① Длины векторов мы умеем считать в x, y координатах

поэтому давайте переводить

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

мы знаем $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = 1$ $\quad \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$

$\qquad\qquad\qquad \| $

$\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 1$ иначе говоря пара векторов

$\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ это ортонормированный базис в каждой точке

и первая форма это $1 \cdot dx^2 + 1 \cdot dy^2$

$dx = \cos\varphi \cdot dr - r\sin\varphi \cdot d\varphi$

$dy = \sin\varphi \cdot dr + r\cos\varphi \cdot d\varphi$

$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ ← ответ.

можно увидеть по-другому:

что такое $\frac{\partial}{\partial r}$ — это производная по r

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \left\langle\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = \cos^2\varphi\cdot\left\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle + \sin^2\varphi\left\langle\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle = 1$$

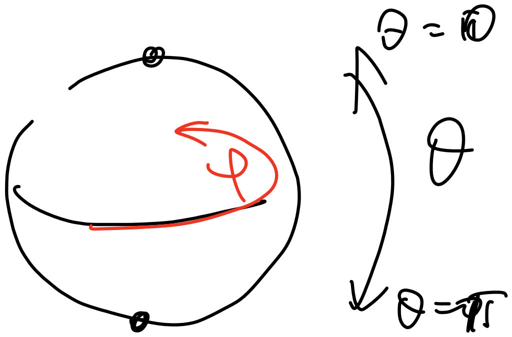
и т.д.

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\left(\cos\varphi\cdot(-r\sin\varphi)\right) + \left\langle\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\cdot\left(\sin\varphi\cdot(r\cos\varphi)\right) = 0.$$

Длина кр-вой $[0,1]\to\mathbb{R}^2 \quad t\to(\rho(t), \varphi(t))$

$$\| \quad \int_0^1 \sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2} = \int_0^1 \sqrt{\dot\rho(t)^2+\rho(t)^2\dot\varphi(t)^2}\,dt$$

(2)



$z = \cos\theta$
$x = \cos\varphi \cdot \sin\theta$
$y = \sin\varphi \cdot \sin\theta$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot(-\sin\varphi\cdot\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos\varphi\cdot\sin\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\varphi\cdot\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin\varphi\cdot\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(-\sin\theta)$$

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\rangle = \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\varphi \sin^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle = -\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi = 0.$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle = \cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$\Rightarrow$ I-форма $= \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$

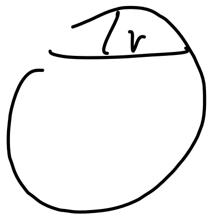
чисто ради эксперимента сузим I форму с $\mathbb{R}^3$

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (-\sin\varphi\sin\theta\, d\varphi + \cos\varphi\cos\theta\, d\theta)^2 + \ldots$$

$$= \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$$

совпадение? не думаю

Найдём площадь круга радиуса r с центром в северном полюсе

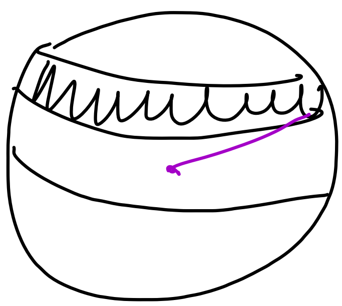


$$= \int_{\varphi\in[0,2\pi]} \int_{\theta\in[0,r]} \sqrt{EG-F^2}\, d\varphi\, d\theta =$$

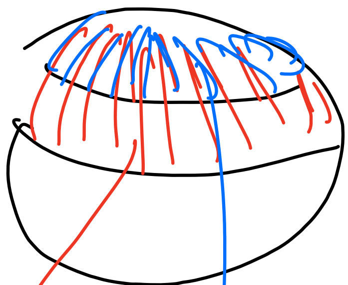
$$\int_{\varphi,\theta} \sin\theta = 2\pi \cdot \int_{\theta\in[0,r]} \sin\varphi = 2\pi(\cos 0 - \cos r) =$$

$$2\pi(1-\cos r)$$

Теорема Архимеда



$=$



$z_0 = \cos\theta_0$

$z_0 + h = \cos\theta_1$

площадь $= 2\pi(1-\cos\theta) - 2\pi(1-\cos\theta_1) =$

$= h \cdot 2\pi.$

③ Вращение вокруг Oz кривой $x(t), z(t)$

это $\left(x(t)\cdot\cos\varphi,\ x(t)\cdot\sin\varphi,\ z(t)\right)$

$\Uparrow$

вот и параметризация.

первая форма. $\frac{\partial}{\partial t} = (\dot x\cos\varphi, \dot x\sin\varphi, \dot z)$

$\frac{\partial}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi\cdot x, \cos\varphi\cdot x, 0)$

$\langle\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \dot x^2 + \dot z^2$ $\quad$ $\langle\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\rangle = 0$

$\langle\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\rangle = x^2$

$\Rightarrow (\dot x^2 + \dot z^2)dt^2 + x^2 d\varphi^2$

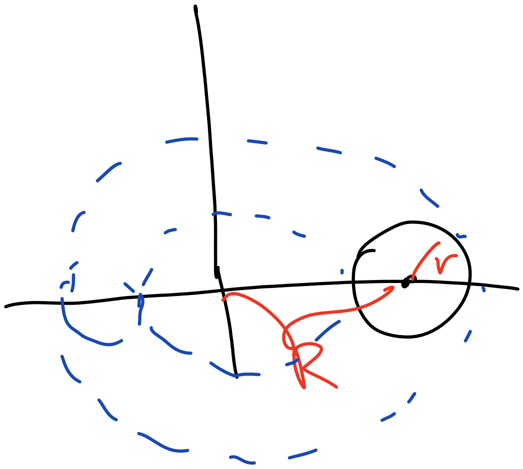
если кривая была параметризована натурально

$\Rightarrow dt^2 + x^2 d\varphi^2$

(похоже на полярные из ①!)

совпадение?

(7). Oz



окружность $x = R + r\cos\varphi$

$z = r\sin\varphi$

вращение

$((R+r\cos\varphi)\cos\psi, (R+r\cos\varphi)\sin\psi, r\sin\varphi)$

первая форма (поверхности вращения)

$((r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2)\cdot d\varphi^2 + (R+r\cos\varphi)^2\, d\psi^2$

$\underset{r^2}{\shortparallel}$

Площадь $\displaystyle\int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{EG-F^2} = \int r(R+r\cos\varphi)\,d\varphi\,d\psi$

$\displaystyle = 4\pi^2 rR + 2\pi r^2 \int_{[0,2\pi)} \cos\varphi\, d\varphi = 4\pi^2 rR$