# Римановы многообразия- план

16 февраля 2021 г. 18:53

Определение: риманово многообразие. Условие гладкости

Определение: изометрия римановых многообразий

Определение: коэффициенты римановой метрики в карте

Теорема: гладкость метрики равносильна гладкости коэффициентов.

Примеры:

- Вложенное подмногообразие.
- Метрика, индуцированная погружением.
- Метрика, заданная коэффициентами.
- Прямое произведение.

Определение: длина касательного вектора, длина гладкой кривой.

Определение: риманово расстояние.

Теорема: Риманово многообразие - метрическое пространство. Его метрическая топология совпадает с топологией многообразия.

# Определения

13 февраля 2021 г. 17:23

$\boxed{\text{Опр}}$ Риманово многообразие — пара $(M, g)$, где

- $M = M^n$ — гладкое многообразие
- $g$ — гладкая риманова метрика
  (синонимы: риманова структура, метрический тензор).

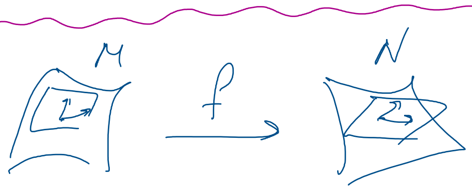
Риманова метрика — семейство $g = \{g_x\}_{x \in M}$,
 где $g_x$ — скалярное произведение на $T_x M$.

Обозначение: $\boxed{g_x = \langle , \rangle_x = \langle , \rangle}$

Условие гладкости: $\forall$ гладких векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
 функция $\underset{\langle X, Y \rangle}{\overset{\shortparallel}{g(X, Y)}}$ — гладкая.

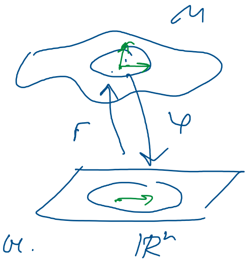
$\boxed{\text{Опр}}$ Изометрия римановых многообразий $M$, $N$. — диффеоморфизм $f: M \to N$, сохраняющий скалярное произведение:

$\forall x \in M \quad \forall v, w \in T_x M \quad \boxed{\langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle_N = \langle v, w \rangle_M}$



# Метрические коэффициенты

13 февраля 2021 г. 18:02




**Опр** Пусть $M^n$ — риманово многообразие.
$\varphi$ — карта в $U \subset M$ ($\varphi : U \to \mathbb{R}^n$)
$X_1, \dots, X_n$ — координатные поля этой карты.

$g(X_i, X_j)$

$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ — метрические коэффициенты (коэф-ты римановой метрики) в карте $\varphi$.

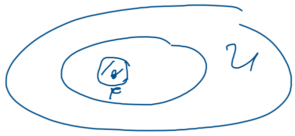
$X_i = (d\varphi^{-1})(e_i)$

Примечание: Это функции на $U$.
(те же буквы исп. для $g_{ij} \circ \varphi^{-1}$)

**Теорема** 1. $g_{ij}$ — гладкие функции (если $g$ — гладкая рим. метрика).

2. Условие гладкости римановой метрики $\Leftrightarrow$
$\exists$ атлас $M$, у которого в каждой карте метрические коэффициенты — гладкие.

Д-во: (1) Тонкость: $X_1, \dots, X_n$ — определены не всюду.




$\forall p \in U \quad \exists V \subset U$, $V \ni p$

и ф-я $h : M \to \mathbb{R}$, $h \in C^\infty$.

$h|_V \equiv 1$, $h|_{M \setminus U} \equiv 0$

$h \cdot X_i$ — всюду определено и $C^\infty$

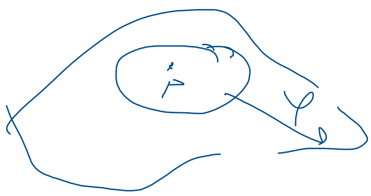
$\underbrace{\langle h \cdot X_i, h \cdot X_j \rangle}_{\in C^\infty}\big|_V = \langle X_i, X_j \rangle\big|_V$.

