4 Занятие 22/09/2020: мера Лебега, борелевские множества, конструкции мер

Задачи

(1) Обозначим через μ меру Лебега на отрезке $[0,1]$ и введем на пространстве измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$ отношение эквивалентности: полагаем $A \sim B$ если $\mu(A \triangle B) = 0$. Доказать, что множество классов эквивалентности имеет мощность континуума.

(2) Пусть A_n — последовательность измеримых по Лебегу множеств на прямой. Являются ли измеримымы по Лебегу верхний и нижний пределы последовательности A_n?

(3) Пусть A_n — последовательность измеримых множеств и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Докажите, что $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(4) Пусть μ — мера на S. Покажите, что следующие условия эквивалентны, если S — кольцо, и могут быть неэквивалентны если S — полукольцо:

   (a) Счетная аддитивность: $\mu\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$;

   (b) Полунепрерывность сверху: если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$;

   (c) Полунепрерывность снизу: если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$;

   (d) Непрерывность: $\mu\big(\lim_{k\to\infty} A_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

(5) Доказать, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой является объединением борелевского множества и множества меры нуль.

(6) Пусть мера μ задана на полукольце X с единицей и μ^* — соответствующая ей внешняя мера. Множество $A \subset X$ называется **измеримым по Каратеодори**, если для любого $B \subset A$ выполнено $\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A)$.

   Докажите, что множество измеримо по Лебегу тогда и только тогда когда оно измеримо по Каратеодори.

(7) Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце. Множество A называется **множеством σ-однозначности** для меры m, если

   (a) Существует определенное на A σ-аддитивное продолжение λ меры m;

   (b) Для любых двух таких σ-аддитивных продолжений λ_1, λ_2 выполнено $\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$.

   Докажите, что любое измеримое по Лебегу множество A является множеством σ-однозначности для меры m.

(8) В терминах задачи (5) докажите, что систтема измеримых по Лебегу множеств исчерпывает всю системы множеств σ-однозначности для меры m.

(9) Построить пример неизмеримого по Лебегу множества на прямой.

(10) Построить пример измеримого по Лебегу множества на плоскости, проекции которого на координатные оси незмеримы.