ESERCITAZIONE 3:

Esercizio 1

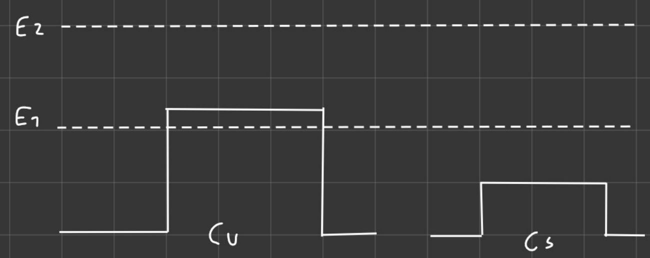
Si considerino due sorgenti $\lambda_1 = 2\lambda_2$, con $\lambda_1 = 300\,nm$ e potenza sorgente $P_1 = 0.75\,P_2$. Qual è il rapporto fra le due fotocorrenti I_1 ed I_2 per il rame ($W_{Cu} = 4.53\,eV$) e per il cesio ($W_{Cs} = 2.1\,eV$)?

so: λ, W e P → voglio I

$\lambda = \frac{h}{p}$ $\quad p = mv \quad$ legge di Wien: $\lambda T = W$

legge di Stephan Boltzmann: $P = \sigma T^4 A$

$\lambda_1 = 300\,nm \rightarrow \lambda_2 = \frac{300\,nm}{2} = 150\,nm$



iniziamo determinando l'energia del fotone entrante per le due sorgenti:

$$\boxed{E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}} = 4,14\,eV$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = 1,3252 \cdot 10^{-18}\,J \cdot 6,24 \cdot 10^{18} \cong 8,28\,eV$$

Nel caso del rame solo $E_2 > W_{Cu}$ → ergo solo la seconda sorgente scatena l'effetto fotoelettrico: $I_1|_{Cu} = 0 \rightarrow \frac{I_1}{I_2}\Big|_{Cu} = 0$

Nel caso del cesio $E_1, E_2 > W_{Cu}$

- La fotocorrente sarà quindi data dal flusso di carica nel tempo:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Possiamo assumere che ogni fotone entrante trasferisca la sua energia ad un singolo elettrone. Pertanto la quantità totale di carica generata è data da:

$$\Delta q = q N_{e^-} = q N_{ph}$$

$$I = q \cdot \frac{N_{ph}}{\Delta t}$$

possiamo relazionare il numero dei fotoni emessi dalla sorgente nell'unità di tempo come:

$$\boxed{\frac{N_{ph}}{\Delta t} = \frac{N_{ph} E_{ph}}{\Delta t} \cdot \frac{1}{E_{ph}} = P \cdot \frac{1}{E_{ph}}}$$

dove P è la potenza della sorgente e $E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ energia del singolo fotone.

Allora l'espressione della fotocorrente diventa:

$$I = \frac{qP}{E_{ph}} = \frac{q\lambda P}{hc}$$

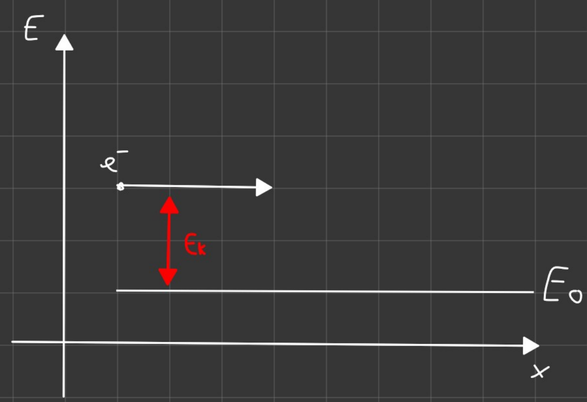
il rapporto fra le fotocorrenti per il cesio è quindi dato da:

$$\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{Cs} = \frac{q\lambda_1 P_1}{\cancel{hc}} \cdot \frac{\cancel{hc}}{q\lambda_2 P_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{P_1}{P_2} = 2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$$ ✓

esercizio 2:

