

# 五一数学建模竞赛

## 承 诺 书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）：                     A                    

参赛队号： T3838337691606

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）：           本科                    

所属学校（学校全称）：           东北林业大学                                    

参赛队员： 队员 1 姓名：           杨杰                                    

队员 2 姓名：           戴君林                                    

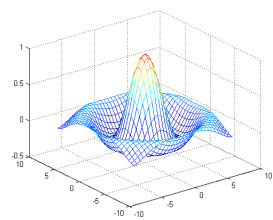
队员 3 姓名：           张奥                                    

联系方式： Email: 2878839302@qq.com 联系电话： 17378387445

日期： 2024 年 5 月 4 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

# 五一数学建模竞赛



## 题 目： 钢板最优切割路径问题

**摘 要：** 钢板切割是将板材或型材等原材料加工成预定形状和尺寸的毛坯或成品工件的操作过程。<sup>[1]</sup>在确保切割质量的前提下，提高切割效率、降低切割成本、减少材料浪费是企业的共同目标。为了实现这一目标，需要对切割路径进行优化，以实现最小空程。因此，针对不同切割布局，建立数学模型，设计最优切割路径，对于提高切割效率具有重要意义。本文针对四个问题的切割布局进行了详细的研究。

针对问题一，我们通过建立的广义环形切割模型和将军饮马模型成功解决了问题一的切割布局，最终我们给出方案并计算得最短空程为 $L_{\min}=10\sqrt{41}$

针对问题二，我们将问题一建立的广义环形切割模型进行推广，使用推广后的模型加解析几何的方法成功解决了问题二的切割布局，最终我们给出方案并计算得最短空程为 $L_{\min}=31.553545$

针对问题三，它是在问题二的基础上在椭圆内加了规则排列的同等大小矩形，所以我们在问题二的基础上考虑椭圆内部的切割路径优化，我们采取贪心算法的思想，做到每一步最优，达到一个局部最优的效果。最终给出方案并计算得到最短空程 $L_{\min}=81.694052$

针对问题四，它是在问题三的基础上将同等大小的矩形改为了大小不一的矩形，所以我们只需在问题二的基础上考虑椭圆内部的切割路径优化，我们通过枚举法将所以“过桥”数量的可能给出，并计算出这些方案最短空程。最终我们得到“过桥”数量为 3，位置在区域 $D_i(i=1,2,3)$ ，此时最短空程 $L_{\min}=33.2844348$

本文的研究成果不仅为理论分析提供了新的视角，而且对于实际钢板的切割路径优化设计具有显著的实际指导意义。

**关键词：** 广义环形切割模型 将军饮马 解析几何 贪心算法 枚举法

## 一、问题重述

钢板切割是金属加工过程中的一项重要技术，广泛应用于汽车，船舶，机械制造等行业。钢板切割工艺涉及将钢板依照零件设计图纸指定的形状和尺寸要求，通过 CAM（计算机辅助制造）套料排版软件进行排版编程，随后执行切割加工的一系列操作。<sup>[2]</sup>钢板切割过程中，必须遵循既定的下料切割布局图纸。在这一过程中，切割路径的规划显得尤为重要。一个合理的切割路径不仅能够显著提升工作效率，还能有效降低生产成本。因此，路径设计应致力于实现空程的最短化，以确保整个切割过程的优化和效率。

空程定义为切割设备在一系列操作中不产生切割效果的水平运动路径，而垂直运动路径不计入空程。题目默认切割起始点位于钢板的右下角，下料切割布局图中的实线均为切割线。

试就钢材切割规划的现有研究基础以及下列切割布局，建立数学模型完成四个问题：

（1）问题一布局图中是在一个矩形中切割较小的矩形，其中大矩形的一侧为虚线，意味着在实际切割过程中不需要被切割。针对问题一，设计最优切割方案，并计算最优切割路径的空程总长度。

（2）问题二布局中，外轮廓被设计成上下对称的锯齿状，而在内部，需要在上方锯齿的凸起处切割出四个圆形，以及在中间位置的一个椭圆形。针对问题二，设计最优切割路径方案，并计算空程总长度。

（3）问题三与问题二相比，需要在椭圆中多切割出规则排列的大小相同的矩形件，并且这些矩形需要优先于椭圆切割完成。针对问题三，设计最优切割方案，并计算空程总长度。

（4）问题四的布局图依旧基于问题二，与问题三相比，椭圆形内部需要切割的 4 个尺寸不一的矩形，并且采用“过桥”方式连接相邻的矩形，以防止零件掉落。针对问题四，确定“过桥”的数目和位置，设计最优的路径方案，并计算空程总长度。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一的分析

在探讨问题一的最优切割路径问题时，目标是确定空程总长度的最小值，这涉及到计算两个矩形间往返移动的距离，以及避免重复切割同一区域。为了实现这一目标，我们需探索所有可能的进出点组合，并通过计算比较，找出最小的空程总长度。

为了降低模型的复杂性，我们提出了广义环形切割模型，该模型将简化环形间的最小空程计算，并允许我们快速确定进出点。此外，考虑到问题一模型中外侧矩形的左侧并非实际切割线，我们将这一特殊情况纳入考虑，并计算出相应的最小空程长度。

### 2.2 问题二的分析

对于问题二，其所有图形都是封闭的回路，因此，基于广义环形切割模型，求空程总长度的最小值就是要求在不同图形间跨越的距离和的最小值，进而转化为与问题一类似的寻找最小间距点的问题。但是不同于问题一，在问题二布局图中不相连的图形的种类较多，因此我们还需要考虑是否存在不同图形的切割顺序：外轮廓-小圆形-外轮廓-椭圆形-外轮廓、外轮廓-小圆形-椭圆形-小圆形-外轮廓、外轮廓-椭圆形-小圆形-椭圆形-外轮廓。通过计算选取合适的切割顺序，得到最小空程总长度。

