

Для доказательств будем использовать

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ – полилинейно над $\mathfrak{F}(M)$. Тогда S порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа $(k, 0)$.

производную функции f вдоль векторного поля X

$$Xf(p) = d_p f(X(p)) \quad \text{другие обозначения } D_X f, \underline{f'_X}$$

ее свойства

$$X(af + bg) = aXf + bXg \quad X(f \cdot g) = f \cdot Xg + Xf \cdot g$$

$$(X + Y)f = Xf + Yf \quad (fX)g = f(Xg)$$

скобку Ли

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

ее свойства

$$[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X \quad [X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$$

$$(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$$

$$f'_{x+y} = f'_x + f'_y$$

Цель: Построить дифференцирование одного векторного поля вдоль другого.

Определение

Аффинной связностью на гладком многообразии M называется отображение $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1 $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$.
- 2 $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$.
- 3 $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y$, ✓

где $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Определение

Пусть $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ — аффинная связность на гладком многообразии M , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда $\nabla_X Y$ называется **ковариантной производной** векторного поля Y вдоль (или, в направлении) векторного поля X .

∇ — таблица

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

Y — векторное поле вдоль X

Примеры аффинных связностей

1) $M = \mathbb{R}^n$.

Любое $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ можно считать гладкой функцией $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.к.

$Y: M \rightarrow TM$, где $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и на первое \mathbb{R}^n отображение тождественно.

Тогда $\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дифференцирования вдоль X равенством:

$$\forall Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \text{ полагаем } \nabla_X Y = (Y'_X)_p = \underline{d_p Y(X_p)}.$$

Нужно проверить выполнение трех условий на ∇ .

2) Координатное дифференцирование.

Пусть (U, φ) – карта на M , E_1, \dots, E_n – координатные векторные поля,

$$Y = \sum f_i E_i.$$

$$\underline{f_i \in C^\infty}$$

Тогда полагаем

$$\nabla_X^{\varphi} Y := \sum \underline{(f_i)'_X} E_i.$$

Насо проверить 3 условия
на ∇ ,

(x_1, \dots, x_n) – координаты точки
 \downarrow
 $|f_i(x_1, \dots, x_n)| \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_n)$

Лемма

- 1 Разность двух аффинных связностей – тензор типа (2,1).
- 2 Аффинная связность + тензор типа (2,1) – аффинная связность.

Разность порождает
гладким тензорным
полем ...

Док-во

1) Пусть ∇ и $\tilde{\nabla}$ – две аффинные связности на гладком многообразии M . Покажем, что отображение $\nabla - \tilde{\nabla}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ линейно по каждому из аргументов, что в силу теоремы с предыдущей лекции означает его порождаемость гладким тензорным полем типа (2,1).

Линейность по первому аргументу очевидна в силу определения аффинной связности, Линейность по второму:

$$\nabla_X(fY) - \tilde{\nabla}_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf)Y - f \cdot \tilde{\nabla}_X Y - (Xf)Y = f \cdot (\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y).$$

2) Пусть ∇ – аффинная связность и Γ – тензор типа (2,1). Покажем, что $\tilde{\nabla} = \nabla + \Gamma$ – аффинная связность.

$$\tilde{\nabla}_X(fY) = \nabla_X(fY) + \Gamma(X, fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y + f \Gamma(X, Y) = f \tilde{\nabla}_X Y + (Xf)Y$$

(1, 1)
 $\nabla^p Y$
Тогда $\nabla \nabla$
 $\nabla = \nabla^p + \Gamma$
т.е. ∇ и Γ – порождаются
тензорами,

Лемма

Пусть ∇ – аффинная связность на гладком многообразии M . Тогда $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $\forall p \in M$ значение $(\nabla_X Y)_p$ зависит только от X_p и от сужения Y на любую окрестность точки p .

Док-во

Фиксируем поле Y . Тогда $\nabla_X Y$ линейное над $\mathfrak{X}(M)$ отображение $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. В силу теоремы с предыдущей лекции оно порождено некоторым единственным гладким тензорным полем $\{\hat{S}_p\}_{p \in M}$ типа $(1, 1)$. Поэтому $(\nabla_X Y)_p$ зависит только от X_p .

