1 Занятие 15/02/2021: разложение регулярных функций в ряд Лорана

Регулярные функции

Под функцией комплексного переменного $w = f(z)$ будем понимать отображение множества $D \subset \mathbb{C}$ в комплексной z-плоскости в множество $f(D) = G \subset \mathbb{C}$ комплексной w-плоскости. Если записать $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции f эквивалентно определению двух вещественных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ вещественных переменных x и y, т. е. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Можно доказать, что для дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z = x + iy$ в комплексном смысле необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в вещественном смысле (т.е. дифференцируемы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$) и выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называются соотношениями Коши-Римана.

Напомним, что функцию f , определенную на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$ будем называть голоморфной (аналитической, регулярной) в D, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке D. Будем говорить, что f голоморфна на произвольном множестве $E \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна на некотором открытом множестве D, содержащем E.

Ряд Лорана

Пусть a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа. Тогда ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

называется рядом Лорана. Этот ряд называется сходящимся в точке z,если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}.$$

Обдасть сходимости сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ — круг $|z-a| < R$. При $R = 0$ ряд сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости.

Ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в области $|z-a| > \rho$. Если $\rho < R$, то ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ сходится в области $D = \{z \colon \rho < |z - a| < R\}$, то есть в кольце с центром в точке a, которое называется кольцом сходимости ряда Лорана.

Сумма ряда Лорана в области $D = \{z \colon \rho < |z - a| < R\}$ является регулярной функцией, а во всяком замкнутом кольце

$$D_1 = \{z \colon \rho < \rho_1 \le |z - a| \le R_1 < R\},$$

где $D_1 \subset D$, ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ сходится равномерно.

Функция $f(z)$, регулярная в кольце D, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана, то есть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \rho < R_0 < R,$$

где окружность ориентирована положительно (обход против часовой стрелки).

Задачи для решения на практике

(1) Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+3)}$$

в областях регулярности $D_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, $D_2 = \{z\colon 1 < |z| < 3\}$, $D_3 = \{z\colon |z| > 3\}$.

(2) Функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}} - \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}}\right).$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем $z = 3/2$ и указать границы сходимости.

(3) Разложить в ряд Лорана в кольце с центром в $z = 0$, которому принадлежит точка $z = 3$, функцию

$$f(z) = \frac{3z^3 + 6z^2 - 8}{z^2 - 3z - 4}$$

и указать границы кольца сходимости.

(4) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{z(z+2i)}$$

в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в кольце D, которому принадлежит точка $z = 1$ и указать границы кольца сходимости.

(5) Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2}\right)\cos\frac{1}{z-2}$$

в ряд Лорана по степеням $z - 2$ в кольце $D = \{z\colon 0 < |z-2| < \infty\}$.

(6) Найдите точки, в которых функция

$$f(z) = x\sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x)$$

а) дифференцируема, б) регулярна.

(7) Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{z(4+i) + 12i + 3}{z^2 + 2iz + 15} + \frac{3z(i-1) + 6}{z^2 + z(1-3i) - 3i}$$

по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z = 1 + 2i$ и укажите границы кольца сходимости.