Оглавление

Последнее обновление 3 апреля 2022 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2022/topology4.pdf

Топология и геометрия, практика, МКН СПбГУ весна 2022

Задача 1. Найдите первую форму для $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с полярными координатами (ρ, ϕ), и запишите длину кривой $(\rho(t), \phi(t))$.

Задача 2. Рассмотрим единичную сферу без полюсов, параметризованную широтой и долготой, то есть как (θ, ϕ) где $\theta \in (0, \pi), \phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

а) Найдите первую форму в этих координатах.

б) Используя её, покажите, что площадь круга радиуса r на сфере равна $2\pi(1 - \cos r)$.

в) (теорема Архимеда) Нашу сферу пересекают две плоскости на расстоянии h. Докажите, что площадь участка сферы между плоскостями равна $2\pi h$.

Задача 3. В плоскости xOz задана регулярная кривая $x = f(u), z = g(u)$, не пересекающая ось Oz. Найдите параметризацию поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси Oz и её первую форму.

Задача 4. Найдите параметризацию и площадь тора, как поверхности вращения окружности радиуса r в $\mathbb{R}^3$ (пусть окружность находится в одной плоскости с осью, вокруг которой мы её вращаем, и расстояние от центра окружности до оси равно R).

Задача 5. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми, посчитав первую квадратичную форму (До вычислений ответьте на вопрос: как, посчитав первую форму и образа и прообраза понять, что отображение сохраняет углы?).

Задача 6. Найдите длину регулярной кривой на единичной сфере, которая идет от полюса до полюса и образует постоянный угол $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ с меридианами.

Задача 7. *** (можно сдавать до 25 февраля) Доказать, что криволинейные четырехугольники, образованные координатными линиями $u = a_1$, $u = a_2$, $v = b_1$, $v = b_2$, являются “параллелограммами” (в смысле равенства соответствующих сторон), равносильно тому, что $E_v = G_u = 0$. Показать, что в этом случае локально существует такая параметризация поверхности, в которой ее первая квадратичная форма имеет вид

$$I(X) = X_1^2 + 2\cos\phi X_1 X_2 + X_2^2.$$

Второе занятие

Задача 8. Найдите натуральную параметризацию кривой из задачи 6.

Задача 9. Покажите, что для любой точки поверхности вращения существует параметризация некоторой её окрестности, сохраняющая углы.

Задача 10. Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho \cos v, y = \rho \sin v, z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперболоид вращения

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = \sqrt{r^2 - 1}$$

если соответствие устанавливается уравнениями

$$\phi = v + arctg\ \rho, r^2 = \rho^2 + 1.$$

Задача 11. Поверхность допускает параметризацию, в которой коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы постоянны. Докажите, что эта поверхность локально изометрична плоскости.

Задача 12. Напишите параметризацию цилиндрической поверхности, для которой кривая $\gamma(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору e. Покажите, что она локально изометрична плоскости.

Задача 13. Напишите параметризацию конуса с вершиной в точке $M(a, b, c)$ и с направляющей кривой $\gamma(u) = (f(u), g(u), h(u))$. Покажите, что такой конус локально изометричен плоскости (везде, кроме своей вершины).

Задача 14. *** (можно сдавать до 4 марта) Пусть $\gamma(t)$ – натурально параметризованная кривая с ненулевой кривизной в каждой точке. Поверхностью касательных называется поверхность с параметризацией

$$(t, s) \to \gamma(t) + s\gamma'(t).$$

Покажите, что поверхность касательных локально изометрична плоскости.

Третье занятие.

Задача 15. Рассмотрим гиперболический параболоид $xy = az$. Найдите кривые на этом параболоиде, ортогональные образующимпараболоида.

Задача 16. Рассмотрим геликоид $(u\cos v, u\sin v, v)$. Вычислите первую и вторую формы, а также главные кривизны. Проверьте, что $H = 0$ (средняя кривизна).

Задача 17. Линия кривизны на поверхности – это кривая, вектор скорости которой в каждой точке принадлежит главному направлению в этой точке. Докажите

а) (Теорема Родрига) Кривая γ на поверхности – линия кривизны тогда и только тогда, когда $\gamma'(t)||n'(t)$, где $n(t)$ – нормаль к поверхности в точке $\gamma(t)$.

б) "Меридианы"и "параллели"поверхности вращения – линии кривизны.

Задача 18. Пусть γ – кривая в $\mathbb{R}^3$, содержащаяся в поверхности $z = ax^2 + by^2, a, b > 0$ и такая, что $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Докажите, что кривизна γ (как пространственной кривой) в каждой точке не меньше $\min(a, b)$.

Задача 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ простая поверхность и γ – натурально параметризованная кривая в M. Пусть $v(t) = \gamma'(t)$, $n(t)$ – нормаль к M в $\gamma(t)$ и $w(t) = n(t) \times v(t)$. Докажите, что

$$v' = \kappa_g \cdot w + \kappa_n \cdot n$$
$$w' = -\kappa_g \cdot v + \tau_g \cdot n$$
$$n' = -\kappa_n \cdot v - \tau_g \cdot w$$

где $\kappa_g = \widehat{II}(v, v)$, $\tau_g = \widehat{II}(v, w)$, κ_g некоторая функция, а $\widehat{II}$ — вторая форма (на касательной плоскости) поверхности M в точке $\gamma(t)$.

Задача 20. Поверхность такова, что для любой ее точки прямая, проведенная через эту точку в направлении нормали, пересекает координатную ось OZ. Докажите, что в достаточно малой окрестности каждой точки данная поверхность совпадает с подмножеством некоторой поверхности вращения.

