I. Нормированные пространства Банаховы пространства.

Опр. L - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), если на L определены:

- $(x, y) \longrightarrow x+y$
- x, λ, $x \in L$, $\lambda \in {}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}}$ $\longmapsto \lambda \cdot x$,

пара операций удовлетворяет следующим свойствам

- $x+y = y+x$
- $x+(y+z) = (x+y)+z$
- $\exists\, 0 \in L: \quad x+0 = x, \quad \forall x \in L$
- $\forall x \in L \quad \exists\, y \in L: \quad x+y = 0.$
- $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in L$
- $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1\lambda_2)x$
- $(\lambda_1+\lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$
- $\lambda(x_1+x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2.$

$E \leq L$ - линейное подпространство L, если $E \subset L$, и E замкнуто относительно линейных операций.

Опр. Линейная комбинация $x_1, \dots, x_n \in L$ - $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, $\lambda_k \in {}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}}$.

Линейная оболочка: $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} :=$

$$:= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k, \ \lambda_k \in {}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Опр. L (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется нормированным если существует $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, такая что

- $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in L;$
- $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \lambda \in {}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}, \ x \in L$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in L.$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

Опр. Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется Банаховым, если оно полное относительно $\|\cdot\|$.

$\rho(x,y) := \|x-y\| \Rightarrow \rho$ – метрика.

Примеры

- $\mathbb{R}^n$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, $\quad \|x\|_\infty = \max\{|x_j|,\ j=1..n\}$.

  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$.

- $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$

  $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$

- $C([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$

  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

- Здесь же $\quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$

  Однако в $\{f : \|f\|_1 < +\infty\}$

- $\mathcal{D}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \sqrt{\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda_2(z)} < +\infty\}$.

  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ $\quad f \in Hol(\mathbb{D})$.

- $C^1([a,b])$ $\quad p(f) := \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

- $\mathcal{P}[x] = \{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in [0,1]\}$.

  $\|f\| := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

- $L^p(\Omega, d\mu)$ – Банаховы пространства, $\quad \|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

  $p \geq 1$

- $H^2(\mathbb{D}) = \{ f: \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f \in Hol(\mathbb{D}),$
$\sqrt{\sup\limits_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta} < +\infty \}$

Опр. Пусть в линейном пространстве X заданы нормы $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$, они называются эквивалентными, если существуют C_1, C_2, т.ч.

$$C_1 \|x\| \le \|x\|_* \le C_2 \|x\|, \quad x \in X.$$

Пример: в $\mathbb{R}^n$ $\quad \max\limits_{k=1..n} |x_k| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2} \le \sqrt{n} \cdot \sup\limits_{k=1..n} |x_k|.$

Ут. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Замечание. Очевидно не обязательно так в бесконечномерных пространствах.

$C([a,b]) \qquad \|\cdot\|_\infty \not\sim \|\cdot\|_1.$

Доказательство. Пусть X – n-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$, пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы. Покажем, что $\|\cdot\| \simeq \|\cdot\|_2$,
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}$, где $\quad x = \sum\limits_{k=1}^n x_k \cdot e_k$, а $\{e_k\}_{k=1}^n$ – какой-то базис в X.

- $\|x\| = \|\sum\limits_{k=1}^n x_k \cdot e_k\| \le \sum\limits_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e_k\| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2} \sum\limits_{k=1}^n \|e_k\|$
- Положим $f(x) := \|x\|$, f можно рассматривать как $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

f непрерывна: $\quad |f(x) - f(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x-y\| \lesssim$
$\lesssim \|x-y\|_2$, причем, если $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow f(x) > 0$. Стало быть на $S = \{\|x\|_2 = 1\}$ есть непрерывная положительная

функция, стало быть достигается минимум > 0, в $x_0 \in S$.

Стало быть $\forall x \in S \quad \|x\| \geqslant \|x_0\| =: C_1.$

$$\forall x \neq 0 \qquad \|x\| = \|x\|_2 \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geqslant \|x\|_2 \cdot C_1.$$

S

Опр. Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ – система элементов ЛНП X.
Она называется полной, если $\overline{\operatorname{span}\{x_i\}} = X$, т.е. $\forall x$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, такие что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \right\| < \varepsilon.$$

Опр. ЛНП X сепарабельно, если в нём существует счётная система $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, т.ч. $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}} = X$.

Пример: $C([a,b]) = \overline{\operatorname{span}\{1, x, \dots, x^k, \dots\}}$.

ℓ^∞ – несепарабельно $\boxed{\text{Упр.}}$

$\ell^\infty = \{(z_1, \dots, z_k, \dots);\ z_k \in \mathbb{C},\ \sup\limits_k |z_k| < +\infty\}$.

$$\|(z_1, \dots, z_n, \dots)\|_{\ell^\infty} := \sup_k |z_k|$$

Опр. Пусть X – ЛНП, X_* – ЛНП, тогда X_* называется пополнением X, если в X_* существует подпространство X', которое изоморфно X, и т.ч. X' плотно в X_*.

Теорема Любое ЛНП X имеет пополнение.

$\rho(x,y) = \|x-y\|$,

можно построить метрическое пополнение X_*.

Надо в X_* ввести линейные операции и норму.

X - среди прочего есть метрическое пространство. По теореме из геометрии существует полное метрическое пространство X_*, $X_* \ni x_* = \{$ класс эквивалентности фундаментальных последовательностей $\{x_k\}, x_k \in X\}$.

X' — классы, содержащие стационарную последовательность $(x, x, x, \ldots)$

Пусть $x_*, y_* \in X_*$. Если $\{x_n\} \in x_*$, $\{y_n\} \in y_*$, то определим $x_* + y_* =$ класс эквивалентности, содержащий $\{x_n + y_n\}$.

Определим $\lambda \cdot x_*$ как класс, содержащий $\{\lambda \cdot x_n\}$.

Проверить: X_* - линейное, $X' \leq X_*$.

Введём норму $\|\cdot\|_*$ в X_*. Именно, если $\{x_n\}$ - фундаментальная, то $\{\|x_n\|\}$ - тоже фундаментальная, т.к.

$$\big|\, \|x_n\| - \|x_m\| \,\big| \leq \|x_n - x_m\|, \quad \forall n, m.$$

Тогда положим:

$$\|x_*\|_* := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Проверить: не зависит от выбора $\{x_n\}$.

Если $x_* \in X'$, то $\|x_*\|_* := \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$.

Проверить: что $\|\cdot\|_*$ - норма.

- $\|x_*\|_* \geq 0$
- $\|\lambda \cdot x_*\|_* = \lim_{n\to\infty} \|\lambda \cdot x_n\| = \lambda \cdot \|x_*\|_*$
- $\|x_* + y_*\|_* \leq \|x_*\| + \|y\|_*$
- $\|x_*\|_* = 0 \Rightarrow x_* = 0$

$\in$

$(0, 0, 0, \dots)$

$\blacksquare$