①

$$f(z) = \frac{2i+1}{(z-i-1)(z+i)} = \frac{1}{z-i-1} - \frac{1}{z+i} =$$

$$= \frac{1}{(z-i)-1} - \frac{1}{(z-i)+2i} \circledast$$

Разложение в ряд Лорана функции $\frac{1}{x+a}$ мы знаем (в нашем случае $x = z-i$), так что используем его в кольце, содержащем $-\frac{i}{2}$.

$$\circledast \sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n \frac{(1)^{-n}}{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n \frac{(-2i)^{-n}}{2i} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n \left(-1 - (-1)^{-n} (2i)^{-n-1}\right)$$

Кольцо сходимости этой суммы - пересечение колец сходимости двух её составляющих, а это были кольца $|z-i| < |-1|$ и $|z-i| < |2i|$, то есть $|z-i| < 1$, $|z-i| < 2$. Получаем, что $|z-i| < 1$.

⑧

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}.$$ У этой штуки два полюса.

1) $z=-1$ - полюс третьего порядка. $\underset{z=-1}{\operatorname{res}} f(z) =$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \left(\frac{e^z}{z-2}\right)'' = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \left(\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to -1} \left(\frac{(e^z(z-3)+e^z)\cdot(z-2)^2 - e^z(z-3)\cdot 2(z-2)}{(z-2)^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{e^z}{(z-2)^3}\Big(\big((z-3)+1\big)(z-2) - (z-3)\cdot 2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{e^z (z^2 - 6z + 10)}{(z-2)^3} = \frac{1}{2} \frac{e^{-1}(1+6+10)}{-27} = \frac{-17}{54e}$$

2) $z = 2$ — полюс первого порядка

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^2}{27}$$

(13)

$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \int_0^{\infty} f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. У нас имеется ровно одна полюс в верхней полуплоскости — ia. Тогда

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{x=ia} f(x) = 2\pi i \lim_{x \to ia} \left(\frac{x^2 (x - ia)^2}{(x^2+a^2)^2} \right)' = 2\pi i \lim_{x \to ia} \frac{2ax}{(ix - a)^3} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$

(15)

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Наша $f(x)$ имеет ровно два полюса в верхней полуплоскости — $e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Значит,

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{x=e^{i\frac{\pi}{4}}} f(x) + \operatorname*{res}_{x=e^{i\frac{3\pi}{4}}} f(x) \right) =$$

$$\operatorname*{res}_{x=e^{i\frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{x \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{i\pi}} = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi\cdot 3}{4}}\right)$$

$$\operatorname*{res}_{x=e^{i\frac{\pi\cdot 3}{4}}} f(x) = \lim_{x \to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1 + e^{\frac{i3\pi}{2}}}{1 + e^{i\cdot 3\pi}} = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{i3\pi}{4}} + e^{-\frac{i9\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + 2e^{-\frac{i\pi 3}{4}} + e^{-\frac{i9\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\,\pi$$

(14)

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$. Наша $F(x)$ имеет лишь один полюс в верхней полуплоскости $-ib$. Значит,

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{x=ib} F(x) = 2\pi i \lim_{x \to ib} (x-ib) \frac{\sin(az)}{x(x^2+b^2)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{x \to ib} \frac{\sin(az)}{x(x+ib)} = \frac{\sin(abi)}{-2b^2} \cdot 2\pi i$$