

Контрольная по тензорам

1. Разложим ли $w \in \bigwedge^3(\mathbb{R}^5)$, где

$$w = 12e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 + 4e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + 6e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 + 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 12e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 + 3e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$$

2. Трёхмерное подпространство \mathbb{R}^4 при вложении Плюккера отобразилось в тензор $2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + 4e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Лежит ли в этом подпространстве прямая, проходящая через точку $(2, 4, -2, 1)$ и имеющая направляющий вектор $(1, 2, 2, 2)$?
3. Пусть V — трехмерное векторное пространство над \mathbb{R} с базисом x, y, z . Найдите ранг тензора

$$w = y \otimes x \otimes x + x \otimes x \otimes z + y \otimes y \otimes z + z \otimes x \otimes x + z \otimes y \otimes z + x \otimes y \otimes x$$

4. Пусть V — двумерное векторное пространство с базисом e_1, e_2 . Отображение из $V \otimes V$ в $V \otimes V$ имеет собственное число 1 с собственным вектором $e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$, собственное число 4 с собственным вектором $e_1 \otimes e_1 - 2e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2$ и собственное число 2 кратности два с собственным подпространством, порождённым векторами $3e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1$ и $3e_1 \otimes e_2 - 2e_2 \otimes e_1 + 3e_2 \otimes e_2$. Может ли это отображение иметь вид $f \otimes g$ для некоторых $f, g : V \rightarrow V$?
5. Пусть U, V, W — конечномерные векторные пространства над произвольным полем. Покажите, что пространства $\text{End}(U \otimes V \otimes W)$ и $\text{Hom}(\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W), \text{Hom}(U, W))$ канонически изоморфны, и выясните, какому линейному отображению $\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W)$ при этом изоморфизме соответствует тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$.