Практика 10.11

Во всех задачах V — $n-$мерное векторное пространство, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис V.

1. Какие из следующих тензоров разложимы в $V \bigotimes V$?

   (a) $w = \sum\limits_{i,j=1}^{n} ij \cdot e_i \otimes e_j$

   (b) $w = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \delta_{1i} j \cdot e_i \otimes e_j$

   (c) $w = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (i+j) \cdot e_i \otimes e_j$

2. Докажите, что в тензорном произведении двух векторных пространств $a \otimes b = c \otimes d \neq 0$ тогда и только тогда, когда $a = \lambda c, b = \frac{1}{\lambda} d$ для некоторого скаляра.

3. Пусть $f : U_1 \to V_1, g : U_2 \to V_2$ — линейные отображения между векторными пространствами над полем k. Тогда тензорное произведнеие f и g — это отображение $f \otimes g : U_1 \bigotimes U_2 \to V_1 \bigotimes V_2$, заданное как $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$ на разложимых тензорах и продолженное по универсальному свойству тензорного произведения.

   (a) Опишите матрицу $A \otimes B$ отображения $f \otimes g$ в базисах $\{u_i \otimes v_j\}$ и $\{u'_i \otimes v'_j\}$, если известны матрицы отображений f и g в базисах $\{u_i\}, \{v_i\}$ и $\{u'_i\}, \{v'_i\}$ соответственно ($A \otimes B$ называется *кронекеровским поризведением* матриц A и B).

   (b) Докажите, что $Im(f \otimes g) = Im(f) \otimes Im(g) = \big(Im(f) \otimes V_2\big) \cap \big(V_1 \otimes Im(g)\big)$.

   (c) Докажите, что $\ker(f \otimes g) = \ker(f) \bigotimes U_2 + U_1 \bigotimes \ker(g)$.

4. (a) Пусть A, B — две квадратные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$ соотвественно. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — собственные числа A, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — собственные числа B. Найдите собственные числа матриц $A \otimes B$ и $A \otimes E_n + E_m \otimes B$.

   (b) Найдите след и определитель $A \otimes B$, если известен след и определитель каждой из матриц A и B.

5. Докажите, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ изоморфно как абелева группа $\mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z}$.

6. Ранг тензора $v \in V^{p,q}$ — это наименьшее число n, что $v = v_1 + \cdots + v_n$, где v_i — разложимые тензоры. Покажите, что ранг тензора $v \in V^{1,1}$ совпадает с рангом соответствующего линейного оператора $V \to V$.

7. Докажите, что ранг тензора в тензорной степени пространства $U < V$ такой же, как если его рассматривать в объемлющем пространстве V.

8. Пусть W – векторное пространство над $\mathbb{R}$, u, v —- его базис. Докажите, что тензор $u \otimes u \otimes u - v \otimes v \otimes u + u \otimes v \otimes v + v \otimes u \otimes v$ представим в виде суммы двух разложимых, если перейти к комплексификации, а в исходном пространстве это не так.