### 2.3 问题三的分析

针对问题三, 由于需要在切割椭圆之前先切割矩形阵列, 并且矩形阵列完全在椭圆形之中, 因此需要优先考虑矩形阵列之间的最优切割路线。而问题三除矩形阵列之外其他布局实际与问题二完全相同, 因此基于问题二得到最优切割路线, 将问题转化为只需要找椭圆形到矩形阵列最近的点以及矩形阵列之间的最优切割路线。对于矩形阵列, 我们先将其视作一个整体, 根据我们建立的广义环形切割模型, 进出点为一点在回路的跨度最小, 所以矩形阵列之间的切割路线最终要回到整个矩形阵列的原始进入点。此时我们采用局部最优推广全局最优的贪心算法, 以此解决矩形间的最短空程问题。进而得到问题三的最短空程。

### 2.4 问题四的分析

由于椭圆形内四个相邻矩形的尺寸不同, 且不具有问题三中的对称性, 我们需要计算每个矩形到椭圆的最短距离, 并据此确定进出点。此外, 考虑到可能采用“过桥”方式连接矩形, 我们评估了不同桥的数量和位置选择方案, 即桥的数量分别为 2 或 3 或 4, 计算了每种方案的最短空程长度, 并比较以确定最优的切割路线。

## 三、模型假设

1. 切割设备在切割不同形状的构件时, 速度保持不变。
2. 切割设备在切割过程中不进行任何其他操作, 如调头、倒车等。
3. 不能连续两步产生空程。
4. 内孔零件要先于椭圆切割, 但允许先切割一小部分的椭圆
5. 在添加“过桥”连接相邻小零件时, 过桥的宽度为 2。
6. 在切割过程中, 切割设备不触碰切割线。
7. 切割设备在切割过程中的转弯视为直线切割。
8. 不考虑切割过程中的误差, 如切割线偏离等。

## 四、符号说明

| 符号         | 说明  |
|------------|---|
| $C_i$      | 零件的轮廓曲线   |
| $L$        | 空程  |
| $L_{\min}$ | 最短空程  |
| $d$        | $\min\{ PQ  +  SR ,  PQ  +  MN ,  MN  +  SR \}$ |
| $l$        | 问题三中椭圆内相邻矩形的间隔                                  |
| $s$        | “过桥”宽度  |

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

#### 5.1.1 模型的建立

在求解问题一之前, 先定义如下概念:

*I*类空程：经过不是切割曲线部分所产生的空程，如图 5.1 中切割曲线 $C_1$ 到切割曲线 $C_2$ 和切割曲线 $C_1$ 到切割曲线 $C_2$ 所产生的空程。

*II*类空程：重复走已切割的部分所产生的空程。

那么空程 $L = L_I + L_{II}$ ,进而不难得出最短空程计算公式：

$$L_{\min} = L_{I-\min} + L_{II-\min} \quad (5.1)$$

接下来，我们建立广义环形切割模型：图 5.1 有切割曲线 $C_1$ 和 $C_2$ ，切割起始点 $A$ 位于切割曲线 $C_1$ 上，我们需要求出该模型的最小空程。

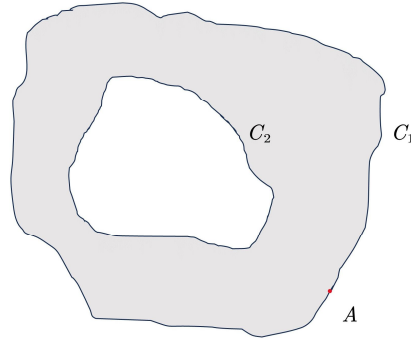


图 5.1 广义环形切割模型示意图

假设 $C_1$ 到 $C_2$ 的最短距离为 $|PQ|$ （见图 5.2），从 $A$ 出发后第一次进入 $C_2$ 产生的空程为 $|P_1Q_1|$ ，再从 $C_2$ 回到 $C_1$ 所产生的空程为 $|P_2Q_2|$ ，那么不难得出此时产生的*I*类空程：

$$L_I = |P_1Q_1| + |P_2Q_2| \quad (5.2)$$

由基本不等式可得：

$$L_I = |P_1Q_1| + |P_2Q_2| \geq 2\sqrt{|P_1Q_1| \times |P_2Q_2|} \quad (5.3)$$

当且仅当 $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$ （一般情况下即为进出点重合），等号成立。进而：

$$L_I = 2 \times |P_1Q_1| \quad (5.4)$$

而进入 $C_2$ 的最短距离为 $|PQ|$ ，所以我们可以得到：

$$L_{I-\min} = 2 \times |PQ| \quad (5.5)$$

我们令 $L_{II-\min} = 0$ ，进而我们给出图 5.2 的切割路线图，那么最短空程为：

$$L_{\min} = 2 \times |PQ| \quad (5.6)$$

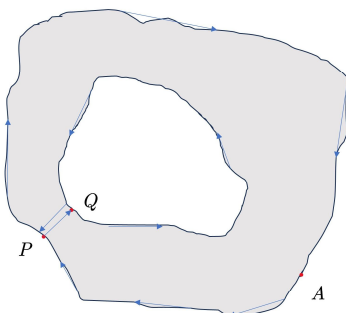


图 5.2 广义环形切割模型最优切割路线图

我们可以得出如下结论：若将 $C_2$ 视作一个闭合回路，对于内孔零件的切割，最好的方式是一次性沿着闭合回路完成零件的切割。

### 5.1.2 模型的求解

对于问题一，从 $B_1$ 出发后可以从边 $B_1B_2$ ， $B_1B_4$ ， $B_2B_3$ ， $B_3B_4$ 进入内部矩形。我们给出如下两种方案：

