Содержание

Последнее обновление 6 декабря 2020 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/topology3.pdf

Топология и геометрия-3, практика, СПбГУ 2020, факультет математики и компьютерных наук

Никита Сергеевич Калинин, Нина Дмитриевна Лебедева, Евгений Анатольевич Фоминых

Для всех групп: 201,202,203

1 Самый животрепещущий вопрос: как будут считать рейтинг

Вместо рейтинга каждый предмет номинирует примерно 1/3 студентов как *отличных* студентов, примерно 1/3 студентов как *хороших* студентов. Быть *отличным* студентом раза в два-три почётнее, чем быть *хорошим* студентом. И ещё есть какие-то правила, что тройки и двойки на экзаменах получать плохо.

Итого, ваша стратегия, если хочется стипендию: не получать троек на экзаменах, по всем предметам желательно быть хорошим студентом, и по как можно большему числу любимых предметов быть отличным студентом.

На геометрии и топологии, разделение на отличных, хороших и остальных студентов будет основываться на ваших успехах в течение семестра. Нет никакой формулы. Учитывается ваша активность на занятиях, какие задачи вы решили в группе, какие задачи рассказали, какие сделали в дз, насколько сложные задачи решили. Может быть будут контрольные.

Общее правило: чем более сложные задачи вы решаете, тем лучше (тогда мы поверим, что простые задачи вам очевидны). **Чем лучше вы их записываете или рассказываете, тем лучше** (про плохо записанные/рассказанные задачи мы поставим плюсик, но для себя запишем, что человек не старался). **Если вы решаете в группе, то предполагается, что любой участник группы может рассказать решение любой задачи из решённых группой.** Мы будем это проверять.

Практика у нас по понедельникам, задачи с конкретного практического занятия можно сдавать **в понедельник и на следующих день – вторник**. Задачи со **звёздочкой можно сдавать в течение недели – до воскресенья**. Сдавать задачи нужно либо устно во время занятия, либо присылать письменное решение (там где удобно преподавателю – например, в Slack или в Microsoft teams, по ходу решим). Преподаватель может попросить устно рассказать то, что вы прислали письменно.

Если вы решили задачу в составе группы – пишите состав группы, когда присылаете решение. Никакого штрафа за совместное решение нет (но мы можем попросить кого-то из участников группы рассказать решение, и если человек не справится, то вся группы не получает плюсик за эту задачу).

В целом – занимайтесь, решайте сложные задачи, и всё будет хорошо.

Где-то в октябре мы скажем, каковы были бы рекомендации (кто хороший, а кто отличный) на этот момент, чтобы дать обратную связь.

2 Летнее задание

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 9. Докажите, что любое линейно связное трёхточечное пространство односвязно.

Задача 10. Рассмотрим топологическое пространство $X = \{a, b, c, d\}$, в котором база топологии состоит из множеств $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, b, c\}$ и $\{a, c, d\}$.

1. (2 балла) Докажите, что пространство X неодносвязно;

2. (3 балла) Найдите $\pi_1(X)$.

Задача 11. Пусть $X \subset \mathbb{R}^4$ — множество симметричных (2×2)-матриц с отрицательным определителем. Докажите, что пространство X гомотопически эквивалентно S^1.

Задача 12. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы коммутативна. *Топологической группой* называется множество G на котором заданы как топологическая, так и групповая структура. При этом требуется, чтобы отображения $G \times G : (x, y) \to xy$ и $G \to G : x \to x^{-1}$ были непрерывны.

Задача 13. Пусть ℓ — простая замкнутая кривая на стандартно вложенном в $\mathbb{R}^3$ торе, поднятие которой в универсальное накрытие тора задается уравнением $pu = qv$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Выпишите задание фундаментальной группы пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$.

Задача 14. Докажите, что к краю стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ ленты Мёбиуса нельзя приклеить диск, который не пересекает эту ленту Мёбиуса.

