Напоминание

Определение

Касательным расслоением гладкого многообразия M^n называется множество

$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M).$$

Касательные пространства вида T_pM называются слоями касательного расслоения $T(M)$.

Теорема

$T(M)$ является гладким многообразием размерности $2n$.

Док-во: Пусть (U, φ) – карта на M. Положим

$$T(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p(M).$$

Зададим отображение $\Phi_U \colon T(U) \to \mathbb{R}^{2n}$: Для $v \in T_pM$, где $p \in U$, определяем

$$\Phi_U(v) = (\varphi(p), v_\varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Φ_U биективно отображает $T(U)$ на открытое множество $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Новое доказательство

$T U \cap T V = T(U \cap V)$

Гладкий атлас на $T(M)$ – это множество $\{(T(U), \Phi_U)\}$ по всем картам (U, φ) на M.

- эти карты покрывают $T(M)$.
- Пусть $(T(U), \Phi_U)$ и $(T(V), \Phi_V)$ – карты на $T(M)$, порождаемые картами (U, φ) и (V, ψ) на M. Тогда функция перехода имет вид

$$\Phi_V \circ \Phi_U^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})),$$

$\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$

и согласованность карт в $T(M)$ следует из согласованности карт в M.

Топология на TM Строим базу Σ

(U_i, φ_i) – атлас на M; (TU_i, Φ_{U_i}) – "карты" TM.

$\Phi_{U_i} : TU_i \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$

Цель: все Φ_{U_i} были гомеом.

$\forall i \quad \Sigma_i = \{ \Phi_{U_i}^{-1}(A) : A$ – откр в $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \}$.

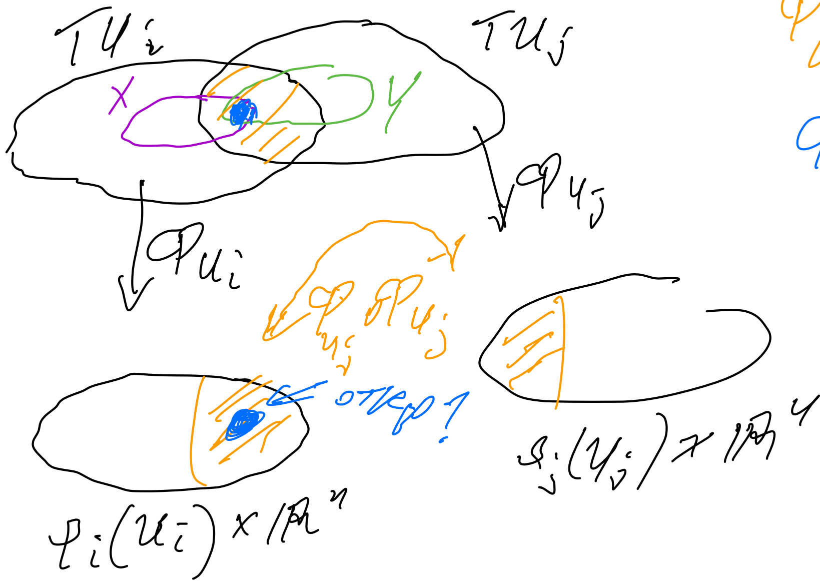
$\Sigma = \cup \Sigma_i$

Лемма: Σ — база топ.

Док. по крит. базы: $\exists\, X, Y \in \Sigma$. Покажем, что $X \cap Y \in \Sigma$. 2 случая:

1) $X, Y \in \Sigma_i$ то очевидно

2) $X \in \Sigma_i$, $Y \in \Sigma_j$ $(i \neq j)$



$\Phi_{U_i} \circ \Phi_{U_j}^{-1}$ — гладк. биекц. $\Rightarrow$ гомеом

$\Phi_{U_i}(X)$ — откр

$\Phi_{U_i}(Y \cap TU_i)$ — откр?

Напоминание

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \le k \le n$. Множество $M \subset N$ называется k-мерным гладким подмногообразием, если:

для любой точки $x \in M$ существует карта (U, φ) многообразия N такая, что $x \in U$ и

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).$$

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть выпрямляющими для M (это не общепринятый термин).

