Оглавление

Последнее обновление 28 мая 2022 г.
актуальная версия этого файла лежит по адресу
http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2022/topology4.pdf

Топология и геометрия, практика, МКН СПбГУ весна 2022

Задача 1. Найдите первую форму для $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с полярными координатами (ρ, ϕ), и запишите длину кривой $(\rho(t), \phi(t))$.

Задача 2. Рассмотрим единичную сферу без полюсов, параметризованную широтой и долготой, то есть как (θ, ϕ) где $\theta \in (0, \pi), \phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

а) Найдите первую форму в этих координатах.

б) Используя её, покажите, что площадь круга радиуса r на сфере равна $2\pi(1 - \cos r)$.

в) (теорема Архимеда) Нашу сферу пересекают две плоскости на расстоянии h. Докажите, что площадь участка сферы между плоскостями равна $2\pi h$.

Задача 3. В плоскости xOz задана регулярная кривая $x = f(u), z = g(u)$, не пересекающая ось Oz. Найдите параметризацию поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси Oz и её первую форму.

Задача 4. Найдите параметризацию и площадь тора, как поверхности вращения окружности радиуса r в $\mathbb{R}^3$ (пусть окружность находится в одной плоскости с осью, вокруг которой мы её вращаем, и расстояние от центра окружности до оси равно R).

Задача 5. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми, посчитав первую квадратичную форму (До вычислений ответьте на вопрос: как, посчитав первую форму и образа и прообраза понять, что отображение сохраняет углы?).

Задача 6. Найдите длину регулярной кривой на единичной сфере, которая идет от полюса до полюса и образует постоянный угол $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ с меридианами.

Задача 7. *** (можно сдавать до 25 февраля) Доказать, что криволинейные четырехугольники, образованные координатными линиями $u = a_1$, $u = a_2$, $v = b_1$, $v = b_2$, являются “параллелограммами” (в смысле равенства соответствующих сторон), равносильно тому, что $E_v = G_u = 0$. Показать, что в этом случае локально существует такая параметризация поверхности, в которой ее первая квадратичная форма имеет вид

$$I(X) = X_1^2 + 2\cos\phi X_1 X_2 + X_2^2.$$

Второе занятие

Задача 8. Найдите натуральную параметризацию кривой из задачи 6.

Задача 9. Покажите, что для любой точки поверхности вращения существует параметризация некоторой её окрестности, сохраняющая углы.

Задача 10. Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho \cos v, y = \rho \sin v, z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперболоид вращения

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = \sqrt{r^2 - 1}$$

если соответствие устанавливается уравнениями

$$\phi = v + arctg\ \rho, r^2 = \rho^2 + 1.$$

Задача 11. Поверхность допускает параметризацию, в которой коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы постоянны. Докажите, что эта поверхность локально изометрична плоскости.

Задача 12. Напишите параметризацию цилиндрической поверхности, для которой кривая $\gamma(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору e. Покажите, что она локально изометрична плоскости.

Задача 13. Напишите параметризацию конуса с вершиной в точке $M(a, b, c)$ и с направляющей кривой $\gamma(u) = (f(u), g(u), h(u))$. Покажите, что такой конус локально изометричен плоскости (везде, кроме своей вершины).

Задача 14. *** (можно сдавать до 4 марта) Пусть $\gamma(t)$ – натурально параметризованная кривая с ненулевой кривизной в каждой точке. Поверхностью касательных называется поверхность с параметризацией

$$(t, s) \to \gamma(t) + s\gamma'(t).$$

Покажите, что поверхность касательных локально изометрична плоскости.

Третье занятие.

Задача 15. Рассмотрим гиперболический параболоид $xy = az$. Найдите кривые на этом параболоиде, ортогональные образующимпараболоида.

Задача 16. Рассмотрим геликоид $(u \cos v, u \sin v, v)$. Вычислите первую и вторую формы, а также главные кривизны. Проверьте, что $H = 0$ (средняя кривизна).

Задача 17. Линия кривизны на поверхности – это кривая, вектор скорости которой в каждой точке принадлежит главному направлению в этой точке. Докажите

а) (Теорема Родрига) Кривая γ на поверхности – линия кривизны тогда и только тогда, когда $\gamma'(t)||n'(t)$, где $n(t)$ – нормаль к поверхности в точке $\gamma(t)$.

б) "Меридианы"и "параллели"поверхности вращения – линии кривизны.