3 7 сентября

Задача 1. Представьте сферу S^n как клеточное пространство: а) содержащее 2 клетки; б)чтобы его k-остовом для всякого целого неотрицательного $k < n$ была стандартная сфера $S^k \subset S^n$.

Задача 2. Представьте $\mathbb{R}P^n$ как клеточное пространство, состоящее из $n+1$ клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

Задача 3. Докажите, что $S^2 \times S^2$ — конечное клеточное пространство.

Разбор: https://youtu.be/DWVg-KQGAC4

Задача 4. а)Если X и Y — локально конечные клеточные пространства (т.е. любая точка в X обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток), то топологическое пространство $X \times Y$ может быть естественным образом наделено структурой клеточного пространства. б)***Останется ли верным это утверждение, если не требовать локальной конечности клеточных пространств X и Y?

Разбор: задача 42.3- 42.4 в книге Виро-Иванов-Нецветаев-Харламов, разобрана на странице 343.

Задача 5. Пусть A — конечное клеточное пространство. Через $c_i(A)$ обозначим число его i-мерных клеток. Эйлеровой характеристикой пространства A называется альтернированная сумма чисел $c_i(A)$:

$$\chi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_i(A).$$

Докажите, что эйлерова характеристика мультипликативна в следующем смысле. Если X и Y — конечные клеточные пространства, то $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Факт (не доказываем, но пользуемся). Эйлерова характеристика является инвариантом клеточного топологического пространства, то есть не зависит от способа представления в виде клеточного пространства.

Задача 6. Какое наименьшее число клеток необходимо для представления в виде клеточного пространства следующих пространств: а) ленты Мёбиуса; б) сферы с p ручками; в) сферы с q пленками?

Разбор: https://youtu.be/6FbGB-kEdiI и http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2020/zadacha6.pdf

Задача 7. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

Разбор: можно двулистно накрыть S^n, которое односвязно, значит $\mathbb{Z}_2$. Ещё можно взять двумерный остов (от которого только и зависит π_1), это $\mathbb{R}P^2$, представить его в виде склейки квадрата, получается группа $< a|a^2 = e >$ то есть $\mathbb{Z}_2$.

4 14 сентября

Задачи из летного задания надо сдавать в **Microsoft Teams до 27 сентября** (включительно), проверяет ЕА Фоминых.

Задача 8. Пространство X получается приклейкой к тору $S^1 \times S^1$ двух дисков: одного вдоль его параллели $S^1 \times \{1\}$, второго вдоль меридиана $\{1\} \times S^1$. а) Вычислите $\pi_1(X)$; б)Докажите, что X гомотопически эквивалентно сфере S^2.

Задача 9. Пусть $p : X \to B$ — накрытие, причем $x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0$ и пространства X, B линейно связны). Постройте естественную биекцию множества $p^{-1}(b_0)$ на множество правых смежных классов фундаментальной группы базы этого накрытия по группе накрытия.

Задача 10. Чему могут равняться числа листов накрытия: а) ленты Мёбиуса кольцом $S^1 \times I$; б) ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

Задача 11. Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна плоскостью?

Задача 12. Опишите с точностью до эквивалентности все накрытия окружности S^1.

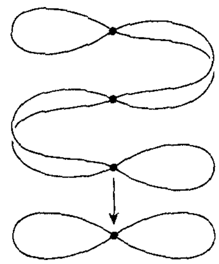
Задача 13. Накрытие $p : X \to B$ $(x_0 \in X, b_0 \in B, p(x_0) = b_0)$, где пространства X, B “хорошие”, называется регулярным, если $p_*(\pi_1(X, x_0))$ нормальная подгруппа в $\pi_1(B, b_0)$. Является ли регулярным накрытие $S^1 \to S^1, z \to z^n$?

Задача 14. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Задача 15. Докажите, что любое связное двулистное накрытие: а) обладает нетривиальным автоморфизмом; б) регулярно.