Esercizio 2

Si scriva la funzione d'onda viaggiante di un elettrone. Calcolare la lunghezza d'onda λ, la frequenza caratteristica ν e la velocità di fase v_f sapendo che l'energia cinetica dell'elettrone è pari a 10 eV. Si noti che il potenziale di riferimento è costante.



per un elettrone libero, la funzione d'onda dello spazio e del tempo può essere espressa come:

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t) = A e^{-ikx} e^{-i\omega t}$$

dove

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad e \qquad \omega = 2\pi\nu$$

la lunghezza d'onda è ricavabile dall'energia cinetica della particella ricordando:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \longrightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \underline{0{,}384\ nm}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16{,}37\ \frac{rad}{nm}$$

la frequenza dell'elettrone si ricava ricordando:

$$E = h\nu \longrightarrow \nu = \frac{E}{h} = \underline{2{,}41 \cdot 10^{15}\ Hz}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 15.17 \cdot 10^{15}\ \frac{rad}{s}$$

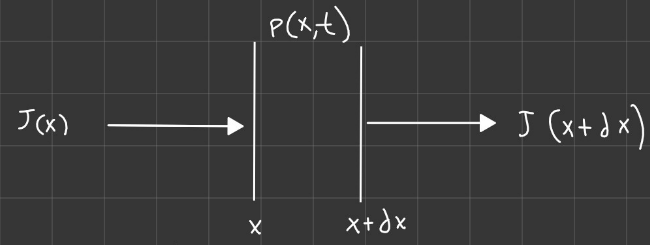
Infine, ricordiamo l'espressione per la velocità di fase:

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu\lambda = \underline{9{,}27 \cdot 10^{5}\ \frac{m}{s}}$$

esercizio 3

Esercizio 3

Studiare il flusso di probabilità di una funzione d'onda. Si scrivano poi due funzioni d'onda viaggianti con $E_1 = 10eV$, $E_2 = 5eV$ ma con stesso flusso di probabilità (si scrivano i parametri della seconda onda in funzione della prima). Si trovino inoltre i valori numerici dei rispettivi vettori d'onda k.



Il flusso di probabilità di una funzione d'onda rappresenta il numero di particelle che attraversano una certa superficie in un dato tempo. Per studiarlo considero un intervallo infinitesimo ∂x in cui definisco la densità di probabilità alla particella a partire dalla funzione d'onda :

$$p(x,t) = |\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)|$$

Dove nel caso di onde viaggianti si ha:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\psi(t) = Ae^{-ikx}e^{-i\omega t}$$

Preso un intervallo infinitesimo dx, la differenza di flusso in ingresso $J(x)$ e in uscita $J(x+dx)$, è associata al cambiamento della densità di probabilità $p(x,t)$ in un intorno del punto x considerato, nel tempo. Possiamo cioè scrivere:

$$J(x) - J(x+dx) = \frac{\partial p}{\partial t}dx$$

Esprimiamo il flusso in uscita usando lo sviluppo di Taylor, $J(x+dx) = J(x) + \frac{\partial J}{\partial x}dx$, da cui:

$$J(x) - J(x) - \frac{\partial J}{\partial x}dx = \frac{\partial p}{\partial t}dx$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t}$$

Per poter calcolare il flusso, e quindi integrare, dobbiamo riuscire ad esprimere la variazione della densità di probabilità nel tempo in funzione della variazione di densità di probabilità nello spazio. Ricordando la definizione di $p(x,t)$, possiamo scrivere la derivata parziale nel tempo come:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial(|\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)|)}{\partial t} = \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$$

Dall'equazione di Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \mathrm{x}^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Identicamente per Ψ^*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial \mathrm{x}^2} + V\Psi^* = -i\hbar\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$$

Sostituendo i termini di derivata nel tempo con i corrispondenti nello spazio si ottiene:

$$\frac{\Psi^*}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - V\Psi\right) - \frac{\Psi}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} - V\Psi^*\right) = \frac{\partial J}{\partial x}$$

