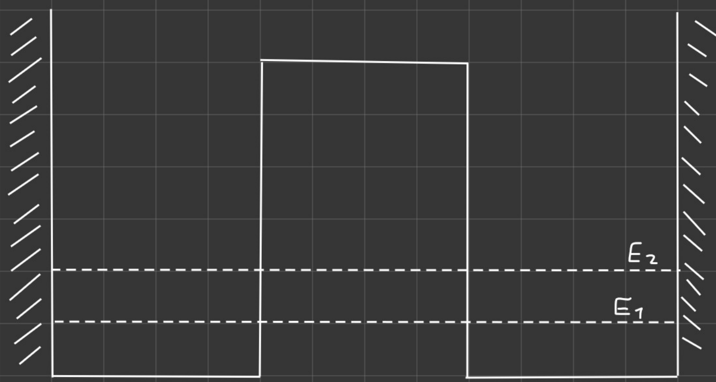
ESERCITAZIONE 7:

esercizio 1:

Esercizio 1

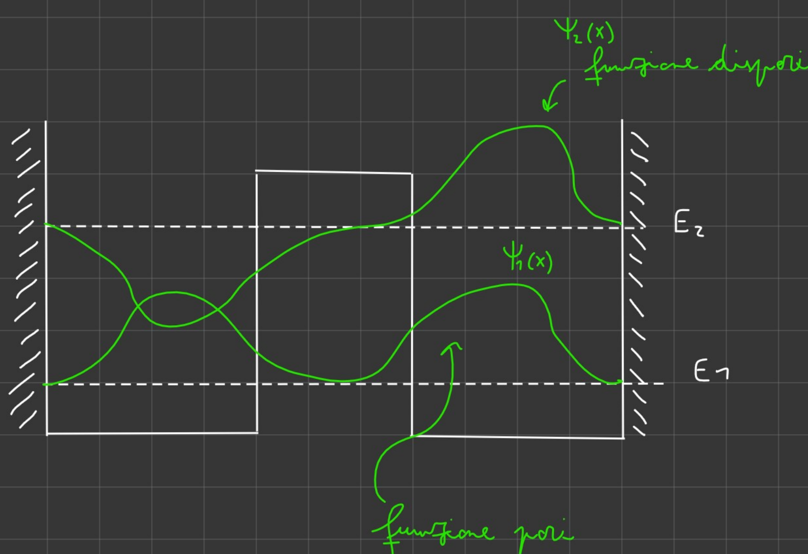
Si consideri una doppia buca rettangolare con 2 livelli confinati ad energia E_1 ed E_2, con $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$. Si tracci l'andamento qualitativo delle autofunzioni ψ_1, ψ_2. Si scriva la funzione d'onda $\Psi(x,t)$ come combinazione lineare di ψ_1 e ψ_2, tracciando l'andamento del modulo quadro $|\Psi|^2$ per $t = 0$, $t = \frac{h}{2\Delta E}$ e $t = \frac{3}{4}\frac{h}{\Delta E}$.



$\Delta E = E_2 - E_1 > 0$

$$\boxed{\psi_2 \propto e^{-i\omega_2 t} \qquad \omega_2 = E_2/\hbar}$$

$$\boxed{\psi_1 \propto e^{-i\omega_1 t} \qquad \omega_1 = E_1/\hbar}$$

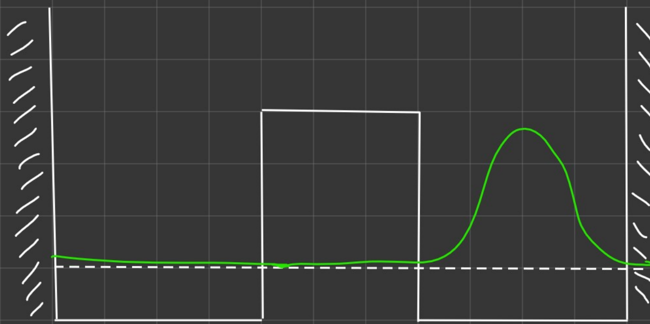


$$\Psi_{(x,t)} = a_1 \Psi_1(x,t) + a_2 \Psi_2(x,t) = e^{-\omega_1 t}\left(a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x)\, e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}\right)$$

$$|\Psi_{(x,t)}| = |a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x)\, e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}|^2$$

per $t=0 \rightarrow |\Psi(x,t)|^2 = |a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x)|^2$

ottengo una sorta di interferenza costruttiva fra le due funzioni d'onda

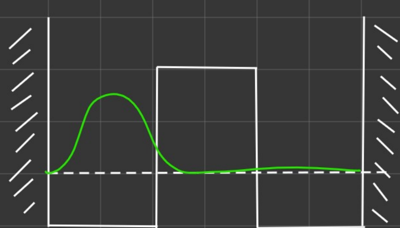


per $t = \frac{h}{2\Delta E}$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