Задача 16. Докажите, что трёхлистное накрытие букета двух окружностей графом с тремя вершинами (см. рис. ниже) не является регулярным.



Задача 17. ***Докажите, что всякое конечное клеточное пространство метризуемо.

5 21 сентября

Задача 18. Вокруг некоторой точки O окружности радиуса a вращается луч. На этом луче по обе стороны от точки A его пересечения с окружностью откладываются отрезки AM_1 и AM_2 длины $2b$. Составьте параметрическое уравнение кривой, описываемой точками M_1 и M_2 (улитка Паскаля; в частности, при $a = b$ — кардиоида).

Задача 19. Найдите кривую, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и кругового цилиндра диаметра R, одна из образующих которого проходит через центр сферы. Эта кривая называется кривой Вивиани.

Задача 20. а) Выразить производные следующих функций через данную вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ и ее производные: $\mathbf{r}^2(t)$; $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$; $|\mathbf{r}(t)|$; $\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|$.

b) Доказать, что $|\mathbf{r}(t)| = \mathrm{const}$, экви $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

c) Доказать, что кривая $\mathbf{r}(t)$ лежит в фиксированной плоскости с нормалью n, экви $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Задача 21. Доказать, что: *a*) если $\mathbf{r}' = \mathrm{const}$, то $\mathbf{r}(t)$ задает прямую,

b) если $t \in [a, b]$, а $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по разные стороны от данной плоскости, то кривая пересекает эту плоскость,

c) если $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ лежат по одну сторону и на одинаковом расстоянии от данной плоскости, то некоторая касательная этой кривой параллельна данной плоскости.

Задача 22. Вывести из определения эллипса, что вектор $\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1| + \mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_2|$ является нормалью к эллипсу, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — фокальные радиусы-векторы.

Задача 23. Составьте натуральную параметризацию кривой

a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ (цепная линия).

b) $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ (винтовая линия).

Задача 24. Доказать, что кривая $\gamma(t) = (t, t\sin\pi/t), t \neq 0$, $\gamma(0) = (0,0)$ имеет бесконечную длину на интервале $[0,1]$.

Задача 25. *** Пусть параметризация (не обязательно натуральная) гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ такова, что длина хорды $|\gamma(t) - \gamma(s)|$ зависит только от $t - s$. Доказать, что кривая является подмножеством прямой либо окружности.

6 28 сентября

Эволюта кривой — это кривая, образованная её центрами кривизны.

Задача 26. Составьте уравнения и начертите эволюту эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Задача 27. Найдите точки экстремума кривизны параболы и эллипса. Найдите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 28. Для плоской кривой $\gamma(t)$ и фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию $S(t) = |\gamma(t) - q|^2$. Докажите, что

1. q лежит на нормали к кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = 0$;
2. q является центром кривизны кривой $\gamma(t) \Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = 0$;
3. q является центром кривизны кривой, а в точке t производная функции кривизны равна нулю $\Leftrightarrow S'(t) = S''(t) = S'''(t) = 0$.

Задача 29. ***

1. Докажите, что если модуль кривизны имеет строгий локальный максимум в t_0, то для некоторого $\varepsilon > 0$ участок кривой $\gamma[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ “лежит между” соприкасающейся окружностью и касательной и имеет с этой окружностью только одну общую точку $\gamma(t_0)$.
2. Докажите, что если для некоторого $\varepsilon > 0$ участок кривой $\gamma[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ “лежит между” соприкасающейся окружностью и касательной, то производная кривизны в t_0 равна нулю.

Задача 30. *** Пусть простая замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ ограничивает замкнутую область F. Будем говорить, что окружность вписана в γ, если она содержится в F и имеет с γ более одной общей точки. Кривизну будем считать положительной, если нормаль направлена внутрь F.

