

## Задачи со звёздочкой

1. Решите уравнение

$$y^2(x-1)dx = x(xy+x-2y)dy$$

2. Решите уравнение

$$(x+y)(1-xy)dx + (x+2y)dy = 0$$

3. Решите уравнение

$$(x^2-1)dx + (x^2y^2 + x^3 + x)dy = 0$$

4. Решите уравнение

$$(y - yx^2 - 2x)dx + x(x^2 + 1)dy = 0$$

5. Дать пример, показывающий, что решение уравнения  $F(t, x, \dot{x}) = 0$ , удовлетворяющее условию  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$ , не обязательно особое (через точки не проходят другие решения уравнения с той же касательной).

6. Рассмотрим уравнение Клеро  $x = t\dot{x} - \psi(\dot{x})$ . Предположим, что функция  $\psi$  – выпуклая. Пусть  $g$  – особое решение этого уравнения. Показать, что особое решение уравнения Клеро  $y = t\dot{y} - g(\dot{y})$  совпадает с  $\psi$ .

7. Решить уравнение:

$$\dot{y}^3 + 3\dot{y}^2 + y^4 - 4 = 0.$$

8. Показать, что решения задачи Коши  $x(t_0) = x_0$  для уравнения

$$\dot{x} = t^3 - x^3$$

существуют на луче  $[x_0, +\infty)$ .

9. Исследуйте характер решений при  $t \rightarrow \pm\infty$  для уравнения  $\dot{x} = t^2 - e^x$ . Нужно выяснить интервал  $(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) существования для каждого решения и найти асимптотики решений при  $x \downarrow a$ ,  $x \uparrow b$ . Построить схематически интегральные кривые.