend000#, tal que

$$h[n] = \exp(-0.5n)$$

- determine a resposta do filtro a um Dirac
- determine a resposta indicial do filtro
- calcule o sinal de resposta do filtro  $y[n]$  mathend000# ao sinal de entrada  $x[n]$  mathend000#
- construa versões atrasadas de  $n_0$  mathend000# = 1, 2, 5 e 10 amostras do sinal de entrada  $x[n]$  mathend000# e determine as respectivas respostas do filtro.

### Exercício 3:

Considere a seguinte equação de diferenças representando a relação entre a entrada  $x[n]$  mathend000# e a saída  $y[n]$  mathend000# de um sistema linear invariante no tempo,

$$y[n] - y[n - 1] + 0.9y[n - 2] = x[n]$$

mathend000#

Calcule e represente com a ajuda da função *filter* comparando com os resultados obtidos na preparação:

- a resposta impulsiva do sistema  $h[n]; n = 0, \dots, 120$  mathend000#.
- a resposta indicial do sistema  $a[n]; n = 0, \dots, 120$  mathend000#.
- verifique numericamente que se trata de um sistema estável.
- calcule a energia do sinal.

## Folha 4 - TF de sinais discretos no tempo

### Preparação teórica

A TF discreta no tempo é, por definição, contínua na frequência e torna-se por isso difícil de representar em Matlab através de um número finito de pontos. Outro problema surge com a impossibilidade de calcular um número infinito de pontos discretos no tempo.

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = 0.5^n u[n]$  mathend000# onde  $u[n]$  mathend000# é a função degrau unidade.

.

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = 0.5^n u[n]$  onde  $u[n]$  é a função degrau unidade.

- determine a expressão literal da TFDT  $X(f)$  de  $x[n]$ .
- faça um esboço de  $|X(f)|$  e de  $\angle X(f)$ .
- admitindo agora que o sinal  $x[n]$  é finito com  $N$  amostras, calcule a expressão literal de  $X(f)$ .
- represente o módulo e a fase de  $X(f)$  da alínea c) e compare com os esboços da alínea b).

**Exercício 2:** utilizando a TFDT demonstre que se  $y[n] = h[n]x[n]$  então podemos escrever que  $Y(f) = H(f)X(f)$ , onde  $Y(f)$ ,  $H(f)$  e  $X(f)$  são as TFDT de  $y[n]$ ,  $h[n]$  e  $x[n]$ , respectivamente.

### Trabalho prático

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = 0.5^n u[n]$  onde  $u[n]$  é a função degrau unidade.

- represente  $x[n]$ .
- visto que o sinal  $x[n]$  é infinito no tempo somos levados apenas a calcular a representação gráfica da expressão calculada na preparação utilizando um número de pontos em  $f$  razoável calcule e represente: 1) o módulo de  $X(f)$ , 2) a fase de  $X(f)$ , 3) a parte real e a parte imaginária de  $X(f)$ , colocando os eixos as legendas em todos os gráficos.

**Exercício 2:** vamos agora admitir que o sinal  $x[n]$  do exemplo anterior é finito com  $N = 20$  amostras.

- calcule  $X(f)$  utilizando a implementação em Matlab da expressão de definição do TF de um sinal discreto em modo eficiente [ o somatório pode ser representado como uma multiplicação matricial ].
- represente  $X(f)$  em módulo e fase
- compare com os resultados do exercício 1 e com os resultados da preparação.

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = 0.5^n u[n]$  onde  $u[n]$  é a função degrau unidade.

- determine a expressão literal da TFDT  $X(f)$  de  $x[n]$ .
- faça um esboço de  $|X(f)|$  e de  $\angle X(f)$ .
- admitindo agora que o sinal  $x[n]$  é finito com  $N$  amostras, calcule a expressão literal de  $X(f)$ .
- represente o módulo e a fase de  $X(f)$  da alínea c) e compare com os esboços da alínea b).

**Exercício 2:** utilizando a TFDT demonstre que se  $y[n] = h[n]x[n]$  então podemos escrever que  $Y(f) = H(f)X(f)$ , onde  $Y(f)$ ,  $H(f)$  e  $X(f)$  são as TFDT de  $y[n]$ ,  $h[n]$  e  $x[n]$ , respectivamente.

### Trabalho prático

**Exercício 1:** considere o sinal  $x[n] = 0.5^n u[n]$  onde  $u[n]$  é a função degrau unidade.

- represente  $x[n]$ .
- visto que o sinal  $x[n]$  é infinito no tempo somos levados apenas a calcular a representação gráfica da expressão calculada na preparação utilizando um número de pontos em  $f$  razoável calcule e represente: 1) o módulo de  $X(f)$ , 2) a fase de  $X(f)$ , 3) a parte real e a parte imaginária de  $X(f)$ , colocando os eixos as legendas em todos os gráficos.