Possiamo semplificare l'espressione essendo $\Psi^*V\Psi = \Psi V\Psi^*$, da cui:

$$\Psi^*\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} = \frac{\partial J}{\partial x}$$

$$\frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial J}{\partial x}$$

Estrapoliamo un termine di derivata parziale dall'interno della parentesi, ottenendo:

$$\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right) = \frac{\partial J}{\partial x}$$

La semplificazione è coerente: per verificare, possiamo applicare la derivata ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right) = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} = \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}$$

Conseguentemente, arriviamo alla definizione di J:

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)$$

Non ci resta che sostituire le derivate dell'autofunzione. Ricordando la definizione iniziale di $\Psi(x,t)$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right) = Aike^{i(kx-\omega t)} = ik\Psi$$

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A^*e^{-i(kx-\omega t)}\right) = -A^*ike^{-i(kx-\omega t)} = -ik\Psi^*$$

Allora:

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(ik\Psi^*\Psi + ik\Psi\Psi^*\right) = \frac{\hbar}{2mi}\cdot 2ik|\Psi|^2 = \frac{\hbar k}{m}|\Psi|^2$$

Dove:

$$|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi = A^*e^{-i(kx-\omega t)}\cdot Ae^{i(kx-\omega t)} = A^*A = |A|^2$$

E quindi:

$$J = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

Il flusso di probabilità dipende quindi dal modulo dell'ampiezza dell'autofunzione e dal vettore d'onda associato. Per le funzioni d'onda del testo deve quindi valere:

$$J_1 = \frac{\hbar k_1}{m}|A_1|^2$$

$$J_2 = \frac{\hbar k_2}{m}|A_2|^2$$

I vettori d'onda delle due autofunzioni si ricavano facilmente a partire dall'energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,k_1$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 16.367\frac{rad}{nm} \qquad\qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 11.573\frac{rad}{nm}$$

Per determinare le ampiezze, notiamo che il testo richiede che i due flussi di probabilità siano uguali. Fra i parametri k, A delle due autofunzioni vale quindi la relazione:

$$\frac{\hbar k_1}{m}|A_1|^2 = \frac{\hbar k_2}{m}|A_2|^2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}$$

Quindi:

$$\frac{|A_2|}{|A_1|} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

$$|A_2| = \sqrt[4]{2}\,|A_1|$$

$$A_2 = \sqrt[4]{2}\,A_1$$

Da ultimo, calcoliamo le frequenze caratteristiche ν delle due autofunzioni:

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi E}{h} = \frac{E}{\hbar}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$$

$$\nu_1 = \frac{E_1}{h} = 2.41 \cdot 10^{15}\ Hz \qquad \nu_2 = \frac{E_2}{h} = 1.20 \cdot 10^{15}\ Hz$$

Le due autofunzioni possono quindi infine essere scritte come:

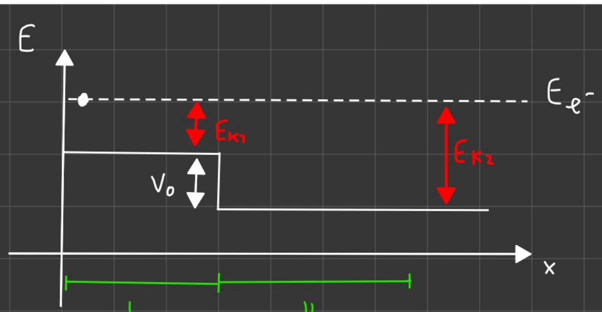
$$\Psi_1(x,t) = A_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$$

$$\Psi_2(x,t) = A_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} = \sqrt[4]{2}\, A_1 e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k_1 x - \frac{\omega_1}{2}t\right)}$$

esercizio 4:

Esercizio 4

Si consideri un gradino negativo di potenziale con barriera $V_0 = 1\ eV$. Trovare l'energia E_{e^-} dell'elettrone viaggiante da sinistra verso destra affinché il flusso trasmesso sia il doppio di quello riflesso.



