

## Практика 22.09

1. Пусть группа  $G$  действует на множестве  $X$  и при этом  $x, y \in X$  лежат в одной орбите. Обязаны ли стабилизаторы  $x$  и  $y$  быть равны? Обязаны ли они быть изоморфны? Для каких групп они всегда равны?
2. Пусть группа  $GL_n(\mathbb{C})$  действует на множестве всех комплексных матриц  $n \times n$  по правилу  $g * M = gMg^{-1}$  для  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  и матрицы  $M$ . При каком условии матрицы  $M$  и  $N$  лежат в одной орбите. Ответьте на тот же вопрос для действия  $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ , определённого равенством  $(g, h) * M = gMh^{-1}$ .
3. Пусть  $G$  — абелева группа, действующая точно и транзитивно на множестве  $X$ . Докажите, что тогда она действует регулярно, то есть действие  $G$  на  $X$  изоморфно действию  $G$  сдвигами на себе (имеется изоморфизм в категории  $G$ -множеств).
4. Подгруппа  $G$  симметрической группы  $S_n$  называется *примитивной*, если  $G$  действует транзитивно на множестве  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  и не сохраняет никакого нетривиального разбиения  $X$ , где под нетривиальным разбиением подразумевается разбиение не на одно множество и не на множества из 1 элемента, а "сохраняет разбиение" означает, что два элемента из одного блока разбиения переходят в два элемента из одного блока разбиения (не обязательно того же самого). Докажите, что транзитивная группа перестановок  $G$  примитивна тогда и только тогда, когда стабилизатор точки — максимальная подгруппа  $G$ .
5. (a) Сколько существует ожерелий из 12 бусин двух различных цветов с точностью до поворотов.  
(b) Сколько существует ожерелий из 12 бусин двух различных цветов с точностью до поворотов и симметрий.  
(c) Сколько ожерелий можно составить из трех красных, шести синих и девяти зелёных бусин с точностью до поворотов?
6. При помощи формулы Бернсайда выведите тождество  $\varphi(n)\tau(n) = \sum_{(a,n)=1} (a-1, n)$ , где  $\tau$  — функция числа делителей,  $\varphi$  — функция Эйлера.
7. Чему равен порядок группы вращений и симметрий тетраэдра? Чему изоморфна эта группа? Чему равен порядок группы вращений и симметрий куба? А только вращений?
8. Сколькими способами можно раскрасить рёбра куба в 3 цвета, если не различать раскраски, получающиеся одна из другой поворотами?