11 Занятие 10/11/2020: криволинейные интегралы, формула Грина

Формула Грина

Пусть Γ — граница плоской ограниченной области G, состоящая из конечного набора кусочно гладких кривых. Пусть функции $P, Q, \partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны на $\overline{G}$. Тогда справедлива **формула Грина**:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy,$$

где контур Γ ориентирован ттак, что при его обходе область G остается слева.

Например, при $Q = x$, $P = -y$ получаем формулу для площади

$$S = \iint_G dxdy$$

области G, ограниченной контуром Γ по формуле выше

$$S = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx.$$

Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G, то криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$$

не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB} \subset G$ (A — начало, B — конец) тогда и только тогда, когда $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то есть в области G выполнено

$$du = Pdx + Qdy, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

При этом выполнено

$$\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

Если G — односвязная область, то для того чтобы криволинейный интеграл выше не зависел от пути интегрироввания необходимо и досттаточно, чтобы в плоской области G выполнялось

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

где $P, Q, \partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ непрерывны на $\overline{G}$.

Приложения криволинейных интегралов

Пусть Γ — кусочно гладкая кривая, на которой распределена масса с линейной плотностью $\rho(x, y, z)$.

Массу кривой вычисляют по формуле

$$m = \int_\Gamma \rho(x, y, z)ds,$$

координаты центра масс

$$x_c = \frac{1}{m}\int_\Gamma x\rho ds, \quad y_c = \frac{1}{m}\int_\Gamma y\rho ds, \quad z_c = \frac{1}{m}\int_\Gamma z\rho ds,$$

а моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz по формулам

$$I_x = \int_\Gamma (y^2+z^2)\rho ds, \quad I_y = \int_\Gamma (x^2+z^2)\rho ds, \quad I_z = \int_\Gamma (x^2+y^2)\rho ds.$$

Задачи:

(1) Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_\Gamma (x+y)ds,$$

где Γ — граница треугольника с вершинами $(0,0), (1,0), (1,1)$.

(2) Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_\Gamma ydx + xdy,$$

где Γ — кривая с началов в $(0,0)$ и концом в $(1,1)$ такая, что

(a) Γ — отрезок,

(b) Γ — дуга параболы $y = x^2$,

(c) Γ — дуга окружности радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$.

(3) Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_G x^2ydx - xy^2dy,$$

где Γ — окружность $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

(4) Найти площадь S, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

(5) Пусть $A=(1,-2)$, $B=(2,3)$. Показать, что криволинейный интеграл

$$I - \int_{AB} (3x^2y+y)dx + (x^3+x)dy$$

не зависит от пути интегрирования и вычислить этот интеграл.

(6) Вычислить

$$I = \int_\Gamma xydx + (x+y)dy,$$

где Γ — окружность радиуса R.

(7) Вычислить

$$I = \int_\Gamma (x-y)dx + (x+y)dy,$$

где Γ — окружность $x^2+y^2=a^2$.

(8) Вычислить

$$I = \int_\Gamma (x+y)dx - (x-y)dy,$$

где Γ — эллипс $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

(9) Вычислить

$$I = \int_\Gamma (y - x^2)dx - (x + y^2)dy,$$

где Γ ограничивает сектор круга радиусом a, лежащий в первом квадранте.

(10) Вычислить

$$I = \int_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2}dx + y(xy + \log(x + \sqrt{x^2 + y^2}))dy,$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 = a^2$.