Связность Леви-Чивита

Бураго

Определение

Связностью Леви-Чивита на римановом многообразии называется симметричная аффинная связность, согласованная с метрикой.

Теорема (основная теорема римановой геометрии)

На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивита.

Док-во: **Единственность.** Пусть ∇ — связность Леви-Чивита. Тогда

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \quad \checkmark$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

Складывая 1 с 2 и вычитая 3, а также используя симметричность ∇, получаем

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_X Y\rangle.$$

Поэтому

$$\langle Z, \nabla_X Y\rangle = \frac{1}{2}\left(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle\right).$$

Формула

Связность Леви-Чивита

Правая часть не зависит от ∇. Поэтому при наличии двух связностей ∇ и $\widetilde{\nabla}$ справедливо равенство

$$\langle Z, \nabla_X Y\rangle = \langle Z, \widetilde{\nabla}_X Y\rangle.$$

Тогда $\forall p \in M$

$$\langle Z_p, (\nabla_X Y)_p\rangle = \langle Z_p, (\widetilde{\nabla}_X Y)_p\rangle \implies \langle Z_p, (\nabla_X Y)_p - (\widetilde{\nabla}_X Y)_p\rangle = 0.$$

Т.к. равенство справедливо для любого Z_p, то

$$(\nabla_X Y)_p = (\widetilde{\nabla}_X Y)_p.$$

Связность Леви-Чивита

Док-во: Существование.

Фиксируем полях X, Y. Правая часть формулы линейна по Z (прямая проверка), поэтому ее значение в любой точке $p \in M$ зависит только от Z_p. Следовательно, она – линейный функционал L на T_pM.
Поэтому существует вектор $w \in T_pM$, зависящий от полей X, Y, для которого $\langle Z_p, w \rangle = L(Z_p)$ при всех $Z_p \in T_pM$.
Полагаем по определению $(\nabla_X Y)_p = w$. Проверим, что ∇ – связность Леви-Чивита.

Упражнение. Проверить пункты 1 и 2 определения связности.

Почему поле $\nabla_X Y$ гладкое ??

ф-ла: $\langle Z, \nabla_X Y \rangle$ – гладкая функция $\forall Z$ – гладкое.

Упр: Т.к. $Z \cdot$ гладкая, $\forall Z$ – гладкое поле, то ∇ – гладкое

Связность Леви-Чивита

Док-во: Существование.
Фиксируем полях X, Y. Правая часть формулы линейна по Z (прямая проверка), поэтому ее значение в любой точке $p \in M$ зависит только от Z_p. Следовательно, она – линейный функционал L на T_pM.
Поэтому существует вектор $w \in T_pM$, зависящий от полей X, Y, для которого $\langle Z_p, w \rangle = L(Z_p)$ при всех $Z_p \in T_pM$.
Полагаем по определению $(\nabla_X Y)_p = w$. Проверим, что ∇ – связность Леви-Чивита.

Упражнение. Проверить пункты 1 и 2 определения связности.

Римановость: применяя формулу к тройкам X, Y, Z и X, Z, Y, складывая результаты получаем искомое.

Связность Леви-Чивита

Док-во: Существование.

Фиксируем полях X, Y. Правая часть формулы линейна по Z (прямая проверка), поэтому ее значение в любой точке $p \in M$ зависит только от Z_p. Следовательно, она – линейный функционал L на T_pM. Поэтому существует вектор $w \in T_pM$, зависящий от полей X, Y, для которого $\langle Z_p, w \rangle = L(Z_p)$ при всех $Z_p \in T_pM$.
Полагаем по определению $(\nabla_X Y)_p = w$. Проверим, что ∇ – связность Леви-Чивита.

Упражнение. Проверить пункты 1 и 2 определения связности.

Римановость: применяя формулу к тройкам X, Y, Z и X, Z, Y, складывая результаты получаем искомое.

Применяя римановость к полям X, fY, Z получаем

$$\langle (Xf)Y, Z \rangle + f\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X (fY), Z \rangle.$$

Отсюда ввиду произвольности поля Z имеем пункт 3 определения связности.

Рим: $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

$X\langle fY, Z \rangle = X(f\cdot\langle Y, Z\rangle) = f\cdot X\langle Y, Z\rangle + Xf\langle Y, Z\rangle$

$f\langle \nabla_X Y, Z\rangle + f\langle Y, \nabla_X Z\rangle$

Связность Леви-Чивита

Док-во: Существование.
Фиксируем полях X, Y. Правая часть формулы линейна по Z (прямая проверка), поэтому ее значение в любой точке $p \in M$ зависит только от Z_p. Следовательно, она – линейный функционал L на T_pM.
Поэтому существует вектор $w \in T_pM$, зависящий от полей X, Y, для которого $\langle Z_p, w\rangle = L(Z_p)$ при всех $Z_p \in T_pM$.
Полагаем по определению $(\nabla_X Y)_p = w$. Проверим, что ∇ – связность Леви-Чивита.

