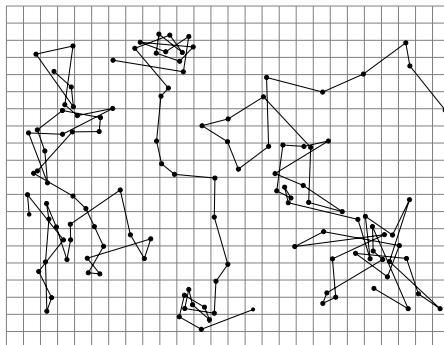


Brownovo gibanje

Matej Rojec

Brownovo gibanje (več v [1]) je intuitivno slučajen proces, ki predstavlja naključno gibanje delcev v mediju.



Slika 1: Reprodukcijska slika iz Jean Baptiste Perrin, *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, Ann. de Chimie et de Physique (VIII) 18, 5-114, 1909

Definicija 1. Standardno Brownovo gibanje $\{B_t\}_{t \geq 0}$ je slučajen proces z naslednjimi lastnostmi:

1. $B_0 = 0$.
2. Prirastki $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_2 - B_1, B_1 - B_0$ so neodvisne slučajne spremenljivke, za vsak $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$.
3. Za vsak $t \geq 0$ in $h > 0$ velja $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$.
4. Funkcija $t \mapsto B_t$ je zvezna skoraj gotovo.

Preden zapišemo izrek, definirajmo še pojem časa ustavljanja.

Definicija 2. Slučajna spremenljivka τ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v \mathbb{R}^+ je *čas ustavljanja* glede na filtracijo $(\mathcal{F}_t)_t \in T$, če velja: $\forall t \in T : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Zdaj lahko zapišemo izrek 1.

Izrek 1. Naj bo $\{B_t\}_{t \geq 0}$ (standardno) Brownovo gibanje, τ čas ustavljanja glede na $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in naj bo $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. Potem je tudi proces:

$$\hat{B} := \{B_{T+t} - B_T \mid t \geq 0\}$$

(standardno) Brownovo gibanje in neodvisen od \mathcal{F}_T .

Literatura

- [1] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991.