Дифференциальные уравнения. Задания 4.

Уравнения в полных дифференциалах

Решение ДУ $\dot{y} = F(x,y)$ часто не удается выразить в виде функции $y = y(x)$ (разрешить относительно y – напомнить пример из уже решенных). Уравнение в полных дифференциалах – отличие от обычной записи ДУ – используется, когда мы не преследуем цели выразить y через x, готовы удовлетвориться решением в виде $R(x, y, C) = 0$.

Если выражение

$$A(y,x)\mathrm{d}x + B(y,x)\mathrm{d}y$$

представляет собой полный дифференциал, то выполнено условие:

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

В случае односвязной области это условие будет и достаточным. Если область неодносвязна, условие односвязности не достаточно. Пример:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

в кольце $1 < x^2 + y^2 < 4$.

1. Найдите решение для следующих уравнений в полных дифференциалах.
   (a) $2xy\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y = 0$,
   (b) $e^{-y}\mathrm{d}x - (2y + xe^{-y})\mathrm{d}y = 0$,
   (c) $\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0, \quad x > 0$,
   (d) $(2 + 9xy^2)x\mathrm{d}x - (4y^2 - 6x^3)y\mathrm{d}y = 0$
   (e) $3x^2(1 + \ln y)\mathrm{d}x = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y$;
   (f) $2x(1 + \sqrt{x^2 + y})\mathrm{d}x + \sqrt{x^2 + y}\mathrm{d}y = 0$;
   (g) $(1 - y^2 \sin 2x)\mathrm{d}x + 2y\cos^2 x\mathrm{d}y = 0$.

2. Часто уравнение

   $$A(x,t)\mathrm{d}x + B(x,t)\mathrm{d}t = 0$$

   не является уравнением в полных дифференциалах, но при этом можно подобрать такую функцию $M(x,t)$, что

   $$M(x,t)A(x,t)\mathrm{d}x + M(x,t)B(x,t)\mathrm{d}t = 0$$

   является уравнением в полных дифференциалах. В таком случае $M(x,t)$ называется *интегрирующим множителем.*

   Обратите внимание, что замена переменных сама по себе никогда не делает из уравнения не в полных дифференциалах уравнение в полных дифференциалах. Однако, замена переменных может упростить вид уравнения и упростить задачу поиска интегрирующего множителя.

   Решите следующие уравнения или найдите для них интегрирующий множитель.

(a) $\mathrm{d}x + (x/y - \sin y)\mathrm{d}y = 0$,

(b) $y\mathrm{d}x - (4x^2y + x)\mathrm{d}y = 0$,

(c) $(3x^2y + 2xy + y^3)\mathrm{d}x = -(x^2 + y^2)\mathrm{d}y$,

(d) $\left(y - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 0$,

(e) $2y(2x + y)\mathrm{d}x + (2xy + 1)\mathrm{d}y = 0$,

(f) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 2x^3 \tan\frac{y}{x}\mathrm{d}x$,

(g) $(x^2 + 3\ln y)y\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$,

(h) $y^2\mathrm{d}x + (e^x - y)\mathrm{d}y = 0$.

(i) $(x^2y^3 + y)\mathrm{d}x + (x^3y^2 - x)\mathrm{d}y = 0$

(j) $(x^2 + 1 - \sin y)\mathrm{d}x + \frac{(x^2+1)\cos y}{2x}\mathrm{d}y = 0$

(k) $(x^2 - y)\mathrm{d}x + x(y + 1)\mathrm{d}y = 0$

Уравнения, не разрешенные относительно производной. Пусть F – функция на области в $\mathbb{R}^3$. Решением ДУ

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1}$$

называется функция $x = x(t)$, такая что $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$. Понятие решения можно обобщить, разрешив решения в параметрической форме. Именно, пусть удалось найти функции $t = t(p)$, $x = x(p)$, такие что

$$F(t(p), x(p), \dot{x}(p)/\dot{t}(p)) \equiv 0$$

(слева стоит функция одной переменной p!). Здесь учтено, что $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \dot{x}(p)/\dot{t}(p)$. Заданные таким образом функции t и x тоже называются решением.

