Теорема (Банах, обратный оператор) Пусть $A: X \to Y$, линейный, огранич. биекция между X и Y ($\mathrm{Dom}\, A = X$, $\mathrm{Range}\, A = Y$, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$), X, Y – банаховы. Тогда существует ограниченный линейный A^{-1}.

Доказательство.

Утв. Полное метрическое пространство X есть множество второй категории в себе, т.е. X не представимо в виде $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где X_n нигде не плотно.

Доказательство утверждения

Допустим противное, т.е. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, X_n нигде не плотно. Зафиксируем произвольный элемент $x_0 \in X$, рассмотрим шар $F(x_0, 1) = \{x : \mathrm{dist}(x, x_0) \le 1\}$. Множество X_1 нигде не плотно, стало быть найдётся шар $F_1 = F(x_1, r_1) \subset F(x_0, 1)$, такой что $F_1 \cap X_1 = \emptyset$, причём можно считать, что $r_1 \le \frac{1}{2}$. В F_1 находим $F_2 = F(x_2, r_2) \subset F_2$, такой что $F_2 \cap X_2 = \emptyset$, $r_2 \le \frac{1}{4}$, итерируем. Итак, получаем вложенная последовательность $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ замкнутых шаров, причём $r_i \to 0$, и $F_k \cap X_j = \emptyset$, $j = 1..k$. Но найдётся точка $\tilde{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, и при этом $\tilde{x} \notin X_j$ $\forall j$. Противоречие. ☒

Доказательство теоремы. Для ограниченности A^{-1} хотется: $\forall y \in Y$

$\|A^{-1}(y)\| \le N \cdot \|y\|$ для какой-то абсолютной константы N.

Рассмотрим $Y_n = \{y \in Y : \|A^{-1}(y)\| \le n \cdot \|y\|\}$, $n \in \mathbb{N}$. Соображение: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Действительно: $0 \in Y_n$ $\forall n$; а если $y \ne 0$, то $y \in Y_{n(y)}$, где $n(y) = \left[\frac{\|A^{-1}(y)\|}{\|y\|}\right] + 1$, т.е.

$\|A^{-1}(y)\| \le n(y) \cdot \|y\|$.

По предыдущему утверждению должен найтись какой-то шар
$F(y_0, r_0)$ и номер n_0, такие что $cl\, Y_{n_0} \supset F(y_0, r_0)$

$\parallel$

$\{y : \|y - y_0\| \le r_0\}$. Локальная задача: найти Y_N, такой что $cl\, Y_N = Y$.

$\hookrightarrow \|A^{-1}y\| \le N \cdot \|y\|$, $y \in Y_N$

$\Downarrow$ отдельный переход

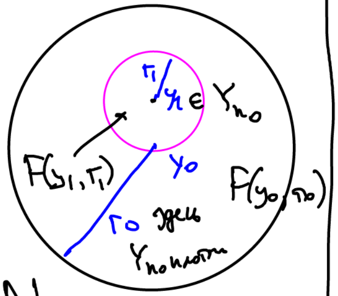
это верно (возможно с константой) для $y \in Y$, т.е. $\|A^{-1}(y)\| \le C \cdot N \|y\|$.

Рассмотрим шар $F(y_1, r_1) \subset F(y_0, r_0)$, т.ч. $y_1 \in Y_{n_0}$.

S_{r_1}

$\parallel$

Рассмотрим $\{y : \|y\| = r_1\}$, покажем, что на этом множестве найдётся плотное Y_N для некоторого N.



Рассмотрим произвольный элемент $y \in S_{r_1}$,
тогда $\|(y + y_1) - y_1\| = r_1 \Rightarrow y + y_1 \in F(y_1, r_1)$, в котором Y_{n_0} тоже плотно. Стало быть найдется последовательность векторов $\{\xi_k\} \subset$ $\subset F(y_1, r_1) \cap Y_{n_0}$, такая что $\xi_k \longrightarrow y + y_1$, считаем, не умаляя общности, что $y_k := \xi_k - y_1$ отделено от сферы S_{r_1}, т.е. $\frac{r_1}{2} \le \|y_k\| \le 2 r_1$. Далее, $y_k \longrightarrow y$, и, кроме того, $y_1, \xi_k \in Y_{n_0}$,

Так что:

$$\|A^{-1}(y_k)\| = \|A^{-1}(\xi_k - y_1)\| \le \|A^{-1}(\xi_k)\| + \|A^{-1}(y_1)\| \le$$

$$\le n_0 \cdot \|\underset{y_k + y_1}{\underset{\parallel}{\xi_k}}\| + n_0 \cdot \|y_1\| = n_0 \cdot \|y_k + y_1\| + n_0 \cdot \|y_1\| \le$$

$$\le n_0 \cdot \|y_k\| + 2 n_0 \cdot \|y_1\| \overset{\text{т.к. } \|y_k\| \le 2 r_1}{\le} n_0 \cdot (2 r_1 + 2 \cdot \|y_1\|) =$$

$$= \frac{n_0 \cdot (2 r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1} \cdot r_1 \overset{\text{т.к. } \|y_k\| \ge \frac{r_1}{2}}{\le} \underbrace{2 \frac{n_0 \cdot (2 r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1}}_{\text{не зависит от } y} \cdot \|y_k\|$$

Положим теперь $N :=$

$$= \left[\frac{4 n_0 (r_1 + \|y_1\|)}{r_1} \right] + 1.$$ Тогда $y_k \in Y_N$, и мы

видим, что $\forall y: \|y\| = r_1$ можно приблизить элементами из Y_N.

