Пример: сфера

Пример

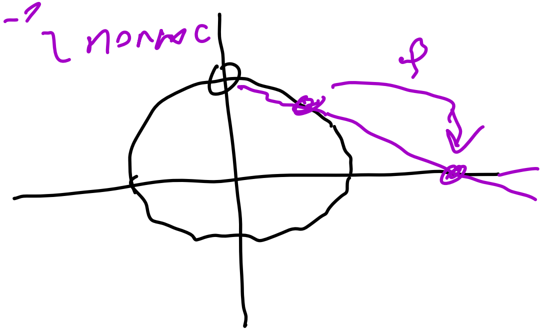
На сфере S^{n-1} можно задать дифференциальную структуру разными естественными атласами, например

- $2n$ ортогональных проекций;
- две стереографические (центральные) проекции

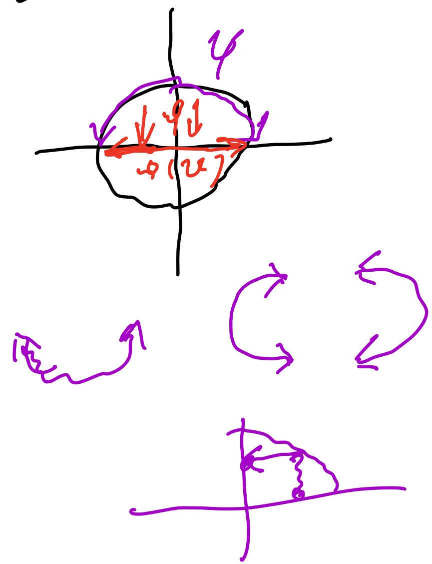
Проверять гладкость отображений перехода будет проще, если заметить, что карты гладко продолжимы на открытые области в $\mathbb{R}^n$.

На самом деле проверять определение вручную не нужно, так как сфера — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (об этом позже)

$U = S^{n-1} \setminus$ полюс



S^1



Упр*: $\mathbb{R}P^n$ – гл. мн-е

Определение гладкого отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f\colon M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

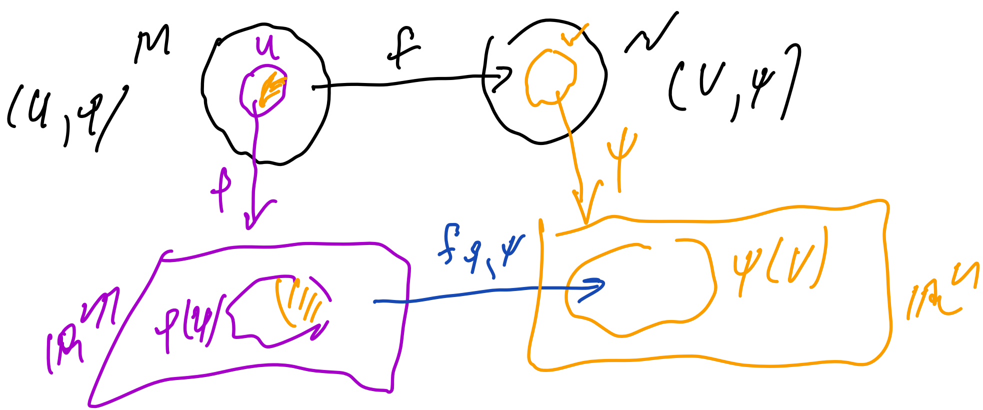
Пусть $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ — карты в M и N.

Координатное представление f в картах φ и ψ — это отображение

$$f_{\varphi,\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

Определение

Отображение f гладкое, если все его координатные представления гладкие (в том смысле, который определён для $\mathbb{R}^n$).



Гладкость в точке

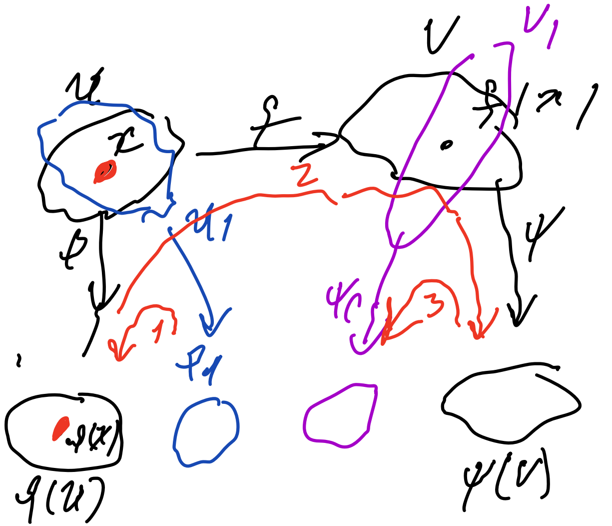
Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f\colon M \to N$ — непрерывное отображение.