Лемма

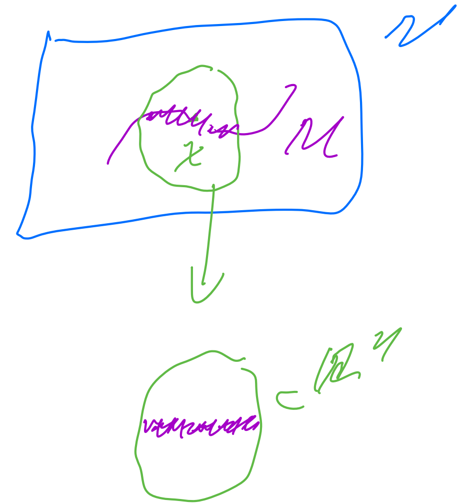
Гладкое подмногообразие размерности k является гладким многообразием размерности k.

Пример

Пусть $V \subset \mathbb{R}^k$ открытое, $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-k}$ гладкое.
Тогда график f, то есть множество

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$$

является гладким подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности k.



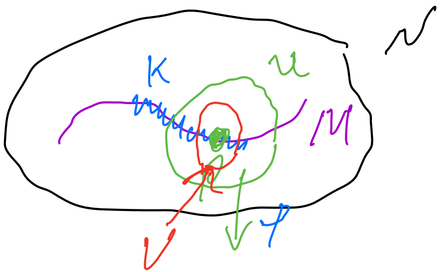
Свойства

Определение подмногообразия локально:

1 • *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*

2 • *Пусть N^n — гладкое многообразие. Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

1)



M — подмн N

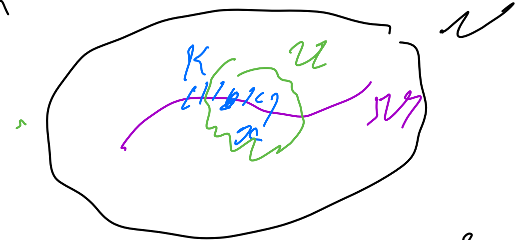
K откр в M

M — подмн ⇒ ∃ выпр карта (U, φ)

$(V, \varphi|_V)$ — искомая

W — строим. $V = \varphi^{-1}(W)$

2



$K = V \cap M$, V — откр в N

$\varphi(K \cap (U \cap V)) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U \cap V)$

Упр: доделать

Локальность

Свойства

Определение подмногообразия локально:

- *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*
- *Пусть N^n — гладкое многообразие. Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

Следствие

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ таково, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, представимая в виде k-мерного графика (при некотором выборе координат), то M — k-мерное гладкое подмногообразие.

Легко видеть, что это условие выполняется для сферы (и многих других примеров).

Пример

Открытые полусферы S^{n-1} – $(n-1)$-мерные графики (каждая в своей системе координат).
$\Longrightarrow$ S^{n-1} — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$.

Погружения и вложения

Пусть M^k, N^n — гладкие многообразия, $k \leq n$.

Определение

(Гладкое) погружение — гладкое отображение $f\colon M \to N$ такое, что $d_p f$ инъективно (мономорфизм) для всех $p \in M$.

(Гладкое) вложение — гладкое погружение, которое является топологическим вложением (т.е. гомеоморфизмом на образ).

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$, это то же самое, что регулярные поверхности и простые регулярные поверхности.

Определение

Регулярная k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ — такое гладкое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, что для любой точки $x \in U$ дифференциал $d_x f$ инъективен (условие регулярности).

Перефомулировки: $\operatorname{rank} d_x f = k$, $\ker d_x f = \{0\}$.

Простая регулярная поверхность – регулярная поверхность, которая является топологическим вложением.

Регулярные поверхности и подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

Теорема

Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность.

1. *Локально f — вложение.*
   Т.е. у любой $p \in U$ существует окрестность V $(p \in V \subset U)$ такая, что $f|_V$ — вложение.
2. *Если f — вложение, то $f(U)$ — гладкое подмногообразие.*
   При этом f^{-1} — карта этого подмногообразия.