Иногда не удается выписать формулу непосредственно для $\dot{x}$, но можно написать в явном виде $x = f(t, \dot{x})$. В этом случае помогает ввести новую переменную $p = \dot{x}$, и взять полный дифференциал уравнения $x = f(t, p)$:

$$\mathrm{d}x = f_p(t, p)\mathrm{d}p + f_t(t, p)\mathrm{d}t.$$

Отметим, что $\mathrm{d}x = p\mathrm{d}t$, тогда мы получим "дифференциальное" уравнение

$$p\mathrm{d}t = f_p(t, p)\mathrm{d}p + f_t(t, p)\mathrm{d}t.$$

Это уравнение может быть решено методами с прошлых занятий. В этом случае следует искать решение в виде $t(p)$. Тогда $x = f(t(p), p)$.

Замечание Решение уравнения (1) относительно $\dot{x}$ может быть не единственным (например, $(\dot{x})^2 - x = 0$). Решение $x(t)$ дифференциального уравнения называется **критическим** если для любого $t \in R$ есть еще хотя бы одно решение, проходящее через точку $(t, x(t))$ и касательное к критическому.

Нетрудно показать, что все критические решешия удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Для нахождения критического решения мы должны использовать совместно это уравнение и уравнение (1), тогда мы можем избавиться от $\dot{x}$, и получить функцию $x(t)$ (возможно в параметрической форме или неявном виде). Такое решение является "хорошим кандидатом" для критического решения. Тем не менее мы все еще должны проверить действительно ли оно удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Задачи:

3. Найдите все решения следующих уравнений.

   (a) $x = t + \dot{x} - \ln \dot{x}$,
   (b) $x = \dot{x}^2 + 2\dot{x}^3$,
   (c) $x = \ln(1 + \dot{x}^2)$,
   (d) $\dot{x} = e^{t\dot{x}/x}$.

4. Дифференциальное уравнение вида

$$x = \phi(\dot{x})t + \psi(\dot{x})$$

   называется **уравнением Лагранжа**.

   Если ϕ не обращается в линейную функцию $\varphi(y) = y$ ни на каком интервале, то соответствующее уравнение в дифференциалах будет линейным неоднородным.

   Задачи: Найдите все решения следующих уравнений:

   (a) $x = \frac{2}{3}\dot{x}t + \frac{1}{3}\dot{x}^2$,
   Д/з:
   (b) $x = t\dot{x}^2 - 2\dot{x}^3$.

   Частный случай уравнения Лагранжа

$$x = \dot{x}t + \psi(\dot{x})$$

   называется **уравнением Клеро**.

   Задача: используя описанные выше методы решите уравнение Клеро, обратите внимание, что одно из них имеет вид сильно отличающийся от других (огибающая семейства прямых

$$x = Ct + \psi(C),$$

   представляющих неособые решения уравнения Клеро). В чем разница между решениями общего уравнения Лагранжа и уравнения Клеро?

   Преобразование, сопоставляющее функции $-\psi$ особое решение $\varphi(t)$ уравнения Клеро, называется **преобразованием Лежандра**.

   (a) Найти преобразование Лежандра функции $f(p) = p^4$,
   (b) Найти преобразование Лежандра функции $f(x) = \frac{3}{4^{4/3}}x^{4/3}$.

5. Рассмотрим $x = w(t, C)$ семейство решений уравнения

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{2}$$

Пусть $z(t)$ другая функция, не представимая совпадающая ни с одной функцией $w(t, C)$. Если $z(t)$ касается в каждой точке $(t, z(t))$ одного из решений семейства $w(t, c)$, то оно называется **огибающим**.

Задачи:

(a) Покажите, что если $z(t)$ является огибающим (2), то оно является решением этого уравнения.

(b) Выберите какое-либо семейство решений уравнения Клеро и найдите его огибающую.