Определение

$f\colon M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*

$$f_{\varphi_1,\psi_1} = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \underbrace{\psi_1 \circ \psi^{-1}}_{\text{ф. пер.}} \circ f_{\varphi,\psi} \circ \underline{\varphi \circ \varphi_1^{-1}}$$

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

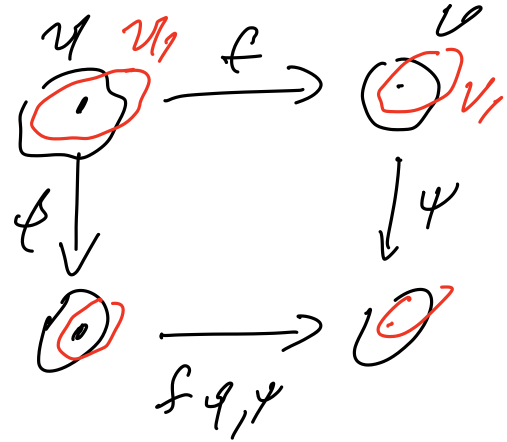
Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*

$\Rightarrow$ очевидно

$\forall (U, \varphi), (V, \psi)$

д-ть $f_{\varphi,\psi}$ гл. в $\forall\, \varphi(x)$



$x \in U$

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*

Упр*: следует из 1 и 2

Гладкость в точке

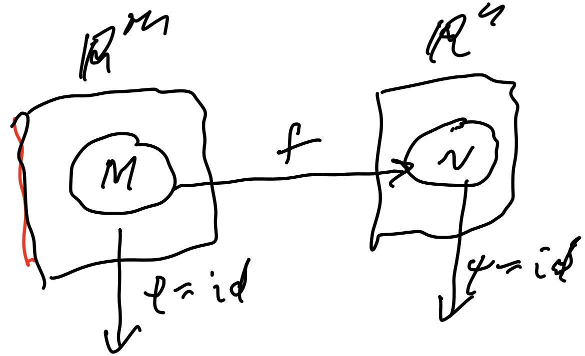
Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f : M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f : M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*



$$f_{\varphi,\psi} = f$$

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*
5. *Тождественное отображение — гладкое.*

Гладкость в точке

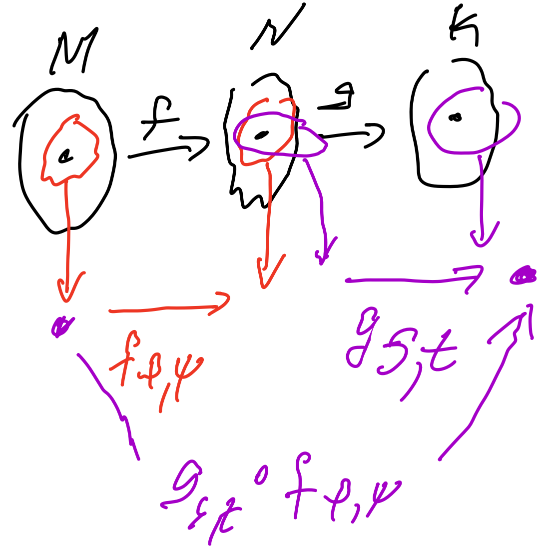
Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*
5. *Тождественное отображение — гладкое.*
6. *Композиция гладких отображений — гладкое.*



Диффеоморфизм и его свойства

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.
Два многообразия диффеоморфны, если существует диффеоморфизм между ними.

Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.

Диффеоморфизм и его свойства

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.
Два многообразия **диффеоморфны**, если существует диффеоморфизм между ними.

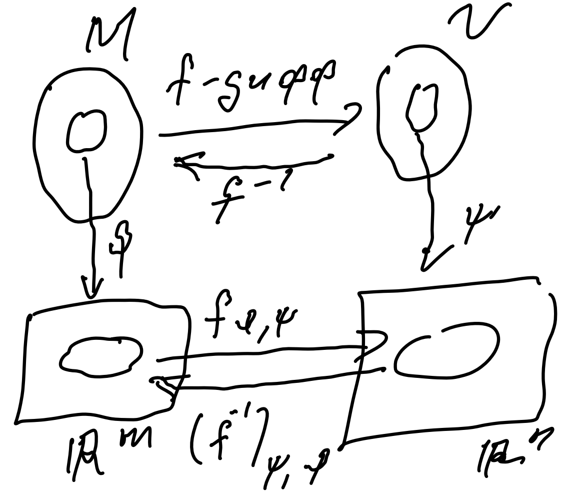
Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.

Лемма

У диффеоморфных многообразий размерности равны.

Доказательство.

