Практика 13.10

1. Докажите, что функтор $F : C \to D$ сопряжен слева функтору $G : D \to C$ тогда и только тогда, когда существуют естественные преобразования $\epsilon : FG \to Id_D$ и $\eta : Id_C \to GF$ такие, что $\epsilon_{FX} F\eta_X = Id_{FX}$ и $G\epsilon_Y \eta_{GY} = Id_{GY}$ для любых объектов X категории C и Y категории D.

2. Пусть даны функторы $F : C \to D$ и $G : D \to C$ и естественные преобразования $\epsilon : FG \to Id_D$ и $\eta : Id_C \to GF$ такие, что $(G\epsilon)(\eta G) = Id_G$. Докажите, что $(\epsilon F)(F\eta) : F \to F$ является идемпотентом в D^C и что G имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда этот идемпотент расщепляется, т.е. существует функтор $F' : C \to D$ и пара естественных преобразований $\alpha : F \to F'$ и $\beta : F' \to \beta$ таких, что $\alpha\beta = 1_{F'}$ и $\beta\alpha = (\epsilon F)(F\eta)$.

3. Докажите, что сопоставление группе G её группового кольца $\mathbb{Z}G$ и сопоставление кольцу его группы обратимых элементов — это пара сопряженных функторов $\mathbf{Grp} \longleftrightarrow \mathbf{Ring}$.

4. Пусть $Rings_0$ — категория колец, не обязательно имеющих единицу. Постройте левый сопряженный к вложению $Rings$ (колец с единицей) в $Rings_0$.

5. Пусть $\mathcal{F} : C \longleftrightarrow D : \mathcal{G}$ — пара сопряженных функторов, E — малая категория. Докажите, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ задают сопряженность между категориями функторов $Fun(E, C)$ и $Fun(E, D)$.

6. Покажите, что, если функтор F имеет два правых сопряженных G и G', то существует естественный изоморфизм $G \simeq G'$.

7. В условиях задачи 1 докажите, что, если F — полный функтор, то $\eta_{GX} G\epsilon_X = Id_{GFGX}$.

8. В условиях задачи 1 пусть G — полный функтор, а морфизм η_X является мономорфизмом для любого объекта X категории C. Докажите, что для любого X морфизм η_X является и эпиморфизмом.

9. Пусть F — левый сопряженный к G. Докажите, что G строгий тогда и только тогда, когда для люioых двух объектов X категории C и Y категории D естественный изоморфизм $Hom_C(X, GY) \cong Hom_D(FX, Y)$ переводит эпиморфизмы из X в GY в эпиморфизмы из FX в Y.