1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

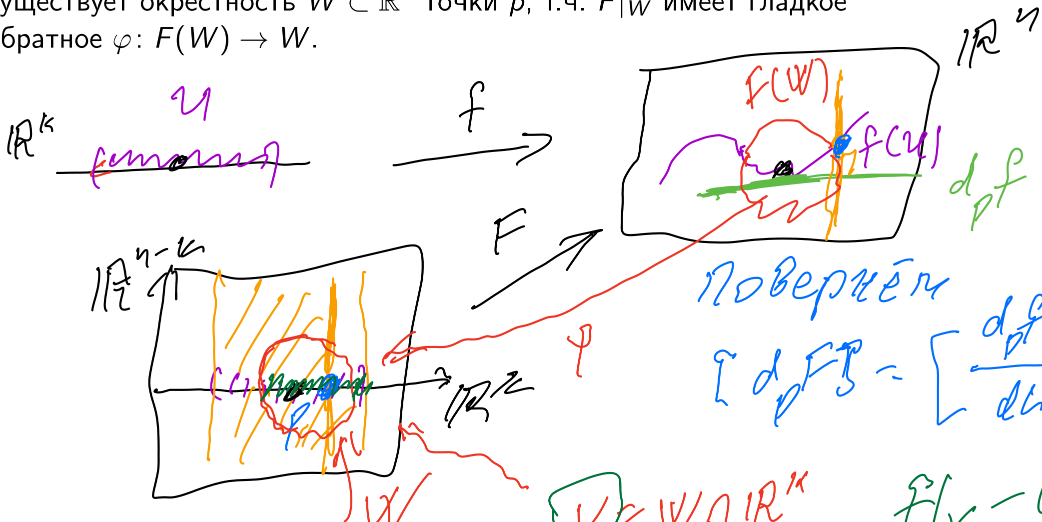
$d_p F$ невырожден $\overset{\text{упр}}{\Longrightarrow}$ применима теорема об обратной функции $\Longrightarrow$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

$F|_W$ – диф

$F|_V$ – гомеом

$\parallel$

$f|_V$



Повернём

$$[d_p F] = \left[\frac{d_p f}{dh}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$$

$V = W \cap \mathbb{R}^k$

$f|_V$ – вложение

Доказательство

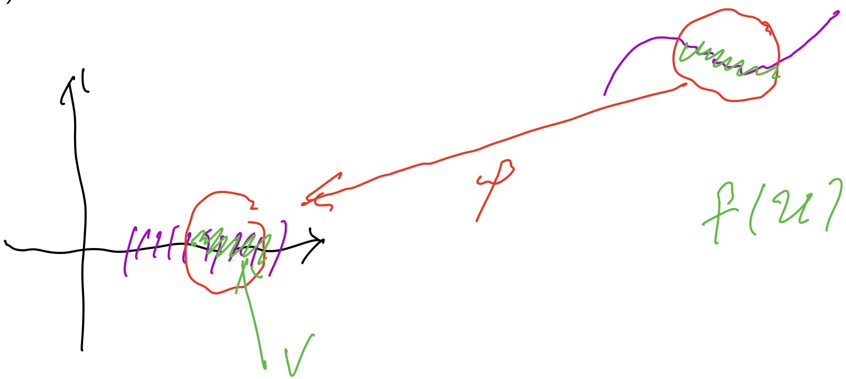
1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Пусть $V = W \cap \mathbb{R}^k$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ – выпрямляющая карта для $f(V)$.



f(U) – гладкое подмн.

Доказательство

1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Пусть $V = W \cap \mathbb{R}^k$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ – выпрямляющая карта для $f(V)$.

Мы доказали всё, кроме последнего утверждения теоремы (f^{-1} — карта для $f(U)$). Оно доказано для V вместо U. Общий случай следует из локальности свойства гладкой согласованности карт. $\square$

Характеризация подмногообразий $\mathbb{R}^n$

Теорема

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ два свойства эквивалентны:

1. *M — гладкое k-мерное подмногообразие;*
2. *У каждой точки $x \in M$ есть окрестность $U \subset M$, которая является образом простой регулярной k-мерной поверхности.*

Определение

Если образ простой регулярной поверхности f является открытым подмножеством M, то f называется локальной параметризацией многообразия M.

Замечание

Локальные параметризации — это в точности отображения, обратные к картам (локальным координатам).

$2 \implies 1$: из предыдущей теоремы и второго свойства локальности.

