5 Занятие 15/03/2021: вычисление значений регулярных ветвей многозначных функций

Условия существования регулярных ветвей логарифма и корня

Пусть $f(z)$ — голоморфная в области D функция комплексного аргумента z. Для начала выясним условия возможности выделения регулярной ветви $\log f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$.

Напомним, что для замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, не проходящей через точку a индексом точки a относительно кривой γ называется число

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Теорема 1. *Пусть f голоморфная в области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда в области D можно выделить регулярную ветвь $\log f(z)$ тогда и только тогда, когда для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в D, выполнено*

$$J(f(\gamma), 0) = 0.$$

Из теоремы выше следует, что если f голоморфная в области D функция, $f(z) \neq 0$ при $z \in D$ и $J(f(\gamma), 0) = 0$, то для любого $c \in D$ можно выделить регулярную ветвь функции $(f(z))^c = e^{c\log f(z)}$ (для этого нужно заметить, что f'/f голоморфна в D и применить теорему Коши).

В условиях теоремы регулярную ветвь можно представить в виде

$$\log f(z) = \log f(a) + \int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

где a — фиксированная точка области D, $\log f(a)$ — некоторое значения из множества $\mathrm{Log}(f(a))$ и γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точку a с точкой z в области D.

Все регулярные ветви $\log f(z)$ в области D отличаются друг от друга на постоянную $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Пусть f голоморфная в области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ в области D можно выделить регулярную ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$ тогда и только тогда, когда для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в D, выполнено*

$$J(f(\gamma), 0) = kn.$$

В условиях теоремы регулярную ветвь можно представить в виде

$$g(z) = g(a)\exp\left(\frac{1}{n}\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right),$$

где a — фиксированная точка области D, $g(a)$ — некоторое значения из множества $\{(f(a))^{1/n}\}$ и γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точку a с точкой z в области D.

Все регулярные ветвви $\sqrt[n]{f(z)}$ в области D отличаются друг от друга на постоянную $\exp(2\pi k i/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Если многозначная функция допускает выделение регулярной ветвви в области D, то таких ветвей, как правило, больше одной. Для выделения определенной ветви требуется дополнительное условие, которое обычно представляет собой задание значения ветви в некоторой точке области D.

Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня

Производные регулярных ветвей $h(z) \in \mathrm{Log} f(z)$, $g(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в области D вычисляются как

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}}.$$

Для регулярных ветвей $\log(1+z)$ в единичном круге с условием $\log(1+z)|_{z=0} = 0$ имеем

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Другие ветви имеют вид

$$\log_{(k)}(1+z) = 2\pi i k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь рассмотрим функцию $(1+z)^a$, $a \in \mathbb{C}$. Ее регулярные ветви в единичном круге определяются через регулярные ветви логарифма

$$h_k(z) = \exp(a \log_{(k)}(1+z)).$$

Пусть ветвь $h(z)$ соответствует $k = 0$. Тогда все остальные вычисляются как $h_k(z) = \exp(2\pi k i a) h(z)$. Для нулевой ветви можно найти разложение в ряд Тейлора при помощи формул

$$h'(z) = \frac{a}{1+z} h(z), \quad h''(z) = \frac{a(a-1)}{(1+z)^2} h(z), \quad \ldots$$

и условия $h(0) = 1$. Тогда имеем

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n, \quad C_a^n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Задачи для решения на практике

(1) Исследовать существование регулярных ветвей функции $\sqrt[4]{z^3(z+1)}$ в области $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.

(2) Исследовать существование регулярных ветвей функции $\log((1-z)/(1+z))$ в области $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(3) Пусть $h_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\log(1+z)$ в области $D = \{z\colon |z| < 1\}$, $h_k(0) = 2\pi k i$. Разложить $h_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z.

(4) Пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{(1+z)^a\}$ в области $D = \{z\colon |z| < 1\}$, $g_k(0) = \exp(2\pi i a k)$. Разложить $g_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z.

(5) Разложить в ряд Тейлора по степеням z регулярную ветвь $g(z)$, $g(0) = \exp(2\pi i/3)$ многозначной функции $f(z) = \sqrt[3]{1-z^2}$ в области $D = \{z\colon |z| < 1\}$.