12 Занятие 24/11/2020: поверхностные интегралы первого и второго рода, формула Гаусса-Остроградского

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть поверхность S задана параметрически

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D},$$

где функции x, y, z как функции аргументов u, v дифференцируемы в измеримой области D, на которой задана функция $f(x,y,z)$.

Определение 7 (Поверхностный интеграл первого рода)**.** *Поверхностный интеграл I первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S определеяется как*

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}du\,dv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Если f непрерывна на S, а функции x, y, z как функции аргументов u, v непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$, то I существует.

Если поверхность S задана уравнением

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

где $z(x,y)$ — дифференцируемая в D функция, то интеграл принимает вид

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dx\,dy.$$

Если поверхность можно разюить на части так, что каждая из частей допускает представление в виде выше, то интеграл по всей поверхности представляется суммой интегралов по частям.

Поверхностный интеграл второго рода

Пусть поверхность S задана параметрически

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D},$$

где функции x, y, z как функции аргументов u, v непрерывно дифференцируемы в D, причем ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

равен 2.

В каждой точке такой поверхности существует два противоположно направленных единичных нормальных вектора, выбор одного из них называют **ориентацией поверхности**.

Если поверхность S является границей ограниченной области, то ее можно ориентировать внешней или внутренней нормалями по отношению к данной области.

Для ориентированной поверхности определяют повверхностный интеграл второго рода.

Определение 8 (Поверхностный интеграл второго рода)**.** *Пусть* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *— направляющие косинусы нормали к поверхности* S. *Пусть поверхность* S *ориентирована единичным вектором нормали* $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *и на ней заданы функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Поверхностный интеграл I *второго рода по поверхности* S *определеяется как*

$$I = \iint_S P dy\, dz + Q dz\, dx + R dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

Если поверхность ориентирована противоположным образом, то у поверхностного интеграла изменяется знак.

Также можно записать I в виде

$$I = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\, dv.$$

Если $P = Q = 0$, то формула становится проще

$$I = \iint_S R dx\, dy = \iint_D R(x(u,v), y(u, v(, z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\, dv.$$

Если поверхность S задается явно

$$z = z(x,y) \in C^1(\overline{D}),$$

то

$$\iint_S R dx\, dy = \pm \iint_D R(x,y,z(x,y)) dx\, dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость $z = 0$.

Теорема 3 (Теорема Гаусса-Остроградского)**.** *Пусть* $G \in \mathbb{R}^3$ *ограничена кусочно гладкой поверхностью и пусть функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *вместе со своими производными* P'_x, Q'_y, R'_z *непрерывны в* $\overline{G}$. *Тогда*

$$\iint_S P dy\, dz + Q dz\, dx + R dx\, dy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

где S *— внешняя сторона поверхности, ограничивающей* G *(нормаль направлена вне поверхности).*

Задачи:

(1) Вычислить интеграл
$$I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
где S — часть цилиндрической поверхности
$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le H.$$

(2) Вычислить интеграл
$$I = \iint_S z^2 dS,$$
где S — полная поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$.

(3) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S z dx\, dy,$$

где S — нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z \leq H$.

(4) Вычислить интегралы

$$I_1 = \iint_S z^2 ds\, dy, \quad I_2 = \iint_S z dx\, dy,$$

где S — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y \geq 0$, ориентированная внешней нормалью.

(5) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S \frac{dy\, dz}{x} + \frac{dz\, dx}{y} + \frac{dx\, dy}{z},$$

где S — часть эллипсоида

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \sin u \cos v, \quad z = c \sin v, \quad \pi/4 \leq u \leq \pi/3, \quad \pi/6 \leq v \leq \pi/4.$$

(6) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S x^3 dy\, dz + y^3 dz\, dx + z^3 dx\, dy,$$

где S — внешняя сторона боковой поверхности конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

(7) Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint_S x^2 dy\, dz + y^2 dz\, dx + z^2 dx\, dy,$$

где S — внешняя сторона границы куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

(8) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS,$$

где S — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq j$, нормаль внешняя.

(9) Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ если поверхностная плотность $\rho(x, y, z) = z/a$.

(10) Найти координаты центра масс полусферы из задачи (9).