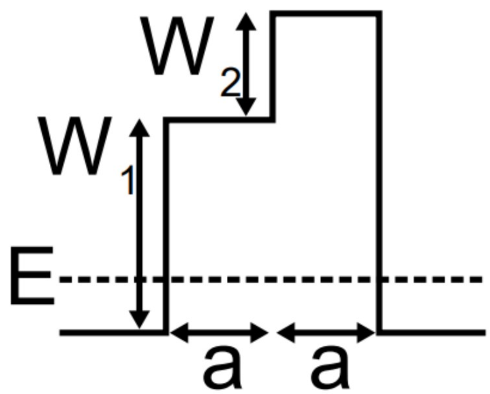
ESERCITAZIONE 5:

esercizio 1

Esercizio 1

Si consideri il profilo di potenziale riportato in figura, dove $a = 3\,nm$, $W_1 = 4.1\,eV$, $W_2 = 1.9\,eV$. Quanto vale la probabilità di tunneling P_T per un elettrone con energia $E = 1\,eV$ quando ai capi della barriera viene applicata una tensione di (a) $V_A = 0\,V$ e (b) $V_A = 12\,V$? Si consideri per l'elettrone una massa efficace $m^* = 0.33 m_e$.



1) $V_A = 0V$:

$$P_{T1} = e^{-2\int_0^a \frac{\sqrt{2m^*(W_1-E)}}{\hbar}dx} = e^{-2\alpha_1 a} = 3,27 \cdot 10^{-14}$$

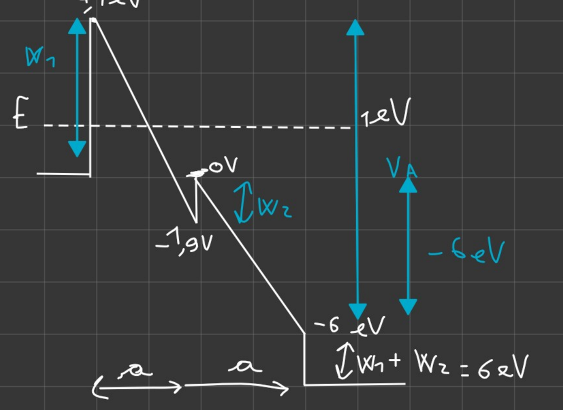
$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2m^*(W_1-E)}}{\hbar} = \frac{5,46 \cdot 10^{-25}}{1,055 \cdot 10^{-34}} = 5,175 \cdot 10^{9}$$

$$P_{T2} = e^{-2\int_a^{2a} \frac{\sqrt{2m^*(W_1+W_2-E)}}{\hbar}dx} = e^{-2\alpha_2 a} \simeq 7,45 \cdot 10^{-18}$$

$$\alpha_2 = 6,577 \cdot 10^{9}$$

$$P_T = P_{T1} \cdot P_{T2} = 2,43 \cdot 10^{-31}$$

nel caso di $V_A = 12V$:



considero che solo la prima parte delle due discese è sopra la barriera, quindi solo lei partecipa al superamento della barriera:

uso WKB con barriera triangolare:
caso di fowler-northeim

$$e^{\left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m^*}}{q\hbar F}(W_1-E)^{3/2}\right]}$$

$P_T = 2,25 \cdot 10^{-5}$

$F = \frac{V_A}{a} = \frac{6\,V}{3\,nm} = 2\,\frac{GV}{m}$

$\alpha =$

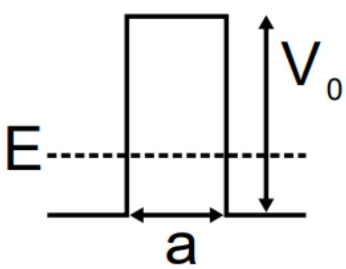
$\sqrt{2m^*} = \sqrt{6,01 \cdot 10^{-31}} = 7,75 \cdot 10^{-16}$

$\frac{4}{3}\sqrt{2m^*} = 1,033 \cdot 10^{-15}$

esercizio 2:

Esercizio 2

Si consideri la barriera di potenziale riportata in figura, con $V_0 = 10\ MeV$ e $a = 10\ fm$. Qual è la probabilità di tunneling di (a) un protone e (b) un deuterio che viaggino verso la barriera di potenziale con energia $E = 3\ MeV$? Si ricorda che il deuterio è il nucleo di uno degli isotopi dell'idrogeno (neutrone + protone) e si consideri $m_p \simeq m_n \simeq 1839 m_e$.



