Практика 08.09

1. Докажите, что группа $G_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | s_i^2 = e, (s_i s_{i+1})^3 = e, s_i s_j = s_j s_i$ при $|i-j| \geq 2\rangle$ при $n \geq 1$ изоморфна симметрической группе S_n, перечислив смежные классы по подгруппе G_{n-1}.

2. Докажите, что группа $G = \langle x, y | x^{-1}yx = y^2, y^{-1}xy = x^2\rangle$ тривиальна.

3. Докажите, что группы $\langle x, y | x^3 = y^2\rangle$ и $\langle a, b | aba = bab\rangle$ изоморфны.

4. Определите, что за группа (какой известной группе изоморфна) $G = \langle a, b | a = (ab)^3, b = (ab)^4\rangle$.

5. Докажите, что $\langle a, b | a^2, b^3, (ab)^3\rangle \cong A_4$.

6. Пусть группа $G = \langle S | R\rangle$ конечна, и все соотношения чётной длины. Докажите, что G чётного порядка.

7. Пусть группа G задана как $G = \langle X | R\rangle$. Докажите, что G проста тогда и только тогда, когда группа $\langle X | R, w\rangle$ тривиальна для любого слова $w \neq 1$ в G.

8. Пусть $G = \langle X | R\rangle$, $H = \langle Y | S\rangle$ и задан гомоморфизм $\theta : H \to Aut(G)$. Докажите, что $G \rtimes_\theta H \cong \langle X \coprod Y | R \cup S \cup \{yxy^{-1}\theta_y(x^{-1}) \mid x \in X, y \in Y\}\rangle$.