Фиксируем поле X . Фиксируем карту U . Пусть $p \in U$ и $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ совпадают на U . Пусть $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкий спуск с единицы, т.ч. $h(p) = 1$, $h|_{M \setminus U} = 0$ и $d_p h = 0$. Тогда

$$hY = hZ \Rightarrow \nabla_X(hY) = \nabla_X(hZ) \Rightarrow \underline{h\nabla_X(Y) + (Xh) \cdot Y} = h\nabla_X(Z) + (Xh) \cdot Z.$$

Подставляем точку p .

$$\underbrace{h(p)}_{=1} \underbrace{(\nabla_X(Y))_p}_{=0} + (Xh)(p) \cdot Y(p) = \underbrace{h(p)}_{=1} \underbrace{(\nabla_X(Z))_p}_{=0} + (Xh)(p) \cdot Z(p).$$

Т.к. $d_p h = 0$, то $(Xh)(p) = d_p h(X_p) = 0$. С учетом $h(p) = 1$ имеем

$$\nabla_X(Y)_p = \nabla_X(Z)_p.$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2, Y_1, Y_2 &\in \mathfrak{X}(M) \\ X_1(p) &= X_2(p) \\ Y_1|_U &= Y_2|_U \Rightarrow (\nabla_{X_1} Y_1)_p = (\nabla_{X_2} Y_2)_p. \end{aligned}$$

Следствие

В карте (U, φ) любая аффинная связность ∇ имеет вид

$$\nabla_X Y = \nabla_X^\varphi Y + \Gamma(X, Y), \text{ где } \Gamma - \text{тензор типа } (2, 1).$$

выразим -

$$\Gamma(X, Y) = \sum_j g_j^i \nabla_X E_j$$

$$X = \sum_i f_i E_i, \quad Y = \sum_j g_j E_j.$$

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(\sum_j g_j E_j \right) = \sum_j \underbrace{g_j \nabla_X E_j}_{=(g_j)' X} + \sum_j \underbrace{(X g_j) E_j}_{\Gamma(X, Y)} = \underbrace{\Gamma(X, Y)}_{\Gamma(X, Y)} + \underbrace{\nabla_X^\varphi Y}_{\nabla_X^\varphi Y}.$$

Определим **символы Кристоффеля 1-го рода** связности ∇ в карте (U, φ)

$$\Gamma_{ij} := \nabla_{E_i} E_j = \Gamma(E_i, E_j).$$

Гладкие функции Γ_{ij}^k называются **символами Кристоффеля 2-го рода**, где

$$\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Следствие

$(\nabla_X Y)_p$ однозначно определяется значением X_p и сужением Y на любую кривую в направлении X_p .

!!! Важно.
... обобщать

Док-во Это верно для координатного дифференцирования, а Γ вообще не зависит от производных.

Определение

Аффинная связность ∇ на гладком многообразии M называется **симметричной**, если

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Определение

Оператор $T = T_\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, заданный формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

называется **тензором кручения** данной аффинной связности.

$T(X, Y)$ — зав.
только от
 $X(p)$ и $Y(p)$

Лемма

Тензор кручения — тензор типа $(2,1)$.

Док-во Т.к. $[X, Y] = -[Y, X]$, то $T(X, Y) = -T(Y, X)$. Поэтому достаточно доказать линейность по второму аргументу.

$$T(X, Y+Z) = \nabla_X(Y+Z) - \nabla_{Y+Z}X - [X, Y+Z] = T(X, Y) + T(X, Z),$$

$$T(X, fY) = \nabla_X(fY) - \nabla_{fY}X - [X, fY] = f\nabla_X Y + (Xf)Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] - (Xf)Y = fT(X, Y).$$

Следствие (симметричность в координатах)

Аффинная связность ∇ симметрична $\iff \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}, \forall i, j$.

Док-во Условие симметричности равносильно условию “тензор T равен 0”. Так как значения тензора определяются на координатных векторных полях, то последнее равносильно условию

$$0 = T(E_i, E_j) = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = \Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}.$$

$$\langle Y, Z \rangle \in \mathbb{F}(M)$$

Определение

Пусть M – риманово многообразие. Аффинная связность ∇ на M называется **согласованной с римановой метрикой** $\langle \cdot, \cdot \rangle$, если $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Для простоты такую ∇ называют также **римановой связностью**.

Зададим оператор $S : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ формулой

$$S(X, Y, Z) = X\langle Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Лемма

S – тензор типа $(3, 1)$.

Док-во: Линейность по X очевидна, а по Y и Z формула симметрична, так что достаточно проверить линейность для одного из полей.

$$\begin{aligned} S(X, fY, Z) &= X\langle fY, Z \rangle - \langle \nabla_X fY, Z \rangle - \langle fY, \nabla_X Z \rangle = \\ &= (Xf)\langle Y, Z \rangle + f(X\langle Y, Z \rangle) - \langle f\nabla_X Y + (Xf) \cdot Y, Z \rangle - f\langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ &= f(X\langle Y, Z \rangle) - f\langle \nabla_X Y, Z \rangle - f\langle Y, \nabla_X Z \rangle = fS(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Определение

Связностью Леви-Чивита на римановом многообразии называется симметричная аффинная связность, согласованная с метрикой.

Теорема (основная теорема римановой геометрии)

На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивита.

Док-во: Единственность. Пусть ∇ — связность Леви-Чивита. Тогда

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Складывая 1 с 2 и вычитая 3, а также используя симметричность ∇ , получаем

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_X Y \rangle.$$

проверить
сам-но

Поэтому

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle). \quad (*)$$