Упражнение. Проверить пункты 1 и 2 определения связности.

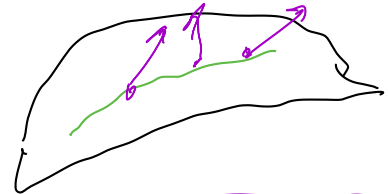
Римановость: применяя формулу к тройкам X, Y, Z и X, Z, Y, складывая результаты получаем искомое.

Применяя римановость к полям X, fY, Z получаем

$$\langle (Xf)Y, Z\rangle + f\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \nabla_X(fY), Z\rangle.$$

Отсюда ввиду произвольности поля Z имеем пункт 3 определения связности.
Симметричность: применяя формулу к тройкам X, Y, Z и Y, X, Z, вычитая результаты получаем

$$\langle \underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]}_{=0}, Z\rangle = 0.$$



Определение

Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая кривая на гладком многообразии M. Векторным полем вдоль кривой γ называется такое гладкое отображение $V : I \to TM$, что $\forall t \in I$, $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

$(\nabla_X Y)_p$ зависит от Y в окр т. p и от X_p.

Теорема (определение ковариантной производной)

Пусть ∇ – аффинная связность, γ – гладкая кривая на гладком многообразии M. Тогда существует единственное отображение, которое каждому векторному полю V вдоль кривой γ сопоставляет векторное поле $\frac{\nabla}{dt}V$ вдоль кривой γ и удовлетворяет следующим свойствам:

(a) $\frac{\nabla}{dt}(V+W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$

(b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{\nabla}{dt}V$

(c) *Пусть V индуцировано некоторым полем $Y \in \mathfrak{X}(M)$, т.е. $V(t) = Y(\gamma(t))$. Тогда $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\gamma'}Y$,*

где W – векторное поле вдоль кривой γ, f – гладкая функция на I.

поточечная формула

$\exists X \in \mathfrak{X}(M): X_p = \gamma'(p)$

Замечание: Равенства (a), (b), (c) справедливы в каждой точке $t \in I$.

Определение

$\frac{\nabla}{dt}V$ — ковариантная производная векторного поля V вдоль кривой γ.

Единственность: Введем обозначения:
(U, φ) – такая карта на M, что $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$,
$(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ – локальное представление кривой $\gamma(t)$,
E_i – координатные поля,
$V = \sum_j v_j E_j$, где v_j и E_j зависят от t.

$$(a), (b) \implies \frac{\nabla}{dt}V = \sum_j \frac{dv_j}{dt}E_j + \sum_j v_j \frac{\nabla}{dt}E_j. \quad \checkmark$$

Далее, из (c) и определения ∇ имеем

$$\frac{\nabla}{dt}E_j = \nabla_{\gamma'}E_j = \nabla_{\left(\sum_i \frac{dx_i}{dt}E_i\right)}E_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\nabla_{E_i}E_j. \quad \checkmark$$

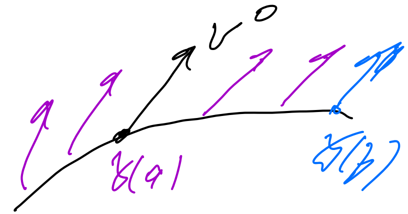
Тогда

$$\frac{\nabla}{dt}V = \sum_j \frac{dv_j}{dt}E_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt}v_j \nabla_{E_i}E_j. \quad (*)$$

Эта формула гарантирует единственность.

Сущест**в**. ~~Единственность~~. Покроем кривую, т.е. $\gamma(I)$, ~~конечным~~ набором карт.
В каждой локальной системе координат зададим $\frac{\nabla}{dt}V$ формулой.
Нетрудно проверить, что эта формула обеспечивает выполнение свойств (a), (b), (c).
На пересечении карт построенные поля совпадут в силу уже доказанной единственности.

Параллельный перенос



Определение

Пусть ∇ — аффинная связность, γ — гладкая кривая на гладком многообразии M. Векторное поле V вдоль кривой γ называется *параллельным*, если $\frac{\nabla}{dt}V = 0$ в каждой точке $t \in I$.

Теорема

Пусть ∇ — аффинная связность на гладком многообразии M. Тогда для любой гладкой кривой γ на M, любой точки $t_0 \in I$ и любого вектора $V^0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ существует единственное параллельное векторное поле V вдоль γ такое, что $V(t_0) = V^0$.

Определение

Параллельный перенос вдоль $\gamma \colon [a, b] \to M$ — это отображение

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M,$$

сопоставляющее каждому вектору $V^0 \in T_{\gamma(a)}M$ вектор $V(b) \in T_{\gamma(b)}M$.

Док-во: Нам нужно доказать теорему только для случая, когда вся кривая полностью содержится в одной локальной системе координат (U, φ).

Введем обозначения: E_i – координатные поля,

$(x_1(t), \dots, x_n(t))$ – локальное представление кривой $\gamma(t)$,

$V^0 = \sum v_i^0 E_i$.

Предположим, что существует векторное поле V в U, которое параллельно вдоль γ и $V(t_0) = V^0$. Тогда поле V записывается в локальных координатах

$$V(t) = \sum v_i(t)E_i(t).$$

Тогда

$$\frac{\nabla}{dt}V = \sum_j \frac{dv_j}{dt}E_j + \sum_{ij}\frac{dx_i}{dt}v_j\nabla_{E_i}E_j = 0.$$

Подставляя $\nabla_{E_i}E_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j}E_k$ и заменяя j на k в первой сумме, получаем

$$\frac{\nabla}{dt}V = \sum_k\left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{ij}v_j\frac{dx_i}{dt}\Gamma^k_{i,j}\right)E_k = 0.$$

Следующая система n дифференциальных (линейных) уравнений на $v_k(t)$

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{ij}v_j\frac{dx_i}{dt}\Gamma^k_{i,j} = 0$$

с начальным условием $v_k(t_0) = v_k^0$ имеет единственное решение. Это означает, что если поле V существует, то оно единственно.
Более того, поскольку система линейна, любое решение определено для всех $t \in I$, что доказывает существование поля V с требуемыми свойствами.

Риманова связность и параллельные поля

Теорема

Пусть ∇ – аффинная связность на гладком многообразии M. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *для любой гладкой кривой γ на M и любых двух векторных полей V, W вдоль γ справедливо тождество*
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{\nabla}{dt} V, W\rangle + \langle V, \frac{\nabla}{dt} W\rangle.$$
2. *для любой гладкой кривой γ на M и любых двух параллельных векторных полей V, W вдоль γ имеем $\langle V, W\rangle = const$.*
3. *∇ – риманова связность.*

Док-во (1) $\implies$ (2) очевидно.
(2) $\implies$ (1) Фиксируем $t_0 \in I$ и выберем ортонормированный базис $P_1(t_0), \dots, P_n(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$. Перенесем этот базис вдоль γ и построим параллельные векторные поля $P_1(t), \dots, P_n(t)$. В силу (2), $\langle P_i(t), P_j(t)\rangle = \langle P_i(t_0), P_j(t_0)\rangle$. Следовательно, $P_1(t), \dots, P_n(t)$ является ортонормированным базисом $T_{\gamma(t)}M$ для любого $t \in I$.
Разложим поля по базису
$$V = \sum_i v_i P_i, \quad W = \sum_i w_i P_i,$$
где v_i, w_i — гладкие на I функции.

Тогда в силу пунктов (a), (b) теоремы-определения ковариантной производной и параллельности полей P_i

$$\frac{\nabla}{dt}V = \sum_i \frac{dv_i}{dt}P_i, \quad \frac{\nabla}{dt}W = \sum_i \frac{dw_i}{dt}P_i.$$

Поэтому

$$\langle\frac{\nabla}{dt}V, W\rangle + \langle V, \frac{\nabla}{dt}W\rangle = \sum_i \left(\frac{dv_i}{dt}w_i + \frac{dw_i}{dt}v_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i v_i w_i\right) = \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle.$$

(1) $\Longrightarrow$ (3) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

Возьмем произвольную точку $p \in M$ и рассмотрим такую гладкую кривую $\gamma\colon I \to M$, что $t_0 \in I$, $p = \gamma(t_0)$ и $\gamma'(t_0) = X(p)$. Тогда

$$X\langle Y, Z\rangle(p) =^1 \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle|_{t=t_0} =^2 \langle\frac{\nabla}{dt}Y, Z\rangle + \langle Y, \frac{\nabla}{dt}Z\rangle =^3 \langle\nabla_{X(p)}Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)}Z\rangle_p.$$

$Xf = (f\circ\gamma)'|_{t=t_0}$

Упр: (3) $\Rightarrow$ (1)

[1] определение производной функции вдоль векторного поля

[2] пункт (1)

[3] пункт (c) теоремы-определения ковариантной производной