Теорема о замкнутом графике.

Def. $A: X \to Y$, график $A = \{(x, Ax) : x \in \mathrm{Dom}\, A\} \subset X \times Y$.

$\mathrm{Graph}\, A$

Если X, Y — ЛНП, то канонический способ задания нормы на $X \times Y$: $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Def. $A: X \to Y$, A называется замкнутым, если для $\{x_n\} \subset \mathrm{Dom}\, A$,

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ A(x_n) \to y \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x \in \mathrm{Dom}\, A \\ Ax = y \end{array}.$$

Утв. (i) $\mathrm{Graph}\, A$ — линейное подмножество в $X \times Y$ и замкнуто $\Leftrightarrow$ A замкнут.

(ii) $A: X \to Y$ — огр., то A — замкнут.

(iii) Теорема о замкнутом графике.

$\mathrm{Dom}(A) = X$ и X, Y — банаховы, A — замкнут $\Rightarrow$ A — ограничен.

Доказательство (нечисто, упр.).

(i) + (ii) — упражнение на использование определений

(iii). Соображение

$\mathrm{Proj} : \mathrm{Graph}\, A \to X$

$\mathrm{Proj}((x, A(x))) := x$.

- $\mathrm{Range}\, \mathrm{Proj} = X$, т.к. для $\forall x \in X$ $\exists (x, A(x))$, ну и сколько хочешь проекции.
- Proj огр., т.к. норма слева $\|x\|_X + \|A(x)\|_Y$, норма справа: $\|x\|_X$
- $\mathrm{Graph}\, A$ — линейное, норм., замкнутое множество.

Стало быть существует огр. оператор, он ограничен $\Rightarrow$ $\|A(x)\| \le C \cdot \|x\|$.

∎

Гильбертовы пространства

"Банахово + скалярное произведение, порождающее норму" = "Гильбертово"

Def. Пусть X — ЛНП, $\boxed{\text{полное}}$, со скалярным произведением, порожд. норму, тогда X наз. гильбертовым.

$$\|x\|^2 \overset{(i)}{=} \langle x, x \rangle$$

Def. Пусть X — ЛВП (векторное) над $\mathbb{C}$. Отображение

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ называется скалярным произведением, если это удовлетворяет сл. аксиомам:

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\quad x, y \in X$

(ii) $\langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \cdot \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2 \in X$, $y \in X$.

$(i)+(ii) \Rightarrow \langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$.

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, и $= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма.

- ≥ 0, $= 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $\sqrt{\langle (x+y), (x+y) \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$?

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$, $x, y \neq 0$, рассмотрим

$$0 \leq \langle (x + \lambda y), (x + \lambda y) \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$$

Положим $\lambda := -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle y, x \rangle + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \cdot \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \cancel{\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}} + \cancel{\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}} =$$

$$= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0.$$

$$\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

неравенство КБШ $\Downarrow$

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$$

Возвращаемся к треугольнику:

$$\langle (x+y),(x+y)\rangle = \langle x,x\rangle + \underline{\langle x,y\rangle} + \underline{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle \le$$

$$\le \|x\|^2 + \|x\|\cdot\|y\| + \|y\|\cdot\|x\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2$$

Следовательно $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ действительно задаёт норму в X.

Примеры. • $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. $\langle z,\zeta\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{\zeta_k}$.

• $\ell^2 = \{ z=(z_1,\dots,z_k,\dots) : \sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2 < +\infty\}$. $\quad \sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2 = \|z\|^2_{\ell^2}$

$$\langle z,\zeta\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} z_k\overline{\zeta_k}.$$

• $L^2(\Omega,\mu)$ $\quad \langle f,g\rangle_{L^2(\mu)} = \int_\Omega f\overline{g}\,d\mu.$

• $C([0,1],dx)$

с тем же скалярным произведением.

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)dx$$

пространство со ск. пр., но не полное.

