Гильбертовы пространства.

- ортогональные системы/ортонормированные базисы / Базисы Рисса / фреймы / полные и/или минимальные системы.

- представления линейных функционалов (теорема Рисса).
- (несколько позже) спектральная теория (самосопряжённых) операторов в гильбертовом пространстве.

X или H — пространство, линейное нормированное, полное. над $\mathbb{C}$, задано скалярное произведение

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \bullet\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\ \bullet\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ \bullet\ \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \bullet\ \langle x, x \rangle \geq 0, \ = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$$

$$\|x\|_H^2 := \langle x, x \rangle_H .$$

„Большинство" гильбертовых пространств сепарабельны.

Упр. Построить несепарабельное гильбертово H.

Банахово несепарабельно: $\ell^\infty = \{ z = (z_1, \dots, z_n \dots) :$

$$\|z\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |z_k| < +\infty \}.$$

$$\cancel{\sum_{k\geq 1} |z_k|^2}$$

Изучать в H системы вида $\{x_\alpha\}$ — ортогональные системы.

$\alpha \in A$ — множ-во индексов.

$$x_\alpha \perp x_\beta, \ \alpha \neq \beta, \ x_\alpha \neq 0. \qquad \bigcap H$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle_H = 0$$

$$\text{В } \ell^2 = \{ z = \underline{\{z_1, \ldots, z_n, \ldots, \ldots\}} : \underbrace{\sqrt{\sum_{k \geq 1} |z_k|^2}}_{\|z\|_{\ell^2}} < +\infty \}$$

Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — ортогональная система, тогда — это линейно независимая система, т.е. если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \ i = 1 \ldots k$.

$i \in A$.

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_j \right\rangle = 0$$

$$\|$$

$$\sum_{k \neq j} \lambda_k \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{0} + \underbrace{\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle}_{0} = 0$$

Система $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полная, если наименьшее замкнутое подпространство $H_0 \leq H$, её содержащее, т.е. $\underline{H \supset \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$, есть само H.

Полная ортогональная система называется ортогональным базисом.

Ортонормированный базис есть система $\{x_\alpha\}$, ортогональная, полная, $\|x_\alpha\| = 1$.

- <u>Утверждение.</u> В сепарабельном гильбертовом пространстве есть н.б.ч.с. ортонорм. базис.

· Утверждение. В сепарабельном гильбертовом пространстве любая ортогональная система не более чем счётна.

Доказательство. $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, НУО - ортонорм.

$$\| x_\alpha - x_\beta \| = \sqrt{2}, \quad \alpha \neq \beta.$$

$$\| \qquad \left(\langle x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle \right)^{1/2} \qquad \|$$

$$\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle + \langle x_\beta, x_\beta \rangle + \langle x_\alpha, x_\beta \rangle + \langle x_\beta, x_\alpha \rangle = $$

$$= 2.$$

- $B_\alpha := \{ x : \| x - x_\alpha \|_H \leq \frac{1}{3} \}$, $B_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$.
- если есть $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ - сч. всюду плотная, то в каждом B_α есть

минимум по одному элементу из $\{y_k\}$. ☒

Утверждение (ортогонализация Г-Ш).

Пусть $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ - л.н. система векторов, тогда существует система $\{y_k\}$:

(i) $\{y_k\}$ - ортонормированная система

(ii) $y_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{kj} \cdot x_k$

(iii) $x_j = \sum_{k=1}^{j} \theta_{kj} \cdot y_k$.

Доказательство. $x_1 \longrightarrow y_1$.

$$y_1 := e^{i\varphi_1} \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

Теперь пусть построено $j-1$ таких элементов y_k, $k = 1..j-1$, будем строить

y_j.

Представим x_j в виде

$$\boxed{x_j = a_{j1} \cdot y_1 + a_{j2} \cdot y_2 + \dots + a_{j(j-1)} \cdot y_{j-1} + \underbrace{z_j}}$$

где $z_j \perp y_k$, $k = 1..j-1$.

$$\underbrace{\langle z_j, y_k \rangle} = \langle x_j - a_{j1} y_1 - a_{j2} y_2 - \dots - a_{j(j-1)} y_{j-1}, y_k \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle x_j, y_k \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \cancel{\langle y_i, y_k \rangle}}_{= a_{jk} \langle y_k, y_k \rangle \overset{\text{хочется}}{=} 0}, \quad k = 1..j-1, \qquad z_j \ne 0.$$

Доказательство существования ОНБ в сепарабельном гильбертовом H.

Пусть $\{\tilde{x}_k\}$ — сч. всюду плотное множество. Сделаем из него систему л.н. векторов $\{x_k\}$. Именно, если $x_1, \dots, x_{j-1}$ — л.н., а x_j есть линейная комбинация x_i, $i = 1..j-1$, то x_j выкидываем и идём дальше (рассм. x_{j+1} etc.)

Дальше ортогонализация Г-Ш.

Неравенство Бесселя (равенство Парсеваля, Теорема Планшереля).

$\{x_k\}$ — ОНБ

$$\underbrace{x \overset{?}{=} \sum_{k \ge 1} c_k \cdot x_k}$$

• = понимается так:

$$\underbrace{\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\bullet\ \underbrace{c_k = \langle x, x_k \rangle}$$

$$\sum |c_k|^2 \le \|x\|$$