Контрольная по тензорам

1. Разложим ли $w \in \bigwedge^3(\mathbb{R}^5)$, где

$$w = 6e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 + 2e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 + 3e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 - 2e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$$

2. 2.3 Трёхмерное подпространство $\mathbb{R}^4$ при вложении Плюккера отобразилось в тензор $3e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 - e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - 2e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Лежит ли в этом подпространстве прямая, проходящая через точки $(1, 2, 3, 1)$ и $(4, 2, -1, 3)$?

3. Пусть V — четырехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом x, y, z, u. Найдите ранг тензора $w \in V^{\otimes 3}$, где $w = y \otimes z \otimes u + y \otimes x \otimes x + x \otimes z \otimes x + x \otimes x \otimes u$.

4. Пусть V — двумерное векторное пространство с базисом e_1, e_2. Отображение из $V \otimes V$ в $V \otimes V$ имеет собственное число 3 с собственным вектором $2e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 + 4e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2$, собственное число 12 с собственным вектором $2e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 3e_2 \otimes e_1 + 3e_2 \otimes e_2$ и собственное число 6 кратности два с собственным подпространством, порождённым векторами $6e_1 \otimes e_1 + 10e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ и $6e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_2 + 11e_2 \otimes e_2$. Может ли это отображение иметь вид $f \otimes g$ для некоторых $f, g : V \to V$?

5. Пусть $\dim V = n$. Докажите, что имеется канонический изоморфизм $\bigwedge^p V \cong (\bigwedge^{n-p} V)^* \otimes \bigwedge^n V$.