Группа G всегда конечна; представления — комплексные.

1. Найти таблицу характеров группы D_4. Описать с ее помощью все нормальные подгруппы D_4.

2. Найти таблицу характеров группы A_4. Описать с ее помощью все нормальные подгруппы A_4.

3. Доказать, что неприводимое представление G одномерно тогда и только тогда, когда его ядро содержит коммутант $[G, G]$

4. Пусть $e_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_g \chi_i(g) g^{-1}$ — это центральный идемпотент, отвечающий i-ому неприводимому характеру, а V — какой-то модуль над $\mathbb{C}[G]$. Доказать, что $e_i V$ — это представление группы G, которое раскладывается в прямую сумму нескольких экземпляров i-го неприводимого представления.

5. Группа G действует на множестве M дважды транзитивно, т.е., для любых элементов $m_1 \neq m_2 \in M$ и $m_3 \neq m_4 \in M$ существует такой $g \in G$, что $g(m_1) = m_3$ и $g(m_2) = m_4$

   Доказать, что перестановочное представление G, соответствующее этому действию, раскладывается в прямую сумму тривиального и неприводимого.

6. Вычислите разложение в сумму неприводимых симметрического и внешнего квадрата, и тензорного куба неприводимого двухмерного представления группы D_4.

7. Вычислите разложение в сумму неприводимых симметрического и внешнего квадрата естественного (или другого неприводимого трехмерного) представления группы S_4.

8. Вычислите разложение в сумму неприводимых всех представлений группы S_4, индуцированных с неприводимых представлений группы группы S_3.

9. Пусть A, B — подгруппы G; обозначим через 1_A и 1_B тривиальные представления этих групп. Докажите, что скалярное произведение $\langle Ind_A^G 1_A, Ind_B^G 1_B \rangle$ равно количеству орбит для очевидного действия A на левых смежных классах G по B.