16 Контрольная 2: 15/12/2020

Программа Математика

1. (10) Вычислить интеграл

$$\iint_S (3x-z)dy\,dz + (y+2z)dx\,dy,$$

где S — плоский треугольник с вершинами $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, ориентированный нормалью $n=(1,1,1)$.

2. (10) Вычислить интеграл

$$\int_\Gamma ydx - zdy + (z^3-2x)dz,$$

где $\Gamma = S_1 \cap S_2$, $S_1 = \{x^2+y^2=1\}$, $S_2=\{3x+y+z=1\}$ и контур Γ положительно ориентирован относительно нормали $n=(3,1,1)$ к плоскости S_2.

3. (10) Найти поток векторного поля $a=(a_x,a_y,a_z)=(x^6,z,z^2)$ через ориентированную внешней нормалью коническую поверхность $z^2=x^2+y^2$ при $y\le 0$, $0\le z\le 1$, т.е. вычислить интеграл

$$\iint_S \langle a, ds\rangle = \iint_S a_x dy\,dz + a_y dz\,dx + a_z dx\,dy.$$

4. (10) Вычислить поток векторного поля $a=(a_x,a_y,a_z)=(xz,0,0)$ через ориентированную в направлении внешней нормали наклонную грань S_0 поверхности тетраэдра V, ограниченного плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $S_0=\{x+y+z=1\}$, т.е. вычислить интеграл

$$\iint_S \langle a, ds\rangle = \iint_S a_x dy\,dz + a_y dz\,dx + a_z dx\,dy.$$

5. (10) Найти циркуляцию векторного поля $a=(a_x,a_y,a_z)=(2y,2z,x)$ по контуру $\Gamma=S_1\cap S_2$, где $S_1=\{z=x^2+y^2\}$, $S_2=\{z=x+y\}$, ориентированному отрицательно относительно нормали $(1,1,-1)$ к плоскости S_2, т.е. вычислить интеграл

$$\int_\Gamma \langle a, dr\rangle = \int_\Gamma a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$

где r есть касательный вектор к замкнутой кривой Γ.

6. (10) Векторное поле a называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля u, то есть $a=\operatorname{grad} u$. Тогда функция u называется потенциалом векторного поля a. Доказать, что поле $a=f(|r|)r$, где $f(r)$ — непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

7. (10) Пусть $A=[-1,1]^2\subset\mathbb{R}^2$. Вычислить

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-d(x,A)}\,d\lambda_2(x),$$

где $d(x,A)$ есть расстояние от точки x до A.

8. (10) Найти массу тела $\Omega\subset\mathbb{R}^4$, $\Omega=\{y^2+z^2+t^2\le x^2\}$ с плотностью $\rho(x,y,z,t)=e^{-\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{2}}$.

9. (10) Для данной точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ вычислить $(f * g)(x_0, y_0)$, где $f(x, y) = \log \frac{1}{x^2+y^2}$, и $g(x, y) = \chi_{\{x^2+y^2 \le 1\}}(x, y)$.

10. (10) Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\int_{[0,1]^n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \, dx_1 \, \ldots \, dx_k \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

11. (10) Найти объем тел, ограниченных поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

12. (10) Для данной борелевской меры μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$ положим

$$U^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mu(y)}{|x-y|},$$
$$\mathcal{E}[\mu] = \int_{\mathbb{R}^3} U^\mu(x) \, d\mu(x).$$

Пусть $B = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$ есть единичный (замкнутый) шар в $\mathbb{R}^3$.

- Найти такую меру μ, что $\operatorname{supp} \mu \subset B$ и

$$U^\mu(x) = 1, \quad x \in B.$$

- Показать, что если мера ν удовлетворяет условиям $\operatorname{supp} \nu \subset B$ и $U^\nu(x) \ge 1$, $x \in B$, то $\nu(B) \ge \mu(B)$ и $\mathcal{E}[\nu] \ge \mathcal{E}[\mu]$.

13. (10) Назовем ячейку $Q := \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^n$ полуцелой, если для одного из чисел k верно $(b_k - a_k) \in \mathbb{Z}$. Пусть ячейка $R \subset \mathbb{R}^n$ разбивается в дизъюнктное объединение полуцелых ячеек. Доказать, что R в этом случае тоже полуцелая.

14. (10) Пусть $d\mu = f \, d\lambda_3$, где $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ есть C^∞-гладкая функция с компактным носителем. Доказать, что

$$\Delta U^\mu = f.$$