Задача 18. Пусть γ – кривая в $\mathbb{R}^3$, содержащаяся в поверхности $z = ax^2 + by^2, a, b > 0$ и такая, что $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Докажите, что кривизна γ (как пространственной кривой) в каждой точке не меньше $\min(a, b)$.

Задача 19. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ простая поверхность и γ – натурально параметризованная кривая в M. Пусть $v(t) = \gamma'(t)$, $n(t)$ – нормаль к M в $\gamma(t)$ и $w(t) = n(t) \times v(t)$. Докажите, что

$$v' = \kappa_g \cdot w + \kappa_n \cdot n$$
$$w' = -\kappa_g \cdot v + \tau_g \cdot n$$
$$n' = -\kappa_n \cdot v - \tau_g \cdot w$$

где $\kappa_g = \widehat{II}(v, v)$, $\tau_g = \widehat{II}(v, w)$, κ_g некоторая функция, а $\widehat{II}$ — вторая форма (на касательной плоскости) поверхности M в точке $\gamma(t)$.

Задача 20. Поверхность такова, что для любой ее точки прямая, проведенная через эту точку в направлении нормали, пересекает координатную ось OZ. Докажите, что в достаточно малой окрестности каждой точки данная поверхность совпадает с подмножеством некоторой поверхности вращения.

Задача 21. *** Диффеоморфизм между двумя поверхностями сохраняет углы и площадь. Докажите, что это изометрия.

Задача 22. *** Рассмотрим единичную сферу и точку p на экваторе. Докажите, что маленькая окрестность U точки p допускает “искривление”, то есть существуют такие поверхности изометричные U, что каждая поверхность в семействе – часть какой-то поверхности вращения (вокруг оси z). Причем экваториальные точки U соответствуют экваториальны точкам поверхностей (экваториальная значит, что касательная плоскость в точке параллельна оси вращения) и расстояние от экваториальных точек до оси вращения разное для разных поверхностей из семейства

Четвертое занятие (на самом деле пятое)

Задача 23. Пусть M является прообразом регулярного значения функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Тогда в точке $p \in M$

$$\widehat{II}(u, v) = d_p^2 f(u, v)/|\nabla_p f|.$$

Задача 24. Предположим, что поверхности $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ пересекаются под постоянным углом, а $\ell = \varPhi_1 \cap \varPhi_2$. Доказать, что если ℓ — это линия кривизны на поверхности $\varPhi_1$, то она является линией кривизны и на второй поверхности. Докажите также обратное утверждение: если линия пересечения двух поверхностей является на обеих этих поверхностях линией кривизны, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

Задача 25. Доказать, что параллель поверхности вращения является геодезической, экви касательная к меридиану в точках этой параллели параллельна оси вращения.

Задача 26. Пусть поверхности $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ пересекаются под постоянным углом v и $l = \varPhi_1 \cap \varPhi_2$. Тогда $k^2 \sin^2 v = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos v$, где k - кривизна кривой ℓ, а k_i – нормальная кривизна поверхности $\varPhi_i$ в направлении этой кривой.

Задача 27. Показать, что касательная к сферическому образу кривой ℓ на поверхности: *а*) параллельна касательной к ℓ, экви ℓ есть линия кривизны; *б*) перпендикулярна касательной к ℓ, экви ℓ — асиптотическая.

Задача 28. Доказать, что если кривая ℓ на поверхности является одновремено *а*) геодезической и асимптотической, то ℓ — прямая линия; *б*) линией кривизны и асимптотической, то кривая ℓ — плоская.

Задача 29. Доказать, что на любой замкнутой поверхности существует точка с положительной гауссовой кривизной.

Задача 30. *** Найти не коническую и не цилиндрическую поверхность, сферическим образом которой является кривая.

Пятое занятие (на самом деле шестое)

Задача 31. Поверхность Φ_ε называется поверхностью, параллельной Φ, если она получается из Φ отступление по нормали на ε. Докажите, что при малых по модулю ε это будет регуляная поверхность (если Φ — гладкая регулярная).

Задача 32. Докажите, что у параллельных поверхностей в соответствующих точках касательные плоскости параллельны.

Задача 33. Докажите, что $(\Phi_\varepsilon)_\delta = \Phi_{\varepsilon+\delta}$ при малых по модулю ε.

Задача 34. Докажите, что расстояние от точки на Φ_ε до малой окрестности Φ соответствующей точки равно $|\varepsilon|$ при малых по модулю ε.

