2 Занятие 08/09/2020: σ- и δ-алгебры, конечные разложения, кольцо, порожденное полукольцом

Задачи

(1) Покажите, что $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

(2) Покажите, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и пересечения, вообще говоря, не является кольцом.

(3) (a) Докажите, что прямое произведение полуколец является полукольцом.
(b) Покажите, что прямое произведение колец может не быть кольцом.

(4) Напомним, что кольцо множеств $\mathfrak{A}$ называется **σ-кольцом** если оно вместе с каждой последовательностью $A_1, \dots, A_n, \dots$ содержит $\cup A_i$. Кольцо множеств $\mathfrak{A}$ называется **δ-кольцом** если оно вместе с каждой последовательностью $A_1, \dots, A_n, \dots$ содержит $\cap A_i$. Множество E называется единицей системы множеств $\mathfrak{A}$, если $E \in \mathfrak{A}$ и для любого элемента $A \in \mathfrak{A}$ выполнено $A \cap E = A$. Кольцо множеств с единицей называется **алгеброй множеств**. Аналогичным образом, **σ-алгебра** — это σ-кольцо с единицей, а **δ-алгебра** — δ-кольцо с единицей. Таким образом, единица системы множеств $\mathfrak{A}$ — это максимальное множество этой системы, содержащее все другие множества, входящие в $\mathfrak{A}$.

Докажите, что любая σ-алгебра является δ-алгеброй и любая δ-алгебра является σ-алгеброй.

(5) Напомним определение топологического пространства. Пусть X — некоторое множество. **Топологией** в X называется любая система τ его подмножеств G, такая, что: $\varnothing, X \in \tau$, $\bigcup_\alpha G_\alpha, \bigcap_{k=1}^n G_k \in \tau$, где все $G_i \in \tau$. Множество X с заданной на нем топологией τ называется **топологическим простанством**. Множества, принадлежащие τ называются **открытыми**, а множества, дополнительные к открытым, называются **замкнутыми**.

Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что

$$\mathfrak{A} = \{C \cap O \colon C \text{ замкнутое}, O \text{ открытое}\}$$

полукольцо подмножеств X.

(6) Пусть $\mathfrak{A}$ полукольцо подмножеств множества X и пусть $Y \subset X$. Определим **сужение** полукольца $\mathfrak{A}$ с X на Y как $\mathfrak{A}_Y = \{Y \cap A \colon A \in \mathfrak{A}\}$. Докажите, что $\mathfrak{A}_Y$ является полукольцом подмножеств множества Y.

(7) Пусть множества $A, A_1, \dots, A_n$ являются элементами кольца $\mathfrak{A}$, причем множества $A_1, \dots, A_n$ попарно не пересекаются и все содержатся в A. Докажите, что набор множеств $A_i, 1 \le i \le n$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \dots, A_s \in \mathfrak{A}$ до конечного разложения

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \quad s \ge n.$$

(8) Пусть заданы $A_1, \dots, A_n$ — элементы полукольца $\mathfrak{A}$. Докажите, что существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{A}$ таких, что каждое A_i может быть записано в виде объединения элементов из $\{B_1, \dots, B_n\}$.

(9) Пусть $\mathfrak{A}$ — полукольцо. Докажите, что $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ совпадает с системой $\mathfrak{P}$ множеств, которые могут быть представлены в виде

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \in \mathfrak{A}.$$

(10) Для любой системы множеств $\mathfrak{A}$ существует хотя бы одна σ-алгебра, содержащая эту систему. В самом деле, положим $X = \cup_{A\in\mathfrak{A}} A$ и рассмотрим систему $\mathcal{B}$ всех подмножеств множества X. Ясно, что $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}$. Если $\tilde{\mathcal{B}}$ — произвольная σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}$ и $\tilde{X}$ — ее единица, то ясно, что каждое $A \in \mathfrak{A}$ содержится в $\tilde{X}$ и, следовательно, $X = \cup_{A\in\mathfrak{A}} A \cup \tilde{X}$. Назовем σ-алгебру $\mathcal{B}$ **неприводимой по отношению к системе множеств** $\mathfrak{A}$, если $\tilde{X} = \cup_{A\in\mathfrak{A}} A$. Таким образом, неприводимая σ-алгебра — это σ-алгебра, не содержащая точек, не входящих ни в одно из $A \in \mathfrak{A}$.

Докажите, что для любой непустой системы множеств $\mathfrak{A}$ существует неприводимая по отношению к этой системе σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$, содержащая $\mathfrak{A}$ и содержащаяся в любой σ-алгебре, содержащей $\mathfrak{A}$.

(11) Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая система множеств, а $\tilde{\mathfrak{A}}$ — совокупность характеристических функций множеств из $\mathfrak{A}$. Докажите, что $\mathfrak{A}$ является кольцом множеств тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathfrak{A}}$ — алгебраическое кольцо относительно сложения и умножения по модулю 2.

(12) Пусть задано множество X и система его подмножеств $\mathfrak{A}$. Функция $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ называется **мерой** если $\mu(\varnothing) = 0$ и для любых двух непересекающихся $A, B \in \mathfrak{A}$ выполнено свойство аддитивности $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Если $\mathfrak{A}$ — кольцо множеств, то мера объединения любого конечного числа непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Пусть задана последоваттельность неотрицательных действительных чисел a_n. Определим μ как $\mu(\varnothing) = 0$ и для каждого непустого $A \subseteq \mathbb{N}$ положим $\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n$. Докажите, что μ — мера.