1. Доказать, что если для последовательности окружностей, вписанных в кривую, точки касания $p_n, q_n \to \gamma(t_0)$, то эти окружности сходятся к соприкасающейся окружности в точке $\gamma(t_0)$.
2. Доказать, что для множества точек касания K_1 и K_2 двух вписанных окружностей множество K_2 лежит в одной компоненте связности множества $\gamma(S^1) \setminus K_1$.

3. Доказать, что для вписанной окружности с множеством точек касания K_1 каждая связная компонента $\gamma(S^1) \setminus K_1$ содержит точку, где производная кривизны равна нулю.

Задача 31. ***Доказать, что если простая замкнутая плоская кривая кривизны $|k| < 1$ ограничивает фигуру F, то F содержит диск радиуса 1.

(Подсказка: использовать предыдущую задачу.)

Задача 32. ***Срединная ось простой гладкой регулярной замкнутой плоской кривой это замыкание множества центров вписанных окружностей. Пусть у такой кривой конечное число точек, в которых производная кривизны равна нулю. Доказать, что срединная ось этой кривой - конечное дерево.

7 5 октября

Задача 33. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2, \end{cases}$$

заключенной между плоскостями $y = a/3$ и $y = 9a$.

Задача 34. Докажите, что у кривой

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$$

кривизна и кручение равны.

Задача 35. Найти базис Френе кривой $(2t, \ln t, t^2)$ при $t = 1$.

Задача 36. (подсказка: нарисуйте картинку)Даны две натурально параметризованные (одним и тем же параметром) кривые $\gamma_i : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma_1(t) = (x_1(t)), y_1(t)), \gamma_2(t) = (x_2(t)), y_2(t))$. Пусть

$$\gamma_i(0) = (0,0), v_1(0) = v_2(0) = (1,0), n_1(0) = n_2(0) = (0,1)$$

Пусть $k_1(t) \geq k_2(t) > 0$ и α_i - непрерывный аргумент для v_i. Тогда для некоторого $0 < \delta \leq \varepsilon$

1. $x_i(t), y_i(t)$ возрастают на $[0, \delta]$
2. $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t)$ для $t \in [0, \delta]$
3. $x_1(t) \leq x_2(t)$ и $y_1(t) \geq y_2(t)$ для $t \in [0, \delta]$
4. для любого $c \in [0, x_1(\delta)]$ если $x_1(t_1) = x_2(t_2) = c$, то $t_1 \geq t_2$ и $y(t_1) \geq y(t_2)$

Задача 37. Найти поворот кривой $\gamma(t) = (t, \sin t)$ на участке $[0, 5\pi/2]$.

Задача 38. Две точки движутся в пространстве так, что расстояние между ними остается постоянным. Доказать, что в любой момент времени проекции их скоростей на прямую, соединяющую эти точки, равны.

Задача 39. Простая плоская замкнутая выпуклая кривая называется кривой постоянной ширины μ, если длина ее проекции на любую прямую равна μ. Для плоской гладкой кривой постоянной ширины μ с кривизной отличной от 0 доказать, что

1. хорда, соединяющая противоположные точки перпендикулярна кривой (подсказка: нарисуйте опорные прямые данного направления, и отрезок между точками касаний выразите через базис Френе).
2. для кривизн в противоположных точках выполнено соотношение $1/k + 1/k^* = \mu$
3. *** длина равна $\pi\mu$

8 12 октября

Задача 40.

а)Кривая на плоскости параметризована натурально и имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную $\pi/2$. Тогда $\langle\gamma(\pi/2) - \gamma(0), v(0)\rangle \geq 1$, где v –вектор скорости.

б)Кривая на плоскости имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную π. Тогда расстояние между концами не меньше 2.

в)Кривая в пространстве имеет кривизну не больше 1 во всех точках и длину, равную π. Тогда расстояние между концами не меньше 2.

Задача 41. Пусть окружность и кривая касаются в некоторой точке. Доказать, что если окружность не является соприкасающейся для кривой в этой точке, то в некоторой окрестности (по параметру) у кривой нет с окружностью других общих точек.

