7 Занятие 29/03/2021: конформные отображения элементарными функциями

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на области $G = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ функцию $w = |z|^t e^{it} \arg z$, $\arg z \in (0, 2\pi)$. Функция w регулярна на G и при $t \neq 0$ однолистна на области $D \subset G$ если D не содержит двух различных точек z_1, z_2 таких, что $z_2 = z_1 e^{2\pi i k/t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

При $t > 0$ функция w осуществляет конформное отображение угловой области $G_{0,\varphi_0} = \{z\colon |z| > 0, 0 < \arg z < \varphi_0\}$, $\varphi_0 \leq 2\pi$, $|t|\varphi_0 \leq 2\pi$ на угловую плоскость $G_{0,t\varphi_0}$.

Например, $w = z^2$ конформно отображает

1. $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$;
2. $\{z\colon |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на $\{w\colon |w| < 1\} \setminus [0, 1)$;
3. $\{z\colon \operatorname{Im} z > a > 0\}$ на $\{w\colon (\operatorname{Im} w)^2 > 4a^2(\operatorname{res} w + a^2)\}$.

Экспоненциальная функция

Функция $w = e^z$ осуществляет конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда D не содержит двух различных точек z_1, z_2 таких, что $z_2 = z_1 + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Например, $w = e^z$ конформно отображает

1. $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;
2. $\{z\colon \operatorname{res} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на $\{w\colon |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$;
3. $\{z\colon \operatorname{res} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на $\{w\colon |w| > 1, \operatorname{Im} w > 0\}$.

Логарифмическая функция

Многозначная функция $w = \mathrm{Log} z$ распадается на регулярные вветви во всякой одосвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей 0 и ∞. Каждая регулярная ветвь $f(z) \in \mathrm{Log} z$ является в области G однозначной функцией, поэтому эта ветвь осуществляет конформное отображение в области G на область $f(G)$, которое является обратным к $w = e^z$.

Например, регулярная ветвь $f(z)$ многозначной функции $\mathrm{Log} z$ конформно отображает

1. $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ на $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$ если $f(-1) = \pi i$;
2. $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ на $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{res} w > 0\}$ если $f(2 + i0) = \log 2$.

Функция Жуковского

Функция Жуковского $w = (z + 1/z)/2$ осуществляет конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда D не содержит ± 1 и для любой точки $z \in D$ точка $1/z \notin D$.

Например, $w = (z + 1/z)/2$ конформно отображает

1. $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, 1] \cup [1, +\infty))$;
2. $\{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$;
3. $\{z\colon |z| < 1$ на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$;
4. $\{z\colon |z| > 1$ на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$;
5. $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;

6. $\{z\colon \operatorname{Im} z < 0, |z| < 1$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$;

7. $\{z\colon |z| > \rho > 1$ и $\{z\colon |z| < 1/\rho\}$ на $\{w = u + iv\colon u^2/a_\rho^2 + v^2/b_\rho^2 > 1\}$, где $a_\rho = (\rho + 1/\rho)/2$, $b_\rho = |\rho - 1/\rho|/2$;

8. $\{z\colon \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ на внешность гиперболы $u^2/\cos^2\alpha - v^2/\sin^2\alpha = 1$;

9. $\{z\colon 0 < \arg z < \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ на внутреннюю часть правой ветвви гиперболы $u^2/\cos^2\alpha - v^2/\sin^2\alpha = 1$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$;

10. $\{z\colon 0 < \arg z < \pi - \alpha, |z| > 1\}$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ на $\{w = u + iv\colon u^2/\cos^2\alpha - v^2/\sin^2\alpha > 1, u > 0, v > 0\}$.

Обратная к функции Жуковского

Многозначная функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ в любой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащем кривых, соединяются ± 1, распадается на две регулярные ветви. Например, регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$ многозначною функции $w = (z + 1/z)/2$ конформно отображают

1. $\mathbb{C} \setminus ([-1, 1]$ на внешность единичного круга если $f_1(\infty) = \infty$ или на внутренность если $f_2(\infty) = 0$;

2. $\mathbb{C} \setminus ([-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ на верхнюю полуплоскость если $f_1(0) = i$ и на нижнюю полуплоскость если $f_2(z) = -i$;

3. $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0, |w| > 1\}$ если $f_1(0 + i0) = i$ и на $\{w\colon |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$ если $f_2(0 + i0) = -i$.

Тригонометрические и гиперболические функции

Данные функции можно разложить в композицию уже описанных. Например, $w(z) = \operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2$ является композицией $\zeta(z) = e^z$ и $w(\zeta) = (\zeta + 1/\zeta)/2$. Функция

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = (-i)\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

является композицией

$$\zeta(z) = 2iz, \quad \eta(\zeta) = e^\zeta, \quad w(\eta) = (-i)\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Задачи для решения на практике

(1) Найти конформное отображение $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih]$, $h > 0$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

(2) Найти конформное отображение $D = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z\colon |z| = 1, 0 \le \arg z \le \alpha\}$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

(3) Найти конформное отображение $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\} \setminus [2, 3]$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

(4) Найти конформное отображение $D = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [\pi i/2, \pi i/2 + 1]$ на $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Hints

(1) Заметить, что при помощи степенной функции можно перейти в верхнюю полуплоскость из $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$. Далее нашу область можно перевести $f(z) = z^2$ в $\mathbb{C} \setminus [-h^2, +\infty)$. Остается применить сдвиг на h^2.

(2) Применить к исходной области функцию Жуковского, которая переведет ее в $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1) \cup (\cos\alpha, +\infty))$. Далее использовать дробно-линейную функцию для перевода в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и применить степенную функцию как в прошлой задаче.

(3) Использовать $f(z) = 1/z$ и отобразить исходную область в полосу с разрезом $\{\xi \colon 0 < \operatorname{res}\xi < 1/2\} \setminus [1/3, 1/2]$. Затем применить $\eta = f_2(\xi) = \pi i(1 - 2\xi)$ для перехода в полосу с вертикальным разрезом $\{\eta \colon 0 < \operatorname{Im}\eta < \pi\} \setminus [0, \pi i/3]$. Остается воспользоваться степенной функцией как в задачах ранее.

(4) Применить экспоненциальную функцию и функцию Жуковского, а затем воспользоваться задачей 1.

Задачи на дом

(1) Вычислить $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-a|^{-2}|dz|$.

(2) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}dx$.

(3) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $\displaystyle I = \int_1^{2} \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}dx$.

(4) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)(x+2)^2}dx$.