Покажем теперь, что Y_N плотно в Y. Зафиксируем произвольный $y \in Y$, $y \neq 0$. Тогда положим $y' := \frac{y}{\|y\|} \cdot r_1 \in S_{r_1}$.
Стало быть найдётся последовательность $\{y_k'\}: y_k' \in Y_N$, $y_k' \to y'$.
Положим $y_k := \frac{\|y\|}{r_1} \cdot y_k'$, тогда $\|y_k\| = \frac{\|y\|}{r_1} \cdot \|y_k'\|$, тогда $y_k \to y$. Далее:

$$\|A^{-1}(y_k)\| = \left\|A^{-1}\left(\frac{\|y\|}{r_1} y_k'\right)\right\| = \frac{\|y\|}{r_1} \cdot \|A^{-1}(\underset{\substack{\cup\\ Y_N}}{y_k'})\| \leq$$

$$\leq \frac{\|y\|}{r_1} \cdot N \cdot \|y_k'\| \longrightarrow N \cdot \|y\|, \text{ т.к. } \|y_k'\|/r_1 \to 1.$$

Начиная с какого-то номера k_j имеем: $\|y - y_k\| \leq \frac{\|y_k\|}{2^j}$, а стало быть при $k \geq k_j$ верно: $N \cdot \|y\| \leq N \cdot (1 + 2^{-j}) \cdot \|y_k\|$, т.е. $y_k \in Y_{[N(1+2^{-j})]+1}$ $\forall j$, стало быть $y_k \in Y_N$.

Итак, получили плотность Y_N в Y. Что дальше? Будем оценивать сверху $\|A^{-1}(y)\|$ теперь уже для произвольного $y \in Y$, $y \neq 0$.
Зафиксируем такой y, положим $\|y\| = r > 0$. Так как Y_N плотно в Y, то найдётся $y_1 \in Y_N$, такой что $\|y_1\| \leq r$, $\|y - y_1\| \leq r/2$. Далее, найдётся $y_2 \in Y_N$, такой что $\|y_2\| \leq \frac{r}{2}$,

$\|y - (y_1 + y_2)\| \leq \frac{r}{2 \cdot 2}$, и так далее. В итоге получаем последовательность $\{y_k\}$ элементов Y_N, такую что

$$\|y - (y_1 + y_2 + \dots + y_k)\| \leq \frac{r}{2^k}, \quad \|y_k\| \leq \frac{r}{2^{k-1}}.$$

Стало быть $y = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{k} y_j = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j$.

Положим $x_k := A^{-1}(y_k)$, т.е. $y_k = A(x_k)$,

$$\|x_k\| = \|A^{-1}(y_k)\| \overset{y_k \in Y_N}{=\!=} N \cdot \|y_k\| \le \frac{N \cdot r}{2^{k-1}}.$$

Убедимся теперь, что $A^{-1}(y) = x$, где $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_k$.

Для этого проверим фундаментальность $\{S_k\}$, где $S_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$.

Действительно,

$$\|S_{n+m} - S_n\| = \Big\|\sum_{j=n+1}^{n+m} x_j\Big\| \le N \cdot r \cdot \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{1}{2^{j-1}} \le \frac{Nr}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Проверили, следовательно (по банаховости X) найдётся

$$X \ni x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j.$$

$$\underline{A(x)} = A\Big(\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} x_j\Big) \xlongequal{A\text{ - ограничен, непрерывен, линеен}} \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} A(x_j) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} y_j = \underline{y}.$$ Отсюда сразу $A^{-1}(y) = x$.

$$\|A^{-1}(y)\| = \|x\| = \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Nr}{2^{j-1}} =$$

$= 2Nr = 2N\|y\|$, причем N не зависит от y. ∎

Теорема (об открытом отображении) Пусть $A: X \to Y$, Range $A = Y$, A – линейный ограниченный оператор. Тогда A открыт.

Замечание. Отображение $A: X \to Y$, где X, Y – топологические пространства, называется открытым, если $\forall E \subset X$ – открыто, образ $A(E)$ открыт в Y (сильно открытое. Если просто открытость в $A(X)$ с инд. топологией, то слабо открытое).

Доказательство.

Лемма Пусть X — банахово, $X_0 \subseteq X$ — замкнутое подпространство. Рассмотрим отображение $T: \underset{X}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto \underset{X/X_0}{\underset{\cap}{\{x\}}}$. Тогда T — открытое отображение.

Доказательство. Пусть $G \subset X$ — открытое множество, рассмотрим $T(G)$, зафиксируем $\xi_0 \in T(G)$, т.е. $T^{-1}(\xi_0) \ni x_0 \in G$, то существует ε-окрестность x_0, целиком лежащая в G. Пусть ξ лежит в произвольной ε-окрестности точки (класса) $\xi_0 \in T(G)$, т.е.

$$\|\xi - \xi_0\|_{X/X_0} < \varepsilon$$

, это значит, что найдётся элемент $x \in T^{-1}(\xi)$, т.что $\|x - x_0\|_X < \varepsilon$, стало быть $x \in G$, стало быть $T(x) \in T(G)$, $T(x) = \xi$. Поскольку ξ — произвольное, то $T(G)$ открыто. ■

Доказательство теоремы об откр. отобр.

откр., т.к. обр. отобр. непрерывно.

$$A: X \to Y$$

$$A: X \underset{\text{лемма выше.}}{\xrightarrow{\text{откр.}}} X/\operatorname{Ker} A \underset{\text{теор. об обр. операторе}}{\xrightarrow{\text{биекция}}} Y$$

■