

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ.  
ДЛЯ МАТЕМАТИКОВ МКН СПбГУ, III СЕМЕСТР, ОСЕНЬ 2020**

А.В.Степанов

1. Категории.
  2. Примеры категорий.
  3. Различные виды морфизмов, универсальные объекты.
  4. Функторы. Простейшие примеры.
  5. Примеры функторов. Категория  $\mathcal{Cat}$ .
  6. Естественные преобразования.
  7. Эквивалентность категорий. Примеры.
  8. Эквалайзеры и коэквалайзеры.
  9. Произведение, пулбэк, двойственные понятия.
  10. Пушауты специального вида.
  11. Универсальное свойство локализации, эпиморфизмы в категории коммутативных колец.
  12. Свободные объекты конкретных категорий.
  13. Тензорное произведение модулей.
  14. Ядро и коядро.
  15. Удвоение кольца вдоль идеала и группы вдоль нормальной подгруппы.
  16. Копроизведение и пушаут в категории групп.
  17. Копроизведение и пушаут в категории коммутативных  $R$ -алгебр.
  18. Сопряженные функторы, единица, коединица, пример.
  19. Теорема о существовании левого сопряженного.
  20. Левые сопряженные к функтору  $\text{Mod}(X, -)$  в категориях множеств и  $R$ -модулей.
  21. Определение предела и копредела.
  22. Примеры пределов диаграмм.
  23. Прямой предел по направленному семейству морфизмов, примеры.
- 
24. Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и наличие нейтрального элемента для тензорного произведения модулей.
  25. Естественные преобразования связывающие между собой функторы  $\text{Hom}$  и  $\otimes$ .
  26. Естественные изоморфизмы конечномерных векторных пространств
  27. Определение тензора, примеры.
  28. Двойственный базис, координаты тензора.
  29. Матрица перехода между двойственными базисами, изменение координат тензора при замене базиса.
  30. Тензорная алгебра модуля.
  31. Симметрическая и внешняя степень модуля, их универсальное свойство.
  32. Симметрическая алгебра.
  33. Лемма об однородности идеала тензорной алгебры, порожденного  $m \otimes m$ .
  34. Алгебра Грассмана и ее строение.
  35. Базис симметрической и внешней степени свободного модуля.
  36. Лемма о внешнем произведении линейных комбинаций.
  37. Теорема Бине-Коши.
  38. Отождествление  $\Lambda^{n-k}(V)$  с сопряженным к  $\Lambda^k(V)$ , двойственные базисы.
  39. Разложение определителя по группе столбцов.
  40. Внешняя степень линейного отображения и его матрица.
  41. Миноры обратной матрицы.

- 
42. Категории линейных и матричных представлений, линейных действий и  $FG$ -модулей и их эквивалентность.
  43. Определения неприводимых, неразложимых и точных представлений на разных языках.
  44. Определение и основные утверждения про артиновы кольца (без доказательства).
  45. Различные определения радикала Джекобсона.  $\text{Rad}(R/\text{Rad } R)$ .
  46. Радикал Джекобсона и нильпотентные идеалы.
  47. Модули над полупростыми артиновыми кольцами (без доказательства). Пример неразложимого, приводимого модуля над групповым кольцом.
  48. Лемма Шура, в т.ч. над замкнутым полем.
  49. Неприводимые представления абелевой группы над замкнутым и незамкнутым полем.
  50. Теорема Жордана–Гельдера (с доказательством) и Ремака–Крулля–Шмидта.
  51. Полная приводимость, теорема Машке.
  52. Унитаризуемость представлений над  $\mathbb{C}$ .
  53. Характеры представлений и их простейшие свойства.
  54. Двойственное представление и его характер.
  55. Матричная форма леммы Шура (с проверкой того, что усреднение отображения является морфизмом представлений).
  56. Соотношения ортогональности Шура и следствия.
  57. Разложение регулярного представления. Теорема Веддербарна и следствия.
  58. Базис пространства функций классов.
  59. Количество неприводимых представлений и центр групповой алгебры.
  60. Второе соотношение ортогональности характеров.
  61. Таблицы характеров: общие сведения, таблицы для абелевых групп и для  $S_3$ .
  62. Таблица характеров для неабелевой группы порядка 8.
  63. Представления прямого произведения.
  64. Целые алгебраические числа.
  65. Лемма для доказательства теоремы о степенях неприводимых представлений.
  66. Теорема о степенях неприводимых представлений.
  67. Тензорные произведения над некоммутативным кольцом. Левый сопряженный к функтору ограничения скаляров.
  68. Индуцированное представление и его матрица.
  69. Свойства индуцированных представлений.
  70. Индуцированные характеры и закон взаимности Фробениуса.
- 
71. Различные определения кольца многочленов от нескольких переменных.
  72. Универсальное свойство кольца многочленов.
  73. Критерий нетеровости.
  74. Теорема Гильберта о базисе.
  75. Лемма Гаусса в различных формулировках.
  76. Факториальность кольца многочленов.
  77. Версия Nullstellensatz для незамкнутого поля.
  78. Слабая версия Nullstellensatz, максимальные идеалы кольца многочленов над замкнутым полем, пространство максимальных идеалов.
  79. Полная версия Nullstellensatz.
  80. Радикальные идеалы и топология Зариского на максимальном спектре.
  81. Антиэквивалентность категории аффинных многообразий и аффинных алгебр.