7 Занятие 13/10/2020: мера Лебега, свойства измеримых функций

Задачи

(1) Описать все подмножества E отрезка $[0,1]$ такие, что их характеристические функции $\chi_E(x)$ интегрируемы по Риману.

(2) Для любого подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим разность как

$$M - M = \{x - y \colon x, y \in M\}.$$

Доказать, что если M измеримо и имеет положительную лебеговскую меру, то $M - M$ содержит окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

(3) Определим меру μ на $[0,1]$ как

$$\mu([\alpha,\beta)) = \log\frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

Доказать, что эта мера сохраняется при преобразовании $f\colon x \to \{x^{-1}\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x (то есть доказать, что $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$).

(4) Пусть μ — мера Лебега на отрезке $[0,1]$, а f — измеримая и почти всюду конечная на этом отрезке функция. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $C \subset [0,1]$ такое, что ограничение функции f на множество C непрерывно и $\mu(C) > 1 - \varepsilon$.

(5) Пусть $f_n(x)$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$ тоже измеримы.

(6) Пусть $f_n(x)$ — последовательность измеримых функций. Доказать, что множество тех точек x, где существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ измеримо.

(7) Вещественные функции f и g, измеримые относительно мер μ и ν соответственно называются **равноизмеримыми**, если для любого $c > 0$ выполнено $\mu(\{x\colon f(x) < c\}) = \nu(\{y\colon g(y) < c\})$. Доказать, что если f измерима относительно меры μ, то существует непрерывная слева на отрезке $[0, \mu(X)]$ неубывающая функция g, равноизмеримая с f. Доказать также единственность g.

(8) Доказать, что две непрерывные функции на отрезке эквивалентны относительно меры Лебега только когда они тождественно равны.

(9) Построить измеримую по Лебегу функцию на отрезке, не эквивалентную никакой непрерывной функции.

(10) Занумеруем все рациональные числа отрезка $[0,1]$ и запишем k-ое число r_k в виде несократимой дроби $r_k = p_k/q_k$. Пусть $f_k(x) = \exp(-(p_k - xq_k)^2)$. Доказать, что $f_k \to 0$ по мере Лебега на $[0,1]$ и что $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ не существует ни в одной точке отрезка $[0,1]$. Указать явно подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду.