Теоретическая информатика IV

Практика 22 марта

1. **Цель упражнения — показать, что существуют перечислимые множества, не являющиеся m-полными.**

   Пусть W — главное универсальное перечислимое множество. Будем говорить, что множество A является *эффективно неперечислимым*, если существует такая всюду определённая вычислимая функция f, что $f(z) \in A \triangle W_z$ при всех z. Другими словами, функция f дает элемент, в котором A отличается от W_z.

   (a) Покажите, что если $A \leq_m B$ и A эффективно неперечислимо, то и B эффективно неперечислимо.

   (b) Покажите, что существуют перечислимые множества с эффективно неперечислимыми дополнениями.
   Указание: можно рассмотреть диагональ $D = \{(n, n) | n \in W\}$.

   (c) Покажите, что всякое m-полное перечислимое множество имеет эффективно неперечислимое дополнение.

   (d) Пусть K — перечислимое множество, а A эффективно неперечислимо. Покажите, что тогда $N \setminus K \leq_m A$.

   Таким образом, получаем следующую характеризацию:

   - Перечислимое множество является m-полным тогда и только тогда, когда его дополнение эффективно неперечислимо.
   - Множество эффективно неперечислимо тогда и только тогда, когда к нему m-сводится дополнение m-полного множества.

   (e) Докажите, что любое эффективно неперечислимое множество содержит бесконечное перечислимое подмножество (т. е. не является иммунным).

   Следствие: простые множества, существование которых мы доказывали, являются примерами перечислимых множеств, не являющихся m-полными. (Напоминание: перечислимое множество называется простым, если его дополнение бесконечно, но не содержит бесконечных перечислимых подмножеств.)

2. Докажите, что если $A \in \Sigma_n$, то $A \times A \in \Sigma_n$.

3. Докажите, что если $A, B \in \Sigma_n$, то $A \setminus B \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

4. Пусть $R(x, y)$ принадлежит Σ^n. Покажите, что свойство $S(x) = (\forall y \leq x) R(x, y)$ принадлежит Σ^n.

5. Доказать, что множество нигде не определенных функций в главной нумерации является Π_1-полным.

6. Показать, что следующие множества номеров лежат в арифметической иерархии (и, по возможности, найти минимальный номер):

   (a) множество функций, таких что $f(2021) = 2021$,

   (b) всюду определенных функций,

   (c) функций с бесконечной областью определения,

   (d) функций, которые определены на всех числах из некоторой арифметической прогрессии,

   (e) функций, которые вычисляют некоторую биекцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

7* Пусть $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — некоторое множество пар натуральных чисел, а $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ определяется следующим образом:

$V = \{(x, y)|(x, y) \in U$ и $(x, z) \notin U$ для всех $z < y\}$

Следует ли их разрешимости U разрешимость V?
Следует ли из перечислимости U перечислимость V?

(Задача засчитывается, только если сделаны оба пункта.)

8* Верно ли, что множество минимальных индексов функций в главной нумерации иммунно (т.е. может ли оно содержать перечислимые множества)?