Задача 35. Докажите, что для компактной (несамопересекающейся) поверхности расстояние от точки на Φ_ε до Φ равно $|\varepsilon|$ при малых по модулю ε.

Задача 36. Докажите, что для линии кривизны на поверхности Φ линия, полученная из соответствующих точек на Φ_ε тоже является линией кривизны, а главные направления в соответствующих точках параллельны.

Задача 37. Выразите в терминах главных кривизн и ε условие, когда параллельная поверхность нерегулярна (в некоторой точке).

Задача 38. Найдите главные кривизны Φ_ε через ε и главные кривизны исходной поверхности.

Задача 39. Доказать, что если поверхности Φ и Φ_* "параллельны", то

$$K_*^2(H^2 - 4K) = K^2(H_*^2 - 4K_*).$$

Шестое занятие (на самом деле седьмое)

Задача 40. Докажите, что геодезическая кривизна кривой на поверхности сохраняется при изометрии. В частности геодезические при изометрии переходят в геодезические.

Задача 41. На прямом геликоиде $(u\cos v, u\sin v, v)$ найти геодезическую кривизну винтовых линий — координатных линий $u = \mathrm{const}$.

Задача 42. Линейчатой поверхностью назовем регулярную поверхность, образованную гладким однопараметрическим семейством прямолинейных интервалов, называемых прямолинейными образующими. Линейчатая поверхность называется развертывающейся, если касательная плоскость не меняется вдоль прямолинейных образующих.

а) Пусть направляющий вектор прямолинейных образующих будет $a(t)$, а точки, через которую проходят эти прямолинейные образующие двигается по регулярной кривой $\gamma(t)$. Напишите в этих терминах условие регулярности этой линейчатой поверхности и того, что регулярная поверхность является развертывающейся.

б) Докажите, что коническая поверхность, цилиндрическая и поверхность касательных являются развертывающимися.

в) Докажите, что линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда она локально изометрична плоскости.

г*) Докажите, что в любой открытой области на произвольной линейчатой развертывающейся поверхности найдется подокрестность, являющаяся частью цилиндрической поверхности, конической поверхности или поверхности касательных.

Контрольная

1. Найдите коэффициенты первой и второй формы, а также Гауссову кривизну на поверхности, которая задается параметризацией $(u\cos v, u\sin v, u+v)$.

2. На поверхности из предыдущей задачи найдите кривые, перпендикулярные в каждой своей точке семейству кривых $u = Ce^v$.

3. На прямом круговом цилиндре радиуса R отмечена точка p. Цилиндр пересекли плоскостью, которая проходит через p, образует угол $\frac{\pi}{6}$ с касательной плоскостью цилиндра в точке p, причем прямая пересечения этих плоскостей образует угол $\frac{\pi}{4}$ с образующей цилиндра. Найдите у кривой, получившейся в сечении, кривизну в точке p.

4. Поверхность касается фиксированной плоскости во всех точках некоторой регулярной кривой. Докажите, что во всех точках на этой кривой гауссова кривизна поверхности равна 0.

5. Две асимптотические линии на поверхности пересекаются в некоторой точке под углом α. Выразите H^2/K через α, где H и K — средняя и гауссова кривизна в той же точке.

English translation:

1. Find the coefficients of the first and second fundamental forms and the Gauss curvature of the surface parametrized as $(u\cos v, u\sin v, u+v)$.

2. On the surface from the previous problem, find curves everywhere orthogonal to the family of curves $u = Ce^v$.

3. Consider a right circular cylinder of radius R and a marked point p on it. The cylinder is crossed by a plane that contains p, meets the cylinder's tangent plane at p at angle $\frac{\pi}{6}$, and is such that the intersection line of the two planes forms an angle л $\frac{\pi}{4}$ with the generating line of the cylinder. Find the curvatire of the cross-section curve at the point p.

4. A surface is tangent to a fixed plane at all points of some regular curve. Prove that the Gaussian curvature of the surface is zero at all points of that curve.

5. Two asymptotic lines on a surface intersect at some point at an angle α. Find H^2/K in terms of α, where H and K are the mean and Gauss curvature at that point.

21-28 апреля

Задача 43. Обозначим множество всех $n \times n$ матриц с вещественными элементами за M_n. Рассмотрим топологию на M_n как на подмножестве $\mathbb{R}^{n^2}$. Пусть $SL(n)$ – подмножество матриц M_n с определителем 1, $O(n)$ – подмножество ортогональных матриц.

а) Покажите, что $SL(n)$ – гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^{n^2}$, найдите его размерность и опишите касательное пространство в E.

