Практика 27.10

1. Пусть x, y — объекты категории C. Докажите, что копроизведение объектов x и y существует тогда и только тогда, когда функтор из C в $Sets$, сопоставляющий объекту z множество $C(x, z) \times C(y, z)$ (и определенный очевидным образом на морфизмах) представим.

2. Пусть в диаграмме

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \end{tikzcd}$$

правый квадрат (с вершинами A_2, A_3, B_2, B_3) и внешний прямоугольник (с вершинами A_1, A_3, B_1, B_3) — пулбэки. Докажите, что, если левый квадрат (с вершинами A_1, A_2, B_1, B_2) коммутативен, то он тоже является пулбэком.

3. Докажите, что, если в пулбэке

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

морфизм f является мономорфизмом, то и g мономорфизм.

4. Пусть группы G и H заданы образующими и соотношениями как $\langle X \mid R \rangle$ и $\langle Y \mid S \rangle$. Докажите, что группа $G * H$ заданная образующими и соотношениями $\langle X, Y \mid R, S \rangle$ является копроизведением G и H в категории групп. Выведите отсюда, что $G * H$ не зависит (по модулю изоморфизма) от представления G и H образующими и соотношениями.

5. Докажите, что, еесли категория J имеет начальный объект $*$, то для любого функтора $F : J \to C$ объект $F(*)$ будет пределом функтора F.

6. Пусть G — группа. Обозначим через S_G категорию, объекты которой — конечно порожденные подгруппы группы G, а морфизмы соответствуют вложениям подгрупп. Докажите, что копредел очевидного функтора из S_G в $Groups$ — это G.

7. Пусть $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ рассматривается как абелева группа относительно сложения). Пусть S — категория, объекты которой — циклические подгруппы группы G, а морфизмы соответствуют вложениям подгрупп (как подгрупп группы G). Найдите копредел очевидного функтора из S в $Groups$.

8. Пусть $\mathbf{2}$ — категория с 2-мя объектами и одной стрелкой между ними, а C, D — две произвольные категории. Покажите, что любой функтор $F : C \to D^{\mathbf{2}}$ можно задать тройкой (G, H, ϕ), где $G, H : C \to D$ — два функтора, а $\phi : G \to H$ — естественное преобразование, и что любая тройка указанного вида определяет функтор из C в $D^{\mathbf{2}}$.