方案一：选择从边 $B_1B_2$ ， $B_1B_4$ ， $B_2B_3$ 进入矩形。那么此时就可以视作广义环形切割模型，唯一不同的是空程需要加上 $|B_3B_4|$ ，不难求出 3 条边到内部矩形的最短距离为 15，那么方案一的最短空程：

$$L_{\text{方案一}} = 2 \times 15 + |B_3B_4| = 30 + 50 = 80 \quad (5.7)$$

方案二：选择从边 $B_3B_4$ 进入内部矩形。由于边 $B_3B_4$ 不是切割边，那么我们就只能从点 $B_3$ 或者点 $B_4$ 进入，不妨考虑从 $B_3$ 进入，从 $B_4$ 出来。那么我们就只需要在 $A_3A_4$ 上寻找一点 $Q$ ，使得 $|B_3Q| + |QB_4|$ 最小即可，此时就转化为一个典型的“将军饮马”问题。现在考虑作图 5.3（源码见附录），以 $B_4$ 为原点，以 $B_4B_1$ 为 $x$ 轴，以 $B_4B_3$ 为 $y$ 轴建立平面直角坐标系，并做 $B_4$ 关于 $A_3A_4$ 的对称点 $B_4'$ 并连接 $B_3B_4'$ 交 $A_3A_4$ 于 $Q$ 。

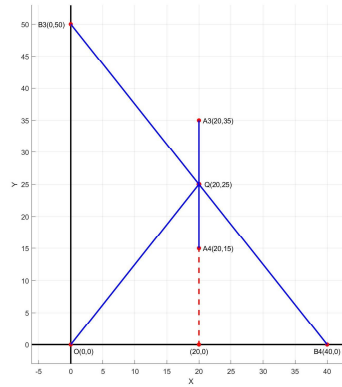


图 5.3 将军饮马图

不难得出直线  $B_3B_4'$  的方程为：

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{50} = 1 \quad (5.8)$$

那么可以得到  $Q(20, 25)$ ，进而可以求出方案二的最短空程：

$$\begin{aligned} L_{\text{方案二}} &= |B_3Q| + |QB_4| \\ &= |B_3Q| + |QB_4'| \\ &= |B_3B_4'| \\ &= \sqrt{50^2 + 40^2} \\ &= 10\sqrt{41} \end{aligned} \quad (5.9)$$

由于  $10\sqrt{41} < 80$ ，故选择方案二。我们给出最优切割路径图如下：

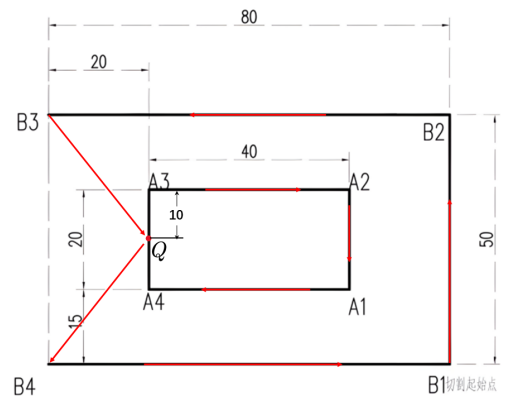


图 5.4 问题一最优切割路径图

此时最短空程  $L_{\min} = 10\sqrt{41}$

## 5. 2 问题二模型的建立与求解

### 5. 2. 1 模型的建立

为了让广义环形切割模型更好的适用于问题二，现在将广义环形模型进行推广：如图 5.5，切割曲线  $C_1$  的内部还有一条切割曲线  $C_3$ ，现在假设  $C_1$  和  $C_2$  之间的最短距离为  $|PQ|$ ， $C_1$  和  $C_3$  之

间的最短距离为  $|SR|$ ， $C_3$  和  $C_2$  之间的最短距离为  $|MN|$ 。记  $d = \min\{|PQ| + |SR|, |PQ| + |MN|, |MN| + |SR|\}$ ，那么由广义环形切割模型不难得出，此时的最短空程为：