prima e dopo lo scalino, l'energia cinetica dell'elettrone cambia. Considerando di porre lo scalino ad $x = 0$, nella regione I $(x < 0)$, si ha:

$$E_{K1} = E_{e^-} - V_0$$

nella regione II $(x > 0)$ si ha invece:

$$E_{K2} = E_{e^-}$$

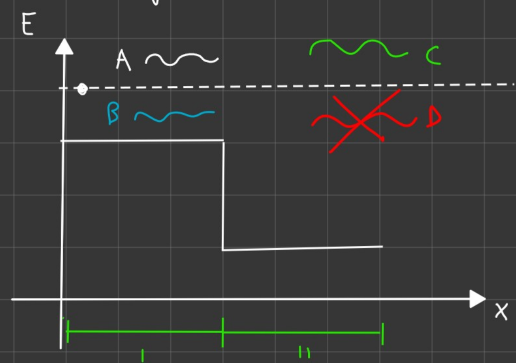
Scriviamo quindi l'eq. di Schrodinger nelle due regioni. Partendo dalla regione II:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} = E_{K_2}\Psi_2(x) = E_{e^-}\Psi_2(x)$$

La soluzione generale è:

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

dove le due componenti indicano l'onda viaggiante verso x positive e l'onda viaggiante verso x negative.



Nella regione II tuttavia ho solo un'onda viaggiante verso x positive, cioè posso imporre D = 0, da cui:

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x}$$

Nella regione I invece ottengo:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = E_{k1}\psi_1(x) = (E_{e^-} - V_0)\psi_1(x)$$

per poter determinare i coefficienti A, B e C imponiamo:

1. La continuità dell'autofunzione in $x = 0$:

$$\psi(0^-) = \psi(0^+)$$
$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$
$$A + B = C$$

2. La continuità della derivata in $x = 0$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{0^-} = \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{0^+}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}|_0 = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}|_0$$

$$ik_1A - ik_1B = ik_2C$$

$$A - B = \frac{k_2}{k_1}C$$

3. Il flusso trasmesso (C) deve essere il doppio di quello riflesso (B):

$$J_T = 2J_R$$

$$\frac{\hbar k_2}{m}|C|^2 = 2\frac{\hbar k_1}{m}|B|^2$$

$$|C|^2 = 2\frac{k_1}{k_2}|B|^2$$

$$C = \sqrt{\frac{2k_1}{k_2}}\,B$$

Mettendo a sistema le tre equazioni otteniamo da (1) e (2):

$$A - B = \frac{k_2}{k_1}(A + B)$$

$$A\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) = B\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A$$

$$C = A + B = \frac{k_1 + k_2 + k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A$$

Usando a questo punto la (3):

$$C = \sqrt{\frac{2k_1}{k_2}}B = \sqrt{\frac{2k_1}{k_2}}\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A = C$$

$$(k_1 - k_2) = \sqrt{2k_1k_2}$$

$$k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 = 2k_1k_2$$

$$k_1^2 - 4k_1k_2 + k_2^2 = 0$$

Risolviamo per il rapporto $\alpha = k_1/k_2$. Riscriviamo l'equazione in funzione di α dividendo tutti i termini per k_2:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Per determinare quale delle due soluzioni è quella corretta, osserviamo che nella regione I l'energia cinetica dell'elettrone è minore rispetto all'energia cinetica della regione II. Essendo il vettore d'onda proporzionale all'energia come $k \propto \sqrt{E}$, deve quindi valere:

$$k_2 > k_1 \ \rightarrow \ \frac{k_1}{k_2} < 1 \ \rightarrow \alpha < 1$$

Scegliamo quindi la soluzione $\alpha = 2 - \sqrt{3}$. Allora:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE_{k1}}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E_{e^-} - V_0)}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE_{k2}}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE_{e^-}}}{\hbar}$$

Quindi:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{E_{e^-} - V_0}}{\sqrt{E_{e^-}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$E_{e^-} - V_0 = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)E_{e^-}$$

$$E_{e^-} = \frac{V_0}{4\sqrt{3} - 6} = 1.0774\ eV$$