Координатное представление диффеоморфизма $f: M^m \to N^n$ — диффеоморфизм между областями в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.
Дифференцируя и применяя производную композиции, получаем изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.
Значит, $m = n$. □



$$(f^{-1})_{\psi,\varphi} \circ f_{\varphi\psi} = id_{\varphi(U)}$$

$$f_{\varphi,\psi} \circ (f^{-1})_{\psi,\varphi} = id_{\psi(V)}$$

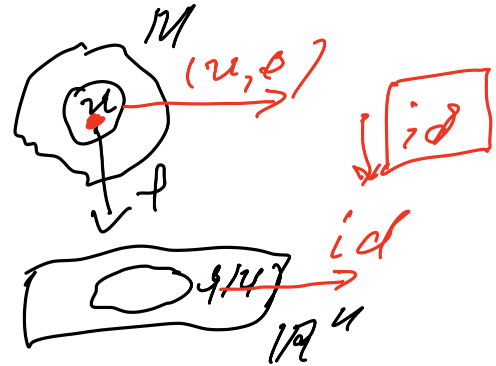
$\Swarrow$ диффер.

$$d(f^{-1})_{\psi,\varphi} \circ d f_{\varphi,\psi} = id_{\mathbb{R}^m}$$

$$d \qquad d \qquad = id_{\mathbb{R}^n}$$

Лемма (важная характеризация карт)

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.



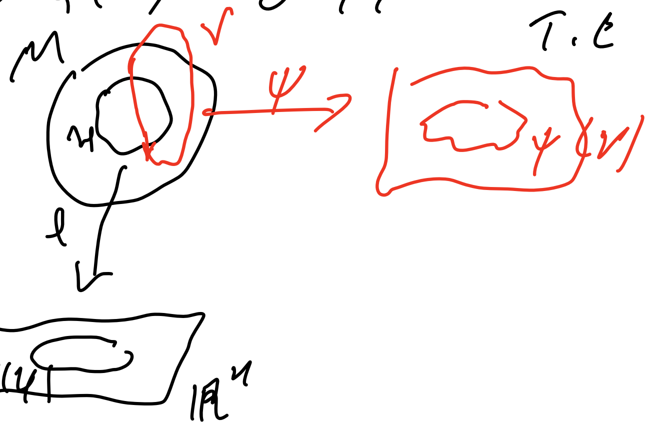
Д-во: 1. $\exists\ (U, \varphi)$ - карта

Д-ть: φ - дифф.

Дост. гладк φ в $\forall$ точке

2. $\varphi: U \to \varphi(U)$ - дифф. $\Rightarrow (U, \varphi)$ - карта

т.е. согл с $\forall$ карт атласа



Диффеоморфизм и его свойства

Лемма (важная характеризация карт)

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.

Следствие

Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ индуцирует биекцию между картами M и N таким образом:
карте $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ многообразия N соответствует карта $\psi \circ f\colon f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ многообразия M.

Таким образом, диффеоморфизм — изоморфизм дифференциальных структур.

Количество гладких структур

Пусть M^n – гладкое многообразие.

- Если $n < 4$, то $\exists$ единственная (с точностью до диффеоморфизма) гладкая структура на M.
- Если $n > 4$, то число гладких структур на M конечно.
- Если $n = 4$, то число гладких структур на M может быть бесконечно.
- Ни об одном гладком 4-многообразии мы не знаем, конечно ли число гладких структур на нем.
- На $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$, $\exists$ единственная гладкая структура.
- На $\mathbb{R}^4$ число гладких структур несчетно.

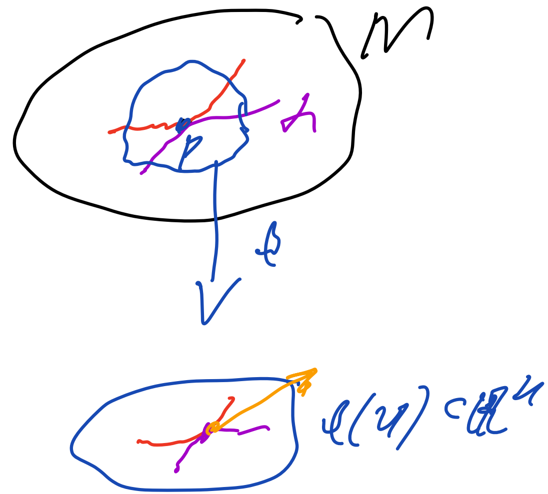
Эквивалентность (соприкосновение) кривых

Пусть M^n – гладкое многообразие и $p \in M$.
Рассм. всевозможные гладкие кривые $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ т.ч. $\alpha(0) = p$.

Определение

Назовем две такие кривые α и β эквивалентными, если существует карта (U, φ) на M такая, что $p \in U$ и

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$



Эквивалентность (соприкосновение) кривых

Пусть M^n – гладкое многообразие и $p \in M$.
Рассм. всевозможные гладкие кривые $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ т.ч. $\alpha(0) = p$.

