Теоретическая информатика IV

Практика 15 марта 2021

Задачи 6, 7, 8 — теоретический материал, который входит в программу курса.

1. Изменим определение главной универсальной функции и будем требовать существования вычислимой функции s лишь для универсальных вычислимых функций V (а не для любых, как раньше). Покажите, что новое определение эквивалентно старому.

2. Пусть U — главная универсальная функция. Покажите, что для всякой всюду определенной вычислимой функции h существует бесконечное множество неподвижных точек.

3. Пусть U — главная универсальная функция. Является ли разрешимым множество $\{n \,|\, U(n,x) = n \text{ для всех } x\}$? Применима ли теорема Успенского-Райса?

4. Пусть $U(n,x)$ — главная вычислимая универсальная функция для класса вычислимых функций одного аргумента. Пусть $V(n,x)$ — произвольная вычислимая функция. Покажите, что функции U и V совпадают на некотором сечении: найдётся такое p, что $U_p = V_p$, то есть $U(p,n) = V(p,n)$ для любого n.

5. Докажите, что множество номеров функций (в главной нумерации), определенных в нуле, является m-полным. Докажите, что множество номеров функций, определенных в каком-нибудь числе, является m-полным.

6. **Главные универсальные множества.**

   Перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ называется *главным универсальным перечислимым множеством* для класса всех перечислимых подмножеств $\mathbb{N}^k$, если для любого другого перечислимого множества $V \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ найдется такая всюду определенная вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ что

   $$(n, x_1, \ldots, x_k) \in V \Leftrightarrow (s(n), x_1, \ldots, x_k) \in W.$$

   (a) Показать, что существует главное универсальное перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$.

   Два способа доказательства:

   - через области определения главных универсальных функций;
   - можно построить главное универсальное множество непосредственно, используя универсальное подмножество $W \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ (по аналогии с построением главной универсальной функции из лекций).

   (b) Пусть $W \subseteq \mathbb{N}^2$ — главное универсальное перечислимое множество. Покажите, что по W-номерам двух перечислимых множеств можно алгоритмически построить номер их объединения: существует такая вычислимая всюду определённая функция двух аргументов s, что $W_{s(m,n)} = W_m \cup W_n$ для любых m и n.

7. Сформулируйте и докажите теорему о неподвижной точке для главных универсальных множеств.

8* Доказать, что двуместная универсальная вычислимая функция $U \in \mathcal{F}^2$ для класса вычислимых функций $\mathcal{F}^1$ является главной тогда и только тогда, когда существует такая всюду определенная функция $f \in \mathcal{F}^2_*$, что $U_p \circ U_q = U_{f(p,q)}$, т.е. $U(f(p,q),x) = U(p,U(q,x))$ для всех p,q,x.