$*\ \langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle} = \overline{\int_\Omega \overline{f}g\,d\mu} = \int_\Omega \overline{\overline{f}}\,\overline{g}\,d\mu$ ... $= \int_\Omega f\overline{g}\,d\mu.$

$*$ линейность очевидна,

$$\int_\Omega (\lambda f_1+f_2)\cdot\overline{g}\,d\mu = \lambda\int_\Omega f_1\overline{g}\,d\mu + \int_\Omega f_2\overline{g}\,d\mu$$

$*\ \int_\Omega f\overline{f}\,d\mu = \int_\Omega |f|^2 d\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\equiv 0$ в смысле $L^2(\mu)$.

• $H^2(\mathbb{D})$, $\quad \mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$.

$$\{ f\in Hol(\mathbb{D}),\ \sup_{0<r<1}\int_0^1 |f(re^{2\pi i\theta})|^2 d\theta < +\infty\}$$

$$\sup_{0<r<1}\int_0^1 |f(re^{2\pi i\theta})|^2 d\theta = \|f\|^2_{H^2}$$

$$\{ f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k \cdot z^k,\ z\in \mathbb{D},\ \text{т.ч.}\ \sum_{k\geq 0} |a_k|^2 < +\infty \}$$

$$\sum_{k\geq 0} |a_k|^2 < +\infty \ \Leftrightarrow\ \{a_k\}_{k\geq 0} \in \ell^2$$

$$\langle f, g\rangle_{H^2} := \boxed{\lim_{r\to 1}} \int_0^1 f(re^{2\pi i\theta})\, \overline{g}(re^{2\pi i\theta})\, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k},$$

где $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, $g(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$.

• $C^1([0,1])$ $\quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.$

$\boxed{\text{полноты нет!}}$

Def. Пусть X – пп, $x, y \in X$, тогда x и y называются ортогональными, $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$.

Если $X_1 \subseteq X$ – подпространство, и $x \in X$, то $x \perp X_1$, если $x \perp y$ $\forall y \in X_1$.

$\boxed{\text{Теорема Пифагора.}}$ Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – ортогональная система векторов, т.е. $x_k \perp x_j$, $k \neq j$. Тогда

$$\Big\| \sum_{k=1}^n x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

В частности, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, если $x \perp y$.

Доказательство. Если $z \perp x$, $z \perp y$, то $z \perp (x+y)$, стало быть достаточно доказать для двух элементов.

$$\|x+y\|^2 = \langle (x+y), (x+y)\rangle = \langle x,x\rangle + \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

Ут. (тождество параллелограмма) Если $x, y \in X$ – пп, тогда

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (71)$$

Доказательство. $Л.Ч. = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle +$
$$+ \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle).$$

Замечание. (71) $\Longleftrightarrow$ неравенству
$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \le 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$
$x \to \frac{1}{2}(x+y)$
$y \to \frac{1}{2}(x-y)$

Утв. Пусть X — б.п., в котором верно тождество паралл. Тогда в X сущ. скалярное произведение, порождающее норму, т.е. X — гильб.

Доказательство. НУО считаем, что X над $\mathbb{C}$.

Представим на секунду, что X уже гильбертово, и попробуем выразить $\langle x,y\rangle$ через нормы x, y, лин. комб.

$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$:
$$\|x-y\|^2 = \langle (x-y),(x-y)\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} =$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$ Стало быть,
$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2}{2} = \mathrm{Re}\langle y,x\rangle.$$

$$\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-i\langle x,y\rangle + \langle iy,x\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(-\langle ix,y\rangle + \overset{-\langle y,ix\rangle}{\overset{\|}{i\langle y,x\rangle}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\langle y,ix\rangle + \langle ix,y\rangle\right) = -\mathrm{Re}\langle y,ix\rangle = -\mathrm{Re}\langle ix,y\rangle$$
$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = i\,\mathrm{Re}\langle ix,y\rangle.$$

Осталось просто определить $\langle x,y\rangle$ через нормы:

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

+ проверить, что определение корректно при условии ТП.