Содержание

Последнее обновление 11 октября 2020 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/topology3.pdf

Топология и геометрия-3, практика, СПбГУ 2020, факультет математики и компьютерных наук

Никита Сергеевич Калинин, Нина Дмитриевна Лебедева, Евгений Анатольевич Фоминых

Для всех групп: 201,202,203

1 Самый животрепещущий вопрос: как будут считать рейтинг

Вместо рейтинга каждый предмет номинирует примерно 1/3 студентов как *отличных* студентов, примерно 1/3 студентов как *хороших* студентов. Быть *отличным* студентом раза в два-три почётнее, чем быть *хорошим* студентом. И ещё есть какие-то правила, что тройки и двойки на экзаменах получать плохо.

Итого, ваша стратегия, если хочется стипендию: не получать троек на экзаменах, по всем предметам желательно быть хорошим студентом, и по как можно большему числу любимых предметов быть отличным студентом.

На геометрии и топологии, разделение на отличных, хороших и остальных студентов будет основываться на ваших успехах в течение семестра. Нет никакой формулы. Учитывается ваша активность на занятиях, какие задачи вы решили в группе, какие задачи рассказали, какие сделали в дз, насколько сложные задачи решили. Может быть будут контрольные.

Общее правило: чем более сложные задачи вы решаете, тем лучше (тогда мы поверим, что простые задачи вам очевидны). **Чем лучше вы их записываете или рассказываете, тем лучше** (про плохо записанные/рассказанные задачи мы поставим плюсик, но для себя запишем, что человек не старался). **Если вы решаете в группе, то предполагается, что любой участник группы может рассказать решение любой задачи из решённых группой.** Мы будем это проверять.

Практика у нас по понедельникам, задачи с конкретного практического занятия можно сдавать **в понедельник и на следующих день – вторник**. Задачи со **звёздочкой можно сдавать в течение недели – до воскресенья**. Сдавать задачи нужно либо устно во время занятия, либо присылать письменное решение (там где удобно преподавателю – например, в Slack или в Microsoft teams, по ходу решим). Преподаватель может попросить устно рассказать то, что вы прислали письменно.

Если вы решили задачу в составе группы – пишите состав группы, когда присылаете решение. Никакого штрафа за совместное решение нет (но мы можем попросить кого-то из участников группы рассказать решение, и если человек не справится, то вся группы не получает плюсик за эту задачу).

В целом – занимайтесь, решайте сложные задачи, и всё будет хорошо.

Где-то в октябре мы скажем, каковы были бы рекомендации (кто хороший, а кто отличный) на этот момент, чтобы дать обратную связь.

2 Летнее задание

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 9. Докажите, что любое линейно связное трёхточечное пространство односвязно.

Задача 10. Рассмотрим топологическое пространство $X = \{a, b, c, d\}$, в котором база топологии состоит из множеств $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, b, c\}$ и $\{a, c, d\}$.

1. (2 балла) Докажите, что пространство X неодносвязно;
2. (3 балла) Найдите $\pi_1(X)$.

Задача 11. Пусть $X \subset \mathbb{R}^4$ — множество симметричных (2×2)-матриц с отрицательным определителем. Докажите, что пространство X гомотопически эквивалентно S^1.

Задача 12. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы коммутативна. *Топологической группой* называется множество G на котором заданы как топологическая, так и групповая структура. При этом требуется, чтобы отображения $G \times G : (x, y) \to xy$ и $G \to G : x \to x^{-1}$ были непрерывны.

Задача 13. Пусть ℓ — простая замкнутая кривая на стандартно вложенном в $\mathbb{R}^3$ торе, поднятие которой в универсальное накрытие тора задается уравнением $pu = qv$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Выпишите задание фундаментальной группы пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$.

Задача 14. Докажите, что к краю стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ ленты Мёбиуса нельзя приклеить диск, который не пересекает эту ленту Мёбиуса.

3 7 сентября

Задача 1. Представьте сферу S^n как клеточное пространство: а) содержащее 2 клетки; б)чтобы его k-остовом для всякого целого неотрицательного $k < n$ была стандартная сфера $S^k \subset S^n$.

Задача 2. Представьте $\mathbb{R}P^n$ как клеточное пространство, состоящее из $n+1$ клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

Задача 3. Докажите, что $S^2 \times S^2$ — конечное клеточное пространство.