б) Проделайте то же самое для $O(n)$.

Задача 44. Отображение $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ задано $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Покажите, что сужение F на единичную сферу – чётное отображение, и, тем самым, спускается до отображения $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$. Докажите, что это отображение

а) является погружением

б) инъективно, а значит, является вложением.

Задача 45. Пусть M – риманово многообразие, X – топологическое пространство и $p : X \to M$ – накрытие. Покажите, что X можно снабдить структурой риманова многообразия так, что p окажется локальным диффеоморфизмом и изометрией.

Задача 46. Пусть $k < n$ натуральные числа. Рассмотрим множество всех k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$, назовём это множество грассманианом и обозначим $G_{n,k}$. а) Опишите $G_{n,1}, G_{n,n-1}$.

б)Покажите, что следующее условие задаёт метрику на $G_{n,k}$: расстояние между двумя k-мерными линейными пространствами в $\mathbb{R}^n$ положим равным хаусдорфову расстоянию между пересечениями их с единичной сферой с центром в начале координат.

в) Покажите, что $G_{n,k}$ – многообразие, определите гладкую структуру на нём.

Задача 47. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ – геодезическая на поверхности вращения. Пусть $h(t)$ – расстояние от $\gamma(t)$ до оси вращения, и $\theta(t)$ – угол между $\gamma'(t)$ и "параллельной" окружностью, проходящей через $\gamma(t)$. Покажите, что $h(t) \cos \theta(t)$ постоянно вдоль γ.

Задача 48. Пусть γ – асимптотическая кривая на поверхности. Покажите, что кручение γ (как пространственной кривой) равно $\pm\sqrt{-K}$, где K – гауссова кривизна в соответствуюих точках.

Задача 49. Пусть M^n – гладкое многообразие и $p \in M$. Покажите, что а) на M существует риманова метрика б) на M существует риманова метрика, в некоторой окрестности точки p изометричная открытому множеству из единичной сферы размнерности n. Подсказка: используйте разбиение единицы. Для любого открытого покрытия $U_i, i \in I$ многообразия M существует набор функций $f_i : M \to \mathbb{R}$ такой, что а) носитель f_i содержится в U_i б) носители f_i образуют локально конечное покрытие M, в)для каждой точки $x \in M$ выполнено $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

Задача 50. Найдите изометрию верхней полуплоскости со стандартной гиперболической метриков, сохраняющую точку $(0, 1)$, и поворачивающую касательное пространство в этой точке на $\pi/2$.

Задача 51. *** а) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ гладкое подмногообразие размерности $k < n$. Определим

$$N = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | x \in M, v \perp T_x M\}.$$

Покажите, что N–гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

б) Для $\varepsilon > 0$, пусть $N_\varepsilon = \{(x, v) \in N, |v| \leq \varepsilon\}$. Пусть M компактно, а ε достаточно мало. Покажите, что $N_\varepsilon \to \mathbb{R}^n, (x, v) \to x + v$ диффеоморфизм между N_ε и открытой окрестностью N.

Задача 52. *** Рассмотрим n-мерное гиперболическое пространство в модели верхнего полупространства, т.е. $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ с метрическими коэффициентами $g_{ij} = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}$. Докажите, что инверсия относительно сферы с центром на гиперплоскости $x_n = 0$ является изометрией на $\mathbb{H}^n$.

5 мая

Задача 53. Докажите, что расстояние $d(z_1, z_2)$ между двумя точками z_1, z_2 на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости удовлетворяет

$$\cosh d(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\mathrm{Im} z_1 \, \mathrm{Im} z_2}.$$

Задача 54. Рассмотрим двумерный тор $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Координаты x, y спускаются на него с координат в $\mathbb{R}^2$. Определим три метрики g_1, g_2, g_3 на T^2:

$$g_1 = dx^2 + dy^2;$$

$$g_2 = dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy;$$

$$g_3 = dx^2 + 3dy^2 + 2dxdy;$$

Заметим, что x, y определены только с точностью до целочисленной аддитивной константы, но dx, dy определены однозначно, так что формулы имеют смысл. Докажите, что

а) все три пространства $(T, g_1), (T, g_2), (T, g_3)$ локально изометричны $\mathbb{R}^2$.

б) Первые два изометричны.

в) Третье не изометрично первым двум.

Задача 55. *** Докажите, что гиперболическая плоскость – полное метрическое пространство.

