3 Занятие 15/09/2020: метрические пространства, внешняя мера

Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящее из некоторого множества X и расстояния, то есть однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых $x, y \in X$ и удовлетворяющей следующем условиям:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда когда $x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность),
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Мерой μ на полукольце $\mathfrak{A} \subset 2^X$ называется вещественная неотрицаттельная функция μ на $\mathfrak{A}$, обладающая свойством аддитивности

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A \cap B = \varnothing.$$

Мера μ называется **счетно-аддитивной** или **σ-аддитивной** если выполнено

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Теорема. *Любая мера μ' на полукольце $\mathfrak{A}$ однозначно продолжается до меры μ на кольце $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$, причем если μ' счетно-аддитивна, то μ также счетно-аддитивна.*

Пусть задано множество X, полукольцо $\mathfrak{A} \subset 2^X$ и σ-аддитивная мера μ на $\mathfrak{A}$. Определим **внешнюю меру** μ^* как

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in \mathfrak{A}, \quad A \in 2^X.$$

Назовем множетсво A **измеримым по Лебегу** оттносительно меры μ если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{R}(\mathfrak{A})$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Теорема. *Совокупность $L(\mathfrak{A}, \mu)$ множеств, измеримых по Лебегу относительно меры μ, образует σ-алгебру, на которой μ^* является σ-аддитивной мерой.*

Задачи

(1) Пусть l_2 — множество всевозможных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющих $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}.$$

Покажите, что l_2 — метрическое пространство.

(2) Обозначим за $\mathbb{R}_p^n$ множество упорядоченных групп из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p},$$

где p — любое фиксированное число с $p \geq 1$. Докажите, что $\mathbb{R}_p^n$ — метрическое пространство.

(3) Изменим немного задачу (1), а именно рассмотрим множество всевозможных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, удовлетворяющих $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

и обозначим его за l_p. Покажите, что l_p — метрическое пространство.

(4) Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$. Покажите, что X вместе с расстоянием

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & x_2 = y_2, \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|, & x_2 \neq y_2 \end{cases}$$

является метрическим пространством.

(5) Пусть (X, d) — метрическое пространство. Докажите, что (X, ρ) тоже является метрическим пространством, где

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

(6) Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Метрика ρ называется **ультраметрикой** если выполнено **усиленное неравенство треугольника**

$$\rho(x,y) \leq \max(\rho(x,z), \rho(y,z)), \quad \forall x, y, z \in X.$$

(a) Покажите, что Евклидова метрика на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ не является ультраметрикой.

(b) Пусть $p > 2$ некое простое число. Для любого $x \in \mathbb{Q}$ существует единственный $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $x = p^n u/v$, где $p \nmid u, v$ (то есть n — максимальная степень вхождения p в x). Обозначим $|x|_p = n$. Докажите, что

$$\rho_p(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ p^{-|x-y|_p}, & x \neq y, \end{cases}$$

задает ультраметрику на $\mathbb{Q}$.

(7) Пусть X — пространство с конечной σ-аддитивной мерой μ, определенной на некоторой алгебре R. **Внутренней мерой** μ_* множества $A \subset X$ называется $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A)$, где μ^* — внешняя мера множества. Докажите, что $\mu^*(A) \geq \mu_*(A)$.

(8) Докажите, что множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

(9) Докажите, что для любых $A, B \in 2^X$ выполнено $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$.

(10) Докажите, что функция μ^* обладает свойством счетной полуаддитивности на 2^X:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \quad A_n \subset X.$$