

Теоретическая информатика

Задание 2 (13 ноября 2020 г.)

На лекциях была доказана NP-полнота следующих задач:

- **3-SAT**. Дана булева формула в 3-КНФ. Есть ли у нее выполняющий набор?
- **Circuit-SAT**. Дана булева схема. Есть ли у нее выполняющий набор?

Покажите NP-полноту следующих задач. При решении любой из задач можно использовать NP-полноту предыдущих задач из списка. Графы предполагаются неориентированными, если не указано обратное.

1. **Ориентированный гамильтонов цикл (DIR-HC)**. Дан ориентированный граф $G = (V, E)$. Содержит ли граф G гамильтонов цикл (т.е. простой ориентированный цикл, содержащий все вершины графа)?
2. **Гамильтонов цикл (HC)**. Дан граф $G = (V, E)$. Содержит ли граф G гамильтонов цикл (т.е. простой цикл, содержащий все вершины графа)?
- 2'. **Гамильтонов путь (HP)**. Дан граф $G = (V, E)$. Содержит ли граф G гамильтонов путь (т.е. простой путь, содержащий все вершины графа)?
- 2''. **Задача коммивояжера (TSP)**. Дан полный граф $G = (V, E)$ (вершины — города), где у каждого ребра есть целый неотрицательный вес (расстояние между двумя городами), и целое неотрицательное число k . Есть ли в G простой цикл, проходящий по всем вершинам (тур коммивояжера по всем городам, с возвращением домой) и имеющий суммарный вес не более t ?
3. **Независимое множество (IND-SET)**. Дан граф $G = (V, E)$ и натуральное число k . Содержит ли граф G независимое множество (т.е. множество попарно несмежных вершин) мощности не менее k ?
- 3'. **Вершинное покрытие (VERTEX-COVER)**. Дан граф $G = (V, E)$ и натуральное число k . Содержит ли граф G вершинное покрытие (т.е., множество вершин, таких что каждое ребро G инцидентно хотя бы одной из них) мощности не более k ?

- 3''. **Клика (CLIQUE)**. Дан граф $G = (V, E)$ и натуральное число k . Содержит ли граф G клику (т.е. полный подграф) мощности не менее k ?
- 3'''. **Покрытие множества (SET-COVER)**. Дано множество U , семейство подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq U$ и натуральное число k . Найдутся ли среди них не более k подмножеств, в объединении дающих U ?
4. **Подмножество с заданной суммой (SUBSET-SUM)**. Дано множество S целых чисел и целое число k . Содержит ли S подмножество S' , такое что $\sum_{x \in S'} x = k$?
- 4'. **2-разбиение (2-PARTITION)**. Дано множество S целых чисел. Содержит ли S подмножество S' , такое что $\sum_{x \in S'} x = \sum_{x \in S \setminus S'} x$.
- 4''. **Рюкзак (KNAPSACK)**. На входе дан набор n пар целых чисел $P = \{(w_i, v_i)\}_{i=1}^n$, где w_i — вес i -го предмета, а v_i — его стоимость; а также два числа c — максимальный вес и p — минимальная стоимость. Требуется определить, можно ли выбрать такой набор предметов, что их суммарная стоимость больше либо равна p , а вес меньше либо равен c .
5. **Раскраска графа (COLORING)**. Дан граф $G = (V, E)$ и натуральное число k . Существует ли правильная раскраска G в k цветов?
6. **Раскраска планарного графа (PLANAR-COLORING)**. То же при дополнительном условии, что граф G планарен.
7. **Колесо**. Назовем колесом размера k граф из $k + 1$ вершин w, v_1, \dots, v_k , такой что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $(v_k, v_1) \in E$, и $(w, v_i) \in E$. Задача: дан граф $G = (V, E)$ и натуральное число k . Содержит ли граф G колесо размера k ?
8. Дан граф $G = (V, E)$, и целое число k . Существует ли подмножество $V' \subset V$ такое, что $|V'| = k$ и для любых $v, u, w \in V'$ хотя бы одно из ребер соединяющих их отсутствует в G ?