Дифференциальные уравнения. Задание 3.

Уравнения в полных дифференциалах

Решение ДУ $\dot{y} = F(x, y)$ часто не удается выразить в виде функции $y = y(x)$ (разрешить относительно y – напомнить пример из уже решенных). Уравнение в полных дифференциалах – отличие от обычной записи ДУ – используется, когда мы не преследуем цели выразить y через x, готовы удовлетвориться решением в виде $R(x, y, C) = 0$.

Если выражение

$$A(y, x)\mathrm{d}x + B(y, x)\mathrm{d}y$$

представляет собой полный дифференциал, то выполнено условие:

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

В случае односвязной области это условие будет и достаточным. Если область неодносвязна, условие односвязности не достаточно. Пример:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

в кольце $1 < x^2 + y^2 < 4$.

1. Найдите решение для следующих уравнений в полных дифференциалах.
   (a) $2xy\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y = 0,$
   (b) $e^{-y}\mathrm{d}x - (2y + xe^{-y})\mathrm{d}y = 0,$
   (c) $\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0, \quad x > 0,$
   (d) $(2 + 9xy^2)x\mathrm{d}x - (4y^2 - 6x^3)y\mathrm{d}y = 0$
   (e) $3x^2(1 + \ln y)\mathrm{d}x = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y;$
   (f) $2x(1 + \sqrt{x^2 + y})\mathrm{d}x + \sqrt{x^2 + y}\mathrm{d}y = 0;$
   (g) $(1 - y^2 \sin 2x)\mathrm{d}x + 2y\cos^2 x\mathrm{d}y = 0.$

2. Часто уравнение

$$A(x, t)\mathrm{d}x + B(x, t)\mathrm{d}t = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, но при этом можно подобрать такую функцию $M(x, t)$, что

$$M(x, t)A(x, t)\mathrm{d}x + M(x, t)B(x, t)\mathrm{d}t = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. В таком случае $M(x, t)$ называется *интегрирующим множителем.*

Обратите внимание, что замена переменных сама по себе никогда не делает из уравнения не в полных дифференциалах уравнение в полных дифференциалах. Однако, замена переменных может упростить вид уравнения и упростить задачу поиска интегрирующего множителя.

Решите следующие уравнения или найдите для них интегрирующий множитель.

(a) $\mathrm{d}t + (t/x - \sin x)\mathrm{d}x = 0$,

(b) $y\mathrm{d}x - (4x^2y + x)\mathrm{d}y = 0$,

(c) $(3x^2y + 2xy + y^3)\mathrm{d}x = -(x^2 + y^2)\mathrm{d}y$,

(d) $\left(y - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 0$,

(e) $2y(2x + y)\mathrm{d}x + (2xy + 1)\mathrm{d}y = 0$,

(f) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 2x^3 \tan \frac{y}{x}\mathrm{d}x$,

(g) $(x^2 + 3\ln y)y\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$,

(h) $y^2\mathrm{d}x + (e^x - y)\mathrm{d}y = 0$.