9 Занятие 27/10/2020: криволинейные интегралы

Определение 5 (Криволинейный интеграл первого рода)**.** *Пусть в* $\mathbb{R}^3$ *задана гладкая кривая*

$$\Gamma = \{r(t)\colon a \le t \le b\} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon a \le t \le b\},$$

то есть непрерывно-дифференцируемая кривая без особых точек (последнее означает $|r'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0$*).*

Пусть числовая функция F *определена на множестве* Γ*. Тогда криволинейным интегралом первого рода от функции* F *по множеству* Γ *называется число*

$$\int_\Gamma F(x, y, z) ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt.$$

С помощью криволинейных интегралов можно по линейной плотности материальной кривой найти её массу, координаты центра тяжести, моменты инерции.

Для существования криволинейного интеграла первого рода необходимо и достаточно, чтобы функция F была интегрируема на $[a, b]$ как функция переменного t. В частности, если F непрерывна, то интеграл существует. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации и ориентации кривой (проверить!).

Заметим, что гладкая кривая спрямляема и что в качестве до- пустимого параметра можно взять переменную длину её дуги S. Тогда кривая Γ задаётся следующим образом

$$\Gamma = \{r(s)\colon 0 \le s \le S\} = \{(x(s), y(s), z(s))\colon 0 \le s \le S\},$$

где S — длина дуги Γ. Тогда интеграл принимает вид

$$\int_\Gamma F(x, y, z) ds = \int_0^S F(x(s), y(s), z(s)) |r'(s)| ds.$$

Из определения выше легко видеть, что

$$\int_\Gamma ds = S.$$

Определение 6 (Криволинейный интеграл второго рода)**.** *Пусть в* $\mathbb{R}^3$ *задана гладкая ориентированная кривая*

$$\Gamma = \{r(t)\colon a \le t \le b\} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon a \le t \le b\},$$

где A *— ее начало, а* B *— ее конец.*

Единичный вектор ее касательной

$$t = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

непрерывно зависит от параметра t *(направлен в сторону возрастания параметра на кривой).*

Пусть в $\mathbb{R}^3$ *зафиксирована прямоугольная система координат и на множестве* Γ *задана вектор-функция* $a = (P, Q, R)$*. Тогда*

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \\
&= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt \\
&= \int_a^b (a, r') dt
\end{aligned}$$

называется криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции a *по кривой* Γ*.*

С помощью криволинейных интегралов второго рода можно вычислить работу силы при движении точки по кривой в силовом поле.

Если только одна компонента a отлична от нуля, то формула ввышу значительно упрощается.

Для существования криволинейного интеграла второго рода достаточно чтобы функции P, Q, R были интегрируемы как функции переменного t на отрезке $[a, b]$. В частности, если a непрерывна, то интеграл существует. Криволинейный интеграл второго рода не зависит от пара- метризации гладкой кривой с фиксированной ориентацией (проверить!).

Криволинейные интегралы как первого, так и второго рода обладают свойством аддитивности относительно кривой интегрирования, то есть кривую Γ можно разбить на несколько кусков и инттеграл по ней будет складываться из интегралов по этим кускам.

Задачи

(1) Пусть единичный вектор касательной имеет координаты $t = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Доказать, что

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds.$$

(2) Используя предыдущую задачу доказать, что при изменении ориентации кривой Γ криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

(3) Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma y^2 ds$, где $\Gamma = \{x = (t - \sin t)/2, y = (1 - \cos t)/2, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

(4) Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_\Gamma y ds$, где Γ — дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, \sqrt{2})$.

(5) Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$\int_\Gamma 4xy ds, \quad \Gamma = \{(x, y) \colon x \geq 0, y = \min(x^2/a, \sqrt{2a^2 - x^2}\}.$$

(6) Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma (x^2 + xy + \sqrt{y}) ds,$$

где Γ — отрезок прямой, заключенный между точками $(2, 0)$ и $(2, 3)$.

(7) Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma \frac{ds}{x^2 + y^2 + 1},$$

где Γ — дуга кривой, заданной параметрически $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(8) Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma |y| ds$, где кривая Γ —– лемниската Бернулли $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

(9) Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma (y^2 + x) dx + \frac{2x}{y} dy$$

по кривой $\Gamma = \{y = e^x\}$ от точки $(0, 1)$ до точки $(1, e)$.

(10) Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой Γ

$$\int_{\Gamma} x^2 dy - xy dx,$$

где Γ — часть кривой $x^4 - y^4 = 6x^2 y$ от точки $(-4\sqrt{2}, 4)$ до точки $(0, 0)$.