$$L_{\min} = 2d \quad (5.10)$$

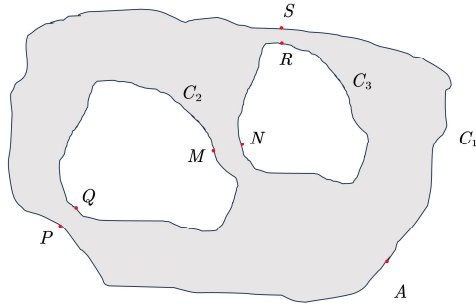


图 5.5 推广后的环形切割模型示意图

当  $d = |PQ| + |MN|$  时，我们给出最优切割路径图：

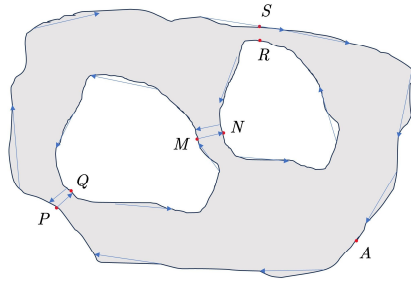


图 5.6  $d = |PQ| + |MN|$  时，最优切割路径图

当  $d = |PQ| + |SR|$  时，我们给出最优切割路径图：

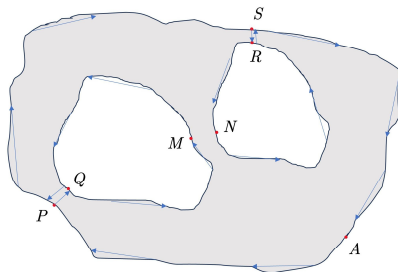


图 5.7  $d = |PQ| + |SR|$  时，最优切割路径图

当  $d = |SR| + |MN|$  时，我们给出最优切割路径图：



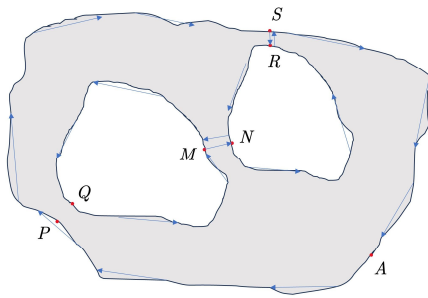


图 5.8  $d = |SR| + |MN|$  时，最优切割路径图

### 5.2.2 模型的求解

对于问题二，在图 5.9 中，圆形零件到外围切割曲线的最短距离均为  $|SR|$ ，所以在切割每个圆形零件所产生的空程为  $2 \times |SR|$ ，不难看出外围切割曲线的  $P$  点为到椭圆的距离最小的点，在切割区域  $D$  时，我们应用推广的广义环形切割模型，那么我们就需要计算  $d$ ，所以我们作图 5.10（源码见附录），其中  $Q$  点为  $P$  点到椭圆距离最小的点。

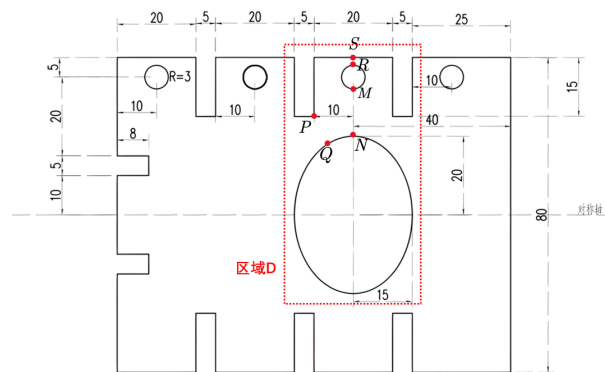


图 5.9 问题二套料图

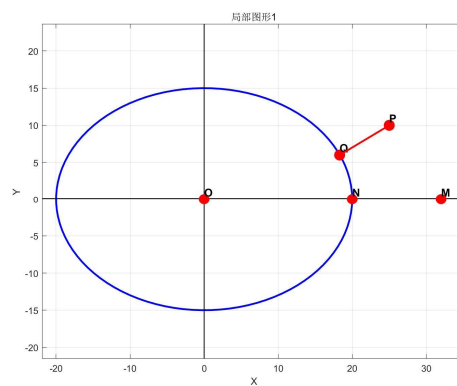


图 5.10 问题二局部区域建系图

由图 5.9 的数据，不难写出图 5.10 中椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \quad (5.11)$$

以及  $P(25, 10)$ ， $|MN| = 12$ ，现在要求出  $Q$  点坐标，以及  $|PQ|$  的大小。

假设  $Q(x, y)$ ，我们可以得到：

$$\begin{cases} \text{目标函数 } \min |PQ| = \sqrt{(x-25)^2 + (y-10)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

使用 *Lingo* 编程（源码见附录）得到，当  $Q(18.29745, 6.056135)$  时， $|PQ|$  最小，此时  $|PQ| = 7.776772$

由图 5.9 的数据，不难得到  $|SR| = 2$ ，所以推出  $|SR| < |PQ| < |MN|$ ，进而我们可以得到

$$\begin{aligned} d &= |PQ| + |SR| \\ &= 7.776772 + 2 \\ &= 9.776772 \end{aligned} \quad (5.13)$$

所以我们应该像图 5.7 那样设计切割路线，故我们给出如下的最优切割路线图：

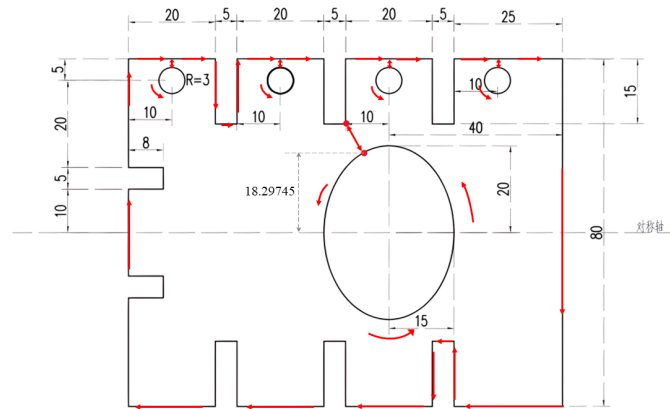


图 5.11 问题二最优切割路线图

此时最短空程：

$$\begin{aligned} L_{\min} &= 3 \times 2 \times |SR| + 2d \\ &= 3 \times 2 \times 2 + 2 \times 9.776772 \\ &= 31.553544 \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.3 问题三模型的建立与求解

#### 5.3.1 模型建立

对于问题三，由于他只在问题二的基础上在椭圆的内部加入了一系列规则排列的矩形零件，所以我只需考虑图 5.12 中区域  $D$  的切割路线优化即可。

首先我要求解椭圆到这些小矩形的最短距离，由于其对称性，考虑矩形上的  $Q_1$  点，假设椭圆上的点  $P_1$  到  $Q_1$  最近。考虑以椭圆的中心为原点建立平面直角坐标系，作图 5.12（源码见附