Разбор: https://youtu.be/DWVg-KQGAC4

Задача 4. а)Если X и Y — локально конечные клеточные пространства (т.е. любая точка в X обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток), то топологическое пространство $X \times Y$ может быть естественным образом наделено структурой клеточного пространства. б)***Останется ли верным это утверждение, если не требовать локальной конечности клеточных пространств X и Y?

Разбор: задача 42.3- 42.4 в книге Виро-Иванов-Нецветаев-Харламов, разобрана на странице 343.

Задача 5. Пусть A — конечное клеточное пространство. Через $c_i(A)$ обозначим число его i-мерных клеток. Эйлеровой характеристикой пространства A называется альтернированная сумма чисел $c_i(A)$:

$$\chi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_i(A).$$

Докажите, что эйлерова характеристика мультипликативна в следующем смысле. Если X и Y — конечные клеточные пространства, то $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Факт (не доказываем, но пользуемся). Эйлерова характеристика является инвариантом клеточного топологического пространства, то есть не зависит от способа представления в виде клеточного пространства.

Задача 6. Какое наименьшее число клеток необходимо для представления в виде клеточного пространства следующих пространств: а) ленты Мёбиуса; б) сферы с p ручками; в) сферы с q пленками?

Разбор: https://youtu.be/6FbGB-kEdiI и http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/zadacha6.pdf

Задача 7. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

Разбор: можно двулистно накрыть S^n, которое односвязно, значит $\mathbb{Z}_2$. Ещё можно взять двумерный остов (от которого только и зависит π_1), это $\mathbb{R}P^2$, представить его в виде склейки квадрата, получается группа $< a|a^2 = e >$ то есть $\mathbb{Z}_2$.

4 14 сентября

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 8. Пространство X получается приклейкой к тору $S^1 \times S^1$ двух дисков: одного вдоль его параллели $S^1 \times \{1\}$, второго вдоль меридиана $\{1\} \times S^1$. а) Вычислите $\pi_1(X)$; б)Докажите, что X гомотопически эквивалентно сфере S^2.

Задача 9. Пусть $p : X \to B$ — накрытие, причем $x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0$ и пространства X, B линейно связны). Постройте естественную биекцию множества $p^{-1}(b_0)$ на множество правых смежных классов фундаментальной группы базы этого накрытия по группе накрытия.

Задача 10. Чему могут равняться числа листов накрытия: а) ленты Мёбиуса кольцом $S^1 \times I$; б) ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

Задача 11. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна плоскостью?

Задача 12. Опишите с точностью до эквивалентности все накрытия окружности S^1.

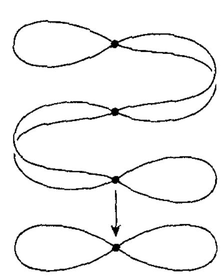
Задача 13. Накрытие $p : X \to B$ ($x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0$), где пространства X, B “хорошие”, называется регулярным, если $p_*(\pi_1(X, x_0))$ нормальная подгруппа в $\pi_1(B, b_0)$. Является ли регулярным накрытие $S^1 \to S^1, z \to z^n$?

Задача 14. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Задача 15. Докажите, что любое связное двулистное накрытие: а) обладает нетривиальным автоморфизмом; б) регулярно.

Задача 16. Докажите, что трёхлистное накрытие букета двух окружностей графом с тремя вершинами (см. рис. ниже) не является регулярным.



Задача 17. ***Докажите, что всякое конечное клеточное пространство метризуемо.

5 21 сентября

Задача 18. Вокруг некоторой точки O окружности радиуса a вращается луч. На этом луче по обе стороны от точки A его пересечения с окружностью откладываются отрезки AM_1 и AM_2 длины $2b$. Составьте параметрическое уравнение кривой, описываемой точками M_1 и M_2 (улитка Паскаля; в частности, при $a = b$ — кардиоида).

Задача 19. Найдите кривую, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и кругового цилиндра диаметра R, одна из образующих которого проходит через центр сферы. Эта кривая называется кривой Вивиани.

