Практика 01.09

1. Доказать, что ранг свободной группы определяет её однозначно с точностью до изоморфизма.
2. Докажите, что в свободной группе нет элементов конечного порядка, отличных от нейтрального.
3. Докажите, что центр свободной группы ранга больше 1 тривиален, а централизатор любого элемента, отличного от нейтрального — бесконечная циклическая группа (можно доказывать два утверждения в любом поярдке).
4. Докажите, что в свободной группе никакой элемент $x \neq 1$ не сопряжён своему обратному.
5. Найдите количество подгрупп индекса 2 в свободной группе F_3.
6. Найдите количество нормальных подгрупп индекса 3 в свободной группе F_2.
7. Пусть G — своободная группа со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n$, H — её подгруппа, образованная словами с суммой показателей, кратной m. Докажите, что H нормальна, и найдите G/H.
8. Докажите, что коммутант свободной группы с образующими $x_1, \ldots, x_n$ состоит из всех слов, которые по каждой переменной имеют сумму показателей равную 0. Чему изоморфен фактор по коммутанту?
9. Пусть G — группа, свободно порождённая a и b. Докажите, что она порождена свободно также парами $\{ab, aba\}$, $\{a, a^{-1}ba\}$.
10. Пусть $f : G \to F$ — сюръективный гомоморфизм из группы G в свободную группу с n образующими. Докажите, что в G есть подгруппа изоморфная свободной группе с n образующими.
11. Пусть G — свободная группа ранга n, H — её подгруппа, порождённая квадратами всех элементов. Докажите, что H нормальна, и найдите порядок G/H.