Содержание

Последнее обновление 27 сентября 2020 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/topology3.pdf

Топология и геометрия-3, практика, СПбГУ 2020, факультет математики и компьютерных наук

Никита Сергеевич Калинин, Нина Дмитриевна Лебедева, Евгений Анатольевич Фоминых
Для всех групп: 201,202,203

1 Самый животрепещущий вопрос: как будут считать рейтинг

Вместо рейтинга каждый предмет номинирует примерно 1/3 студентов как *отличных* студентов, примерно 1/3 студентов как *хороших* студентов. Быть *отличным* студентом раза в два-три почётнее, чем быть *хорошим* студентом. И ещё есть какие-то правила, что тройки и двойки на экзаменах получать плохо.

Итого, ваша стратегия, если хочется стипендию: не получать троек на экзаменах, по всем предметам желательно быть хорошим студентом, и по как можно большему числу любимых предметов быть отличным студентом.

На геометрии и топологии, разделение на отличных, хороших и остальных студентов будет основываться на ваших успехах в течение семестра. Нет никакой формулы. Учитывается ваша активность на занятиях, какие задачи вы решили в группе, какие задачи рассказали, какие сделали в дз, насколько сложные задачи решили. Может быть будут контрольные.

Общее правило: чем более сложные задачи вы решаете, тем лучше (тогда мы поверим, что простые задачи вам очевидны). **Чем лучше вы их записываете или рассказываете, тем лучше** (про плохо записанные/рассказанные задачи мы поставим плюсик, но для себя запишем, что человек не старался). **Если вы решаете в группе, то предпо-**

лагается, что любой участник группы может рассказать решение любой задачи из решённых группой. Мы будем это проверять.

Практика у нас по понедельникам, задачи с конкретного практического занятия можно сдавать **в понедельник и на следующих день – вторник**. Задачи со **звёздочкой можно сдавать в течение недели – до воскресенья**. Сдавать задачи нужно либо устно во время занятия, либо присылать письменное решение (там где удобно преподавателю – например, в Slack или в Microsoft teams, по ходу решим). Преподаватель может попросить устно рассказать то, что вы прислали письменно.

Если вы решили задачу в составе группы – пишите состав группы, когда присылаете решение. Никакого штрафа за совместное решение нет (но мы можем попросить кого-то из участников группы рассказать решение, и если человек не справится, то вся группы не получает плюсик за эту задачу).

В целом – занимайтесь, решайте сложные задачи, и всё будет хорошо.

Где-то в октябре мы скажем, каковы были бы рекомендации (кто хороший, а кто отличный) на этот момент, чтобы дать обратную связь.

2 Летнее задание

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 9. Докажите, что любое линейно связное трёхточечное пространство односвязно.

Задача 10. Рассмотрим топологическое пространство $X = \{a, b, c, d\}$, в котором база топологии состоит из множеств $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, b, c\}$ и $\{a, c, d\}$.

1. (2 балла) Докажите, что пространство X неодносвязно;
2. (3 балла) Найдите $\pi_1(X)$.

Задача 11. Пусть $X \subset \mathbb{R}^4$ — множество симметричных (2×2)-матриц с отрицательным определителем. Докажите, что пространство X гомотопически эквивалентно S^1.

Задача 12. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы коммутативна. *Топологической группой* называется множество G на котором заданы как топологическая, так и групповая структура. При этом требуется, чтобы отображения $G \times G : (x, y) \to xy$ и $G \to G : x \to x^{-1}$ были непрерывны.

Задача 13. Пусть ℓ — простая замкнутая кривая на стандартно вложенном в $\mathbb{R}^3$ торе, поднятие которой в универсальное накрытие тора задается уравнением $pu = qv$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Выпишите задание фундаментальной группы пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$.

Задача 14. Докажите, что к краю стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ ленты Мёбиуса нельзя приклеить диск, который не пересекает эту ленту Мёбиуса.

3 Занятие коронавирусгеометрии-1, 7 сентября 2020, Задачи по теме “фундаментальная группа и накрытия”

Задача 1. Представьте сферу S^n как клеточное пространство: а) содержащее 2 клетки; б)чтобы его k-остовом для всякого целого неотрицательного $k < n$ была стандартная сфера $S^k \subset S^n$.

