13 Занятие 01/12/2020: поверхностные интегралы первого и второго рода, формула Стокса

Пусть S — ориентированная кусочно гладкая поверхность, ограниченная соответственно ориентированным контуром L (то есть если двигаться по контуру и смотреть на поверхность с той стороны, куда направлена нормаль к поверхности, то поверхность находится слева).

Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области G, которая содержит S. Тогда выполнена формула Стокса

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Формулу Стокса применяют для вычисления криволинейного интеграла второго рода, причем выбирают подходящую поверхность, где лежит контур так, чтобы вычисление интеграла было сравнительно простым.

Повторим также сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному.

Для начала пусть гладкая или кусочно градкая поверхность S задана явно уравнением $z = z(x, y)$ и взять верхняя часть этой поверхности и пусть $R(x, y, z)$ — функция, ограниченная на S. Тогда

$$\iint_S Rdx\, dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx\, dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость $0xy$. Если же берется нижняя сторона поверхности, то

$$\iint_S Rdx\, dy = -\iint_D R(x, y, z(x, y)) dx\, dy.$$

Теперь рассмотрим случай, когда поверхность задана параметрически. Пусть гладкая или кусочно-гладкая поверхность S задана функциями

$$x - x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

а $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — ограниченные на S функции, D — проекция поверхности S на плоскость $0xy$. Тогда выполнено

$$\iint_S Pdy\, dz + Qdz\, dx + Rdx\, dy = \iint_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2} du\, dv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, P, Q, R берутся в точке $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Здесь косинусы нормали имеют вид

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y'_u z'_u \\ y'_v z'_v, \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u x'_v \\ z'_v x'_v, \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u y'_u \\ x'_v y'_v, \end{vmatrix},$$

и $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$, а знак $\pm$ в косинусах нормали соответствует выбранной стороне поверхности. При этом имеем

$$\iint_S P dy\, dz + Q dz\, dx + R dx\, dy = \pm \iint_D (PA + QB + RC) du\, dv.$$

Скалярные и векторные поля, операции над полями, циркуляция и поток векторного поля

Пусть Ω — область в трехмерном пространстве. Скалярным полем на Ω называют числовую функцию $u(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$. Скалярным полем на Ω называют векторную функцию $\mathbf{a}(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$.

Если в пространстве введена какая-либо декартова система координат, то скалярное поле $u(M)$ или векторное поле $\mathbf{a}(M)$ становятся функциями координат точек (при выборе другой системы координат меняются координаты точек, но значения скалярного и векторного полей в точках не меняются).

Векторный дифференциальный символ ∇ называют набла и определяют в прямоугольной декартовой системе координат как

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

где i, j, k — ортонормировввaнный базис.

Так, например, градиент скалярного поля u принимает вид

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

а дивергенция дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$ определяется как

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{a_x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{a_y}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{a_z}}{\partial \mathbf{z}},$$

где $\mathbf{a} = (\mathbf{a_x}, \mathbf{a_y}, \mathbf{a_z})$ и производные вычислены в точке (x, y, z).

Ротором дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$ называют

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \mathbf{a_z}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{a_y}}{\partial \mathbf{z}}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial \mathbf{a_z}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{a_x}}{\partial \mathbf{z}}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \mathbf{a_y}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{a_x}}{\partial \mathbf{y}}\right),$$

где $\mathbf{a} = (\mathbf{a_x}, \mathbf{a_y}, \mathbf{a_z})$ и производные вычислены в точке (x, y, z).

Здесь $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, задаваемое как

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z. \end{vmatrix}$$

Скалярный символ

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = (\nabla, \nabla) = \nabla^2$$

обозначают Δ и называют лапласианом. Легко видеть, что $\Delta u = \nabla^2 u = \operatorname{div}\operatorname{grad}(u) = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$.

Задачи:

(1) Вычислить интеграл

$$I = \int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

где L — кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно относиттельно вектора $(1, 0, 0)$.

(2) По формуле Стокса вычислить интеграл

$$I = \int_\Gamma ydx + zdy + xdz,$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси x.

(3) Вычислить

$$I = \iint_\Gamma (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

где Γ — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2x$ $(z > 0)$, пробегаемая так, что ограниченная на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ ее наименьшая область остается слева.

(4) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S xdy\,dz + ydz\,dx + zdx\,dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(5) Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной в цилиндре $x^2 + y^2 = 2x$.

(6) Проверить, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$, $\operatorname{div}\operatorname{rot} a = 0$.

(7) Пусть скалярное поле u и векторные поля $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ дифференцируемы на Ω и пусть $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Показать, что

   (a) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{a}$,
   (b) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$,
   (c) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c}\operatorname{div} \mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}$.