6 Занятие 06/10/2020: мера и интеграл Лебега

Пусть заданы множество X, σ-алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^X$ и счетно-аддитивная мера μ на $\mathfrak{A}$.

Функция называется **простой** если она принимает не более чем счетное число значений. Такая функция может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x), \quad \chi_{A_k}\text{— характеристическая функция } A_k.$$

Можно считать, что все A_k измеримы и $X = \bigsqcup_k = 1^\infty A_k$ (вообще говоря, если c_k различны, то измеримость A_k следует из измеримости f).

Функция f называется **суммируемой** на X если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \mu(A_k).$$

Для суммируемой функции f можно определить ее интеграл по множеству $A \subset \mathfrak{A}$ как

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(A \cap A_k).$$

Сходимость ряда вытекает из суммируемости f.

Задачи

(1) Пусть f, g — две суммируемые простые функции. Доказать, что

(a)
$$\int_A (f(x) + g(x)) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_A g(x) d\mu(x).$$

(b)
$$\int_A (\alpha f(x)) d\mu(x) = \alpha \int_A f(x) d\mu(x).$$

(c) Если $|f(x)| \leq M$ почти всюду на A и $\mu(A) < \infty$, то
$$\left| \int_A f(x) d\mu(x) \right| \leq M\mu(A).$$

(2) Пусть $\mu(X) < \infty$ и f — суммируемая функция на X. Доказать, что интеграл Лебега можно вычислить по формуле

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in X \colon t_k \leq f < t_{k+1}\}),$$

где $T = \{t_k\}$ — разбиение вещественной оси, $\lambda(T) = \sup_k |t_k - t_{k+1}|$, ξ_k — любой набор точек такой, что $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

(3) Доказать утверждение задачи 2 при $\mu(X) = \infty$, добавив условие, что $\xi_k = 0$ если $[t_k, t_{k+1}]$ содержит 0.

(4) Пусть измеримая простая функция f представлена двумя способами в виде линейных комбинаций характеристических функций дизъюнктных множеств

$$f(x) = \sum_k c_k \chi_{A_k}(x) = \sum_\ell d_\ell \chi_{B_\ell}(x).$$

Доказать, что

$$\sum_k c_k \mu(A_k) = \sum_\ell d_\ell \mu(B_\ell)$$

в случае если один из рядов сходится абсолютно.

(5) При каких значениях α, β функция $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, определенная на $(0,1]$ интегрируема по Лебегу? Несобственно интегрируема по Риману?

(6) Доказать, что интеграл Лебега от неотрицательной суммируемой функции f по множеству A неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду на A.

(7) Доказать, что неотрицательная измеримая функция f суммируема на A тогда и только тогда когда для всех простых функций g, не превосходящих по модулю f, интегралы

$$\int_A g(x) d\mu(x)$$

ограничены одной и той же константой.

(8) Пусть $f_+(x) = (f(x) + |f(x)|)/2$ и $f_-(x) = (|f(x)| - f(x))/2$. Доказать, что $f(x)$ суммируема тогда и ттолько тогда когда суммируемы функции f_+ и f_-.

(9) что неотрицательная измеримая функция f суммируема на A тогда и только тогда когда

$$\sup \int_A f(x) d\mu(x) < \infty,$$

где супремум берется по всем множествам A конечной меры, на которых функция f ограничена сверху.

(10) Доказать, что интеграл Лебега от функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(-\sum a_{i,j} x_j x_j\right)$$

конечен тогда и только тогда, когда симметрическая матрица A положительно определена. Доказать также, что в этом случае интеграл равен $\det(\pi A^{-1})^{1/2}$.