3 Занятие 01/03/2021: вычисление вычетов

Вычет в конечной точке

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$, регулярной в кольце $0 < |z-a| < \rho$. Если $\gamma_R = \{z\colon |z-a| = R\}$, где $0 < R < \rho$ — положительно ориентированная окружность (обход против часовой стрелки), то число

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

называется **вычетом** функции $f(z)$ в точке a.

Если функция $f(z)$ регулярна в конечной точке a, то $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$.

Вычет в бесконечной точке

Пусть $f(z)$ регулярна в области $|z| > \rho$, бесконечная точка является либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности $f(z)$. Тогда **вычетом функции** $f(z)$ **в бесконечности** называется

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z)dz, \quad 0 < \rho < R,$$

где $\gamma_R = \{z\colon |z| = R\}$ — окружность радиуса R, ориентированная по часовой стрелке (при обходе область $|z| > R$ остается слева).

Если функция $f(z)$ регулярна в бесконечной точке, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ не обязательно равен нулю, например, $\operatorname{res}_{z=\infty} 1/z = -1$.

Теорема о вычетах

Если функция $f(z)$ регулярна на комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_n$, то сумма всех вычетов функции $f(z)$ равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a, то она представляется в кольце $0 < |z-a| < \rho$ рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

— его главная часть. Тогда для вычета в точке $z = a$ выполнено

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Если $f(z)$ регулярна в окрестности $z = \infty$ и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1.$$

Вычисление вычета в (конечном) полюсе первого порядка

Пусть $z = a \neq \infty$ — полюс первого порядка (простой полюс) функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Если $f(z) = h(z)/g(z)$, где $h(z)$, $g(z)$ — регулярные в точке $z = a$ функции такие, что

$$g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0,$$

то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Например, для $g(z) = z - a$ имеем

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-a}, \quad \operatorname{res}_{z=a} f(z) = h(a),$$

Вычисление вычета в (конечном) полюсе порядка $m > 1$

Если точка $z = a \neq \infty$ — полюс порядка $m > 1$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}.$$

Например, для

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m},$$

где $h(z)$ — регулярная в точке $z = a$ функция с $h(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}h^{(m-1)}(a),$$

то есть вычет функции $f(z) = h(z)/(z-a)^m$ в точке $z = a$ равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ ряда Тейлора $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Вычисление вычета в бесконечности

Если функция $f(z)$ регулярна в бесконечности, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}(zf(\infty) - f(z)).$$

Если $z = \infty$ — нуль порядка k функции $f(z)$, то

$$f(z) \sim Cz^{-k}, \quad z\to\infty, \quad C \neq 0.$$

Если $k = 1$, то

$$f(z) \sim C/z, \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -C.$$

Если же $k \geq 2$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Если функция $f(z)$ удовлетворяет $f(z) = g(1/z)$, где g регулярна в нуле, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -g'(0)$.

Задачи для решения на практике

(1) Найти вычет в точке $z = a$ у функции $f(z) = \dfrac{z^2 + 7z}{z^2 - z - 2}$, $a = -1$.

(2) Найти вычет в точке $z = a$ у функции $f(z) = ze^{1/z^2}$, $a = \infty$.

(3) Найти вычет в точке $z = a$ у функции $f(z) = \dfrac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a = \pi$.

(4) Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z^4}{1 + z^4}$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности.

(5) Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(z - \pi)}$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности.

(6) Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z^3}{z + 1}e^{1/z}$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности.

(7) Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, $Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0$, где $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$. Найти $\operatorname{res}_{z=\infty} P_n(z)/Q_n(z)$.