Дифференциальные уравнения. Задание 6.

1. **Однородные линейные уравнения.**

   (a) $\dot{x} = 3x$,

   (b) $\dot{x} + \pi x = 0$,

   (c) $\dot{x} = 0 \cdot x$,

   (d) $\dot{x} = x \cos t$,

   (e) $\dot{x} = t^7 x$,

   (f) $\dot{x} = xt \cos t$,

   (g) $\dot{x}t - (t^2 + 1)x = 0$,

   (h) $\dot{x} \operatorname{ctg} t - 7x = 0$,

2. **Неоднородные линейные уравнения.** Найдите общее решение следующих линейных дифференциальных уравнений

   (a) $\dot{x} + 3x = t + e^{-2t}$,

   (b) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$,

   (c) $t\dot{x} - x = t^2 e^{-t}, \quad t \neq 0$,

   (d) $y' + y = 5 \sin 2t$,

   (e) $t^3 y' = e^{-t} - 4t^2 y, \quad t \neq 0$,

   (f) $t\dot{x} + 2x = \sin t, \quad t \neq 0$,

   (g) $t^2 \dot{x} + tx + 1 = 0$, $t \neq 0$

   (h) $(2e^x - t)\dot{x} = 1$

   (i) $(2t + 1)\dot{x} = 4t + 2x$, $t \neq -1/2$

   (j) $(3tx - \ln x)\dot{x} = x^2$

   Дополнительно: Рассмотрите уравнения (c), (f) и (g) при $t = 0$. Решите задачу Коши $x(0) = 0$.

3. **Уравнения, не разрешенные относительно производной.** Пусть F – функция на области в $\mathbb{R}^3$. Решением ДУ

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1}$$

называется функция $x = x(t)$, такая что $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$. Понятие решения можно обобщить, разрешив решения в параметрической форме. Именно, пусть удалось найти функции $t = t(p)$, $x = x(p)$, такие что

$$F(t(p), x(p), \dot{x}(p)/\dot{t}(p)) \equiv 0$$

(слева стоит функция одной переменной p!). Здесь учтено, что $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \dot{x}(p)/\dot{t}(p)$. Заданные таким образом функции t и x тоже называются решением.

Иногда не удается выписать формулу непосредственно для $\dot{x}$, но можно написать в явном виде $x = f(t, \dot{x})$. В этом случае помогает ввести новую переменную $p = \dot{x}$, и взять полный дифференциал уравнения $x = f(t, p)$:

$$\mathrm{d}x = f_p(t, p)\mathrm{d}p + f_t(t, p)\mathrm{d}t.$$

Отметим, что $\mathrm{d}x = p\mathrm{d}t$, тогда мы получим "дифференциальное" уравнение

$$p\mathrm{d}t = f_p(t, p)\mathrm{d}p + f_t(t, p)\mathrm{d}t.$$

Это уравнение может быть решено методами с прошлых занятий. В этом случае следует искать решение в виде $t(p)$. Тогда $x = f(t(p), p)$.

Замечание Решение уравнения (1) относительно $\dot{x}$ может быть не единственным (например, $(\dot{x})^2 - x = 0$). Решение $x(t)$ дифференциального уравнения называется **критическим** если для любого $t \in R$ есть еще хотя бы одно решение, проходящее через точку $(t, x(t))$ и касательное к критическому.

Нетрудно показать, что все критические решешия удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Для нахождения критического решения мы должны использовать совместно это уравнение и уравнение (1), тогда мы можем избавиться от $\dot{x}$, и получить функцию $x(t)$ (возможно в параметрической форме или неявном виде). Такое решение является “хорошим кандидатом” для критического решения. Тем не менее мы все еще должны проверить действительно ли оно удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Задачи: Найдите все решения следующих уравнений.

(a) $x = t + \dot{x} - \ln \dot{x}$,

(b) $x = \dot{x}^2 + 2\dot{x}^3$,

(c) $x = \ln(1 + \dot{x}^2)$,

(d) $\dot{x} = e^{t\dot{x}/x}$.

4. Дифференциальное уравнение вида

$$x = \phi(\dot{x})t + \psi(\dot{x})$$

называется **уравнением Лагранжа**.

Если ϕ не обращается в линейную функцию $\varphi(y) = y$ ни на каком интервале, то соответствующее уравнение в дифференциалах будет линейным неоднородным.

Задачи: Найдите все решения следующих уравнений:

(a) $x = \frac{2}{3}\dot{x}t + \frac{1}{3}\dot{x}^2$,

(b) $x = t\dot{x}^2 - 2\dot{x}^3$.

5. Частный случай уравнения Лагранжа

$$x = \dot{x}t + \psi(\dot{x})$$

называется **уравнением Клеро**.

Задача: используя описанные выше методы решите уравнение Клеро, обратите внимание, что одно из них имеет вид сильно отличающийся от других (огибающая семейства прямых

$$x = Ct + \psi(C),$$

представляющих неособые решения уравнения Клеро). В чем разница между решениями общего уравнения Лагранжа и уравнения Клеро?

Преобразование, сопоставляющее функции $-\psi$ особое решение $\varphi(t)$ уравнения Клеро, называется **преобразованием Лежандра**.

(a) Найти преобразование Лежандра функции $f(p) = p^4$,

(b) Найти преобразование Лежандра функции $f(x) = \frac{3}{4^{4/3}} x^{4/3}$.

6. Рассмотрим $x = w(t, C)$ семейство решений уравнения

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{2}$$

Пусть $z(t)$ другая функция, не совпадающая ни с одной функцией $w(t, C)$. Если $z(t)$ касается в каждой точке $(t, z(t))$ одного из решений семейства $w(t, c)$, то оно называется **огибающим**.

Задачи:

(a) Покажите, что если $z(t)$ является огибающим (2), то оно является решением этого уравнения.

(b) Выберите какое-либо семейство решений уравнения Клеро и найдите его огибающую.

7. *Уравнением Риккати* называется дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t),$$

где $p(t), q(t), r(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, удовлетворяющие $p(t), r(t) \neq 0$. Это уравнение не может быть решено в общем случае. Тем не менее, если мы знаем одно решение $x_1(t)$, то можно найти все остальные решения в явном виде.

Предположим $x_1(t)$ известное нам решение уравнения Рикатти. Найдите остальные решения уравнения Рикатти.