Определение

Назовем две такие кривые α и β эквивалентными, если существует карта (U, φ) на M такая, что $p \in U$ и

$$\boxed{(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)}$$

Лемма

Свойство эквивалентности кривых не зависит от карты: если оно верно для одной карты φ, содержащей p, то оно верно для любой карты ψ, содержащей p.

Док-во: Пусть $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ – гладкая кривая, $\gamma(0) = p$, (U, φ) и (V, ψ) – две карты, содержащие точку p. Тогда

$$\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma). \tag{1}$$

$$\underbrace{(\psi \circ \gamma)'(0)}_{v_\psi} = d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot \underbrace{(\varphi \circ \gamma)'(0)}_{v_\varphi}. \tag{2}$$

$-\alpha$

$-\beta$ //

Определение

Касательный вектор многообразия M в точке p – класс эквивалентности кривых по вышеуказанному отношению эквивалентности.

Касательное пространство M в точке p — множество всех касательных векторов в точке p.

Обозначение касательного пространства: T_pM.

Структуру векторного пространства на T_pM определим позже.

Определение

Пусть $v \in T_pM$, (U, φ) – карта, $p \in U$.
Рассмотрим вектор

$$v_\varphi := (\varphi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n,$$

где α – любая кривая, представляющая v.

Вектор v_φ – координатное представление касательного вектора v в карте φ.

~~Его координаты – координаты v в карте φ.~~

По определению v_φ не зависит от выбора кривой α, представляющей вектор v.

Координаты вектора в карте, замена координат

Определение

Пусть $v \in T_pM$, (U, φ) – карта, $p \in U$.
Координаты v в карте (U, φ) – координаты вектора φ в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$.

Лемма

Пусть (U, φ) и (V, ψ) – две карты, содержащие точку $p \in M$, $v \in T_pM$. Пусть $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ – отображение перехода.
Тогда координатные представления v в картах φ и ψ связаны соотношением:

$$v_\psi = d_{\varphi(p)} f(v_\phi).$$

Док-во: См. пункт (2) доказательства леммы о независимости понятия эквивалентности кривых от выбора карты.

Из леммы следует второе определение касательного вектора.

Определение

Касательный вектор в точке p — отображение v из множества всех карт, содержащих p, в $\mathbb{R}^n$ $(\varphi \mapsto v_\varphi)$ такое, что для любых двух карт φ и ψ верно равенство из предыдущего свойства:

$$v_\psi = d_{\varphi(p)} f(v_\varphi).$$

Вектор задается своими координатами

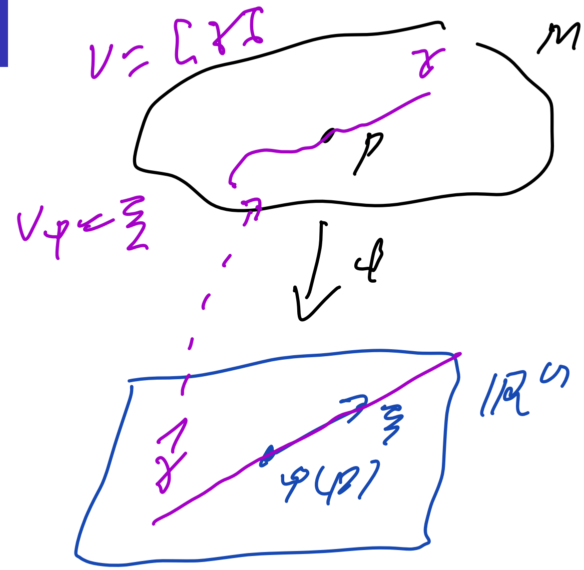
Лемма

Для любой карты (U, φ), содержащей p, соответствие $\boxed{v \mapsto v_\varphi}$ – биекция между T_pM и $\mathbb{R}^n$.

Инъективность следует из определения эквивалентности кривых.
Сюръективность: Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим кривую

$$\widehat{\gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{\gamma}(t) = \varphi(p) + \xi t.$$

Тогда для вектора $v = [\gamma]$, где $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \widehat{\gamma}(t)$, имеем $v_\varphi = \xi$.



Структура векторного пространства на T_pM

Определение

Пусть $v, w \in T_pM$, φ – карта в окрестности p.
Определим сумму $v + w \in T_pM$ как такой вектор из T_pM, что

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi$$

(складываем координаты и в карте и берём вектор с полученными координатами).
Аналогично определяется умножение касательного вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda v)_\varphi = \lambda(v_\varphi)$.

- Определение корректно (вектор с такими свойствами существует и единственен).
- Определение не зависит от выбора карты φ.
  Это следует из линейности правила пересчёта координат касательного вектора при замене карты.
- Координатное представление $v \mapsto v_\varphi$ — изоморфизм векторных пространств T_pM и $\mathbb{R}^n$.