Дифференциальные уравнения. Задания 2.

1. Найдите все решения следующих ДУ. Найдите то из них, которое удовлетворяет указанному начальному данному.

   (a) $x' = (1-2t)x^2, \quad x(0) = -\frac{1}{6};$
   (b) $x' = (1-2t)x^2, \quad x(0) = 0;$
   (c) $y' = 2x/(y + x^2 y), \quad y(0) = -2;$
   (d) $x' = tx^3(1+t^2)^{-1/2}, \quad x(0) = 1;$
   (e) $y' = (3x^2 - e^x)/(2y-5), \quad y(0) = 1;$
   (f) $y' = 4\sqrt[5]{y^4}, \quad y(2) = 0;$
   (g) $xy' = y(y-1), \quad y(1) = \frac{1}{2};$
   (h) $3y^2 y' + 16x = 2xy^3, \quad y(0) = 1.$

Уравнения, приводимые к уравнению с разделяющимися переменными
ДУ $\dot{x} = f(t;x)$ часто можно упростить при помощи замены переменных $u = g(t;x)$. Выберем такую функцию g, что переменная x может быть выражена как $x = h(u;t)$. Дифференцируя u получим равенства

$$\dot{u}(t) = g_t(t;x) + g_x(t;x)\dot{x} = g_t(t;h(t;u)) + g_x(t;h(t;u))f(t;h(t;u)).$$

Например, рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = f(at + bx).$$

Рассмотрим переменную $u = at + bx$ ($x = \frac{u-at}{b}$). Проделывая эту замену переменных (упражнение), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{u} = a + b\dot{x} = a + bf(u) := p(u);$$

3. Используя замену координат вида $u = at + bx$ решите ДУ:

   (a) $\dot{x} = \frac{1}{2t+3x},$
   (b) $\dot{x} = \frac{t+2x}{1+t+2x},$
   (c) $y' = y + 2x - 3$
   (d) $y' = \left(\frac{1}{x+2y}\right)^2$
   (e) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$
   (f) $y' = \cos(y-x)$

4. Рассмотрим ДУ $\dot{x} = f(t;x)$. Если функция f при любом $\lambda \neq 0$ удовлетворяет равенству $f(t;x) = f(\lambda t; \lambda x)$, то мы будем называть ДУ однородным. В таком случае функция f может быть представлена в виде $f(t;x) = F(x/t)$ при $t \neq 0$.

   Решите следующие однородные уравнения при помощи замены $u = x/t$.

(a) $\dot{x} = \frac{t-x}{t+x}$,

(b) $2t^3\dot{x} = x(2t^2 - x^2)$,

(c) $(t^2 + x^2)\dot{x} = 2tx$,

(d) $t\dot{x} = x + te^{x/t}$

(e) $\dot{x} = \frac{5t^2 - xt + x^2}{t^2}$

(f) $\dot{x} = \frac{x}{t-1} + \frac{x^2}{(t-1)^2}$.

5. Иногда ДУ не является однородным, но может быть сведено к однородному при помощи замены вида $u = x^\alpha$. Такие уравнения называются квазиоднородными. Решите следующие ДУ.

   (a) $2\dot{x} + t = 4\sqrt{x}$,

   (b) $2x + (t^2x + 1)t\dot{x} = 0$.

   (c) При каких α и β ДУ $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному при помощи замены $y = z^\gamma$.

Дифференциальные уравнения. Занятие 1.

1. Постройте при помощи метода изоклин интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений

   (a) $\dot{x} = t^2 + x^2$;

   (b) $\dot{x} = t - e^x$;

   (c) $\dot{x} = \frac{x-t}{x^2+1}$;

   (d) $\dot{x} = \frac{x}{x+t}$;

   (e) $\dot{x} = t^2 + x$;

   (f) $\dot{x} = \frac{1-xt}{t}$.

2. Постройте дифференциальные уравнения для следующих семейств решений

   (a) $x = e^{Ct}$,

   (b) $x = Ct^3$,

   (c) $x = C(t-C)^2$,

   (d) $x = \sin(t+C)$,

   (e) $Cx = \sin Ct$,

   (f) $x^2 + Cy^2 = 2y$,

   (g) $y^2 + Cx = x^3$,

   (h) все параболы, ось которых параллельна оси ординат, касающиеся оси абсцисс и прямой $x = t$.

3. **Для подготовки к следующему занятию.** Найдите все решения, следующих дифференциальных уравнений (хотя понятие решения пока не было определено). Найдите то из них, которое удовлетворяет указанному начальному данному.

   (a) $x' = (1-2t)x^2, \quad x(0) = -\frac{1}{6}$;

   (b) $y' = 2x/(y + x^2 y), \quad y(0) = -2$;

   (c) $x' = tx^3(1+t^2)^{-1/2}, \quad x(0) = 1$;

4. Угадайте решения следующих дифференциальных уравнений.

   (a) $\dot{x} = x^a$. При каких значениях a у решения есть странные свойства?

   (b) Найдите все решения при $a = 0.5$.

   (c) Докажите, что при $a > 1$ функция x не может быть задана на всем R.

   (d) $\dot{x} = \mathrm{sign}(x)$

   (e) $\dot{x} = -\mathrm{sign}(x)$

   (f) $\dot{x} = -\mathrm{sign}(x) + 0.5$