Задача 20. a) Выразить производные следующих функций через данную вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ и ее производные: $\mathbf{r}^2(t)$; $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$; $|\mathbf{r}(t)|$; $\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|$.

b) Доказать, что $|\mathbf{r}(t)| = \text{const}$, экви $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

c) Доказать, что кривая $\mathbf{r}(t)$ лежит в фиксированной плоскости с нормалью n, экви $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Задача 21. Доказать, что: a) если $\mathbf{r}' = \text{const}$, то $\mathbf{r}(t)$ задает прямую,

b) если $t \in [a, b]$, а $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по разные стороны от данной плоскости, то кривая пересекает эту плоскость,

c) если $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по одну сторону и на одинаковом расстоянии от данной плоскости, то некоторая касательная этой кривой параллельна данной плоскости.

Задача 22. Вывести из определения эллипса, что вектор $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1| + \mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_2|$ является нормалью к эллипсу, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — фокальные радиусы-векторы.

Задача 23. Составьте натуральную параметризацию кривой

a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ (цепная линия).

b) $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ (винтовая линия).

Задача 24. Доказать, что кривая $\gamma(t) = (t, t\sin\pi/t), t \neq 0$, $\gamma(0) = (0, 0)$ имеет бесконечную длину на интервале $[0, 1]$.

Задача 25. *** Пусть параметризация (не обязательно натуральная) гладкой кривой $\gamma :$ $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ такова, что длина хорды $|\gamma(t) - \gamma(s)|$ зависит только от $t - s$. Доказать, что кривая является подмножеством прямой либо окружности.

6 28 сентября

Эволюта кривой — это кривая, образованная её центрами кривизны.

Задача 26. Составьте уравнения и начертите эволюту эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Задача 27. Найдите точки экстремума кривизны параболы и эллипса. Найдите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 28. Для плоской кривой $\gamma(t)$ и фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию $S(t) = |\gamma(t) - q|^2$. Докажите, что

1. q лежит на нормали к кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = 0$;
2. q является центром кривизны кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = 0$;
3. q является центром кривизны кривой, а в точке t производная функции кривизны равна нулю $\Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = S'''(t) = 0$.

Задача 29. ***

1. Докажите, что если модуль кривизны имеет строгий локальный максимум в t_0, то для некоторого $\varepsilon > 0$ участок кривой $\gamma[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ "лежит между" соприкасающейся окружностью и касательной и имеет с этой окружностью только одну общую точку $\gamma(t_0)$.
2. Докажите, что если для некоторого $\varepsilon > 0$ участок кривой $\gamma[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ "лежит между" соприкасающейся окружностью и касательной, то производная кривизны в t_0 равна нулю.

Задача 30. *** Пусть простая замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ ограничивает замкнутую область F. Будем говорить, что окружность вписана в γ, если она содержится в F и имеет с γ более одной общей точки. Кривизну будем считать положительной, если нормаль направлена внутрь F.

1. Доказать, что если для последовательности окружностей, вписанных в кривую, точки касания $p_n, q_n \to \gamma(t_0)$, то эти окружности сходятся к соприкасающейся окружности в точке $\gamma(t_0)$.
2. Доказать, что для множества точек касания K_1 и K_2 двух вписанных окружностей множество K_2 лежит в одной компоненте связности множества $\gamma(S^1) \setminus K_1$.
3. Доказать, что для вписанной окружности с множеством точек касания K_1 каждая связная компонента $\gamma(S^1) \setminus K_1$ содержит точку, где производная кривизны равна нулю.

Задача 31. ***Доказать, что если простая замкнутая плоская кривая кривизны $|k| < 1$ ограничивает фигуру F, то F содержит диск радиуса 1.

(Подсказка: использовать предыдущую задачу.)

Задача 32. ***Срединная ось простой гладкой регулярной замкнутой плоской кривой это замыкание множества центров вписанных окружностей. Пусть у такой кривой конечное число точек, в которых производная кривизны равна нулю. Доказать, что срединная ось этой кривой - конечное дерево.

7 5 октября

Задача 33. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2, \end{cases}$$

заключенной между плоскостями $y = a/3$ и $y = 9a$.

Задача 34. Докажите, что у кривой

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$$

кривизна и кручение равны.

Задача 35. Найти базис Френе кривой $(2t, \ln t, t^2)$ при $t = 1$.