Задача 2. Представьте $\mathbb{R}P^n$ как клеточное пространство, состоящее из $n+1$ клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

Задача 3. Докажите, что $S^2 \times S^2$ — конечное клеточное пространство.

Разбор: https://youtu.be/DWVg-KQGAC4

Задача 4. а)Если X и Y — локально конечные клеточные пространства (т.е. любая точка в X обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток), то топологическое пространство $X \times Y$ может быть естественным образом наделено структурой клеточного пространства. б)***Останется ли верным это утверждение, если не требовать локальной конечности клеточных пространств X и Y?

Разбор: задача 42.3- 42.4 в книге Виро-Иванов-Нецветаев-Харламов, разобрана на странице 343.

Задача 5. Пусть A — конечное клеточное пространство. Через $c_i(A)$ обозначим число его i-мерных клеток. Эйлеровой характеристикой пространства A называется альтернированная сумма чисел $c_i(A)$:

$$\chi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_i(A).$$

Докажите, что эйлерова характеристика мультипликативна в следующем смысле. Если X и Y — конечные клеточные пространства, то $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Факт (не доказываем, но пользуемся). Эйлерова характеристика является инвариантом клеточного топологического пространства, то есть не зависит от способа представления в виде клеточного пространства.

Задача 6. Какое наименьшее число клеток необходимо для представления в виде клеточного пространства следующих пространств: а) ленты Мёбиуса; б) сферы с p ручками; в) сферы с q пленками?

Разбор: https://youtu.be/6FbGB-kEdiI и http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/zadacha6.pdf

Задача 7. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

Разбор: можно двулистно накрыть S^n, которое односвязно, значит $\mathbb{Z}_2$. Ещё можно взять двумерный остов (от которого только и зависит π_1), это $\mathbb{R}P^2$, представить его в виде склейки квадрата, получается группа $< a | a^2 = e >$ то есть $\mathbb{Z}_2$.

4 14 сентября

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 8. Пространство X получается приклейкой к тору $S^1 \times S^1$ двух дисков: одного вдоль его параллели $S^1 \times \{1\}$, второго вдоль меридиана $\{1\} \times S^1$. а) Вычислите $\pi_1(X)$; б)Докажите, что X гомотопически эквивалентно сфере S^2.

Задача 9. Пусть $p : X \to B$ — накрытие, причем $x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0$ и пространства X, B линейно связны). Постройте естественную биекцию множества $p^{-1}(b_0)$ на множество правых смежных классов фундаментальной группы базы этого накрытия по группе накрытия.

Задача 10. Чему могут равняться числа листов накрытия: а) ленты Мёбиуса кольцом $S^1 \times I$; б) ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

Задача 11. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна плоскостью?

Задача 12. Опишите с точностью до эквивалентности все накрытия окружности S^1.

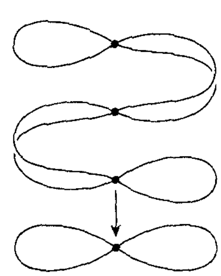
Задача 13. Накрытие $p : X \to B$ $(x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0)$, где пространства X, B "хорошие", называется регулярным, если $p_*(\pi_1(X, x_0))$ нормальная подгруппа в $\pi_1(B, b_0)$. Является ли регулярным накрытие $S^1 \to S^1, z \to z^n$?

Задача 14. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Задача 15. Докажите, что любое связное двулистное накрытие: а) обладает нетривиальным автоморфизмом; б) регулярно.

Задача 16. Докажите, что трёхлистное накрытие букета двух окружностей графом с тремя вершинами (см. рис. ниже) не является регулярным.



Задача 17. ***Докажите, что всякое конечное клеточное пространство метризуемо.

5 21 сентября

Задача 18. Вокруг некоторой точки O окружности радиуса a вращается луч. На этом луче по обе стороны от точки A его пересечения с окружностью откладываются отрезки AM_1 и AM_2 длины $2b$. Составьте параметрическое уравнение кривой, описываемой точками M_1 и M_2 (улитка Паскаля; в частности, при $a = b$ — кардиоида).