(2) $\Rightarrow$ из (1)

$\Leftarrow$ $X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \{$гл. вект. поля на $M\}$

Надо $\langle X, Y \rangle \in C^\infty$

В одной карте.




$X = \sum \xi_i X_i$

$Y = \sum \eta_j X_j$

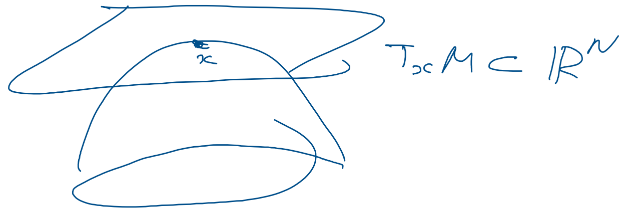
$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j g_{ij} \in C^\infty$.

# Примеры

13 февраля 2021 г. 18:18

① Вложенные подмн-я

$M \subset \mathbb{R}^N$

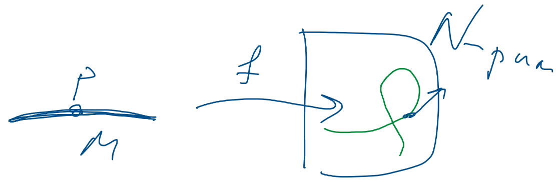



② $M \subset N$, где $N$ — риманово мн-е $(T_xM \subset T_xN)$

③ $N$ — рим., $M$ — гл. мн-е.

$(N, g)$.

$f: M \to N$ — погружение




$f$ индуцирует рим. метрику $f_*g$ на $M$.

$p \in M$, $v, w \in T_pM$ $\quad \langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle_{(N,g)}$

④ $M$ — откр. область в $\mathbb{R}^n$

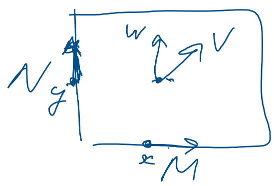
$(g_{ij})$ — матричная ф-я:

$\forall x$ $(g_{ij}(x))$ — симм. и положит. опр.

<u>Напр.</u> $M = \mathbb{R}^2$ $\quad g_{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+1 & xy \\ xy & x^2+y^2+2 \end{pmatrix}$

⑤ Прямое произведение. (Упр).

$M, N$ — рим. мн-я




$M \times N$ — гл. мн-е.

$T(M \times N) = TM \times TN$

$T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$.

$\langle v, w \rangle := \langle dpr_1(v), dpr_1(w) \rangle + \langle dpr_2(v), dpr_2(w) \rangle$.

# Длины и расстояния

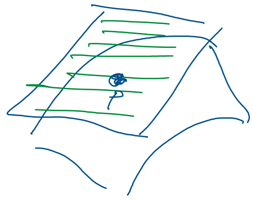
13 февраля 2021 г. 18:57

Опр Пусть $M$ — риманово многообразие, $p \in M$.

Норма касательного вектора $v \in T_pM$

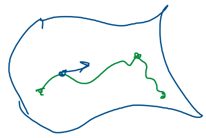
$$|v| = |v|_g = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

+ определяет углы.

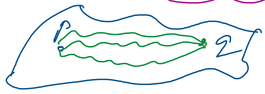


Длина гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$



Длина кусочно-гладкой кривой — сумма длин гладких частей.




Опр Расстояние между $p, q \in M$:

$d_M(p,q) = \inf \{ \ell(\gamma) :$ $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая в $M$, $\gamma$ соединяет $p$ и $q$ $\}$.

Теорема Пусть $M$ — связное риманово многообразие. Тогда

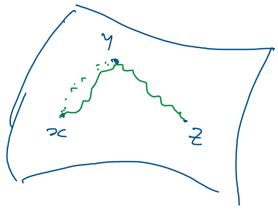
1. $(M, d_M)$ — метрическое пр-во
2. Топология метрики $d_M$ = топологии многообразия $M$.

Док-во ① • Симм — трив.

• Нер-во $\Delta$-ка — трив.

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) + \varepsilon.$$

$$(\forall \varepsilon > 0).$$




• $d(x,x)$ — трив.

