10 Контрольная 1: 03/11/2020

Программа Математика и МААД

1. (10) Пусть даны последовательность множеств A_n и последовательность их характеристических функция χ_n. Доказать, что предел последовательности множеств A_n существует тогда и только тогда, когда существует предел характтеристических функций и, соответственно, что характеристической функцией $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ является функция $\overline{\lim}_{n\to\infty}\chi_n$, а характеристической функцией $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ является функция $\underline{\lim}_{n\to\infty}\chi_n$.

2. (3+3+4) Пусть μ — счетно-аддитивная мера на полукольце $\mathfrak{A} \subset 2^X$, μ^* — соответствующая внешняя мера.

   (a) Доказать, что отношение $\mu^*(A\triangle B) = 0$ является отношением эквивалентности и что функция $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu^*(A\triangle B)$, где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — классы эквивалентности, содержащие A и B, задает расстояние на соответствующем фактор-множестве $\mathcal{M}$.

   (b) Доказать, что метрическое пространство $\mathcal{M}$ полно.

   (c) Пусть $\mathfrak{A}$ — подкольцо интервалов вида $[a, b)$ на отрезке $[0, 1]$, $\mathcal{M}$ — пространство, построенное ранее. Доказать, что $\mathcal{M}$ связно и некомпактно.

3. (10) Пусть каждое из множеств A_n, $n = 1, 2, \dots$ состоит из цифр $0, 1, 2, \dots, 9$. Определим меру μ_n на A_n, полагая $\mu_n(B) = \mathrm{card}(B)/10$. Пусть μ — мера на $A = \bigcap A_n$, являющаяся произведением мер μ_n. Рассмотрим отображение A в отрезок $[0, 1]$: $\{x_n\} \to 0, x_1x_2x_3\dots$ (бесконечная десятичная дробь). Доказать, что при этом отображении мера μ переходит в обычную меру Лебега на $[0, 1]$.

4. (10) Пусть $f(x, y)$ есть количество точек $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условию $j^2 + k^2 < x^2 + y^2$, и $S := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2}$. Доказать, что
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \pi S^2.$$

5. (МААД, 10) Вычислить интеграл
$$\int_S |z|\, dH_2(x, y, z),$$
где поверхность S задается уравнениями $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$, $|z| \le \sqrt{2}a$.

5. (М, 10) Пусть $E := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \le x_1\}$. Для заданного $t \in \mathbb{R}^4$ вычислить интеграл
$$\int_E e^{-\langle x,t\rangle}\, dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

Программа Математика и МААД

1. (10) Существует ли неограниченная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принадлежащая всем пространствам $L^p(\mathbb{R})$ для $1 \le p < +\infty$?

2. (3+3+4) Пусть μ — счетно-аддитивная мера на полукольце $\mathfrak{A} \subset 2^X$, μ^* — соответствующая внешняя мера.

   (a) Доказать, что отношение $\mu^*(A \triangle B) = 0$ является отношением эквивалентности и что функция $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu^*(A \triangle B)$, где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — классы эквивалентности, содержащие A и B, задает расстояние на соответствующем фактормножестве $\mathcal{M}$.

   (b) Доказать, что метрическое пространство $\mathcal{M}$ полно.

   (c) Пусть $\mathfrak{A}$ — подкольцо интервалов вида $[a, b)$ на отрезке $[0, 1]$, $\mathcal{M}$ — пространство, построенное ранее. Доказать, что $\mathcal{M}$ связно и некомпактно.

3. (10) Пусть каждое из множеств A_n, $n = 1, 2, \ldots$ состоит из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$. Определим меру μ_n на A_n, полагая $\mu_n(B) = \mathrm{card}(B)/10$. Пусть μ — мера на $A = \bigcap A_n$, являющаяся произведением мер μ_n. Рассмотрим отображение A в отрезок $[0, 1]$: $\{x_n\} \to 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ (бесконечная десятичная дробь). Доказать, что при этом отображении мера μ переходит в обычную меру Лебега на $[0, 1]$.

4. (10) Пусть $f(x, y)$ есть количество точек $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условию $j^2 + k^2 < x^2 + y^2$, и $S := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2}$. Доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \pi S^2.$$

5. (МААД, 10) Вычислить интеграл

$$\int_S |z|\, dH_2(x, y, z),$$

   где поверхность S задается уравнениями $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$, $|z| \le \sqrt{2}a$.

5. (М, 10) Пусть $E := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \le x_1\}$. Для заданного $t \in \mathbb{R}^4$ вычислить интеграл

$$\int_E e^{-\langle x, t\rangle}\, dx.$$