Содержание

1 17 февраля **1**

2 24 февраля **1**

3 3 марта **2**

Последнее обновление 3 марта 2021 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2021/topology4.pdf

Топология и геометрия-4, практика, СПбГУ 2021, факультет математики и компьютерных наук

Никита Сергеевич Калинин, Нина Дмитриевна Лебедева, Евгений Анатольевич Фоминых
Для всех групп: 201,202,203

1 17 февраля

задачи и кусочек теории
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2021/zaniatie1parallPerenosNew.pdf

2 24 февраля

Для решения следующей задачи Вам может пригодиться уравнение параллельного переноса http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2021/eq.pdf

Задача 8. В полярных координатах (ρ, φ) на плоскости найдите

- а) символы Кристоффеля (первого рода, здесь и далее) "внешним" (то есть через вложение плоскости в $\mathbb{R}^3$ и вычисление ковариантной проиводной базисных векторов, как проекции обычной производной на касательное пространство) и "внутренним" (решение системы, в которой коэффициенами являютя координаты метрического тензора g_{ij} и их производные) способом.

- б) используя символы Кристоффеля и соответствующее уравнение, параллельный перенос вектора $v \in T_pM$ с координатами $(0,1)$ из точки $p = (2,0)$ в точку $q = (2, \pi/3)$ вдоль кривой $\rho = 2$. Найдите декартовы координаты начального и конечного вектора.

Задача 9. Рассмотрим три векторных поля на плоскости: $A = \frac{\partial}{\partial x}, B = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, C = \frac{\partial}{\partial y}$. Рассмотрим верхнюю полусферу S_+, заданную как $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, |x|^2 + |y|^2 < 1$. Проекция вдоль оси z даёт диффеоморфизм между S_+ и открытым кругом, поэтому можно векторные поля A, B, C перенести на сферу. Назовём полученные векторные поля на сфере A', B', C'. Найдите

- а) скобку Ли $[A', B']$ (иногда её называют коммутатором векторных полей A', B');
- б) $[[A', B'], C'] + [[B', C'], A']$.
- в) символы Кристоффеля
- г) В точке с координатами $(0, 0)$ ковариантную производную B' вдоль A' "внутренним" (используя символы Кристоффеля) и "внешним" способом (по определению ковариантной производной, как проекции обычной на касательное пространство).

Гладкое векторное поле на гладком многообразии называется **полным**, если поток определен на всем многообразии, для всех t.

Задача 10. Приведите пример неполного гладкого векторного поля на $\mathbb{R}$.

Задача 11. Дано гладкое многообразие M и гладкое векторное поле $V \in \mathfrak{X}(M)$. Докажите, что если $V_p = 0$, то для любой точки $q \neq p$ и $t \in \mathbb{R}$ $\Phi_V^t(q) \neq p$ (иначе говоря, никакая траектория потока не приведет в точку, где поле нулевое.)

Задача 12. Найдите явное выражение для потока, порожденного векторным полем на плоскости, изобразите интегральные линии, докажите полноту этого поля.

- $A = c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y}$
- $B = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$
- $C = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$

Задача 13. *** Докажите, что векторное поле с компактным носителем является полным. (Следствие: для любого векторного поля и компакта найдется полное векторное поле, совпадающее с данным на компакте.)

3 3 марта

Домашняя контрольная: дедлайн 3 марта 23:59.
https://forms.yandex.ru/u/60361605943981e439166432/

Задача 14. Пусть $c : I \to M$ гладкий путь, $c(0) = p$. Тогда $c'(t)$ — путь в TM, поэтому в общем случае $c''(t) \in TTM$.

- а) Приведите пример, показывающий, что в общем случае вторая производная зависит от выбора карты, если вычислять ее в координатах $d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(\varphi \circ c)''(0) \neq d_{\psi(p)}\psi^{-1}(\psi \circ c)''(0)$
- б) Пусть $c'(0) = 0$, докажите, что отображение $D_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$, действующее по правилу $D_p(f) = (f \circ c)''(0)$ линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Покажите, что соответствующий вектор в координатах имеет вид $(\varphi \circ c)''(0)$.

- в) Пусть $a, b : I \to M$ гладкие пути, такие что $a(0) = b(0) = p$ и $a'(0) = b'(0)$. докажите, что отображение $D_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$, действующее по правилу $D_p(f) = (f \circ a)''(0) - (f \circ b)''(0)$ линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Найдите выражение соответствующего вектора в координатах.

Задача 15. Скобка Ли — мера некоммутативности потоков. Дано гладкое многообразие M и гладкие векторные поля $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ зафиксмруем точку $p \in M$. Докажите, что для $c_p(t) = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t(p) - \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t(p)$

$$[X, Y]_p = \frac{1}{2} c_p''(0) \qquad (*),$$

где $c_p''(0)$ понимается в смысле пункта в) предыдущей задачи.

План доказательства.

- Пусть $X_p \neq 0$. Использовать теорему о выпрямлении, после этого в координатах:
  - Проверить корректность. (Показать, что выражение $c_p''(0)$ имеет смысл.) То есть, рассмотреть кривые $a(t) = \Phi_X^t \circ \Phi_Y^t(p)$ и $b(t) = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^t(p)$ и проверить, что выполняются условия из пункта в) предыдущей задачи.
  - Проверить равенство (*) в координатах.
- Если $X_p = 0$ и $Y_p = 0$ добавить координату и поле.