Контрольная по категориям

1. Пусть $F : C \to D$ — строгий функтор, а f — морфизм в категории C такой, что $F(f)$ — мономорфизм. Докажите, что f — мономорфизм.

2. Пусть $G : D \to C$ — полный функтор, сопряженый справа к $F : C \to D$. Докажите, что $G\varepsilon : G \to GFG$, где ε — коеденица сопряжённости, является изоморфизмом.

3. Докажите, что квадрат $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$ является пулбэком тогда и только тогда, когда f — мономорфизм.

4. Пусть J — категория, объекты которой — неединичные подгруппы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, а морфизмы — вложения соответствующих подгрупп. Найдите предел естественного функтора из категории J в категорию групп.