Задача 42. Найти кривизну пространственной кривой, образованной концами отрезков постоянной длины, отложенных на бинормалях данной кривой от каждой ее точки.

Задача 43. Обобщенной винтовой линией в $\mathbb{R}^3$ называется гладкая кривая, касательные которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением. Пусть s – натуральная параметризация, v, b – вектора скорости и бинормали. Доказать, что кривая будет обобщенной винтовой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;
2. бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;
3. отношение кривизны к кручению постоянно;
4. все спрямляющие плоскости кривой параллельны некоторой прямой
5. $[v'(s), v''(s), v'''(s)] = 0$;
6. $[b'(s), b''(s), b'''(s)] = 0$;

Задача 44. Пусть $|\gamma(s)| = \text{const}$. Выразить коэффициенты разложения $\gamma(s)$ по базису Френе этой кривой через ее кривизну и кручение.

Задача 45. Доказать, что если $\gamma(s)$ – натурально параметризованная кривая, и $k(s) \neq \mathrm{const}$ и $1/k^2 + (k'/k^2\tau)^2 = a^2$, то кривая γ лежит на сфере радиуса a.

Задача 46. Рассмотрим пару таких кривых, что главные нормали к одной из них являются и главными нормалями другой кривой. Доказать, что:

a) расстояние между соответствующими точками этих кривых постоянно;

b) угол между их касательными в соответствующих точках постоянен;

c) если у одной из них кручение отлично от нуля, то существуют такие числа a и b, что $ak + b\tau = 1$.

Задача 47. *** Существует кривая (и в пространстве, и на плоскости), у которой кривизна всюду больше 1, длина равна 1, и расстояние между концами больше 0.999.

9 19 октября

Дорешиваем задачи с предыдущих занятий! Кто всё решил – вот, новые задачи.

Задача 48. Пусть кривая касается изнутри сферы R. Докажите, что в точке касания кривизна кривой не меньше $1/R$.

Задача 49. *** Пусть простая гладкая регулярная замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ ограничивает замкнутую область F. Пусть некоторая окружность содержится в F и является максимальной (не содержится ни в какой другой окружности, содержащейся в F). Доказать, что эта окружность является либо вписанной в γ (имеет с γ более одной общей точки) либо соприкасающейся в некоторой точке кривой (посмотрите задачу 31).

Задача 50. *** Пусть простая гладкая регулярная замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to R^2$ параметризована так, что нормаль смотрит внутрь области, которую кривая ограничивает.

1. Доказать, что окружность минимального радиуса R, содержащая кривую, имеет по-крайней мере две точки касания с кривой и в этих точках кривизна кривой $\geq 1/R$. Доказать что выпуклая оболочка точек касания содержит центр этой окружности.

2. Доказать, что между двумя последовательными точками касания есть точка, в которой кривизна (со знаком) $\leq 1/R$.

3. Вывести из предыдущего теорему о 4-х вершинах: любая простая гладкая регулярная замкнутая кривая на плоскости имеет по-крайней мере 4 точки локальных экстремумов.

10 26 октября и 2 ноября

Подсказка: читайте лекции 6 и 7.

Задача 51. Предъявите гладкий атлас $\mathbb{R}P^2$ из трёх карт.

Задача 52. Задайте структуру гладкого многообразия на бутылке Клейна.

Задача 53. Опишите касательное расслоение TS^1 с помощью двух карт и функций склейки. Опишите топологию на касательном расслоении.

Задача 54. Постройте гладкое вложение TS^1 в $\mathbb{R}^2$.

Задача 55. Пространство $G_{4,2}$ (Грассманиан) – это пространство всех двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^4$, проходящих через ноль. Покажите, что $G_{4,2}$ – гладкое многообразие. Какова его размерность? (Подсказка: покажите, что линейные отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ описываются матрицами $k \times (n-k)$. Покажите, что линейные отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ описываются матрицами $k \times (n-k)$ ранга k.)