录)。

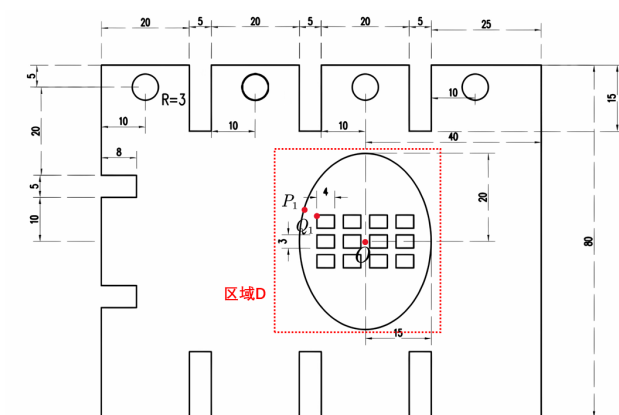


图 5.11 问题三套料图

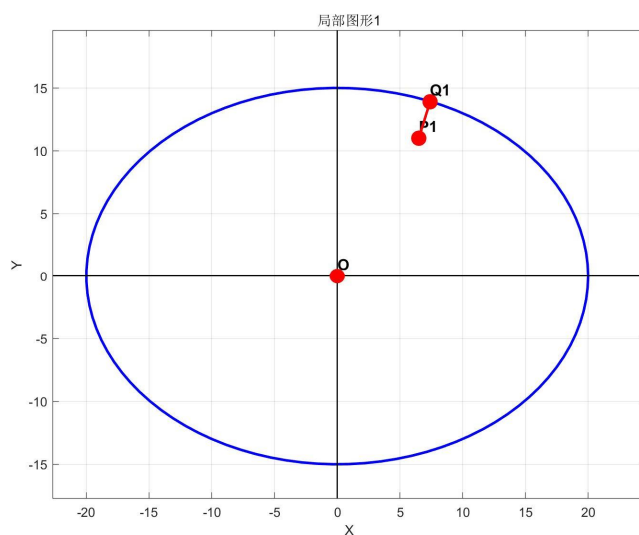


图 5.12 问题三局部区域建系图

椭圆方程为(5.11)由图 5.11 不难得出  $P_1(6.5, 11)$ ，现在需要求出  $Q_1$  点坐标，以及  $|P_1Q_1|$  的大小。

假设  $Q_1(x, y)$ ，我们可以得到：

$$\begin{cases} \text{目标函数 } \min |P_1Q_1| = \sqrt{(x - 6.5)^2 + (y - 11)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

最后就可以求出  $|P_1Q_1|$ 。

再考虑这些小矩形的切割优化，我们采取贪心算法的思想，通过寻找当前一步的最优，每次都采取这样的策略，进而实现局部最优，以此作为全局最优。因此我们设计出如下路线：

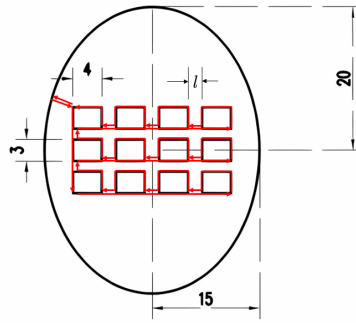


图 5.13 小矩形区域最优切割路线设计

那么这一部分的空程就为 $22l$

### 5.3.2 模型求解

对于上述模型建立的过程，我们给出如下的最优切割路线设计：

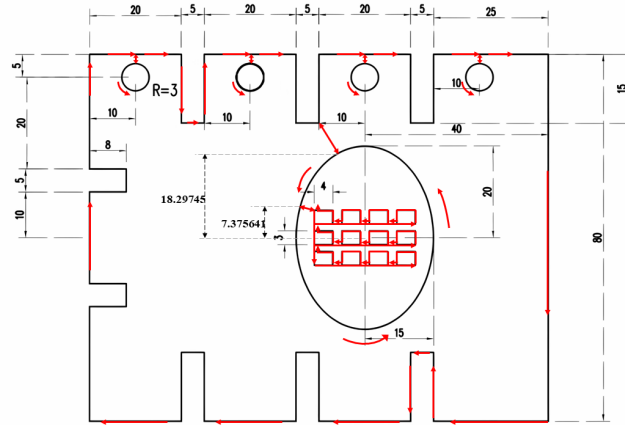


图 5.14 问题三最优切割路线设计图

进而最小空程就为：

$$L_{\min} = L_{\min}(\text{问题二}) + 2 \times |P_1 Q_1| + 22l \quad (5.16)$$

对于(5.15)，我们使用 *Lingo* 编程（源码见附录）得到，当 $Q_1(7.375641, 13.94274)$ 时， $|P_1 Q_1|$

最小，此时 $|P_1 Q_1| = 3.070254$ 。由题目以及图 5.11 的数据不难得出 $l = 2$

最后，由(5.16)最小空程为：

$$\begin{aligned} L_{\min} &= L_{\min}(\text{问题二}) + 2 \times |P_1 Q_1| + 12l \\ &= 31.553544 + 2 \times 3.070254 + 22 \times 2 \\ &= 81.694052 \end{aligned} \quad (5.17)$$

