

8 Занятие 05/04/2021: дробно-линейные отображения

Напомним, что дробно-линейное отображение это отображение вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Доопределяя по непрерывности $w(\infty) = \infty$ при $c = 0$ и $w(\infty) = a/c$, $w(-d/c) = \infty$ при $c \neq 0$, получаем отображение $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (докажите, что это отображение конформное).

При дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая (для того чтобы уточнить что именно получится нужно рассмотреть точку $z_0 = -d/c$, для которой $w(z_0) = \infty$: если точка лежит на исходной кривой, то получим прямую, иначе — окружность).

Также при дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой кривой (напомним, что точки A, B называются симметричными относительно окружности с центром в O радиуса R если они лежат на одном луче, выходящем из O и выполнено $|OA| \cdot |OB| = R^2$).

Совокупность дробно-линейных отображений образует группу относительно композиции, то есть композиция любых двух дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, обратное к дробно-линейному отображению также является дробно-линейным отображением.

Задачи для решения на практике

- (1) Описать дробно-линейные отображения верхней полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ в круг $w: |w| < 1$.
- (2) Описать дробно-линейные отображения круга $\{z: |z| < 1\}$ на круг $\{w: |w| < 1\}$.
- (3) Описать дробно-линейные отображения, которые три различные точки z_1, z_2, z_3 отображают в три различные точки w_1, w_2, w_3 .
- (4) Описать дробно-линейные отображения верхней полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$.