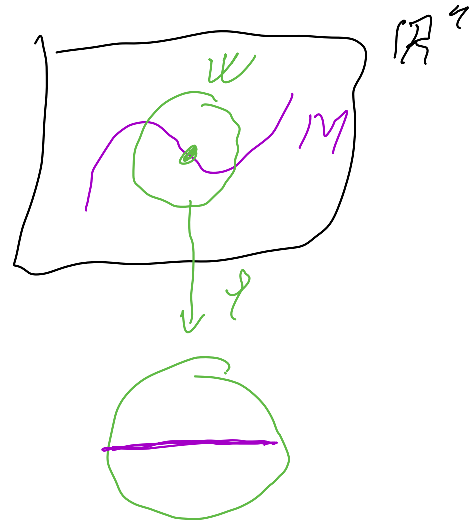
$1 \implies 2$: Пусть $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$ — выпрямляющая карта для M, где W — окрестность x в $\mathbb{R}^n$.

Возьмём $U = W \cap M$. Тогда $(\varphi^{-1})|_{\varphi(W)\cap\mathbb{R}^k}$ — искомая регулярная поверхность

φ и φ^{-1} — диффеоф

как функции перехода

между карт (W, φ) и $(\mathbb{R}^n, id)$

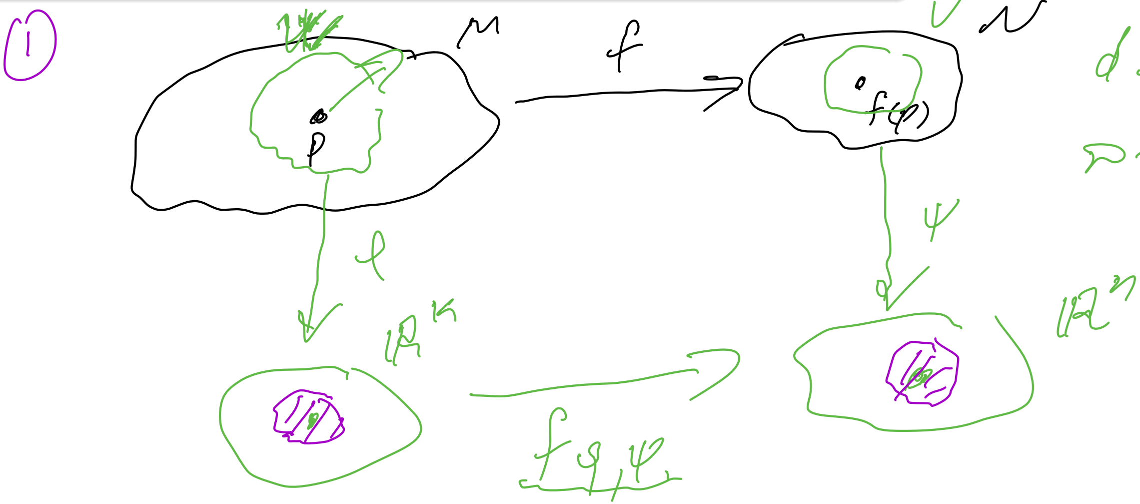


Свойства погружений и вложений

Теорема

Пусть M, N – гладкие многообразия.

1. *Любое погружение $f\colon M \to N$ локально является вложением. То есть: у любой точки $p \in M$ есть такая окрестность U, что $f|_U$ — вложение.*
2. *Если $f\colon M \to N$ — вложение, то его образ $f(M)$ — подмногообразие в N.*
   При этом f — диффеоморфизм между M и $f(M)$.



f - погр $\Rightarrow$

· f - гладкое

· df невырожд

$\Downarrow$

$f_{\varphi,\psi}$ - гладкое

$df_{\varphi,\psi}$ - невыр

для $f_{\varphi,\psi}$

лок. аналог

теорему

Свойства погружений и вложений

Теорема

Пусть M, N – гладкие многообразия.

1. *Любое погружение $f : M \to N$ локально является вложением. То есть: у любой точки $p \in M$ есть такая окрестность U, что $f|_U$ — вложение.*
2. *Если $f : M \to N$ — вложение, то его образ $f(M)$ — подмногообразие в N.*
   При этом f — диффеоморфизм между M и $f(M)$.

Доказательство.

Для областей в $\mathbb{R}^n$ это уже было. Общий случай сводится к разобранному переходом в карты. $\square$

1. доказать сам-на.

конец 4 лекции