Задача 19. Найдите кривую, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и кругового цилиндра диаметра R, одна из образующих которого проходит через центр сферы. Эта кривая называется кривой Вивиани.

Задача 20. a) Выразить производные следующих функций через данную вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ и ее производные: $\mathbf{r}^2(t)$; $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$; $|\mathbf{r}(t)|$; $\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|$.

b) Доказать, что $|\mathbf{r}(t)| = \mathrm{const}$, экви $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

c) Доказать, что кривая $\mathbf{r}(t)$ лежит в фиксированной плоскости с нормалью n, экви $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Задача 21. Доказать, что: a) если $\mathbf{r}' = \mathrm{const}$, то $\mathbf{r}(t)$ задает прямую,

b) если $t \in [a, b]$, а $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по разные стороны от данной плоскости, то кривая пересекает эту плоскость,

c) если $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по одну сторону и на одинаковом расстоянии от данной плоскости, то некоторая касательная этой кривой параллельна данной плоскости.

Задача 22. Вывести из определения эллипса, что вектор $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1| + \mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_2|$ является нормалью к эллипсу, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — фокальные радиусы-векторы.

Задача 23. Составьте натуральную параметризацию кривой

a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ (цепная линия).

b) $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ (винтовая линия).

Задача 24. Доказать, что кривая $\gamma(t) = (t, t\sin\pi/t), t \neq 0$, $\gamma(0) = (0, 0)$ имеет бесконечную длину на интервале $[0, 1]$.

Задача 25. *** Пусть параметризация (не обязательно натуральная) гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ такова, что длина хорды $|\gamma(t) - \gamma(s)|$ зависит только от $t - s$. Доказать, что кривая является подмножеством прямой либо окружности.

6 28 сентября

Эволюта кривой — это кривая, образованная её центрами кривизны.

Задача 26. Составьте уравнения и начертите эволюту эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Задача 27. Найдите точки экстремума кривизны параболы и эллипса. Найдите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 28. Для плоской кривой $\gamma(t)$ и фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию $S(t) = |\gamma(t) - q|^2$. Докажите, что

1. q лежит на нормали к кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = 0$;
2. q является центром кривизны кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = 0$;
3. q является точкой нулём производной функции кривизны $\Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = S'''(t) = 0$.

Задача 29. Докажите, что модуль кривизны имеет строгий локальный максимум в t_0 эквивалентно условию, что для некоторого $\varepsilon > 0$ участок кривой $\gamma[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ "лежит между" соприкасающейся окружностью и касательной и имеет с этой окружностью только одну общую точку $\gamma(t_0)$.

Задача 30. Пусть простая замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ ограничивает замкнутую область F. Будем говорить, что окружность вписана в γ, если она содержится в F и имеет с γ более одной общей точки. Кривизну будем считать положительной, если нормаль направлена внутрь F.

1. Доказать, что если для последовательности окружностей, вписанных в кривую, точки касания $p_n, q_n \to \gamma(t_0)$, то эти окружности сходятся к соприкасающейся окружности в точке $\gamma(t_0)$.
2. Доказать, что для множества точек касания K_1 и K_2 двух вписанных окружностей множество K_2 лежит в одной компоненте связности множества $\gamma(S^1) \setminus K_1$.
3. Доказать, что для вписанной окружности с множеством точек касания K_1 каждая связная компонента $\gamma(S^1) \setminus K_1$ содержит точку максимума кривизны.
4. Используя предыдущий пункт, доказать теорему о четырех вершинах: простая замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ имеет по-крайней мере 4 точки экстремума кривизны.

Задача 31. Доказать, что если простая замкнутая плоская кривая кривизны $|k| < 1$ ограничивает фигуру F, то F содержит диск радиуса 1.

(Подсказка: использовать предыдущую задачу.)

Задача 32. ***Срединная ось простой замкнутой плоской кривой это замыкание множества центров вписанных окружностей. Доказать, что найдется сколь угодно близкая во втором порядке кривая, для которой срединная ось - конечное дерево.