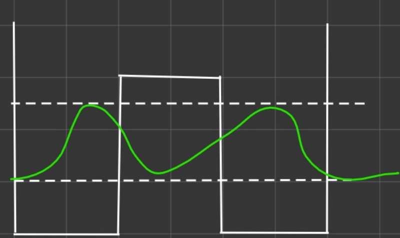
$$e^{-i\frac{\cancel{\Delta E}}{\hbar}\frac{h}{2\cancel{\Delta E}}} = e^{-i\pi} = -1$$

ora avremo una situazione opposta alla precedente, in cui avremo un interferenza costruttiva nel primo dominio ed un annullamento nel secondo dominio



per $t = \frac{3}{4}\frac{h}{\Delta E} \longrightarrow e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}\cdot\frac{3}{4}\frac{h}{\Delta E}} = e^{-i\frac{3}{2}\pi} = -i$

$$|\Psi(x_1,t_1)|^2 = |a_1\psi_1(x) - i\, a_2\psi_2|^2 = |a_1\psi_1|^2 + |a_2\psi_2|^2$$



T. E. 21/04/21

$E_1 = 0,14\ eV$

$E_2 = \cancel{1,607}\ eV \leftarrow$ era sbagliato $\rightarrow E_2 = 0,1607\ eV$ ← ha più senso

↑ è un doppietto da 1 eV → è TROPPO! → e infatti era sbagliato

esercizio 2:

Esercizio 2

Una particella è caratterizzata da una relazione del tipo $\omega(k) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$, con $a = 0.2\ nm$, $\omega_0 = 7 \cdot 10^{12}\ \frac{rad}{s}$. Considerando un pacchetto d'onde gaussiano centrato in $k_0 = 2.2 \cdot 10^9\ m^{-1}$, $\sigma_k = \frac{k_0}{10}$, calcolare l'andamento di dispersione $\sigma_x(t)$ del pacchetto stesso, riportandolo in un grafico quotato.

$g(k)$ gaussiana

$g(k)$ è estratta da una normale con media k_0 e varianza σ_k → $g(k) \sim N(k_0, \sigma_k)$

$\sigma_x(t)$?

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk$$

$$g(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2 k}} \qquad |\Psi(x,t)|^2 = e^{-\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{2(\alpha^2+\beta^2+t^2)}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+t^2}} \cdot e^{\frac{(x-v_g t)^2}{2\sigma_x^2(t)}}$$

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \qquad \beta = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0}$$

$$v_p = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{k=k_0}$$

$$2\sigma_x^2(t) = \frac{2(\alpha^2+\beta^2 t^2)}{\alpha}$$

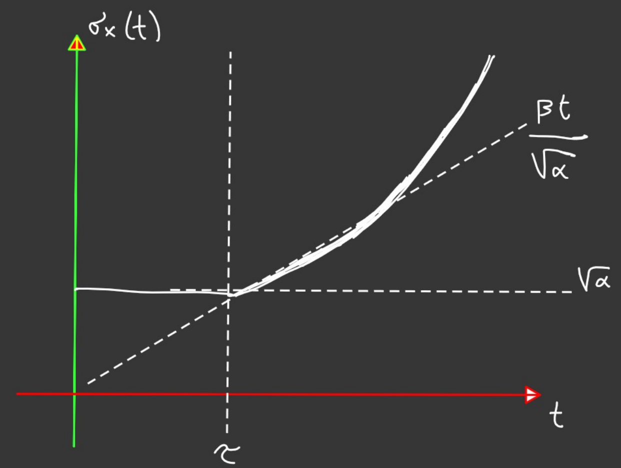
$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot t^2}$$

