5 Занятие 29/09/2020: измеримые функции, мера Лебега

Пусть задано множество X и σ-алгебра $\mathfrak{A}$ подмножеств X. Вещественная функция f на X называется **$\mathfrak{A}$-измеримой**, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $E_c(f) = \{x \in X : f(x) < c\}$ принадлежит $\mathfrak{A}$. Такое множество называют лебеговским множеством f.

Множество измеримых функций образует алгебру, замкнутую относительно сходимости почти всюду (за исключением множества меры нуль).

Сходимость измеримых функций:

1. Равномерная сходимость на множестве X:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty$$

2. Сходимость почти всюду: $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x вне некоторого множества меры нуль.

3. Сходимость по мере: для любого $\varepsilon > 0$ мера множества $A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Ясно, что из равномерной сходимости вытекает сходимость почти всюду и сходимость по мере. Можно показать, что из сходимости почти всюду (на множестве конечной меры) вытекает сходимость по мере. Обратные утверждения неверны, но могут стать верными если немного подправить последовательность функций или само множество.

А именно, можно показать, что если f_n сходится к f почти всюду на множестве конечной меры X, то для любого $c > 0$ существует $E_c \subset X$ такое, что $\mu(E_c) < c$ и f_n сходится равномерно к f вне E_c.

Также можно показать, что если f_n сходится к f по мере на X, то существует подпоследовательность n_k натурального ряда такая, что f_{n_k} сходится к f почти всюду на X при $k \to \infty$.

Задачи

(1) Пусть функция f измерима и не обращается в нуль. Доказать, что функции $1/f$ и $|f|$ измеримы.

(2) Пусть $f(t_1, \ldots, t_n)$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на n-мерном вещественном пространстве и пусть $g_1, \ldots, g_n$ — измеримые функции. Доказать, что $h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ измерима.

(3) Пусть $g(x)$ — измеримая функция, определенная на вещественной прямой, а f — непрерывная вещественная функция. Показать, что $h(x) = g(f(x))$ может быть неизмерима.

(Заметим, что используя задачу (2) можно показать, что $f(g(x))$ измерима.)

(4) Пусть $f(x)$ всюду дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что $f'(x)$ измерима по Лебегу.

(5) Функция $f(x)$, определенная на вещественной прямой, называется **борелевской** если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$ — борелевское. Доказать, что любая измеримая функция после "исправления"на множестве меры нуль (например, полагая на нем $f(x) = 0$) становится борелевской.

(6) Пусть мера μ задана на полукольце X с единицей и μ^* — соответствующая ей внешняя мера. Множество $A \subset X$ называется **измеримым по Каратеодори**, если для любого $B \subset X$ выполнено $\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A)$.

Докажите, что множество измеримо по Лебегу тогда и только тогда когда оно измеримо по Каратеодори.

(7) Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце. Множество A называется **множеством σ-однозначности** для меры m, если

(a) Существует определенное на A σ-аддитивное продолжение λ меры m;

(b) Для любых двух таких σ-аддитивных продолжений λ_1, λ_2 выполнено $\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$.

Докажите, что любое измеримое по Лебегу множество A является множеством σ-однозначности для меры m.

(8) В терминах задачи (5) докажите, что систтема измеримых по Лебегу множеств исчерпывает всю системы множеств σ-однозначности для меры m.

(9) Построить пример неизмеримого по Лебегу множества на прямой.

(10) Построить пример измеримого по Лебегу множества на плоскости, проекции которого на координатные оси незмеримы.