Дифференциальные уравнения. Задание 13-14.

1. Рассмотрим уравнение
$$L(D)z = F(t), \tag{1}$$
где L это многочлен степени n, и $F(t)$ непрерывная функция $t \in \mathbb{R}$. Пусть z_p одно из решений уравнения (1). Отметим, что z это решение уравнения (1) тогда и только тогда когда $u = z - z_p$ решение однородного уравнения $L(D)u = 0$.

   Если правая часть уравнения (1) имеет вид
$$P_m(t)e^{\gamma t},$$
где P_m многочлен степени m, тогда частное решение может быть найдено в виде
$$x(t) = t^s Q_m(t)e^{\gamma t},$$
где Q_m многочлен степени m, s – кратность корня γ характеристического многочлена однородного уравнения (если γ не является корнем, то $s = 0$). Если правая часть уравнения имеет вид
$$e^{\gamma t}(P_m(t)\cos(\beta t) + Q_m(t)\sin(\beta t)),$$
тогда частное решение может быть найдено в виде
$$x(t) = t^s e^{\gamma t}(R_m(t)\cos(\beta t) + T_m(t)\sin(\beta t)),$$
где R_m, T_m многочлены степени m, s – кратность корня $\gamma + i\beta$ характеристического многочлена однородного уравнения (если $\gamma+i\beta$ не является корнем, то $s = 0$)

   Задачи: Решите следующие уравнения.

   (a) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$
   (b) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$,
   (c) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$,

2. Решите следующие дифференциальные уравнения. У вас есть несколько способов: метод неопределенных коэффициентов, понижение порядка уравнения, использовать замену $\tau = \ln x$.

   (a) $x^2y'' - 2y = \sin \ln x$.
   (b) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$,
   (c) $x^2y''' = 2y'$.
   (d) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$,
   (e) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$,

(f) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = e^x$,

(g) $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$,

(h) $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

3. Решите следующие дифференциальные уравнения. У вас есть несколько способов: метод неопределенных коэффициентов, понижение порядка уравнения, использовать замену $\tau = \ln x$.

   (a) $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.

   (b) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$,

   (c) $x^2 y''' = 2y'$.

4. Метод непоределённых коэффициентов (метод Лагранжа)

   Рассмотрим уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Пусть u_1, u_2 – линейно-независимые решения соответствующего однородного уравнения ($f(x) = 0$). Будем искать решение исходного уравнения в виде

$$y(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x).$$

где на $c_1(x), c_2(x)$ наложено дополнительное условие:

$$c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0,$$

или, что то же самое,

$$c_2' = -\frac{c_1'u_1}{u_2}.$$

В новых обозначениях исходное уравнение переписывается в виде

$$\begin{gathered}
(c_1u_1 + c_2u_2)'' + p(c_1u_1 + c_2u_2)' + q(c_1u_1 + c_2u_2) = f \\
(c_1'u_1 + c_2'u_2)' + (c_1u_1' + c_2u_2')' + p(c_1'u_1 + c_2'u_2) + p(c_1u_1' + c_2u_2') + q(c_1u_1 + c_2u_2) = f \\
c_1(u_1'' + pu_1' + qu_1) + c_2(u_2'' + pu_2' + qu_2) + (c_1'u_1' + c_2'u_2') = f \\
c_1'u_1' + c_2'u_2' = f.
\end{gathered}$$

Подставляя выражение для c_2', получаем

$$c_1' = \frac{fu_2}{u_1'u_2 - u_1u_2'},$$

Откуда находим c_1.

Решите уравнения из заданий 1,2,3 методом неопределенных коэффициентов.