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = 1,03 \cdot 10^{-17}\ m^2$$

$$\beta(k_0) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k=k_0} = -\frac{1}{2} \cdot 2\omega_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{k_0 a}{2}\right) =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\omega_0 \sin\left(\frac{k_0 a}{2}\right) = -1,53 \cdot 10^{-8}\ \frac{m^2}{s}$$



per $\frac{\beta^2 t^2}{\alpha} >> \alpha$

$\downarrow$

$$\sigma_x(t) \cong \sqrt{\frac{\beta^2 t^2}{\alpha}} \cong \frac{\beta t}{\sqrt{\alpha}}$$

$\tau : \frac{\beta^2 \tau^2}{\alpha} = \alpha$ $\qquad$ $\tau = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 676 \text{ ps}$

stiamo considerando un pacchetto d'onda nello spazio libero

1) ergo valgono $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{h^2 K^2}{m(2\pi)^2} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2 K^2}{m}$

$E = \hbar\omega \rightarrow \boxed{\omega(K) = \frac{1}{\hbar} E = \frac{1}{2}\frac{\hbar K^2}{m}}$

$$\boxed{\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} t^2}}$$

in $t=0$ $\qquad \alpha = \sigma_x^2(0) = 10^{-12}\, m^2$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dK^2}\bigg|_{K=K_0}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\frac{\hbar \cdot 2K}{m} = \frac{\hbar K}{m}$$

$$\frac{d^2\omega}{dK^2} = \frac{\hbar}{m}$$

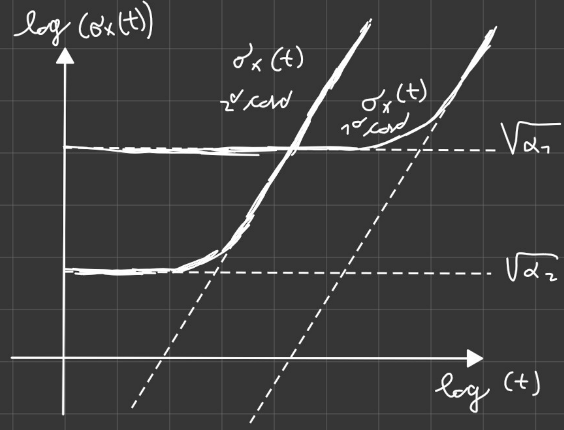
$\beta = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m} = \frac{\hbar}{2m} = 5{,}79 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ ← è costante per ogni K

$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2{,}96 \cdot 10^6\, m/s$ $\qquad$ $t = \frac{d}{v} = 337{,}3 \text{ ns}$ ✓ $\rightarrow$ $\sigma_x(t) = 19{,}6\, \mu m$ ✓

2)

$\alpha = \sigma_x^2(0) = 10^{-16}\ m^2$

$\sigma_x(t) = 2mm$ ✓ ← il pacchetto si è disperso più di prima → anche se la dispersione iniziale è minore



Esercizio 4

Un elettrone è descritto dalla relazione di dispersione $E(k) = E_0 - E_0 \cdot \cos(ka)$, con $a = 0.28\ nm$ e $E_0 = 0.5\ eV$. Calcolare la velocità di gruppo e di fase in corrispondenza dei k minimi per cui il pacchetto non va incontro a fenomeni di dispersione nel tempo. Si supponga un peso $g(k)$ gaussiano.

il pacchetto non ha dispersione nel tempo

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} t^2}$$

→ noi non vogliamo fenomeni di dispersione nel tempo, ergo vogliamo $\frac{\beta^2}{\alpha} t^2 = 0$ → $\beta = 0$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar}\frac{d^2E}{dk^2} = \frac{1}{2\hbar} E_0 a^2 \cos(ka)$$

$$\beta = 0 \iff ka = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

scegliamo ora $n=0 \rightarrow k_0 = \pm\frac{\pi}{2a} = \pm 5{,}61 \cdot 10^9\ m^{-1}$

$$v_p = \frac{\omega}{k}\Big|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{E_0}{k_0} = \pm 1{,}35 \cdot 10^5\ m/s$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar} E_0 a \sin(ka)\Big|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar} E_0 a = \pm 2{,}12 \cdot 10^5\ m/s$$