## 5.4 问题四模型的建立与求解

### 5.4.1 模型建立

由于问题四中图中数据与图形不相吻合（经过计算，按题中所给数据作图，椭圆区域的左下角矩形位于椭圆外，显然不符合实际），故我们将图形数据略做修改，见下图 5.15。

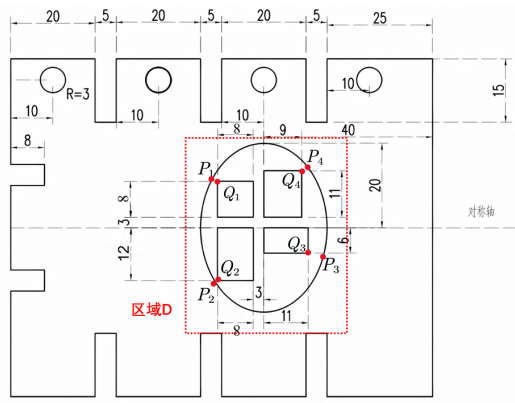


图 5.15 数据修改后的问题四的套料图

由于问题四是在问题三的基础上将区域 $D$ 中的规则排列的小矩形改为了大小不一的四个小矩形，所以，我仍然只需考虑区域 $D$ 内的切割路线优化。

首先我要求解椭圆到这 4 个小矩形的最短距离，仍然考虑以椭圆的中心为原点建立平面直角坐标系，作图 5.16（源码见附录）。

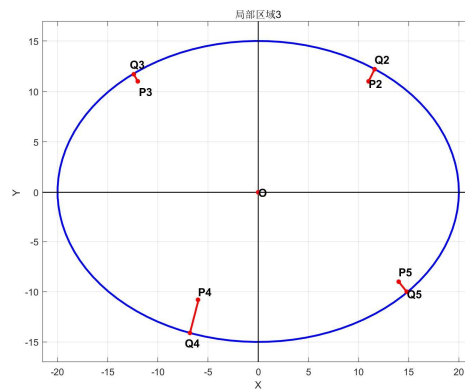


图 5.16 问题四局部区域图

椭圆方程为(5.11)由图 5.15 不难得出 $P_2(11, 11)$ ,  $P_3(-12, 11)$ ,  $P_4(-6, -11)$ ,  $P_5(14, -9)$ , ,

现在要求出 $Q_i$ 点坐标，以及 $|P_iQ_i|$ 的大小。

假设 $Q_i(x, y)$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ )，我们可以得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{目标函数 } \min |P_2Q_2| = \sqrt{(x-11)^2 + (y-11)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \\ \text{目标函数 } \min |P_3Q_3| = \sqrt{(x+12)^2 + (y-11)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \\ \text{目标函数 } \min |P_4Q_4| = \sqrt{(x+6)^2 + (y+11)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \\ \text{目标函数 } \min |P_5Q_5| = \sqrt{(x-14)^2 + (y+9)^2} \\ \text{约束条件 } s.t. \quad \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

最后就可以求出  $|P_iQ_i|$ 。

我们在考虑这些矩形的“过桥”问题，由于两个相邻的小矩形要设置“过桥”，所以“过桥”的数量就可以为 2,3,4。由于添加了“过桥”，这让两个相邻的小矩形形成了一个整体。我们给出区域  $D$  的如下方案：

方案一：“过桥”数量为 2，此时相当于椭圆内部有两个闭合的切割曲线，我们选取  $|P_iQ_i|$  中最小的 2 个作为进入点，以此设计路线，这时我们就可以运用推广的广义环形切割模型进行求解。

方案二：“过桥”数量为 3，此时相当于椭圆内部有 1 个闭合的切割曲线，我们选取  $|P_iQ_i|$  中最小的作为进入点，以此设计路线。这时我们就可以运用广义环形切割模型进行求解。

方案三：“过桥”数量为 4，此时相当于椭圆内部有一个广义的环形切割模型，我们选取  $|P_iQ_i|$  中最小的作为进入点，这时我们就可以连续运用 2 次广义环形切割模型进行求解。

#### 5.4.2 模型求解

对于(5.18)的求解，我们使用 *Lingo* 编程（源码见附录）得到，当  $Q_2(11.64246, 12.19651)$  时， $|P_2Q_2|$  最小，此时  $|P_2Q_2| = 1.358085$ ；当  $Q_3(-12.44309, 11.74342)$  时， $|P_3Q_3|$  最小，此时  $|P_3Q_3| = 0.8654467$ ；当  $Q_4(-6.845292, -14.09406)$  时， $|P_4Q_4|$  最小，此时  $|P_4Q_4| = 3.207444$ ；当  $Q_5(14.86344, -10.03651)$  时， $|P_5Q_5|$  最小，此时  $|P_5Q_5| = 1.349027$ 。

其中最小的为  $|P_3Q_3|$ ，除此之外是  $|P_5Q_5|$ 。由图 5.15 两个相邻的矩形之间的距离为 3。

那么对于方案一，运用推广的广义环形切割模型，我们计算出  $d = |P_3Q_3| + |P_5Q_5| = 2.2144724$ ，故应该像图 5.7 那样设计。由上述过程，给出如下的最优切割路线图：



$$L_{(\text{方案三})} = 2 \times |P_3 Q_3| + 2s = 5.7308908 \quad (5.21)$$

由  $L_{(\text{方案二})} < L_{(\text{方案一})} < L_{(\text{方案三})}$ ，我们得到方案二最优，又由于要求“过桥”与矩形小零件顶点的最短距离至少为 1，我们给出最终的最优切割路线图：

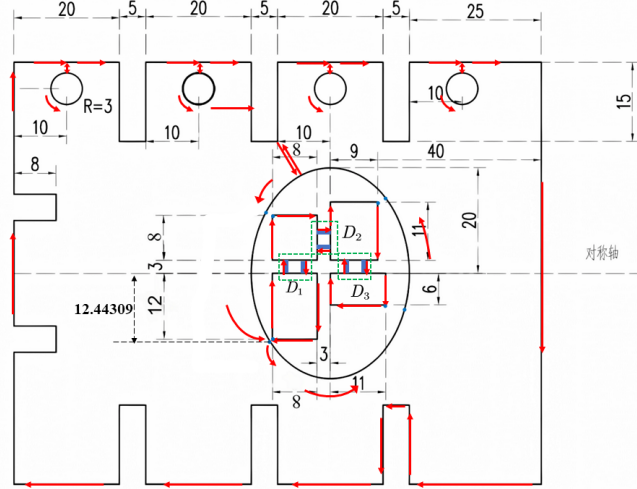


图 5.20 问题四最优切割路线图

那么最我们就可以得到最短空程：

$$\begin{aligned} L_{\min} &= L_{\min}(\text{问题二}) + L_{(\text{方案二})} \\ &= 31.553544 + 1.7308908 \\ &= 33.2844348 \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中“过桥”数量为 3，位置位于图 5.20 的区域  $D_i (i=1, 2, 3)$ ，区域  $D_i (i=1, 2, 3)$  的与过桥平行的边界距离矩形端点的距离为 1。