Задача 21. *** Диффеоморфизм между двумя поверхностями сохраняет углы и площадь. Докажите, что это изометрия.

Задача 22. *** Рассмотрим единичную сферу и точку p на экваторе. Докажите, что маленькая окрестность U точки p допускает “искривление”, то есть существуют такие поверхности изометричные U, что каждая поверхность в семействе – часть какой-то поверхности вращения (вокруг оси z). Причем экваториальные точки U соответствуют экваториальны точкам поверхностей (экваториальная значит, что касательная плоскость в точке параллельна оси вращения) и расстояние от экваториальных точек до оси вращения разное для разных поверхностей из семейства

Четвертое занятие (на самом деле пятое)

Задача 23. Пусть M является прообразом регулярного значения функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Тогда в точке $p \in M$

$$\widehat{II}(u, v) = d_p^2 f(u, v)/|\nabla_p f|.$$

Задача 24. Предположим, что поверхности Φ_1 и Φ_2 пересекаются под постоянным углом, а $\ell = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Доказать, что если ℓ — это линия кривизны на поверхности Φ_1, то она является линией кривизны и на второй поверхности. Докажите также обратное утверждение: если линия пересечения двух поверхностей является на обеих этих поверхностях линией кривизны, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

Задача 25. Доказать, что параллель поверхности вращения является геодезической, экви касательная к меридиану в точках этой параллели параллельна оси вращения.

Задача 26. Пусть поверхности Φ_1 и Φ_2 пересекаются под постоянным углом v и $l = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Тогда $k^2 \sin^2 v = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos v$, где k - кривизна кривой ℓ, а k_i – нормальная кривизна поверхности Φ_i в направлении этой кривой.

Задача 27. Показать, что касательная к сферическому образу кривой ℓ на поверхности: *а*) параллельна касательной к ℓ, экви ℓ есть линия кривизны; *б*) перпендикулярна касательной к ℓ, экви ℓ — асиптотическая.

Задача 28. Доказать, что если кривая ℓ на поверхности является одновремено *а*) геодезической и асимптотической, то ℓ — прямая линия; *б*) линией кривизны и асимптотической, то кривая ℓ — плоская.

Задача 29. Доказать, что на любой замкнутой поверхности существует точка с положительной гауссовой кривизной.

Задача 30. *** Найти не коническую и не цилиндрическую поверхность, сферическим образом которой является кривая.

Пятое занятие (на самом деле шестое)

Задача 31. Поверхность $\varPhi_\varepsilon$ называется поверхностью, параллельной $\varPhi$, если она получается из $\varPhi$ отступление по нормали на ε. Докажите, что при малых по модулю ε это будет регуляная поверхность (если $\varPhi$ — гладкая регулярная).

Задача 32. Докажите, что у параллельных поверхностей в соответствующих точках касательные плоскости параллельны.

Задача 33. Докажите, что $(\varPhi_\varepsilon)_\delta = \varPhi_{\varepsilon+\delta}$ при малых по модулю ε.

Задача 34. Докажите, что расстояние от точки на $\varPhi_\varepsilon$ до малой окрестности $\varPhi$ соответствующей точки равно $|\varepsilon|$ при малых по модулю ε.

Задача 35. Докажите, что для компактной (несамопересекающейся) поверхности расстояние от точки на $\varPhi_\varepsilon$ до $\varPhi$ равно $|\varepsilon|$ при малых по модулю ε.

Задача 36. Докажите, что для линии кривизны на поверхности $\varPhi$ линия, полученная из соответствующих точек на $\varPhi_\varepsilon$ тоже является линией кривизны, а главные направления в соответствующих точках параллельны.

Задача 37. Выразите в терминах главных кривизн и ε условие, когда параллельная поверхность нерегулярна (в некоторой точке).

Задача 38. Найдите главные кривизны $\varPhi_\varepsilon$ через ε и главные кривизны исходной поверхности.

Задача 39. Доказать, что если поверхности $\varPhi$ и $\varPhi_*$ “параллельны”, то

$$K_*^2(H^2 - 4K) = K^2(H_*^2 - 4K_*).$$

Шестое занятие (на самом деле седьмое)

Задача 40. Докажите, что геодезическая кривизна кривой на поверхности сохраняется при изометрии. В частности геодезические при изометрии переходят в геодезические.

Задача 41. На прямом геликоиде $(u\cos v, u\sin v, v)$ найти геодезическую кривизну винтовых линий — координатных линий $u = \mathrm{const}$.

Задача 42. Линейчатой поверхностью назовем регулярную поверхность, образованную гладким однопараметрическим семейством прямолинейных интервалов, называемых прямолинейными образующими. Линейчатая поверхность называется развертывающейся, если касательная плоскость не меняется вдоль прямолинейных образующих.

а) Пусть направляющий вектор прямолинейных образующих будет $a(t)$, а точки, через которую проходят эти прямолинейные образующие двигается по регулярной кривой $\gamma(t)$. Напишите в этих терминах условие регулярности этой линейчатой поверхности и того, что регулярная поверхность является развертывающейся.

б) Докажите, что коническая поверхность, цилиндрическая и поверхность касательных являются развертывающимися.

в) Докажите, что линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда она локально изометрична плоскости.

г*) Докажите, что в любой открытой области на произвольной линейчатой развертывающейся поверхности найдется подокрестность, являющаяся частью цилиндрической поверхности, конической поверхности или поверхности касательных.