Флаг – это последовательность вложенных друг в друга линейных подпространств $\mathbb{R}^n$.

Задача 56. Рассмотрим *полный* флаг

$$0 = F \subset F_{x_1} \subset F_{x_1,x_2} \subset F_{x_1,x_2,x_3} \subset F_{x_1,x_2,x_3,x_4} = \mathbb{R}^4$$

где индекс обозначает какие координаты не нули, например, $F_{x_1,x_2} = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_3 = x_4 = 0\}$. Любое двумерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^4$ пересекает элементы флага по линейным пространствам, пусть их размерности $0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 = 2$.

а)Опишите множество элементов $G_{4,2}$ для которых $m_1 = m_2 = 0, m_3 = 1$.

б)Покажите, что каждая последовательность $0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 = 2$, с дополнительным условием $m_{i+1} \leq m_i + 1$, даёт клетку в $G_{4,2}$. Найдите размерность этой клетки.

По определению, $G_{n,k}$ – Грассманово многообразие k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ (например, $\mathbb{R}P^n = G_{n+1,1})$). Это многообразие, и его клеточная структура кодируется клетками Шуберта, по одной клетке для каждой неубывающей последовательности длины $n+1$, где $m_0 = 0, m_n = k, m_{i+1} \leq m_i + 1$, то есть диаграммами Юнга. То, как эти клетки друг к другу прилегают, скрывает много комбинаторных тайн.

Задача 57. *** Опишем вложение Плюккера $G_{4,2}$ в $\mathbb{R}P^5$. Зафиксируем стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Для каждого двумерного линейного подпространства в $\mathbb{R}^4$ выберем в нём два базисных вектора и запишем их в координатах, получилась матрица 2×4. Посчитаем у неё все (шесть) миноров 2×2. Получим шесть координат $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

а) Докажите, что эти координаты определены с точностью до пропорциональности. Тем самым получилось отображение $G_{4,2} \to \mathbb{R}P^5$. Его образ – это четырёхмерное в пятимерном. Значит, оно описывается одним уравнением.

б)Найдите это уравнение.

Задача 58. *** Постройте субмерсию $f : G_{4,2} \to \mathbb{R}P^2$, такую, что $\forall x, f^{-1}(x) = \mathbb{R}P^2$.

Задача 59. *** Может ли на ленте Мёбиуса существовать такая гладкая функция, что центральная окружность является регулярным прообразом некоторой точки?

11 9 ноября

Задача 60. Пусть $p \in S^1 \times S^1$. Предъявите погружение $S^1 \times S^1 \setminus p \to \mathbb{R}^2$, то есть погружение проколотого тора в плоскость.

Задача 61. Опишите в терминах объемлющего пространства касательное пространство к $S^2 = \{x, y, z | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

При замене координат $f : U_i \to U_j$ для двух карт на многообразии, автоматические возникает замена координат на касательных расслоениях $f_* : TU_i \to TU_j$. Её мы и будем изучать.

Задача 62. Пусть v – такой касательный вектор в точке P из предыдущей задачи, что его координаты, соответствующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соответствующие стереографической проекции из южного полюса.

Задача 63. Рассмотрим точку P и вектор v из предыдущих двух задач. Пусть $f : S^2 \to \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найдите $\partial_v f$. Напомним, что $\partial_v f = df_P(v)$

Задача 64. Координаты вектора ξ в локальных системах координат $\{x^i\}$ и $\{x^{i'}\}$ связаны формулами:

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i \text{ (суммирование по } i\text{);} \tag{1}$$

$$\xi^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \xi^{i'} \text{ (суммирование по } i'\text{).} \tag{2}$$

Символами $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ здесь обозначены значения производных в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, изображающей точку p_0 в системе координат $\{x^i\}$, аналогично $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ берутся в точке $x_0 = (x_0^{1'}, \ldots, x_0^{n'})$.