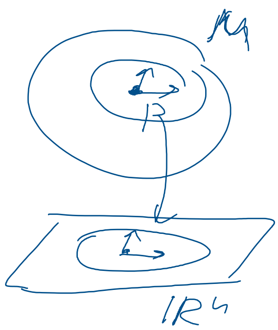
• $x \ne y \Rightarrow d(x,y) > 0$ ?— вместе с ②.

② Лемма. $\forall p \in M$

$\exists$ карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \ni p$

т.ч.

$$\frac{d_M(x,y)}{|\varphi(x) - \varphi(y)|} \to 1 \quad \text{при } x, y \to p.$$




Д-во леммы. $\exists\, v_1, \dots, v_n$ — ортон. базис в $T_pM$

Выберем $\varphi$ : (1) $\varphi(p) = 0$

(2) $d\varphi(v_i) = e_i$

Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ окр-ть $V \ni p$ $(V \subset U)$.

$$\forall x, y \in V. \quad 1-\varepsilon < \frac{d(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} < 1+\varepsilon$$

1. $\exists$ окр-ть $V_1$ : $\forall x \in V_1\ \forall v \in T_x M$

$$\boxed{1-\varepsilon < \frac{|v|_g}{|d\varphi(v)|_{евкл}} < 1+\varepsilon}$$

Д-во $\exists\ \xi_1, \dots, \xi_n$ — координаты $v$.

$$|v|_g^2 = \sum{}' g_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$|d\varphi(v)|^2_{евкл} = \sum \xi_i^2.$$

$g_{ij}(x) \rightrightarrows \delta_{ij}$ — симв. Кронекера.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2. $\Rightarrow \forall$ кривой $\gamma : [a,b] \to V_1$.

$$1-\varepsilon < \frac{\ell_g(\gamma)}{\ell(\varphi\circ\gamma)} < 1+\varepsilon$$

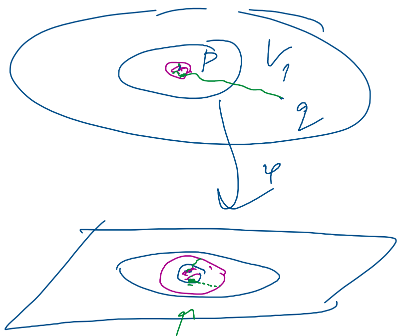
3. $\exists\ \varphi(V_1) \supset B_r(0)$

$V := \varphi^{-1}(B_{r/3}(0))$

$\forall x, y \in V.$

$$1-\varepsilon < \frac{d_M(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} < 1+\varepsilon$$

(если $\varepsilon < \frac{1}{10}$).




чтобы выйти, кривая $\geq \frac{4}{3} r \cdot (1-\varepsilon)$ длины. ⊟

$\Longrightarrow$ Теорема ?

(A) $q \neq p$ почему $d(p,q) > 0$ ?

$d(p,q) \geq (1-\varepsilon)|\varphi(p)-\varphi(q)| > 0$ ; если $q \in V$

если $q \notin V$, то $d(p,q) \geq (1-\varepsilon) r > 0$.

(B) Топология — та же !

$d_M$ и $d_{\text{евкл}}(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

экв-ны.

$\square$

# Плоскость Лобачевского - план

16 февраля 2021 г. 20:13

Определение: модель Пуанкаре в полуплоскости $\{y>0\}$.

Длины и углы в этой модели.

Определение: Абсолют модели Пуанкаре в полуплоскости - прямая $\{y=0\}$

**Движения**

Определение: Элементарные движения - параллельные переносы на горизонтальные векторы, осевые симметрии относительно вертикальных прямых, положительные гомотетии с центром на абсолюте, инверсии с центром на абсолюте.

Теорема: Элементарные движения - изометрии плоскости Лобачевского

Определение: движения плоскости Лобачевского - композиции элементарных движений.

Задача: Описание группы движений через комплексные дробно-линейные функции.

**Прямые и отрезки**

Определение: Прямые плоскости Лобачевского - вертикальные лучи и полуокружности с центром на абсолюте.

Теорема: Прямые плоскости Лобачевского изометричны R как метрические пространства.

