1. [Для групп 2 и 3.] Решить нужно подробно, а записываться можно всем и сразу.

   Найдите все максимальные идеалы кольца $R = \mathbb{R}[X, Y]$.
   Указание. Приходят в голову два способа решения. Можно доказать, что любой такой идеал M дает сюръективный гомоморфизм факторизации $R \to \mathbb{R}$ или $R \to \mathbb{C}$, и найти все возможные ядра. Или можно рассмотреть $R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}/M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ как $R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[X, Y]$-модуль и доказать, что идеал $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ или сам максимален в $\mathbb{C}[X, Y]$, или является пересечением двух максимальных.

   Зафиксируем натуральное n; R — коммутативное кольцо с единицей (можно считать $R = \mathbb{Z}$) $x_1, \dots, x_n$ — переменные и элементы кольца $R' = R[x_1, \dots, x_n]$.

   Для монома $M = \prod x_i^{n_i}$, $n_i \geq 0$, будем обозначать через $O_n(M)$ сумму всех различных мономов, получающихся из M перестановкой x_i (мы берем эти слагаемые без повторов!); $p_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m$ при $m > 0$.

   Мы определим элементарные симметрические многочлены $s_m \in R'$ от x_i для $m \geq 0$ следующим образом: $s_0 = 1$, $s_m = O_n(x_1 \dots x_m)$ если $1 \leq m \leq n$ (обычное определение!), $s_m = 0$ если $m > n$.

2. [Молодые люди, у которых есть плюсики, могут записываться на эту задачу начиная с 9 марта, барышни — с 8 марта. .] Выразите $O_4(x_1^2 x_2^2)$ через s_i (пользуясь рассуждением, примененным на лекции для доказательства теоремы 5.1).

3. [Молодые люди с плюсиками могут записываться на эту задачу с 9 марта, барышни — с 8 марта.] Выразите $O_3(x_1^3 x_2^2)$ через s_i.

4. [Молодым людям нельзя записываться на эту задачу 8 марта; в остальные дни можно всем.]

   Докажите для каждого $m > 0$ следующее тождество (Ньютона): $ms_m + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i s_{m-i} p_i = 0$. Используйте его, чтобы выразить характер m-ой внешней степени комплексного представления π (конечной группы) через χ_π.

   Говорим, что многочлен $f \in R'$ антисимметричен, если при перестановке любых двух переменных он меняет знак (см. ниже).

5. [Молодым людям нельзя записываться на эту задачу 8 марта; в остальные дни можно всем.]

   $R = \mathbb{Z}$. Докажите, что $f \in R'$ антисимметричен тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

   $f' \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$, где $f' \in R'$ — симметрический многочлен.
   Замечание. Конечно же, следствие в одну сторону выполнено всегда. Видимо, для следствия в нетривиальную сторону достаточно того, чтобы отображение умножения на 2 не имело ядра в R (т.е., 2 — не делитель 0 в R).