## Переписывание по категориям

1. Пусть для объектов $A$ и $B$ некоторой категории существует их произведение $A \times B$ и при этом проекция $\pi_1 : A \times B \to A$ не является эпиморфизмом. Докажите, что из $A$ в $B$ нет ни одного морфизма.

2. Пусть $C$ — категория, в которой есть инициальный и финальный объекты. Пусть $F : C \to C$ — функтор, посылающий все объекты в начальный. Найдите правый сопряжённый к $F$.

3. Эпиморфизм называется *регулярным*, если он является коэквалайзером каких-нибудь двух параллельных морфизмов. Докажите, что пушаут регулярного эпиморфизма — регулярный эпиморфизм. Иными словами, если есть диаграмма пушаута
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \end{tikzcd}$$
, где $f$ — регулярный эпиморфизм, то $g$ — тоже регулярный эпиморфизм.

4. Рассмотрим группу $G$ как категорию с одним объектом. Рассмотрим функтор из $G$ в категорию групп, который переводит единственный объект категории $G$ в группу $G$, а морфизм, соответствующий элементу $g \in G$ в автоморфизм сопряжения элементом $g$. Чему равен предел этого функтора?