**Exercício 2:** vamos agora admitir que o sinal  $x[n]$  do exemplo anterior é finito com  $N = 20$  amostras.

- calcule  $X(f)$  utilizando a implementação em Matlab da expressão de definição do TF de um sinal discreto em modo eficiente [ o somatório pode ser representado como uma multiplicação matricial ].
- represente  $X(f)$  em módulo e fase
- compare com os resultados do exercício 1 e com os resultados da preparação.

- compare com os resultados do exercício 1 e com os resultados da preparação.

**Exercício 3:** considere o sinal  $p[n] = u[n] - u[n - n_0]$ .

- para  $n_0 = 10$ , calcule e represente  $P(f)$  utilizando a implementação eficiente do exercício anterior
- repita a alínea anterior com  $n_0 = 20$ . Qual a diferença no resultado ? Explique.

**Exercício 4:** considere agora um novo sinal  $y[n] = x[n]p[n]$ , onde  $x[n]$  é o sinal do exercício 1.

- calcule e represente  $Y(f)$ .
- prove numericamente que  $Y(f) = X(f) * P(f)$ . Explique as dificuldades encontradas.

## Folha 5 - Densidade espectral

### Preparação teórica

**Exercício 1:** sendo que  $r_{xy}[n]$  é a correlação entre os sinais  $x[n]$  e  $y[n]$ , demonstre que  $r_{xy}[n] = y[l] * x[-l]$ , i.e., que a correlação entre dois sinais é igual à convolução de um deles com a versão dobrada em relação ao tempo do outro.

**Exercício 2:** dado um sinal  $x[n] = a^n u[n]$ , onde  $a$  é um número real  $< 1$  e  $u[n]$  é a função degrau unidade,

- calcule a expressão da sua função de autocorrelação  $r_{xx}[l]$ .
- calcule a sua densidade espectral de potência  $P_{xx}(f)$ .

- b) calcule a sua densidade espectral de potência  $P_{xx}(f)$
- c) determine e represente em módulo e fase de  $P_{xx}(f)$
- d) calcule agora directamente a TFDT  $X(f)$  de  $x[n]$  e represente o quadrado do seu módulo  $|X(f)|^2$  e compare o resultado obtido com o gráfico da alínea anterior.

**Exercício 3:** considere o sistema linear de coeficientes constantes descrito pelo relação entrada-saída

$$y[n] = 0.8y[n-1] - x[n] \quad (\text{B.-5.1})$$

- a) determine e represente (módulo e fase) da função de transferência  $H(f)$  do sistema.
- b) qual a atenuação e atraso de fase sofrido por um sinal  $x[n]$  sinusoidal com uma pulsação de  $0.05\pi$  rd/s quando passado pelo sistema de equação entrada-saída (C-7.2).

## Trabalho prático

**Exercício 1:** utilização das funções do Matlab para a correlação e convolução:

- a) considere e represente dois sinais discretos  $x[n] = 0.9^n u[n]$  e  $y[n] = u[n] - u[n-20]$ .
- b) calcule e represente a sua função de correlação  $r_{xy}[n]$ .
- c) utilizando agora os mesmos sinais  $x$  e  $y$  e o produto de convolução com um dos sinais dobrados no tempo, demonstre que se obtém a mesma função de correlação  $r_{xy}$ .

**Exercício 2:** utilizando o sinal  $x[n]$  do exercício anterior calcule:

- b) a sua função de autocorrelação  $r_{xx}[l]$ .
- c) determine e represente em módulo e fase da TF de  $r_{xx}[l]$ ,  $P_{xx}(f)$  utilizando a implementação em Matlab da expressão de definição do TF de um sinal discreto em modo eficiente no seu intervalo de definição.
- d) calcule agora directamente a TF  $X(f)$  de  $x[n]$  e represente o quadrado do seu módulo  $|X(f)|^2$  e compare o resultado obtido com o gráfico da alínea anterior.

**Exercício 3:** considere o sistema linear de coeficientes constantes descrito pelo relação entrada-saída

$$y[n] = 0.8y[n-1] - x[n]$$

mathend000#

- a) determine e represente a função de transferência  $H(f)$  do sistema.
- b) calcule e represente a resposta do sistema ao sinal de entrada  $x[n] = \cos(0.05\pi n)u[n]$ .

## Folha 6 - Filtros I

### Preparação teórica

Pretende-se calcular um filtro FIR de tipo passa-baixo de frequência de corte  $f_c$  e de atenuação  $A$  dB entre a banda passante e a banda de corte.

- a partir do filtro passa-baixo ideal com as características pretendidas, calcule a forma literal da sua resposta impulsiva discreta
- implemente a resposta impulsiva discreta e torne-a finita através de uma janela de observação rectangular (função porta) de duração  $M$  amostras. Calcule o espectro de amplitude do sinal obtido. Responde às características desejadas ? Explique porque ?

- consegue melhorar as características do filtro aumentand o valor de  $M$  ? Porque ?