## 六、模型的分析与检验

### 6.1 模型的分析

#### 6.1.1 误差分析

在解决问题二、三和四的过程中，我们采用了 *Lingo* 编程方法来计算定点到椭圆的最近距离。由于编程计算固有的舍入误差，我们的结果也受到了这种误差的影响，导致最终结果存在一定的舍入误差。

#### 6.1.2 结果分析

尽管存在舍入误差，但问题二、三和四的模型通过 *Lingo* 编程得到的结果仍然满足所有约束条件，并且结果的精确度非常高。因此，我们得出的最短空程结果是正确且有效的。

### 6.2 模型的检验

通过运用我们建立的广义环形切割模型并结合 *Lingo* 编程技术，所得结果不仅符合实际情况，而且实现了空程的最优化。这表明本文所提出的模型是正确、合理且可行的。



## 七、模型的评价、改进与推广

### 7.1 模型的优点

1. 计算过程简洁明了，结果精确，与实际情况相符，具有实际应用价值。
2. 通过图形化的方式，使文章的论述更加具体和形象。

### 7.2 模型的缺点

在问题三的模型中，我们仅对椭圆内部矩形的切割实现了局部优化。因此，这种局部最优解是否代表全局最优解仍有待进一步探讨。

### 7.3 模型的改进

为了实现问题三的全局最优解，我们可以探索其他启发式算法。

## 八、参考文献

- [1] 常翠芝,高文良,严蓬辉,等.双链基因的退火算法用于激光切割路径优化[J].武汉工程大学学报,2023,45(03):331-336.DOI:10.19843/j.cnki.CN42-1779/TQ.202210020.
- [2] 陈义新,裴守魁,银升超.高效切割工艺在钢板切割中的应用及展望[J].煤矿机械,2023,44(12):100-102.DOI:10.13436/j.mkjx.202312030.

## 九、附录

### 9.1 图 5.3 将军饮马图

```
% 创建平面直角坐标系
figure;
axis equal;
xlabel('X');
ylabel('Y');
grid on;

% 绘制坐标轴
line([-20 60], [0 0], 'Color', 'k', 'LineWidth', 2); % X 轴
line([0 0], [-20 70], 'Color', 'k', 'LineWidth', 2); % Y 轴

% 标注点 B3(0,50)
hold on;
plot(0, 50, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2);
text(-4, 50, 'B3(0,50)', 'FontSize', 10, 'HorizontalAlignment', 'center');
```

```

% 标注点 B4(40,0)
plot(40, 0, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2);
text(40, -1, 'B4(40,0)', 'FontSize', 10, 'HorizontalAlignment', 'center');

% 标注点 O(0,0)
plot(0, 0, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2);
text(2, -1, 'O(0,0)', 'FontSize', 10, 'HorizontalAlignment', 'center');

% 标注点 Q(20,25)
plot(20, 25, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2);
text(25, 25, 'Q(20,25)', 'FontSize', 10, 'HorizontalAlignment', 'center');

% 标注点(20,0)
plot(20, 0, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2);
text(20, -1, '(20,0)', 'FontSize', 10, 'HorizontalAlignment', 'center');

% 连接 O 和 Q
plot([0 20], [0 25], 'b-', 'LineWidth', 2);

% 连接 B3 和 B4
plot([0 40], [50 0], 'b-', 'LineWidth', 2);

% 连接 Q 和(20,0)
plot([20 20], [25 0], '--r', 'LineWidth', 2);

% 调整坐标轴范围
axis([-20 60 -20 70]);

```

## 9.2 图 5.10 问题二局部区域建系图

```

% 设置图形窗口大小
figure('Position',[100 100 800 600]);

% 定义椭圆参数
a = 20; % 长半轴
b = 15; % 短半轴

% 生成椭圆坐标点
theta = linspace(0, 2*pi, 100); % 从 0 到 2 π 生成 100 个角度值
x = a * cos(theta); % x 坐标
y = b * sin(theta); % y 坐标

% 将椭圆平移到(0,0)
x = x + 0; % x 坐标平移到 0
y = y + 0; % y 坐标平移到 0

```

```

% 绘制椭圆
plot(x, y, 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on; % 保持当前图像

% 计算 x 轴和 y 轴的长度
x_max = max(abs(x));
y_max = max(abs(y));
axis_length = max(x_max, y_max) * 2.4; % 将轴长设为最大值的 2.4 倍

% 绘制坐标轴
plot([-axis_length axis_length], [0 0], 'k-', 'LineWidth', 1); % x 轴
plot([0 0], [-axis_length axis_length], 'k-', 'LineWidth', 1); % y 轴

% 添加五个点
O = [0 0];
P = [25 10];
Q = [18.3 6];
M = [32 0];
N = [20 0];

% 绘制五个点及其标注
plot(O(1), O(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(O(1), O(2) + 1, 'O', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(P(1), P(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P(1), P(2) + 1, 'P', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(Q(1), Q(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(Q(1), Q(2) + 1, 'Q', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(M(1), M(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(M(1), M(2) + 1, 'M', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(N(1), N(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(N(1), N(2) + 1, 'N', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');

% 连接 P 和 Q
plot([P(1) Q(1)], [P(2) Q(2)], 'r-', 'LineWidth', 2);

% 设置坐标轴等属性
axis equal; % 保持横纵坐标比例一致
grid on; % 显示网格线
xlabel('x 轴'); % X 轴标签
ylabel('y 轴'); % Y 轴标签
title('局部区域 1'); % 图形标题

