Дифференциальные уравнения. Задание 10-12.

1. Найдите экспоненты следующих матриц.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. (a) Решите следующие задачи Коши. Решение должно быть записано в вещественной форме без использования комплексных чисел.

   i. $\begin{array}{l} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -5x + 4y \end{array}, \quad x(0) = 1, y(0) = 3,$

   ii. $\begin{array}{l} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{array}, \quad x(0) = 1, y(0) = 2,$

   iii. $\begin{array}{l} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{array}, \quad x(0) = 1, y(0) = 1,$

   iv. $\begin{array}{l} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{array}, \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$

   v. $\begin{array}{l} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{array}, \quad x(0) = 1, y(0) = 1.$

   (b) Решите следующие уравнения, решение должно быть записано в вещественной форме.

   i. $\begin{array}{l} \dot{x} = 5x - 3y - 2z \\ \dot{y} = 8x - 5y - 4z \\ \dot{z} = -4x + 3y + 3z \end{array},$

   ii. $\begin{array}{l} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{array}.$

   iii. $\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{array}.$

   iv. $\begin{array}{l} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{array}.$

3. (a) Постройте такие матрицы A, B, что $e^{A+B} \neq e^A e^B$ и $e^A e^B \neq e^B e^A$.

   (b) Рассмотрим $(N \times N)$-матрицы A, B и дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

$$\dot{y} = By. \tag{2}$$

Пусть $x(t) = \phi(t, x_0)$ – решение задачи Коши $x(0) = x_0$ уравнения (1). Пусть $y(t) = \psi(t, y_0)$ – решение задачи Коши $y(0) = y_0$ уравнения (2). Отметим, что

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0, \quad \psi(t, y_0) = e^{Bt}y_0.$$

Будем говорить, что уравнения (1) и (2) *коммутируют* если

$$\phi(t_1, \psi(t_2, x)) = \psi(t_2, \phi(t_1, x)), \quad \text{for any } t_1, t_2 \in R,\ x \in R^N.$$

Докажите, что уравнения (1) и (2) коммутируют тогда и только тогда когда $AB = BA$.

4. Решите следующие дифференциальные уравнения.

   (a) $y''' - y'' - 2y' + 2y = 0$.

      i. Найдите решение, удовлетворяющее условию:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = -1, \end{cases},$$

      ii. Найдите все решения, удовлетворяющие условию:

$$\begin{cases} y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases},$$

   (b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$,

   (c) $y^{(4)} - y = 0$,

   (d) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$,

   (e) $x^2y''' = 2y'$.

5. Рассмотрим уравнение

$$L(D)z = F(t), \tag{3}$$

где L это многочлен степени n, и $F(t)$ непрерывная функция $t \in \mathbb{R}$. Пусть z_p одно из решений уравнения (3). Отметим, что z это решение уравнения (3) тогда и только тогда когда $u = z - z_p$ решение однородного уравнения $L(D)u = 0$.

Если правая часть уравнения (3) имеет вид

$$P_m(t)e^{\gamma t},$$

где P_m многочлен степени m, тогда частное решение может быть найдено в виде

$$x(t) = t^s Q_m(t)e^{\gamma t},$$

где Q_m многочлен степени m, s – кратность корня γ характеристического многочлена однородного уравнения (если γ не является корнем, то $s = 0$). Если правая часть уравнения имеет вид

$$e^{\gamma t}(P_m(t)\cos(\beta t) + Q_m(t)\sin(\beta t)),$$

тогда частное решение может быть найдено в виде

$$x(t) = t^s e^{\gamma t}(R_m(t)\cos(\beta t) + T_m(t)\sin(\beta t)),$$

где R_m, T_m многочлены степени m, s – кратность корня $\gamma + i\beta$ характеристического многочлена однородного уравнения (если $\gamma + i\beta$ не является корнем, то $s = 0$)

Задачи: Решите следующие уравнения.

(a) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$

(b) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$,

(c) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$,

(d) $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.