8 Занятие 20/10/2020: свойства измеримых функций, интеграл Лебега

Задачи

(1) Доказать, что функция, принимающая не более счетного множества значений, измерима тогда и только тогда, когда измеримы все ее множества уровня

$$L_e(f) = \{x \in X \colon f(x) = c\}.$$

Верно ли это для произвольных функций?

(2) Доказать, что вещественная функция f на отрезке $[a, b]$ измерима по мере Лебега тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция, отличающаяся от f на множестве меры меньше ε.

(3) Из предыдущей задачи следует, что любая измеримая на отрезка $[a, b]$ функция f является почти всюду пределом последовательности f_n непрерывных функций. Всегда ли эту последовательность можно выбрать монотонной?

(4) Показать, что функция Дирихле

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

может быть получена из непрерывных функций двукратным предельным переходом

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos(2\pi n! x))^m.$$

Можно ли получить ее из непрерывных функций однократным предельным переходом?

(5) Доказать, что каждая измеримая функция может быть представлена в виде равномерного предела измеримых простых функций.

(6) Пусть φ монотонно возрастающая гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция на отрезке $[a, b]$. Пусть ψ — обратная к ней функция на $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Рассматривая интеграл Лебега, как предел суммы доказать, что

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} y\psi'(y)dy.$$

(7) Пусть $\mu(X) < \infty$. Доказать, что измеримая неоттрицательная функция f на X суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in X \colon f(x) \geq 2^n\}).$$

(8) Доказать, что функция f на отрезке $[a, b]$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.

(9) Доказать, что на вещественной прямой $\mathbb{R}$ не существует измеримого по Лебегу множества A такого, что для любого интервала Δ выполнено $\mu(A \cap \Delta) = \mu(\Delta)/2$.