Задача 65. На $\mathbb{R}^3$ заданы декартовы и сферические координаты. В точке p с декартовыми координатами $(-\sqrt{3}, -1, -2)$ задан вектор $\xi \in T_p\mathbb{R}^3$, сферические координаты которого равны $(0, -1, 2)$. Найдите декартовы координаты этого вектора.

Задача 66. ***Существует ли погружение ленты Мёбиуса в плоскость $\mathbb{R}^2$?

12 16 ноября

Задача 67. В плоскости xOz задана кривая $x = f(u), z = g(u)$, не пересекающая ось Oz. Найдите параметризацию поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси Oz.

Задача 68. Найдите параметризацию: a) Тора, как поверхности вращения окружности в $\mathbb{R}^3$. b)Катеноида, который получается при вращении цепной линии $x = a\operatorname{ch}(u/a),\ y = 0,\ z = u$ вокруг оси Oz.

Задача 69. Напишите параметризацию цилиндрической поверхности, для которой кривая $\gamma(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору e.

Задача 70. Напишите параметризацию конуса с вершиной в точке $M(a, b, c)$ и с направляющей кривой $\gamma(u) = (f(u), g(u), h(u))$.

Задача 71. Геликоидом называется фигура, образованная некоторой прямой (образующей), вращающейся около оси и одновременно поступательно движущейся в направлении этой оси, причем скорости этих движений пропорциональны. Если образующая пересекает ось вращения, то геликоид называется закрытым; если не пересекает — открытым (или развертывающимся). Если образующая закрытого геликоида пересекает ось вращения под прямым углом, геликоид называется прямым, если под другим углом – то косым. Напишите параметрические уравнения геликоида.

Задача 72. Составить уравнение развертывающегося геликоида, образованного касательными к винтовой линии $x = a\cos v,\ y = a\sin v,\ z = bv$.

Трактриса — плоская трансцендентная кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной.
Открытие и первое исследование трактрисы (1670 год) принадлежит французскому инженеру, врачу и любителю математики Клоду Перро, брату знаменитого сказочника.

Задача 73. ***Найдите параметризацию а) трактрисы, б) псевдосферы (поверхность Бельтрами), которая получается при вращении трактрисы вокруг оси Oz.

Задача 74. ***Единичный квадрат на плоскости внутренне изометричен некоторой части тора, задаваемого в $\mathbb{R}^4$ уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

13 23 ноября

Задача 75. Вычислите первую квадратичную форму а) поверхности вращения из задачи 67, б) стандартного тора в $\mathbb{R}^3$ (задача 68).

Задача 76. Пусть первая квадратичная форма поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$.
а)Найти периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm\frac{1}{2}av^2, v = 1.$$

б)Найти углы этого криволинейного треугольника.

Задача 77. Вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности, образован тор. Радиус окружности r, расстояние от прямой до центра окружности R, $R > r$. Найти площадь тора в индуцированной метрике.

Задача 78. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми, посчитав первую квадратичную форму.

Задача 79. Докажите, что а) площадь сферического двуугольника с углом α и диаметрально противоположными вершинами равна 2α.

b) Площадь сферического треугольника с углами α, β, γ равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

c) Площадь сферического многоугольника с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_n - (n-2)\pi$.

Задача 80. Докажите, что площадь круга радиуса R на сфере равна $2\pi(1 - \cos R)$.

Задача 81. Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho\cos v, y = \rho\sin v, z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперболоид вращения

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = \sqrt{r^2-1}$$

если соответствие устанавливается уравнениями

$$\phi = v + arctg\ \rho, r^2 = \rho^2 + 1.$$

Задача 82. *** Показать, что всякая винтовая поверхность

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = F(u) + av$$

локально изометрично отображается на поверхность вращения так, что винтовые линии переходят в параллели.

