Дифференциальные уравнения. Задание 7.

1. Дифференциальное уравнение вида

$$x = \phi(\dot{x})t + \psi(\dot{x})$$

называется **уравнением Лагранжа**.

Если ϕ не обращается в линейную функцию $\varphi(y) = y$ ни на каком интервале, то соответствующее уравнение в дифференциалах будет линейным неоднородным.

Задачи: Найдите все решения следующих уравнений:

   (a) $x = \frac{2}{3}\dot{x}t + \frac{1}{3}\dot{x}^2$,

   (b) $x = t\dot{x}^2 - 2\dot{x}^3$.

2. Частный случай уравнения Лагранжа

$$x = \dot{x}t + \psi(\dot{x})$$

называется **уравнением Клеро**.

Задача: используя описанные выше методы решите уравнение Клеро, обратите внимание, что одно из них имеет вид сильно отличающийся от других (огибающая семейства прямых

$$x = Ct + \psi(C),$$

представляющих неособые решения уравнения Клеро). В чем разница между решениями общего уравнения Лагранжа и уравнения Клеро?

Преобразование, сопоставляющее функции $-\psi$ особое решение $\varphi(t)$ уравнения Клеро, называется **преобразованием Лежандра**.

   (a) Найти преобразование Лежандра функции $f(p) = p^4$,

   (b) Найти преобразование Лежандра функции $f(x) = \frac{3}{4^{4/3}}x^{4/3}$.

3. Рассмотрим $x = w(t, C)$ семейство решений уравнения

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{1}$$

Пусть $z(t)$ другая функция, не совпадающая ни с одной функцией $w(t, C)$. Если $z(t)$ касается в каждой точке $(t, z(t))$ одного из решений семейства $w(t, c)$, то оно называется **огибающим**.

Задачи:

(a) Покажите, что если $z(t)$ является огибающим (1), то оно является решением этого уравнения.

(b) Выберите какое-либо семейство решений уравнения Клеро и найдите его огибающую.

4. Задачи

   (a) Найдите кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной и осями абсцисс и ординат, есть величина постоянная, равная a^2.

   (b) Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания есть величина постоянная равная a^2.

   (c) Найдите кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

5. *Уравнением Риккати* называется дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t),$$

   где $p(t), q(t), r(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, удовлетворяющие $p(t), r(t) \neq 0$. Это уравнение не может быть решено в общем случае. Тем не менее, если мы знаем одно решение $x_1(t)$, то можно найти все остальные решения в явном виде.

   Предположим $x_1(t)$ известное нам решение уравнения Рикатти. Найдите остальные решения уравнения Рикатти.

6. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n,$$

   где $p(t), q(t) : R \to R$ непрерывные функции и $n > 1$ – целое число. Это нелинейное уравнение, которое может быть явно решено. Оно получило распространение, потому что в действительности есть не так много нелинейных уравнений, которые могут быть решены в явном виде.

   (a) При помощи замены переменных решите данное уравнение в общем виде

   (b) Решите уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

7. Разные уравнения

(a) $y' = 10^{x+y}$,

(b) $y' = \cos(y - x)$,

(c) $y^2 + x^2y' = xyy'$,

(d) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$,

(e) $y' = y^2 - 2/x^2$.

(f) $(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$,

(g) $xy^2(xy' + y) = 1$,

(h) $-y^2\mathrm{d}x + (e^x + 2y)\mathrm{d}y = 0$.

(i) $(2 - 9xy^2)x\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\mathrm{d}y = 0$,

(j) $xy' - 2y = 2x^4$,

(k) $x^2y' + xy + 1 = 0$,

(l) $(xy' - 1) \ln x = 2y$,

(m) $\dot{x} = \frac{1}{4t^2+4tx+x^2} - 2$

(n) $\frac{\dot{x}}{t} = \frac{t}{x^2} + x$

(o) $2yx^4dy + \Big(2x^3y^3 + 2x(x^2y^2 + 1)\Big)dx = 0$

(p) $\frac{dy}{\frac{1}{x}+y} - \frac{dx}{x+yx^2} = 0$

(q) $\dot{y} = xy^2 \cos x + x \cos x$

(r) $\dot{y} = x^3 - 2xy$

(s) $y' - \frac{3}{2}y - \frac{te^t}{y} = 0$

(t) $y' \sin(y - t^2) = \cos(t) \cos(y - t^2) - 2t \sin(y - t^2)$

(u) $y'e^{-t^2} - 3te^{-t^2}y = 3 \log(t) \sqrt[3]{y^2},\ t > 0$

(v) $\dot{x}/t + 2x \sin(t^2) = \sin(2t^2)$

(w) $x(x + y^2)\mathrm{d}x + x^2(y - 2x/y)\mathrm{d}y = 0$

(x) $\dot{x} = -\dfrac{4t^3x}{x^2 + t^4}$