6 Занятие 22/03/2021: интегралы от регулярных ветвей, несобственные интегралы

Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо интервалу $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Мы дополняем (a, b) какой-нибудь кривой Γ, которая ограничивает вместе с (a, b) область $D \subset \mathbb{C}$. Если функция $f(x)$ регулярно продолжаеттся в D, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j, то по теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_a^b f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} f(z).$$

Таким образом задача вычисления исходного интеграла сводится к вычислению

$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

Если $(a, b) = \mathbb{R}$, то часто удобно ввыбирать отрезок $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ и $\Gamma = \Gamma_R = \{z\colon |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ — полуокружность радиуса $R > 0$, расположенную в верхней полуплоскости.

Теорема 3. *Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j и непрерывна вплоть до действительной оси. Тогда если*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0,$$

то

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} f(z).$$

Если функция $f(z)$ непрерывна на $\{z\colon \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ и

$$\lim_{R\to+\infty} R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = 0,$$

то

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Например, если $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$, $Q_m(z)$, $Q_m(x) \neq 0$ — многочлены степени n и m соответственно, то при $m \geq n + 2$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

сходится в несобственном смысле и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Теорема 4 (Теорема Жордана)**.** *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на $\{z\colon \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ и*

$$\lim_{R\to+\infty} R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = 0.$$

Тогда если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

С помощью теоремы выше можно вычислять интегралы вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx,$$

где $f(x)$ функция вида $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, причем $m \geq n+1$. Тогда имеем

$$I + iJ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k}(f(z)e^{i\alpha z}).$$

Задачи для решения на практике

(1) Пусть регулярная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\sqrt{z^2-4}$ определена в области G, где G — комплексная плоскость с разрезом по полуокружности $\{z\colon |z| = 2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, причем главная часть ряда Лорана $g(z)$ в окрестности бесконечности равна z. Вычислить

$$J = \int_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

(2) Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

(3) Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$.

(4) Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5) Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{i(8x-7)}}{x^2-2x+5}dx$.

(6) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Hints

(1) Для начала нужно проверить существование регулярных ветвей в данной области, а затем найти особые точки подынтегральной функции – $z = \pm i/\sqrt{2}$. Далее необходимо вычислить значение $g(z)$ в особых точках. Для этого сначала вычисляем для действительного $x > 2$

$$g(x) = g(0)\frac{x}{2}\sqrt{1-4/x^2}e^{i/2(\pi+0)} = \frac{i}{2}g(0)(x - 2/x + o(1/x)),$$

а затем используем теорему о единственности регулярной функции и получаем

$$g(z) = \frac{i}{2}g(0)(z - 2/z + o(1/z)).$$

Так как главная часть ряда Лорана в бесконечности равна z, то $g(0) = -2i$, откуда $g(i/\sqrt{2}) = g(-i/\sqrt{2}) = -3i/\sqrt{2}$. Так как $g'(-i/\sqrt{2}) = 1/3$, то $-i/\sqrt{2}$ — полюс первого порядка. Применяем теорему о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname{res} z = -i/\sqrt{2} g(z) = -\frac{3\pi i}{4}.$$

(2) В области, ограниченной Γ_R и $[-R, R]$, функция $f(z) = z^2/(1+z^4)$ имеет две особые точки — $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, которые являются полюсами первого порядка. Вычисляя вычеты имеем

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}.$$

По теореме о вычетах находим

$$I = 2\pi i(\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) Функция $f(z) = 1/(z^2+4)^3$ имеет в области, ограниченной Γ_R и $[-R, R]$ одну особую точку $z_1 = 2i$ — полюс третьего порядка. Вычисляя вычет, получаем

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{2}h''(2i) = \frac{3}{2\cdot 4^4 i},$$

где $h(z) = 1/(z+2i)^3$. Тогда интеграл раввен $3\pi/256$.

(4) Заметим, что если $\alpha = 0$, то $I = I(\alpha) = I(0) = \pi$. Также $I(\alpha)$ — четная функция, то есть достаточно рассмотреть $\alpha > 0$. Пусть

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда $I(\alpha) = \operatorname{res} J(\alpha)$. Применяем теорему Жордана к $f(z) = e^{i\alpha z}/(1+z^2)$ и получаем

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad R \to +\infty.$$

Далее $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну особую точку — полюс первого порядка i, в которой

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{2z} = \frac{e^{-\alpha}}{2i}.$$

Таким образом, $J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$ и $I(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}$.

(5) Применяем теорему Жордана к функции $f(z) = g(z)e^{8iz}$, где $g(z) = (z-1)e^{-7i}/(z^2-2z+5)$. Далее $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну особую точку — полюс первого порядка $z_0 = 1+2i$, в которой

$$\mathrm{res}_{z=1+2i} f(z) = \frac{(z-1)e^{i(8z-7)}}{(z^2-2z+5)'} = \frac{e^{-16}}{2}(\cos 1 + i\sin 1).$$

Таким образом $I = \pi e^{-16}(\cos 1 + i \sin 1)$.

(6) Рассмотрим контур $\Gamma_{\rho,R}$, состоящий из двух полуокружностей радиусов ρ, R и соединяющих их отрезков действительной оси. Интеграл отт $f(z) = e^{iz}/z$ по этому контуру равен нулю, так как функции регулярна во внутренности контура. С другой стороны, он равен сумме интегралов по полуокружностям и отрезкам $[-R,\rho]$, $[\rho,R]$. Имеем

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z),$$

где $h(z)$ регулярна в нуле. Если $z \in \Gamma_\rho$, то $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$, $ddz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ и

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z} = i\int_\pi^0 d\varphi = -i\pi.$$

Так как $h(z)$ ограничена в окрестности нуля, то при $\rho \to 0+$ имеем

$$\int_{\Gamma_\rho} h(z)dz \to 0,$$

а значит

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}dz = -i\pi + \varepsilon_1(\rho),$$

где

$$\varepsilon_1(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} h(z)dz \to 0.$$

По теореме Жордана

$$\varepsilon_2(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}z}{d}z \to 0, \quad R \to +\infty.$$

На действительной оси имеем

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\rho^R \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_\rho^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx = 2i\int_\rho^R \frac{\sin x}{x}dx.$$

Таким образом

$$0 = I_{\rho,R} = 2i\int_\rho^R \frac{\sin x}{x}dx - \pi i + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R).$$

Так как интеграл I сходится, то существует

$$\lim_{\substack{\rho\to 0+\\ R\to+\infty}} \int_\rho^R \frac{\sin x}{x}dx.$$

Остается перейди к пределу при $\rho \to 0+$, $R \to +\infty$ и вспомнить, что $\varepsilon_1(\rho) \to 0$, $\varepsilon_2(R) \to 0$. Получаем $2iI - i\pi = 0$, то есть $I = \pi/2$.

Задачи на дом

(1) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2} dx.$

(2) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $I = \int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx.$

(3) Применяя теорему о вычетах, вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)(x+2)^2} dx.$