Задача 83. *** Доказать, что криволинейные четырехугольники, образованные координатными линиями $u = a_1$, $u = a_2$, $v = b_1$, $v = b_2$, являются "параллелограммами" (в смысле равенства соответствующих сторон), равносильно тому, что $E_v = G_u = 0$. Показать, что в этом случае существует такая параметризация поверхности, в которой ее первая квадратичная форма имеет вид

$$\mathbf{I}(\mathbf{X}) = X_1^2 + 2\cos\varphi X_1 X_2 + X_2^2.$$

14 30 ноября

Задача 84. ***Найти без вычислений главные кривизны прямого кругового цилиндра.

Задача 85. Вычислите вторую квадратичную форму а) поверхности вращения из задачи 67, б) стандартного тора в $\mathbb{R}^3$ (задача 68).

Задача 86. Для поверхности (u^2+v^2, u^2-v^2, uv) найти в точке $P, (u,v)=(1,1)$ а) главные кривизны и главные направления, б) кривизну по направлению касательного вектора к кривой $u=v^2$, в) нормальную и геодезическую кривизны кривой $u=v^2$.

Задача 87. *** Воспользовавшись теоремой Менье, то есть без вычисления второй квадратичной формы, найти главные кривизны и главные направления в точке $(1,0,1)$ на поверхности $(2uv, u^2-v^2, u^2+v^2)$ (эта поверхность вам очень хорошо знакома).

Задача 88. Классифицируйте точки на торе из задачи 68 по типу гауссовой кривизны ($>0, <0, =0$).

Задача 89. Докажите, что средняя кривизна геликоида $(u\cos v, u\sin v, v)$ равна нулю.

15 7 декабря

Задача 90. Линейчатая поверхность образована точками прямых, параллельных вектору $\bar{\mathbf{a}}(s)$ и проходящих через точки кривой $\mathbf{r}(s)$, причем $\mathbf{a}(s)\perp\dot{\mathbf{r}}(s)$. Найти условия на функции $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$, при выполнении которых на данной поверхности:

- а) $K=0$;
- б) $H=0$;
- в) $\mathbf{r}(s)$ — линия кривизны;
- г) $\mathbf{r}(s)$ — асимптотическая линия.

Задача 91. Найдите линии кривизны у а) геликоида б) тора в $\mathbb{R}^3$.

Задача 92. *** Предположим, что поверхности $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ пересекаются под постоянным углом, а $\ell=\varPhi_1\cap\varPhi_2$. Доказать, что если ℓ — это линия кривизны на поверхности $\varPhi_1$, то она является линией кривизны и на второй поверхности. Докажите также обратное утверждение: если линия пересечения двух поверхностей является на обеих этих поверхностях линией кривизны, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

Задача 93. Выразите коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $\varPhi_*$ через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $\varPhi$ (поверхность $\varPhi_*$ параллельна $\varPhi$).

Задача 94. Доказать, что если поверхности $\varPhi$ и $\varPhi_*$ “параллельны”, то

$$K_*^2(H^2-4K)=K^2(H_*^2-4K_*).$$

Задача 95. Доказать, что кривая, соответствующая линии кривизны на поверхности, параллельной данной, сама является линией кривизны.

Задача 96. *** Рассмотрим поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ и кривую γ на ней. Покажите, что проекция ускорения кривой на нормаль к поверхности в точке $P = \gamma(0)$ равна второй квадратичной форме от вектора скорости этой кривой в точке P, то есть

$$n \cdot \gamma''(0) = \mathbf{II}_P(\gamma'(0), \gamma'(0))$$

Задача 97. *** Рассмотрим поверхность вращения. Докажите, что функция $r(s)\sin(\alpha)$ постоянна вдоль любой геодезической $\gamma(s)$ (r – расстояние до оси вращения, m – меридиан, α – угол между $\gamma(s)$ и m).