Задача 36. (подсказка: нарисуйте картинку)Даны две натурально параметризованные (одним и тем же параметром) кривые $\gamma_i : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma_1(t) = (x_1(t)), y_1(t)), \gamma_2(t) = (x_2(t)), y_2(t))$. Пусть

$$\gamma_i(0) = (0,0), v_1(0) = v_2(0) = (1,0), n_1(0) = n_2(0) = (0,1)$$

Пусть $k_1(t) \geq k_2(t) > 0$ и α_i - непрерывный аргумент для v_i. Тогда для некоторого $0 < \delta \leq \varepsilon$

1. $x_i(t), y_i(t)$ возрастают на $[0, \delta]$
2. $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t)$ для $t \in [0, \delta]$
3. $x_1(t) \leq x_2(t)$ и $y_1(t) \geq y_2(t)$ для $t \in [0, \delta]$
4. для любого $c \in [0, x_1(\delta)]$ если $x_1(t_1) = x_2(t_2) = c$, то $t_1 \geq t_2$ и $y(t_1) \geq y(t_2)$

Задача 37. Найти поворот кривой $\gamma(t) = (t, \sin t)$ на участке $[0, 5\pi/2]$.

Задача 38. Две точки движутся в пространстве так, что расстояние между ними остается постоянным. Доказать, что в любой момент времени проекции их скоростей на прямую, соединяющую эти точки, равны.

Задача 39. Простая плоская замкнутая выпуклая кривая называется кривой постоянной ширины μ, если длина ее проекции на любую прямую равна μ. Для плоской гладкой кривой постоянной ширины μ с кривизной отличной от 0 доказать, что

1. хорда, соединяющая противоположные точки перпендикулярна кривой (подсказка: нарисуйте опорные прямые данного направления, и отрезок между точками касаний выразите через базис Френе).
2. для кривизн в противоположных точках выполнено соотношение $1/k + 1/k^* = \mu$
3. *** длина равна $\pi\mu$

8 12 октября

Задача 40.

а)Кривая на плоскости параметризована натурально и имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную $\pi/2$. Тогда $\langle \gamma(\pi/2) - \gamma(0), v(0) \rangle \geq 1$, где v –вектор скорости.

б)Кривая на плоскости имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную π. Тогда расстояние между концами не меньше 2.

в)Кривая в пространстве имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную π. Тогда расстояние между концами не меньше 2.

Задача 41. Пусть окружность и кривая касаются в некоторой точке. Доказать, что если окружность не является соприкасающейся для кривой в этой точке, то в некоторой окрестности (по параметру) у кривой нет с окружностью других общих точек.

Задача 42. Найти кривизну пространственной кривой, образованной концами отрезков постоянной длины, отложенных на бинормалях данной кривой от каждой ее точки.

Задача 43. Обобщенной винтовой линией в $\mathbb{R}^3$ называется гладкая кривая, касательные которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением. Пусть s – натуральная параметризация, v, b – вектора скорости и бинормали. Доказать, что кривая будет обобщенной винтовой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;
2. бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;
3. отношение кривизны к кручению постоянно;
4. все спрямляющие плоскости кривой параллельны некоторой прямой
5. $[v'(s), v''(s), v'''(s)] = 0$;
6. $[b'(s), b''(s), b'''(s)] = 0$;

Задача 44. Пусть $|\gamma(s)| = \text{const}$. Выразить коэффициенты разложения $\gamma(s)$ по базису Френе этой кривой через ее кривизну и кручение.

Задача 45. Доказать, что если $\gamma(s)$ – натурально параметризованная кривая, и $k(s) \neq \text{const}$ и $1/k^2 + (k'/k^2\tau)^2 = a^2$, то кривая γ лежит на сфере радиуса a.

Задача 46. Рассмотрим пару таких кривых, что главные нормали к одной из них являются и главными нормалями другой кривой. Доказать, что:

a) расстояние между соответствующими точками этих кривых постоянно;

b) угол между их касательными в соответствующих точках постоянен;

c) если у одной из них кручение отлично от нуля, то существуют такие числа a и b, что $ak + b\tau = 1$.

Задача 47. *** Существует кривая (и в пространстве, и на плоскости), у которой кривизна всюду больше 1, длина равна 1, и расстояние между концами больше 0.999.