### Trabalho prático

**Exercício 1:** uma das formas de especificar um filtro é através de uma equação de diferenças. Por exemplo a equação

$$y[n] = 0.0181x[n] + 0.0543x[n-1] + 0.0543x[n-2] + 0.0181x[n-3] + 1.76y[n-1] - 1.1829y[n-2] + 0.2781y[n-3]$$

representa um filtro de terceira ordem.

- a) calcule e represente o seu módulo e fase e demonstre que se trata de um filtro passa-baixo.
- b) qual a sua frequência de corte ? E a sua banda passante ?
- c) utilizando a expressão da TFI determine a resposta impulsiva do sistema. Como pode obter essa resposta de outra forma utilizando funções próprias do Matlab ? Compare.

**Exercício 2:** pretende-se calcular um filtro FIR com as seguintes características:

- tipo: passa baixo
- frequência de corte:  $f_c = 100$  Hz.
- oscilação máxima na banda passante: 0.25 dB
- atenuação mínima na banda de corte: 50 dB
- largura da banda de transição: 40 Hz
- frequência de amostragem:  $f_s = 1000$  Hz

- implemente a resposta impulsiva discreta calculada na preparação e torne-a finita através de uma janela de observação rectangular (função porta) de duração  $M = 25$  amostras. Calcule e represente o espectro de amplitude e de fase do filtro obtido e caracterize-o em termos dos parâmetros desejados
- aumente o valor de  $M$  e volte a calcular o espectro. Consegue obter o filtro que se pretende ? Porque ?
- substitua a função porta por uma função de Hanning, Hamming e Blackman. Consegue nesse caso obter o resultado pretendido ? Caracterize o filtro finalmente obtido.
- explique como obter desde logo o tipo de janela necessário de acordo com as características do filtro desejado.

3. consegue melhorar as características do filtro aumentando o valor de  $M$  ? Porquê ?

## Trabalho prático

**Exercício 1:** uma das formas de especificar um filtro é através de uma equação de diferenças. Por exemplo a equação

$$y[n] = 0.0181x[n] + 0.0543x[n-1] + 0.0543x[n-2] + 0.0181x[n-3] + 1.76y[n-1] - 1.1829y[n-2] + 0.2781y[n-3]$$

representa um filtro de terceira ordem.

- calcule e represente o seu módulo e fase e demonstre que se trata de um filtro passa-baixo.
- qual a sua frequência de corte ? E a sua banda passante ?
- utilizando a expressão da TFI determine a resposta impulsiva do sistema. Como pode obter essa resposta de outra forma utilizando funções próprias do Matlab ? Compare.

**Exercício 2:** pretende-se calcular um filtro FIR com as seguintes características:

- tipo: passa baixo
- frequência de corte:  $f_c = 100$  Hz.
- oscilação máxima na banda passante: 0.25 dB
- atenuação mínima na banda de corte: 50 dB
- largura da banda de transição: 40 Hz
- frequência de amostragem:  $f_s = 1000$  Hz

- implemente a resposta impulsiva discreta calculada na preparação e torne-a finita através de uma janela de observação rectangular (função porta) de duração  $M = 25$  amostras. Calcule e represente o espectro de amplitude e de fase do filtro obtido e caracterize-o em termos dos parâmetros desejados
- aumente o valor de  $M$  e volte a calcular o espectro. Consegue obter o filtro que se pretende ? Porquê ?
- substitua a função porta por uma função de Hanning, Hamming e Blackman. Consegue nesse caso obter o resultado pretendido ? Caracterize o filtro finalmente obtido.
- explique como obter desde logo o tipo de janela necessário de acordo com as características do filtro desejado.

## Folha 7 - Filtros II

### Preparação teórica

Leitura do capítulo 5.7 do texto de apoio de Sinais e Sistemas.

### Trabalho prático

**Exercício 1:** pretende-se desenhar um filtro IIR a partir dos filtros analógicos tipo Butterworth, Chebyshev ou Elíptico, especificado pela sua resposta em frequência com as seguintes características:

- tipo: passa banda
- frequências de corte:  $f_1 = 100$  e  $f_2 = 300$  Hz.
- oscilação máxima na banda passante: 2 dB
- atenuação mínima na banda de corte: 80 dB
- largura da banda de transição: 30 Hz
- frequência de amostragem:  $f_s = 1000$  Hz

- calcule a ordem mínima de cada um dos tipos de filtro que permitem realizar este filtro
- calcule os coeficientes dos vários tipos de filtro
- calcule e represente a no mesmo gráfico as respostas em frequência em fase dos vários tipos de filtro. Determina quais são aqueles que melhor respondem aos critérios pedidos.

**Exercício 2:** utilizando o filtro mais complexo e o menos complexo do exercício anterior utilize-os para filtrar o seguinte sinal:

$$y(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_4 t)$$

com os seguintes valores de frequência em Hz  $f_1 = 90$ ,  $f_2 = 105$ ,  $f_3 = 115$  e  $f_4 = 118$ .

- utilizando um filtro do tipo recursivo no tempo.
- utilizando filtragem no domínio da frequência

truemmm