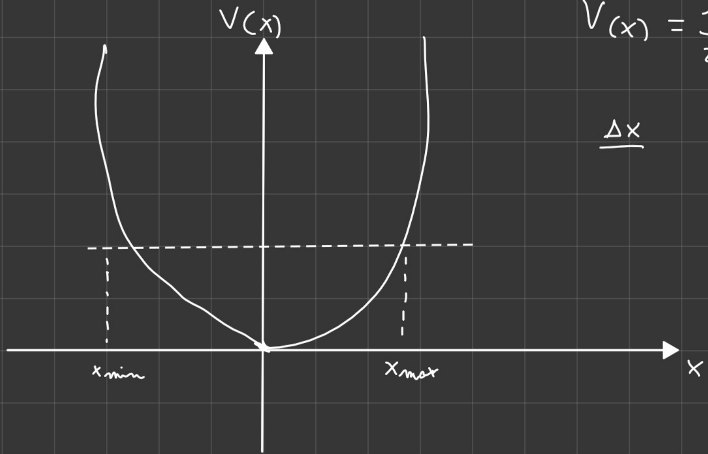
E S E R C I T A Z I O N E 6:

esercizio 1:

Esercizio 1

Stimare l'energia del livello fondamentale E_0 di un profilo parabolico usando il principio di indeterminazione di Heisenberg.



$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Δx $\quad E = \frac{1}{2}\alpha x^2 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{2E}{\alpha}}$

$$x_{max} = +\sqrt{\frac{2E}{\alpha}}$$

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = 2\sqrt{\frac{2E}{\alpha}}$$

$$x_{min} = -\sqrt{\frac{2E}{\alpha}}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{(\Delta p)^2}{m}$$

$$\Delta p = \sqrt{2mE}$$

$$\Delta x \Delta p = \hbar \rightarrow 2\sqrt{\frac{2E}{\alpha}} \cdot \sqrt{2mE} = \hbar$$

$$4E\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \hbar$$

$$E = \frac{\hbar}{4} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \frac{\hbar\omega_0}{4}$$

ha le dimensioni di una pulsazione

ora considero una quantizzazione dell'energia e quindi del momento:

$$\Delta p \Delta x = n\hbar$$

stimata $\quad E = n\frac{\hbar\omega_0}{4}$

$n = 0$
$E = 0$ ← questa cosa non ha senso

questo mostra come la stima differisca dal valore esatto (ottenuto risolvendo l'eq. di Schrodinger)

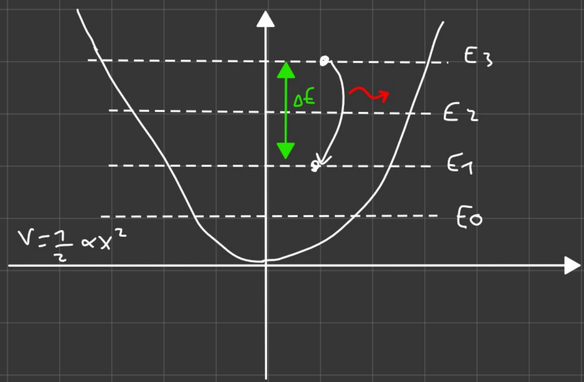
esatta: $\quad \underline{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0}$

la stima però prevede in modo corretto un andamento lineare dei livelli esercizio 2:

Esercizio 2

Si consideri il potenziale armonico $V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$. Sapendo che il rilassamento di un elettrone tra il quarto autostato ($n = 3$) e il secondo autostato ($n = 1$) causa l'emissione di un fotone di lunghezza d'onda $\lambda = 690\ nm$, calcolare la costante elastica α e la pulsazione fondamentale ω_0.

α? ω_0?