Доказательство:

1. Лемма: Вертикальный отрезок - единственный кратчайший путь между своими концами на плоскости Лобачевского (в классе кусочно-гладких путей, единственность - с точностью до замены параметра).
2. Следствие: Вертикальный луч на плоскости Лобачевского изометричен R.
3. Применяя инверсии, выводим это для полуокружностей

Свойства прямых:

- Через любую пару различных точек проходит единственная прямая.
- Аксиома параллельных неверна
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости
- Группа движений действует транзитивно на флагах (аксиомы об однородности).
- Неравенство треугольника - строгое, если точки не лежат на одной прямой.

**Модель Пуанкаре в круге**

Определение: Модель Пуанкаре - образ модели в полуплоскости при подходящей инверсии, с римановой метрикой, для которой эта инверсия - изометрия.

Вычисление метрического тензора для модели в круге.

Наблюдение: Повороты вокруг центра - изометрии круговой модели.

Следствие: Шар круговой модели с центром в 0 - евклидов круг.

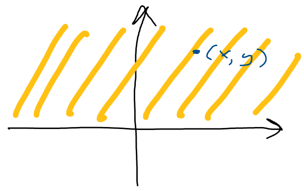
Следствие: Все шары обеих моделей - евклидовы круги (с другим центром).

# Определение - модель Пуанкаре в полуплоскости

15 февраля 2021 г. 21:33

**Опр** Плоскость Лобачевского (гиперболическая плоскость) — верхняя полуплоскость $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$ с римановой метрикой

$$\big(g_{ij}(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$




Обозначение $\mathbb{H}^2$.

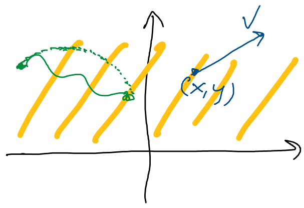
---

**Опр** n-мерное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ — аналогично: $\mathbb{H}^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$, $g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\cdot\delta_{ij}$

Не будем рассматривать

---

## Длины и углы




- Длина кас. вектора $v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$:

$$\boxed{|v|_h = \frac{|v|_{\text{евкл}}}{y}}$$

- Длина кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\boxed{\ell_h(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|_{\text{евкл}}}{y(t)}\,dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\,dt}$$

- Углы в $\mathbb{H}^2$ равны евклидовым (метрика — конформная) $g_{ij}(x) = \lambda^2(x)\cdot\delta_{ij}$

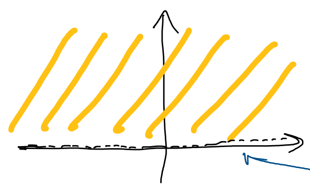
$$\boxed{\lambda(x,y) = \frac{1}{y}}$$

---

# Элементарные движения

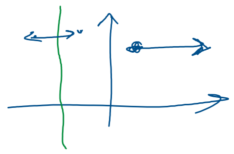
15 февраля 2021 г. 21:34

$\boxed{\text{Опр}}$ Абсолют модели Пуанкаре в полупл-ти — прямая $\{y=0\}$.



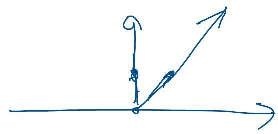
абсолют (не содержится в $\mathbb{H}^2$!)

$\boxed{\text{Теорема}}$ Следующие преобразования — изометрии $\mathbb{H}^2$:



① Горизонтальные параллельные переносы:

$$\boxed{(x,y)\longmapsto(x+c,\ y)}$$

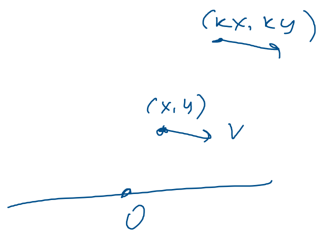


② Симметрии отн. вертикальных прямых:

$$\boxed{(x,y)\longmapsto(c-x,\ y)}$$

③ Гомотетии с центром на абсолюте с к-том $> 0$.

④ Инверсии с центром на абсолюте (определим позже).




1, 2 — очев.

③ Док. $f(x,y) \Rightarrow (kx, ky)$

$v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$.