$10\ fm = 10^{-14}\ m$

(a) $p \quad E = 3\ MeV$

(b) $d \quad E = 3\ MeV$

$d = p + n$

$m_p \cong m_n \cong 1839\, m_e$

1) $P_T = e^{-2\alpha a}$

$\alpha = \frac{\sqrt{2m_p}}{\hbar}\sqrt{W - E} = 5,8 \cdot 10^{14}\ m^{-1}$

$\sqrt{2m_p} = 5,788 \cdot 10^{-14}$

$\sqrt{W-E} = \sqrt{7 \cdot 10^6\ MeV}$

$\sqrt{7\ MeV} = 1,058 \cdot 10^{-6}\ J$

$\alpha a >> 1$?

$\alpha a = 5,8 >> 1$

a livello esponenziale

$P_T = 9{,}06 \cdot 10^{-6}$

2) $\alpha = \dfrac{\sqrt{2(m_p+m_n)}}{\hbar}\sqrt{W-E} = 8{,}21 \cdot 10^{14}\ m^{-1}$ $\qquad \alpha a = 8{,}21 >> 1$

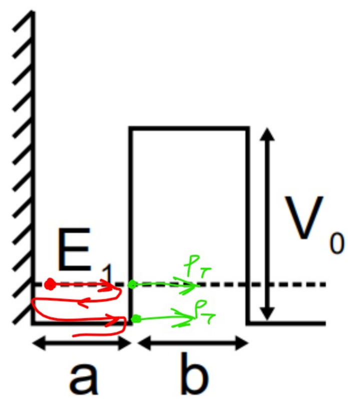
$P_T = 7{,}38 \cdot 10^{-8}$

esercizio 3, sul tempo medio di tunnelling:

Esercizio 3

Si consideri il profilo di potenziale riportato in figura, dove $a = 0.8\ nm, b = 1\ nm, V_0 = 4\ eV$.

1. Si trovi la relazione analitica del tempo medio di tunneling tenendo conto dei diversi tentativi di fuga della particella confinata nella buca di potenziale.
2. Calcolare il campo da applicare alla barriera di potenziale affinché il tempo medio di tunneling per un elettrone sul primo livello energetico sia pari a 20 ps. Si usi l'approssimazione di buca a pareti infinite.

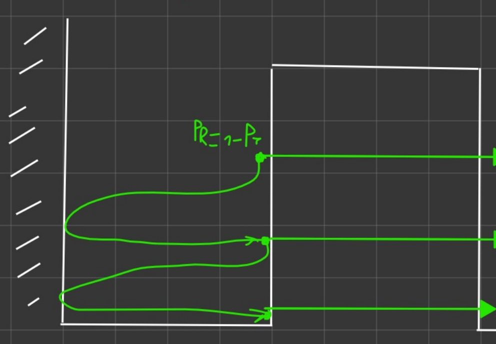


1) $\boxed{t_{TUN} = \dfrac{1}{P_T} \cdot T_{AR} = \dfrac{2a}{P_T \cdot v}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{T_{AR} = \dfrac{a}{v} + \dfrac{a}{v} = \dfrac{2a}{v}}$

tempo medio di tunnelling

probabilità di tunnelling

tempo di andata e ritorno



$t_0 = t_{AR}$

$P_0 = P_T$

$t_1 = t_{AR} + t_{AR}$

$P_1 = P_R \cdot P_T = (1-P_T)P_T$

$t_2 = 3t_{AR}$

$P_2 = P_R \cdot P_{R_2} \cdot P_T = (1-P_T)^2 P_T$

In generale:

$$\boxed{\begin{gathered} t_n = (n+1)\,t_{AR} \\ P_N = (1-P_T)^n P_T \end{gathered}}$$

$$t_{TUN} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n = \sum^{\infty} (n+1)\, t_{AR}\, (1-P_T)^n P_T = t_{AR} \cdot P_T \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-P_T)^n$$

dopo moltissimi calcoli $\longrightarrow t_{TUN} = t_{AR}/P_T$

2) $t_{TUN} = 20\,ps \longrightarrow \quad t_{AR} = \frac{2a}{v} \qquad P_T = \frac{t_{AR}}{t_{TUN}} = \frac{2a}{\sqrt{2E}} \sqrt{m} \cdot \frac{1}{t_{TUN}} = 1{,}76 \cdot 10^{-4}$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$E = n^2 \cdot \frac{h^2}{8ma^2} \;\rightarrow\; (n=1) = 0{,}59\ eV$$

In assenza di campo $P_{T,F=0} = e^{-2\frac{\sqrt{2m_e(V_0-E_1)}\,b}{\hbar}} = 6{,}18 \cdot 10^{-9}$

Che è quindi insufficiente per garantire il tempo di tunnelling richiesto.

Applicando un campo, aumentiamo la probabilità di tunnelling restringendo la barriera equivalente vista dalla particella.

