

**INT 1.** Докажите, что если есть набор целых чисел  $\ell_1, \dots, \ell_n$ , удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} \leq 1,$$

то существует префиксный код с кодовыми словами  $c_1, \dots, c_n$ , где  $|c_i| = \ell_i$ .

**INT 2.** Докажите, что величины  $\alpha, \beta, \gamma$  независимы в совокупности (вероятность события  $(\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_j, \gamma = \gamma_k)$  равна произведению трех отдельных вероятностей) тогда и только тогда, когда:

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\alpha) + H(\beta) + H(\gamma).$$

### Определение

Взаимной информацией между случайными величинами  $\alpha$  и  $\beta$  будем называть функцию  $I(\alpha: \beta) := H(\alpha) - H(\alpha | \beta)$ .

Также определим взаимную информацию в  $\alpha$  и  $\beta$  при условии  $\gamma$ .  $I(\alpha: \beta | \gamma) = H(\alpha | \gamma) - H(\alpha | \beta, \gamma)$ .

**INT 3.** Докажите следующие свойства взаимной информации:

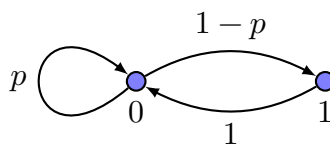
- а)  $I(\alpha: \beta) = I(\beta: \alpha)$ ;
- б)  $\alpha$  и  $\beta$  независимы тогда и только тогда, когда  $I(\alpha: \beta) = 0$ ;
- в)  $I(f(\alpha): \beta) \leq I(\alpha: \beta)$  для любой функции  $f$ .

**INT 4.** Докажите неравенство  $2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma) + H(\beta, \gamma)$ .

*Комментарий.* Верно и более общее утверждение. Пусть  $T_1, \dots, T_k$  — произвольные кортежи, составленные из переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , причем каждая переменная входит ровно в  $r$  кортежей. Тогда  $rH(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq H(T_1) + H(T_2) + \dots + H(T_k)$  (Shearer's inequality).

**INT 5.** Пусть  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — это случайная величина, задающая последовательность состояний Марковской цепи, изображенной на рисунке.

Чему равен предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha)}{n}$ ?



**INT 6.** Имеется набор из  $n$  камней. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти самый тяжелый и самый лёгкий камни (на каждую чашу можно класть не более одного камня)?

**INT 7.** Докажите, что следующее неравенство выполнено не для всех троек случайных величин  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

$$2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma | \beta) + H(\beta, \gamma | \alpha)$$