

Дифференциальные уравнения. Задание 10.

1. Найдите экспоненты следующих матриц.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Решите следующие задачи Коши. Решение должно быть записано в вещественной форме без использования комплексных чисел.

$$i. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -5x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 3,$$

$$ii. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 2,$$

$$iii. \begin{cases} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 1,$$

$$iv. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

(b) Решите следующие уравнения. В пункте а) решение должно быть записано в вещественной форме.

$$i. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y - 2z \\ \dot{y} = 8x - 5y - 4z \\ \dot{z} = -4x + 3y + 3z \end{cases}, \quad ii. \dot{z} = (3 + 2i)z.$$

3. (a) Постройте такие матрицы A, B , что $e^{A+B} \neq e^A e^B$ и $e^A e^B \neq e^B e^A$.

(b) Рассмотрим $(N \times N)$ -матрицы A, B и дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

$$\dot{y} = By. \tag{2}$$

Пусть $x(t) = \phi(t, x_0)$ – решение задачи Коши $x(0) = x_0$ уравнения (1). Пусть $y(t) = \psi(t, y_0)$ – решение задачи Коши $y(0) = y_0$ уравнения (2). Отметим, что

$$\phi(t, x_0) = e^{At} x_0, \quad \psi(t, y_0) = e^{Bt} y_0.$$

Будем говорить, что уравнения (1) и (2) *коммутируют* если

$$\phi(t_1, \psi(t_2, x)) = \psi(t_2, \phi(t_1, x)), \quad \text{for any } t_1, t_2 \in R, x \in R^N.$$

Докажите, что уравнения (1) и (2) коммутируют тогда и только тогда когда $AB = BA$.

4. Решите следующие дифференциальные уравнения.

(a) $y''' - y'' - 2y' + 2 = 0$.

i. Найдите решение, удовлетворяющее условию:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = -1, \end{cases},$$

ii. Найдите все решения, удовлетворяющие условию:

$$\begin{cases} y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases},$$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$,

(c) $y^{(4)} - y = 0$,

(d) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$,

(e) $x^2 y''' = 2y'$.