In base al campo applicato, possiamo ritrovarci in condizioni di tunneling diretto o di Fowler-Nordheim. Non abbiamo modo tuttavia di conoscere a priori in quale regime ci troveremo. Partiamo quindi dal caso più semplice, cioè Fowler-Nordheim:

$$P_T = e^{-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m_e}}{q\hbar F}(V_0-E)^{3/2}}$$

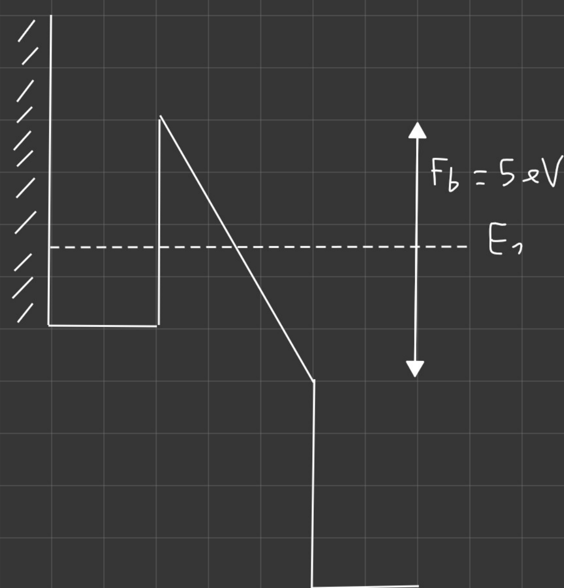
$$\rightarrow F = -\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m_e}}{q\hbar F}(V_0-E)^{3/2} \cdot \frac{1}{\ln(P_T)} = 49{,}7\ \frac{MV}{cm}$$

Verifichiamo la nostra ipotesi: il punto più lontano dalla barriera deve risultare adesso al di sotto dell'energia della particella. Deve cioè valere:

$$V_0 - qF_b < E_1$$

$$4\,eV - 4{,}97\,eV = -0{,}97\,eV < E_1 = 0{,}59\,eV$$

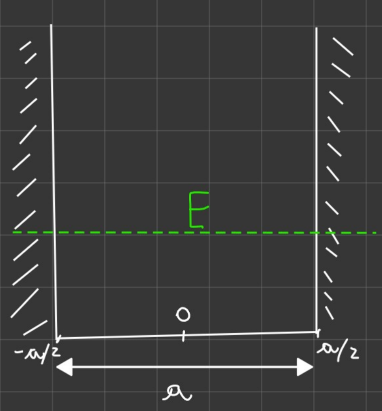
L'ipotesi è verificata e il risultato è valido.



esercizio 4:

Esercizio 4

Si consideri una buca a pareti infinite di larghezza generica a. Si stimi la posizione dei livelli energetici della buca usando il principio di indeterminazione di Heisenberg. Si trovi poi la relazione esatta per gli autovalori della buca e la si confronti con quella precedente.



principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$$

$$\Delta x = a$$

$$x_{max} = \frac{a}{2}$$

$$x_{min} = -\frac{a}{2}$$

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = a$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{(\Delta p)^2}{m} \rightarrow \Delta p = \sqrt{2mE}}$$

metodo 2

$$p_{max} = \sqrt{2mE}$$

$$p_{min} = -\sqrt{2mE}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

$$\Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

metodo 1

possiamo sceglierne 1

scegliamo $\Delta p = \sqrt{2mE}$

ora scegliamo anche $\Delta p \Delta x = \hbar$

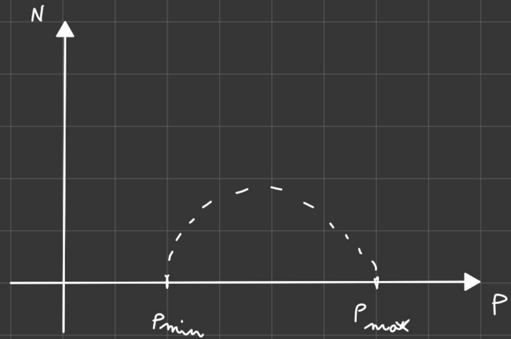
$$\sqrt{2mE} \cdot a = \hbar$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8\pi^2 ma^2}$$

suppongo la quantizzazione

$$\Delta p \Delta x = n\hbar$$

$$\sqrt{2mE_n} \cdot a = n\hbar \longrightarrow E_n = n^2 \frac{h^2}{8\pi^2 m a^2}$$ ✓



Per confronto, la soluzione esatta restituirebbe $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$: la differenza è quindi data in questo caso dal prefattore $\frac{1}{\pi^2} \simeq 0.1$, ma la dipendenza dal numero quantico è esatta ($\propto n^2$). La stima fatta in questo modo è infatti utile quando siamo in presenza di un potenziale non "canonico" (cioè un potenziale per il quale non siano ad esempio disponibili soluzioni esatte), e permette di stimare "a grandi linee" l'andamento degli autovalori all'interno della buca.