10 Занятие 10/11/2020: кратные интегралы

Теория

Для начала вспомним немного теории из прошлого семестра. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Тогда назовем множетсво X **элементарным относительно оси** Oy если

$$X = \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Аналогичным образом можно определить элементарное относительно Oy множество. Множество, которое элементарно относительно каждой из осей называется элементарным.

Аналогично можно обобщить эти определения на большую размерность.

Элементарными такие множества называются потому что по ним легко интегрироввать.

Действительно, пусть функция f интегрируема на множестве X, которое элементарно относительно оси Oy. Тогда

$$\iint_X f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Заметим, что если f непрерывна, то каждый из интегралов справа (в повторном интеграле) существует.

Напомним о замене переменных в кратном интеграле. Пусть даны две измеримые области $X, U \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi \colon \overline{U} \to \overline{X}$ такое, что φ взаимно-однозначно на U и непрерывно дифференцируемо на $\overline{U}$. Если $f(x)$ интегрируема на X, то функция $f(\varphi(u))|J(u)|$ интегрируема на U и выполнено равенство

$$\int_X f(x)dx = \int_U f(\varphi(u))|J(u)|, du$$

где $J(u) = \det \varphi'(u)$ — якобиан отображения φ.

Задачи

(1) Посчитать якобиан перехода к полярным координатам на плоскости: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; к цилиндрическим координатам в пространстве: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$; к сферическим координатам в пространстве: $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\varphi$.

(2) Вычислить $I = \displaystyle\iint_X f(x, y)dxdy$ для

(a) $f(x, y) = (1 + x + y)^{-2}$, X — треугольник, ограниченный прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

(b) $f(x, y) = y^2$, X ограничено линиями $x = y^2$, $y = x - 2$.

(c) $f(x, y) = x$, X задано неравенствами $2rx \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 < 2r < R$.

(3) Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^\pi \int_0^{2\sin x} f(x, y)dy.$$

(4) Вычислить $I = \displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \sqrt[4]{1 - y^2}dydx$.

(5) Доказать, что при $|a| \neq 1$ выполнено

$$I(a) = \int_0^{\pi} \log(a^2 + 1 - 2a\cos\varphi)d\varphi = \begin{cases} 2\pi \log |a|, & |a| > 1, \\ 0, & |a| < 1. \end{cases}$$

(6) Вычислить $\iiint_X f(x, y, z)dxdydz$ для

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, X ограничено плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

(b) $f(x, y, z) = y$, X задано неравенствами $|x| \leq z$, $0 \leq z \leq 1$, $z \leq y$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

(7) Вычислить

$$I = \iiint_X \frac{dxdydz}{(x + y + z)^3},$$

где X ограничено плоскостями $4x + 3z = 12$, $4x + z = 4$, $4y + 3z = 12$, $4y + z = 4$, $z = 0$.

(8) Вычислить $I = \int_X f(x, y)dxdy$ для

(a) $f(x, y) = x$, $X = \{2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x\}$.

(b) $f(x, y) = 1/y$, X ограничено прямыми $y = x$, $y = 2x$, $y = 1 - x/2$, $y = 4 - 2x$.

(9) Вычислить $I = \int_X f(x, y, z)dxdydz$ для

(a) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $X = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq a\}$.

(b) $f(x, y, z) = 1$, $X = \{(x^2 + y^2 + z^2) \leq 4xyz, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $f(x, y, z) = |z|$, $X = \{(x - y)^2 + (y - z)^2 \leq R^2, 0 \leq x + y + z \leq h\}$.