Контрольная 1. Переписывание

1. Найдите коэффициенты первой и второй формы, а также Гауссову кривизну на поверхности, которая задается параметризацией $(u\cos v, u\sin v, v)$.

2. На поверхности из предыдущей задачи найдите кривые, перпендикулярные в каждой своей точке семейству кривых $v = u^2 + \mathrm{const}$.

3. На основании прямого кругового конуса радиуса R и высоты H отмечена точка p. Боковую поверхность конуса пересекли плоскостью, которая проходит через p, образует угол $\frac{\pi}{4}$ с касательной плоскостью конуса в точке p, причем прямая пересечения этих плоскостей образует угол $\frac{\pi}{3}$ с образующей конуса. Найдите у кривой, получившейся в сечении, кривизну в точке p. Примечание: боковая поверхность конуса продолжается и дальше основания.

4. Докажите, что ортогональной сети на поверхности соответствует ортогональная сеть на параллельной поверхности тогда и только тогда, когда это сеть линий кривизны.

5. Докажите, что на минимальных поверхностях, то есть таких, на которых $H = 0$, сеть асимптотических ортогональна, то есть линии одного семейства ортогональны другому.

Контрольная 1. Переписывание

1. Найдите коэффициенты первой и второй формы, а также Гауссову кривизну на поверхности, которая задается параметризацией $(u\cos v, u\sin v, v)$.

2. На поверхности из предыдущей задачи найдите кривые, перпендикулярные в каждой своей точке семейству кривых $v = u^2 + \mathrm{const}$.

3. На основании прямого кругового конуса радиуса R и высоты H отмечена точка p. Боковую поверхность конуса пересекли плоскостью, которая проходит через p, образует угол $\frac{\pi}{4}$ с касательной плоскостью конуса в точке p, причем прямая пересечения этих плоскостей образует угол $\frac{\pi}{3}$ с образующей конуса. Найдите у кривой, получившейся в сечении, кривизну в точке p. Примечание: боковая поверхность конуса продолжается и дальше основания.

4. Докажите, что ортогональной сети на поверхности соответствует ортогональная сеть на параллельной поверхности тогда и только тогда, когда это сеть линий кривизны.

5. Докажите, что на минимальных поверхностях, то есть таких, на которых $H = 0$, сеть асимптотических ортогональна, то есть линии одного семейства ортогональны другому.

Контрольная 2

1. Опишите покрытие проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ тремя картами и выпишите явные формулы для отображений перехода между ними.

2. Рассмотрим тор $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с римановой метрикой, заданной в стандартных локальных координатах x, y формулой $3dx^2 + 4dxdy + 5dy^2$ (или, что то же самое, матрицей метрических коэффициентов $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, не зависящей от x, y). Докажите, что тор с этой метрикой можно изометрически вложить пространство $\mathbb{R}^6$. Подсказка: это можно сделать с помощью 6 функций вида $(x, y) \mapsto a\cos(bx + cy + d)$.

3. Напишите формулу для изометриия плоскости Лобачевского в модели в полуплоскости, которая переводит точку $(1, 1)$ в себя и каждую прямую, проходящую через эту точку, переводит себя с обращением направления.

4. На плоскости Лобачевского дана прямая ℓ. Для фиксированного числа $a > 0$ рассмотрим множество точек, расстояние от которых до ℓ равно a. Докажите, что это множество в модели Пуанкаре в круге — объединение двух дуг евклидовых окружностей.

Контрольная 2

1. Опишите покрытие проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ тремя картами и выпишите явные формулы для отображений перехода между ними.

2. Рассмотрим тор $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с римановой метрикой, заданной в стандартных локальных координатах x, y формулой $3dx^2 + 4dxdy + 5dy^2$ (или, что то же самое, матрицей метрических коэффициентов $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, не зависящей от x, y). Докажите, что тор с этой метрикой можно изометрически вложить пространство $\mathbb{R}^6$. Подсказка: это можно сделать с помощью 6 функций вида $(x, y) \mapsto a\cos(bx + cy + d)$.

3. Напишите формулу для изометриия плоскости Лобачевского в модели в полуплоскости, которая переводит точку $(1, 1)$ в себя и каждую прямую, проходящую через эту точку, переводит себя с обращением направления.

4. На плоскости Лобачевского дана прямая ℓ. Для фиксированного числа $a > 0$ рассмотрим множество точек, расстояние от которых до ℓ равно a. Докажите, что это множество в модели Пуанкаре в круге — объединение двух дуг евклидовых окружностей.