$|v|_h = \frac{1}{y}\,|v|_{евкл.}$

$df(v) = (\underbrace{kx, ky}_{\text{точка}},\ kv)$

$|df(v)|_h = |kv|_{евкл}\cdot\frac{1}{ky} = |v|_{евкл}\cdot\frac{1}{y}$

# Инверсия: определение и свойства

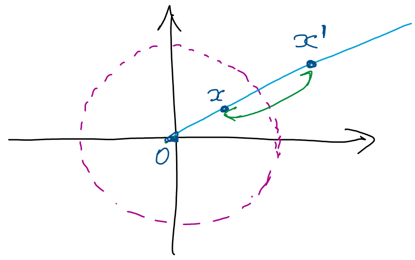
15 февраля 2021 г. 21:35

$\boxed{\text{Опр}}$ Инверсия с центром $O \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $R > 0$. — отображение $I: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, т.ч. для $x' = I(x)$

(1) $\boxed{\vec{Ox'} = \frac{R^2}{|Ox|^2} \vec{Ox}}$

или:

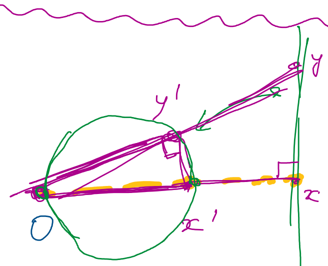
(2) $\boxed{\vec{Ox'} \uparrow\uparrow \vec{Ox} \quad |Ox'| \cdot |Ox| = R^2}$




$\boxed{\text{Свойства}}$ $I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ (в $\mathbb{C}$). $z \to \frac{c}{\bar{z}}$

- Сохраняет углы.
- Переводит прямые и окружности в прямые и окружности

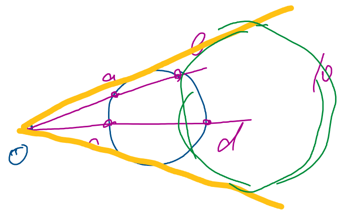

— в себя




$\Delta O x' y' \simeq \Delta O y x$

$\Downarrow$

$\angle O y' x' = \pi/2$

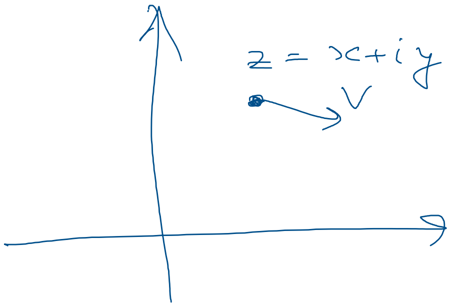



$|oa| \cdot |ob| = |oc| \cdot |od|$ — подсказка.

# Инверсия: проверка изометричности

15 февраля 2021 г.    21:36

Дост. док-ть для инв. с центром 0 и радиусом 1.

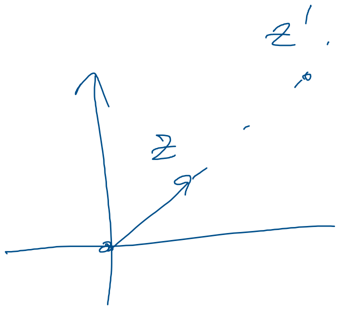



$$I(z) = \frac{1}{z} = \overline{f(z)}$$

$$f(z) = 1/z \quad (\text{в } \mathbb{C}).$$

$$f'(z) = -1/z^2.$$

$$d_z f(v) = -\frac{1}{z^2} \cdot v.$$




$$|d_z I(v)| = |d_z f(v)| = \frac{|v|_{\text{евкл}}}{|z|^2}$$

$$\vec{Oz'} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \vec{Oz} \quad (\text{в } \mathbb{R}^2).$$

$$z = (x, y) \qquad z' = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{|z|^2}, \frac{y}{|z|^2}\right).$$

$$|d_z I(v)|_h = \frac{|d_z I(v)|_{\text{евкл}}}{y/|z|^2} = \frac{|v|_{\text{евкл}} / |z|^2}{y/|z|^2} = \frac{|v|_{\text{евкл}}}{y} = |v|_h \qquad \blacksquare$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 1