4 Занятие 12/03/2021: вычисление интегралов по замкнутому контуру

Теорема (Теорема Коши о вычетах). *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ регулярная в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k = 1, \dots, n$ и непрерывна вплоть до границы Γ области D. Тогда*

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

где Γ^+ — положительно ориентированная относительно области D кривая Γ.

Таким образом нетрудно вывести, что для регулярной на $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ функции $f(z)$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Напомним, что функция $f(z)$ называется **целой** если она регулярна в каждой точке $z \in \mathbb{C}$. Функция $f(z)$ называется **мероморфной** если она регулярна на каждом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{C}$ за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Если точка $z = \infty$ является полюсом порядка m для целой функции $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен степени m. Если же целая функция $f(z)$ регулярна в бесконечности, то $f(z) = \text{const}$. Целую функцию, для которой бесконечная точка является существенно особой точкой называют **целой трансцедентной**. Например, e^z, $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ — целые трансцедентные функции.

Теорема (Теорема Лиувилля). *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая в области $R < |z| < \infty$ неравенству $|f(z)| \le M|z|^m$, где $M > 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $f(z)$ — многочлен степени $\le m$.*

Задачи для решения на практике

(1) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z+1} dz$.

(2) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)}$.

(3) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin\frac{1}{z} dz$.

(4) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=7} \frac{1-\operatorname{ch} z}{z^3+4\pi^2 z} dz$.

(5) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^4}{1-z^8} dz$.

(6) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z}-e^{1/z}} dz$.

(7) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi}$, $a > 1$.

Hints

(1) Сначала ищем конечные особые точки — корни $e^z + 1 = 0$, то есть $z_k = \pi i + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$. Среди них в круг $|z| < 4$ попадают только две — $\pm\pi i$. По теореме о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z+1} dz = 2\pi i \Big(\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-\pi i} f(z) \Big).$$

Далее, так как это полюсы первого порядка, то имеем

$$\operatorname{res}_{z=\pm\pi i} f(z) = \frac{z^4}{(e^z+1)'}\Big|_{z=\pm\pi i} = -\pi^4,$$

а значит $I = -4\pi^5 i$.

(2) Особые точки $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а также $z' = 1$. Внутри круга $\{z\colon |z| < 3\}$ находятся $z' = 1$ и $z_0 = 0$. По теореме о вычетах имеем

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)} = 2\pi i \Big(\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=0} f(z) \Big).$$

Так как $z' = 1$ является полюсом второго порядка, то

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (f(z)(z-1)^2)' = \frac{-\sin 1}{(1-\cos 1)^2}.$$

Точка $z_0 = 0$ также является полюсом второго порядка с вычетом

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 4.$$

(3) Особые точки $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = \infty$. Точка z_0 — существенно особая точка, в ней считаем c_{-1}, используя разложение $\sin(1/z)$ в ряд Тейлора. Получаем

$$c_{-1} = \frac{1}{3!9} - \frac{1}{5!9^3} + \ldots = 1 - 3\sin\frac{1}{3}.$$

Таким образом

$$\int_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i(1 - 3\sin(1/3)).$$

Альтернативно можно посчитать вычеты в $z = \pm 3, \infty$ и воспользоваться теоремой о вычетах

$$\int_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin\frac{1}{z} dz = -2\pi i \Big(\operatorname{res}_{z=3} f(z) + \operatorname{res}_{z=-3} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \Big).$$

Вычеты в ± 3 равны $(3/2)\sin(1/3)$, а в бесконечности вычет -1.

(4) Особые точки $z = 0, \pm 2\pi i$. Далее, точки $\pm 2\pi i$ являются нулями числителя первого порядка, а также нулями знаменателя первого порядка, откуда следует, что это устранимые особые точки и $\operatorname{res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = 0$.

Точка $z = 0$ является нулем числителя первого порядка и нулем знаменателя первого порядка, значит она устранимая и вычет в ней тоже ноль. Остается воспользоваться теоремой о вычетах и получить

$$\int_{|z|=7} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^3 + 4\pi^2 z} dz = 0.$$

(5) Поскольку вне круга $|z| < 4$ находится только одна особая точка $z = \infty$, то удобнее считать через вычет в бесконечности. Так как $f(z)$ — четная, то в окрестности бесконечности ее ряд Лорана содержит только четным степени z, а значит коэффициент при $1/z$ равен нулю, как и искомый интеграл.

(6) Как и в предыдущей задачи удобно использовать теорему о вычетах для области $|z| > 1$, так как в нее попадает только одна особа точка — бесконечность. Имеем

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Бесконечная точка является полюсом первого порядка, ввычисляем $c_{-1} = 13/12$ и $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -13/12$.

(7) Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dz = izd d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Тогда интеграл принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Особые точки подынтегральной функции $z = -ia \pm \sqrt{a^2 - 1}$, внутри круга лежит только одна, которая является полюсом первого порядка. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i(\sqrt{a^2-1}-a)} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Задачи на дом

(1) Вычислить $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-a|^{-2}|dz|$.

(2) Докажите, что если целая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| \le C\sqrt{|z|}|\cos z|$, то $f(z) \equiv 0$.

(3) Докажите, что $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ для $a > |b|$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

(2 old для 102) Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, имеющая изолированные особые точки на плоскости и пусть $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Доказать, что

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|z|<R} \operatorname{res} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = 0.$$

(3 old) Пусть

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Не используя разложение синуса в бесконечное произведение показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{c_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$