```

### 9.3 (5.12) Lingo 源码

```

min=((x-25)^2+(y-10)^2)^(1/2);

```

```
(x/20)^2+(y/15)^2=1;  
end
```

#### 9.4 图 5.12 问题三局部区域建系图

```
% 设置图形窗口大小  
figure('Position',[100 100 800 600]);  
  
% 定义椭圆参数  
a = 20; % 长半轴  
b = 15; % 短半轴  
  
% 生成椭圆坐标点  
theta = linspace(0, 2*pi, 100); % 从 0 到 2π 生成 100 个角度值  
x = a * cos(theta); % x 坐标  
y = b * sin(theta); % y 坐标  
  
% 将椭圆平移到(0,0)  
x = x + 0; % x 坐标平移到 0  
y = y + 0; % y 坐标平移到 0  
  
% 绘制椭圆  
plot(x, y, 'b-', 'LineWidth', 2);  
hold on; % 保持当前图像  
  
% 计算 x 轴和 y 轴的长度  
x_max = max(abs(x));  
y_max = max(abs(y));  
axis_length = max(x_max, y_max) * 2.4; % 将轴长设为最大值的 2.4 倍  
  
% 绘制坐标轴  
plot([-axis_length axis_length], [0 0], 'k-', 'LineWidth', 1); % x 轴  
plot([0 0], [-axis_length axis_length], 'k-', 'LineWidth', 1); % y 轴  
  
% 添加五个点  
O = [0 0];  
P = [6.5 11];  
Q = [7.4 13.9];  
  
% 绘制三个点及其标注  
plot(O(1), O(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');  
text(O(1), O(2) + 1, 'O', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');  
plot(P(1), P(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');  
text(P(1), P(2)-0.3, 'P1', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');  
plot(Q(1), Q(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
```

```
text(Q(1), Q(2)+0.6, 'Q1', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
```

```
% 连接 P 和 Q
```

```
plot([P(1) Q(1)], [P(2) Q(2)], 'r-', 'LineWidth', 2);
```

```
% 设置坐标轴等属性
```

```
axis equal; % 保持纵横坐标比例一致
```

```
grid on; % 显示网格线
```

```
xlabel('x 轴'); % X 轴标签
```

```
ylabel('y 轴'); % Y 轴标签
```

```
title('局部区域 2'); % 图形标题
```

### 9.5 (5.15) Lingo 源码

```
min=((x-6.5)^2+(y-11)^2)^(1/2);
```

```
(x/20)^2+(y/15)^2=1;
```

```
end
```

### 9.6 图 5.16 问题四局部区域图

```
% 设置图形窗口大小
```

```
figure('Position',[100 100 800 600]);
```

```
% 定义椭圆参数
```

```
a = 20; % 长半轴
```

```
b = 15; % 短半轴
```

```
% 生成椭圆坐标点
```

```
theta = linspace(0, 2*pi, 100); % 从 0 到  $2\pi$  生成 100 个角度值
```

```
x = a * cos(theta); % x 坐标
```

```
y = b * sin(theta); % y 坐标
```

```
% 将椭圆平移到(0,0)
```

```
x = x + 0; % x 坐标平移到 0
```

```
y = y + 0; % y 坐标平移到 0
```

```
% 绘制椭圆
```

```
plot(x, y, 'b-', 'LineWidth', 2);
```

```
hold on; % 保持当前图像
```

```
% 计算 x 轴和 y 轴的长度
```

```
x_max = max(abs(x));
```

```
y_max = max(abs(y));
```

```
axis_length = max(x_max, y_max) * 2.4; % 将轴长设为最大值的 2.4 倍
```

```

% 绘制坐标轴
plot([-axis_length axis_length], [0 0], 'k-', 'LineWidth', 1); % x 轴
plot([0 0], [-axis_length axis_length], 'k-', 'LineWidth', 1); % y 轴

% 添加五个点
O = [0 0];

P2=[11 11];
P3=[-12 11];
P4=[-6 -11];
P5=[14 -9];

Q2=[11.6 12.2];
Q3=[-12.4 11.7];
Q4=[-6.8 -14.1];
Q5=[14.8 -10.0];

% 绘制九个点及其标注
plot(O(1), O(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(O(1), O(2), 'O', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(P2(1), P2(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P2(1), P2(2) - 0.2, 'P2', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(P3(1), P3(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P3(1)+0.1, P3(2)-1, 'P3', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(P4(1), P4(2)+0.2, 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P4(1), P4(2) + 1, 'P4', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(P5(1), P5(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P5(1), P5(2) + 1, 'P5', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');

plot(Q2(1), Q2(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(Q2(1), Q2(2) + 1, 'Q2', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(Q3(1), Q3(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(Q3(1)-0.4, Q3(2)+1, 'Q3', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(Q4(1), Q4(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(Q4(1)-0.5, Q4(2)-1, 'Q4', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
plot(Q5(1), Q5(2), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(Q5(1), Q5(2)-0.2, 'Q5',

```

## 9.7 (5.18) Lingo 源码

```

Model:
min=((x-11)^2+(y-11)^2)^(1/2);
(x/20)^2+(y/15)^2=1;
end
Model:

```

```
@free(x);@free(y);  
min=((x+12)^2+(y-11)^2)^(1/2);  
(x/20)^2+(y/15)^2=1;  
end
```

Model:

```
@free(x);@free(y);  
min=((x+6)^2+(y+11)^2)^(1/2);  
(x/20)^2+(y/15)^2=1;  
end
```

Model:

```
@free(x);@free(y);  
min=((x-14)^2+(y+9)^2)^(1/2);  
(x/20)^2+(y/15)^2=1;  
end
```