

Вопросы к экзамену по геометрии и топологии

4 семестр (2021 – 2022)

1. Гладкие многообразия: определение и примеры.
2. Гладкое отображение. Гладкость в точке. Свойства гладких отображений.
3. Определение диффеоморфизма. Равенство размерностей диффеоморфных многообразий. Карты многообразия – диффеоморфизмы. Диффеоморфизм – изоморфизм дифференциальных структур.
4. Касательное пространство гладкого многообразия: соприкосновение кривых, касательный вектор, его координаты, векторное пространство.
5. Касательное расслоение гладкого многообразия. Структура гладкого многообразия на нём.
6. Дифференциал гладкого отображения: корректность определения, линейность, координатное представление. Дифференциал композиции.
7. Гладкое подмногообразие: определение и примеры. Подмногообразие само является многообразием.
8. Локальность: открытое подмножество подмногообразия – подмногообразие той же размерности; если у каждой точки подмножества многообразия есть окрестность, являющаяся подмногообразием, то и все подмножество является подмногообразием.
9. Погружения и вложения – случай \mathbb{R}^n : погружение локально является вложением; образ вложения – подмногообразие.
10. Характеризация подмногообразий \mathbb{R}^n : M – подмногообразие тогда и только тогда, когда у каждой его точки есть окрестность – образ простой регулярной поверхности.
11. Погружения и вложения – общий случай: погружение локально является вложением; образ вложения – подмногообразие.
12. Подмножество многообразия является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно является образом некоторого гладкого вложения.
13. Гладкие отображения и подмногообразия: четыре свойства.
14. Транзитивность подмногообразий.
15. Касательное пространство подмногообразия, касательное пространство образа вложения.
16. Прообраз регулярного значения – подмногообразие. Применение: гиперболоид – гладкое многообразие
17. Касательное пространство регулярного прообраза.
18. Трансверсальное пересечение – подмногообразие. Его касательное пространство.
19. Гладкие векторные поля: определение, примеры в картах, продолжение с карты на все многообразие.

20. Римановы метрики, их коэффициенты в координатах.
21. Риманово расстояние.
22. Плоскость Лобачевского (модель в полуплоскости): длины и углы, элементарные движения – изометрии.
23. Плоскость Лобачевского (модель в полуплоскости): отрезки – кратчайшие, прямые – изометричность прямой R .
24. Плоскость Лобачевского: модель Пуанкаре в круге – метрические коэффициенты.
25. Шары плоскости Лобачевского.
26. Тензоры на многообразиях. Тензориальность и линейность над кольцом функций.
27. Производная функции вдоль векторного поля: определение, запись в координатах, свойства.
28. Скобка Ли, корректность определения.
29. Скобка Ли: свойства.
30. Поведение скобки Ли при отображениях.
31. Аффинные связности: определение, примеры, разность связностей – тензор.
32. Локальность аффинной связности, вид в координатах, символы Кристоффеля.
33. Симметричная аффинная связность, симметричность в координатах. Риманова связность.
34. Связность Леви-Чивиты, ее единственность и существование.
35. Теорема-определение ковариантной производной вдоль пути.
36. Параллельный перенос.
37. Риманова связность и параллельные поля.
38. Геодезические: определение, простейшие свойства, существование и единственность.
39. Экспоненциальное отображение: определение и свойства.
40. Экспоненциальное отображение – диффеоморфизм в окрестности нуля.
41. Радиус инъективности, его локальная отделенность от нуля.
42. Вариация кривой. Лемма Гаусса.
43. Геодезические – локально кратчайшие.