Практика 29.09

1. Пусть $\mathcal{F} : C \to D$ — строгий функтор (faithful), $\mathcal{F}(f)$ — мономорфизм. Докажите, что f тоже мономорфизм.

2. Придумайте пример такого строгого функтора $\mathcal{F} : A \to B$, что существуют два различных морфизма f_1, f_2, для которых $\mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2)$.

3. (a) Покажите, что вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ — это мономорфизм и эпиморфизм в категории колец с 1 **Ring** (таким образом, морфизм, который одновременно моно и эпи, не обязан быть изоморфизмом).

   (b) Покажите, что морфизм, который одновременно мономорфизм и расщепляющийся эпиморфизм, является изоморфизмом.

   (c) Пусть $\mathbf{Top_2}$ — категория хаусдорфовых пространств с непрерывными отображениями. Покажите, что любой морфизм $\varphi : S \to R$, где $\varphi(S)$ плотно в R, в этой категории — эпиморфизм.

4. Определим категорию **Pno** следующим образом. Объекты **Pno** — тройки (A, α, a), где A — множество, $\alpha : A \to A$ — отображение, $a \in A$ — элемент A, а морфизмы из (A, α, a) в (B, β, b) — это отображения $f : A \to B$, такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ f$, $f(a) = b$. Докажите, что $(\mathbb{N} \cup \{0\}, succ, 0)$, где $succ(n) = n + 1$, является инициальным объектом категории **Pno**. А какой объект в этой категории является терминальным (финальным)?

5. Для множества X обозначим за $Sym(X)$ множество всех биекций $X \to X$, а за $Ord(X)$ — множество всех полных порядков на X. Пусть $\mathcal{C}$ — категория конечных множеств с биекциями.

   (a) Канонически доопределите Sym и Ord до функторов $\mathbf{Sym} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ и $\mathbf{Ord} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ (то есть определите на морфизмах в C, не делая никаких произвольных выборов).

   (b) Докажите, что не существует естественного преобразования $\mathbf{Sym} \to \mathbf{Ord}$ (рассмотрите какой-нибудь маленький пример и тождественную перестановку).

   (c) Если $|X| = n$, каковы мощности $Sym(X)$ и $Ord(X)$?

   Мораль этой задачи: на любом конечном множестве полных порядков ровно столько же, сколько перестановок, но не существует никакого естественного способа задать между ними биекцию.

6. Элементы любой группы G можно отождествить с гомоморфизмами $\mathbb{Z} \to G$ (для каждого элемента $g \in G$ существует единственный гомоморфизм, переводящий $1 \in \mathbb{Z}$ в g). С другой стороны, если рассматривать $\mathbb{Z}$ и G как категории с одним объектом, гомоморфизмы $\mathbb{Z} \to G$ — это функторы между соответствующими категориями. Естественные преобразования между ними задают отошение эквивалентности на множестве гомоморфизмов $\mathbb{Z} \to G$, а значит и на самой группе G. Что это за отношение эквивалентности, в чисто теоретико-групповых терминах?

7. Найдите инициальный и финальный объект в категории векторных пространств с двумя отмеченными точками (морфизмы отображают отмеченные точки с отмеченные точки, сохраняя порядок).

8. (a) Докажите (вспомните), что сопоставление группе G её центра $Z(G)$ не задает функтор из категории групп в себя.

   (b) Докажите (вспомните), что сопоставление группе G её фактора по коммутанту $G/[G, G]$ задёт функтор из категории групп в категорию абелевых групп.

   (c) Докажите, что сопоставление группе G её группы автоморфизмов $Aut(G)$ не задаёт функтор из категории групп в себя.

9. Категория называется скелетной, если в ней любые два изоморфных объекта совпадают. Скелетом категории C называется её скелетная подкатегория S, для которой функтор вложения $S \hookrightarrow C$ — эквивалентность категорий. Докажите, что у каждой категории есть скелет (используя аксиому выбора). Докажите, что любые два скелета одной категории изоморфны.

10. Пусть $\mathcal{C}$ — (малая) категория. Докажите, что естественные преобразования из $Id_{\mathcal{C}}$ в $Id_{\mathcal{C}}$ образуют коммутативный моноид относительно композиции (какой?). Вычислите этот моноид в случае, когда $\mathcal{C}$ — категория абелевых групп.