$\lambda = 690\ nm$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}8\,eV = \Delta E_{3\to 1}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

$$E_3 = \left(3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$
$$E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

$$\Delta E_3 = 2\hbar\omega_0$$

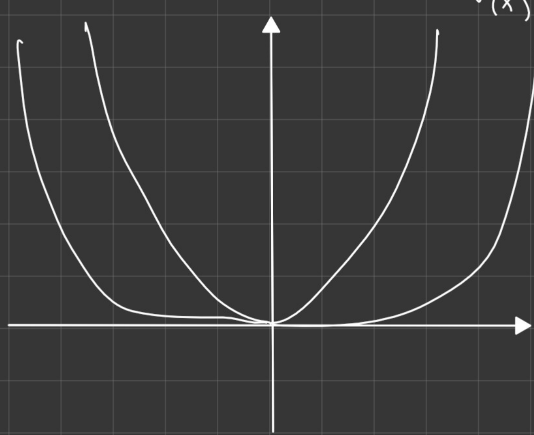
$$\omega_0 = \frac{1{,}8\,eV}{2\hbar} = 1{,}36 \cdot 10^{15}\ Hz$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \longrightarrow \alpha = m\omega_0^2 = 1{,}7\ N/m$$

Esercizio 3

Un elettrone è posto in una regione di potenziale $V(x) = \alpha x^{\beta}$. Si determini β affinché la spaziatura tra gli autovalori E_n segua un andamento $n^{\frac{3}{2}}$.

$$V(x) = \alpha x^{\beta}$$



β?

per $E_n \propto n^{3/2}$

Δx $\qquad x = \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{1/\beta}$

$$\left.\begin{aligned} x_{max} &= +\left(E/\alpha\right)^{1/\beta} \\ x_{min} &= -\left(E/\alpha\right)^{1/\beta} \end{aligned}\right\} \Delta x = 2\left(E/\alpha\right)^{1/\beta}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{(\Delta p)^2}{m} \qquad \Delta p = \sqrt{2mE}$$

$$\Delta p \Delta x = \hbar$$

$$\sqrt{2mE} \cdot 2 \left(E/\alpha\right)^{1/\beta} = \hbar$$

$$2\sqrt{2} \, \frac{\sqrt{m}}{\alpha^{1/\beta}} \, E^{1/\beta} = \hbar$$

$$E^{1/2 + 1/\beta} = \frac{\alpha^{1/\beta}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \hbar$$

$$E_n^{1/2+1/\beta} = \underbrace{\frac{\alpha^{1/\beta}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}_{\gamma} \cdot n\hbar$$

$$E_n = \left(\gamma \cdot n\hbar\right)^{\frac{1}{1/2+1/\beta}}$$

$$E_n \propto n^{\frac{1}{1/2+1/\beta}} = n^{\frac{2\beta}{\beta+2}}$$

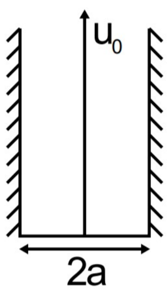
$$n^{\frac{2\beta}{\beta+2}} = n^{3/2}$$

$$\frac{2\beta}{\beta+2} = \frac{3}{2}$$

$$4\beta = 3\beta + 6 \longrightarrow \beta = 6 \longrightarrow V = \alpha x^6 \quad \checkmark$$

Esercizio 4

Si consideri una buca a pareti infinite in figura, dove $a = 0.4\ nm$, e al cui centro è posta una parete deltiforme. Sapendo che la densità di probabilità dei primi due autostati oscilla con frequenza $\nu = 10\ THz$, quanto vale il modulo u_0 della barriera deltiforme?



l'autofunzione deve:

- essere pari
- annullarsi agli estremi

per l'autostato pari

$$\tan(k_p a) = -\frac{\hbar^2 k_p}{m u_0} \rightarrow k_p = \text{arctg}$$

$$k_p = \frac{2\pi}{\lambda_p} = \frac{\sqrt{2mE_p}}{\hbar}$$

la sd

$$\Delta E = E_d - E_p = h\nu = 41,4\ meV$$

per l'autostato dispari:

$$\psi_d(x)\ A \sin(k_d \cdot x)$$

$$\psi_d(a) = 0 \rightarrow k_d \cdot a = \pi$$

$$k_d = \frac{\pi}{a}$$

$$k_d = \frac{\sqrt{2mE_d}}{\hbar} \rightarrow E_d = \frac{k_d^2 h^2}{2m}$$

$K_d = 7{,}85 \cdot 10^{9}\ m^{-1}$

$\downarrow$ da cui ricaviamo

$E_d = 2{,}35\ eV$

$\downarrow$

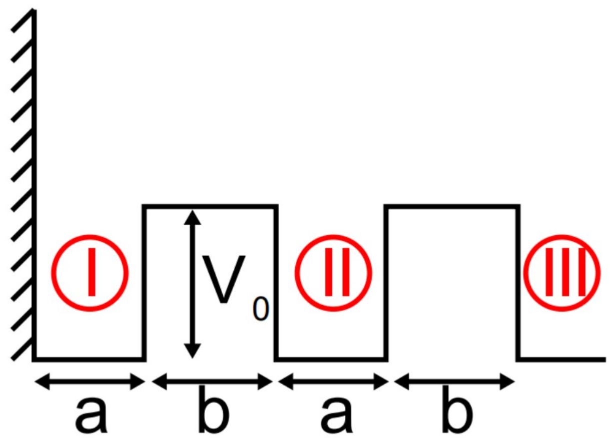
$\Delta E = 41{,}4\ meV \rightarrow E_p = 2{,}31\ eV \rightarrow K_p = 7{,}78 \cdot 10^{9}\ m^{-1}$

$V_0 = \dfrac{-\hbar^2 K_p}{m \tan(K_p a)} = 27 \cdot 10^{-9}\ eV\,m = \underline{27\ eV \cdot nm}$ ✓

esercizio 5:

Esercizio 5

Si consideri il profilo di potenziale in figura, dove $a = 2.5\ nm, b = 3\ nm, V_0 = 2\ eV$. Stimare il tempo medio di tunneling per passare dal dominio I al dominio III per un elettrone che si trovi sul livello fondamentale della buca I. Si calcoli inoltre la lunghezza di penetrazione ai lati della buca. Si consideri l'approssimazione di buca a pareti infinite e una massa efficace per l'elettrone $m^* = 0.33 \cdot m_e$.



$t_{TUN_{1\to3}}$? x_p? $m^* = 0{,}33\ m_e$

$E_1 = \dfrac{h^2}{8ma^2} = 182{,}8\ meV$

I $\rightarrow$ II

$P_T = e^{-2\alpha b}$ $\alpha = \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E_1)}}{\hbar} = 3{,}96 \cdot 10^{9}\ m^{-1}$

$= 4{,}7 \cdot 10^{-11}$

$\alpha b = 11{,}9 \gg 1$

$t_{TUN_{1,2}} = \dfrac{\overset{11{,}3\ fs}{t_{AR}}}{P_{TUN}} = \dfrac{2a}{v} \cdot \dfrac{1}{P_{TUN}} = \underline{240\ \mu s}$ ✓

II $\longrightarrow$ III

$$P_{T_{2\to3}} = P_{T_{1\to2}} = P_T \qquad t_{AR_2} = t_{AR_1}$$

$$t_{TUN_{2\to3}} = 240\,\mu s \qquad t_2 = 4 \cdot t_{TUN}$$

$$P_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} t_N = 2\cdot n\, t_{TUN} \\ P_N = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \qquad t_3 = 6\, t_{TUN} \qquad P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\longrightarrow t_{TUN_{1\to3}} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n p_n = \dots = 4 t_{TUN} = t_{TUN_{1\to3}} = 960\ \mu s \checkmark$$

$$\alpha \longrightarrow x_p = 1/\alpha = 0{,}252\ nm \checkmark$$