

# Локально любое подмногообразие — регулярный прообраз

## Замечание

Локально верно и обратное: для любого подмногообразия  $M^{n-k} \subset \mathbb{N}^n$  и любой точки  $p \in M$  существует окрестность  $U \subset N$  точки  $p$  и субмерсия  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  такая, что  $M \cap U = f^{-1}(0)$ .

## Доказательство.

Возьмем композицию подходящей карты и проекции на  $\mathbb{R}^k$ . □

Рассмотрим функцию  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу  $[2x, 2y, -2z]$

Его ранг меньше 1 только при  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

$\implies$  При  $c \neq 0$  множество решений уравнения  $x^2 + y^2 - z^2 = c$  (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим функцию  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу  $[2x, 2y, -2z]$

Его ранг меньше 1 только при  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

$\implies$  При  $c \neq 0$  множество решений уравнения  $x^2 + y^2 - z^2 = c$  (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в  $\mathbb{R}^3$ .

Легко видеть, что при  $c = 0$  решение (конус) не является даже топологическим многообразием в окрестности точки  $(0, 0, 0)$ .

Если выколоть  $(0, 0, 0)$ , то остаётся гладкая поверхность. Это следует из теоремы, применённой к сужению  $f$  на  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

## Теорема

Пусть  $N$  и  $K$  – гладкие многообразия,  $f: N \rightarrow K$  – гладкое отображение,  $q \in K$  – регулярное значение,  $M = f^{-1}(q)$  – подмногообразие,  $p \in M$ . Тогда

$$T_p M = \ker d_p f.$$

## Доказательство.

В разделе "Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия" было свойство 1:

$$d_p(f|_M) = (d_p f)|_{T_p M}$$

Т.к.  $f|_M = \text{const}$ , то  $d_p(f|_M) = 0 \implies (d_p f)|_{T_p M} = 0$ .

$$\implies T_p M \subset \ker d_p f.$$

Обратное включение следует из равенства размерностей. □

## Определение

Пусть  $N^n$  — гладкое многообразие,  $M^m$  и  $K^k$  — его подмногообразия.  $M$  и  $K$  **пересекаются трансверсально** (трансверсальны), если для любой точки  $p \in M \cap K$  верно, что

$$T_p M + T_p K = T_p N$$

Обозначение:  $M \pitchfork K$ .

## Замечание

Определение содержательно только при  $m + k \geq n$ .

При  $m + k < n$  пересечение трансверсально  $\iff$  пусто.

## Теорема

Пусть  $N^n$  — гладкое многообразие,  $M^m$  и  $K^k$  — его подмногообразия,  $m + k \geq n$ ,  $M \pitchfork K$ .

Тогда  $M \cap K$  — гладкое подмногообразие размерности  $m + k - n$ .

**Док-во:** Докажем, что  $M \cap K$  — гладкое подмногообразие в окрестности точки  $p \in M \cap K$ .

### Шаг 1:

В достаточно малой окрестности  $U \ni p$ ,  $M$  и  $K$  являются прообразами регулярных значений функций  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  и  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .

Считаем, что  $M \cap U = f^{-1}(0)$  и  $K \cap U = g^{-1}(0)$ .

Построим  $H: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-k}$ :

$$H(x) = (f(x), g(x)).$$

Заметим, что  $M \cap K \cap U = H^{-1}(0)$ .

Продолжаем док-во теоремы:

**Шаг 2:**

Проверим, что  $p$  — регулярная точка  $H$ .

$$\dim \ker d_p H = \dim(\ker d_p f \cap \ker d_p g) = m + k - n$$

из формулы для размерности пересечения линейных подпространств

$$\implies \operatorname{rank} d_p H = n - (m + k - n) = 2n - k - m$$

$$\implies p \text{ — регулярная точка } H.$$

**Шаг 3:**

Так как множество регулярных точек открыто, в некоторой окрестности  $V \ni p$  ( $p \in V \subset U \subset N$ ) все точки регулярные

$$\implies M \cap K \cap V \text{ — гладкое подмногообразие размерности } m + k - n$$

$\implies$  (так как  $p$  произвольная)  $M \cap K$  — гладкое подмногообразие размерности  $m + k - n$

### Теорема

Пусть  $M, K \subset N$  — гладкие подмногообразия,  $M \pitchfork K$ ,  $p \in M \cap K$ .

Тогда

$$T_p(M \cap K) = T_p M \cap T_p K$$

### Доказательство.

Включение  $T_p(M \cap K) \subset T_p M \cap T_p K$  следует из включений  $M \cap K \subset M$  и  $M \cap K \subset K$ .

Обратное включение — из равенства размерностей. □



## Теорема (Уитни)

Любое гладкое многообразие  $M$  вкладывается в  $\mathbb{R}^N$  при достаточно большом  $N$ .

Можно даже взять  $N = 2 \dim M$ .

## Теорема (Сард)

Пусть  $M, K$  — гладкие многообразия,  $f: M \rightarrow K$  — гладкое отображение.

Тогда регулярными значениями  $f$  являются все точки  $K$ , кроме множества меры 0.

Под «множеством меры 0» в многообразии понимается множество, образ которого в любой карте имеет меру 0.

Доказательство будет в 6 семестре.

# Риманова геометрия

## Определение

Пусть  $M$  – гладкое многообразие,  $U$  открыто в  $M$ . Гладкое отображение  $X: U \rightarrow T(M)$  такое, что  $X(p) \in T_p(M)$  для всех  $p \in U$ , называется **гладким векторным полем** в  $U$  на  $M$ .

Как правило будем рассматривать случай  $U = M$ .

Обозначение:  $\mathfrak{X}(M)$  – множество всех гладких векторных полей на  $M$ .

## Пример

Пусть  $(U, \varphi)$  – некоторая карта на  $M$ , и  $p \in U$  – произвольная точка. Каждому  $i$  можно сопоставить координатное векторное поле  $X_i$ , переводящее точку  $p$  в  $i$ -ый базисный вектор стандартного базиса в  $T_p(M)$ .

Поле  $X_i$  задано только в карте  $U$ . Чтобы продолжить  $X_i$  на всё  $M$  построим гладкий спуск с единицы, т.е. такие окрестности  $V_1(p)$ ,  $V_2(p)$  и гладкую функцию  $h: U \rightarrow [0, 1]$ , что

- 1  $V_1(p) \subset V_2(p) \subset U$ ;
- 2 
$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V_1(p)}, \\ 0, & \text{если } x \in U \setminus V_2(p), \end{cases} \text{ и } 0 \leq h(x) < 1, \text{ если } x \in V_2(p) \setminus \overline{V_1(p)}.$$

Тогда  $hX_i$  – координатные векторные поля в карте  $(V_1, \varphi)$ , которые очевидным образом продолжаются до гладких полей на всем  $M$ .

## Определение

Говорят, что на гладком многообразии  $M$  задана **риманова структура**, если в каждом касательном пространстве  $T_p(M)$  определено скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (т.е. симметричная положительно определенная билинейная форма), гладко зависящее от точки  $p$ .

Последнее означает, что для любых гладких векторных полей  $X, Y$  на  $M$  функция  $\langle X, Y \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$  является гладкой.

**Римановым многообразием** называется связное гладкое многообразие, на котором задана риманова структура.

## Замечание

- Синонимы римановой структуры: риманова метрика, метрический тензор.
- Другие обозначения римановой структуры:  $g = \{g_p\}_{p \in M}$ .

## Определение

Два римановых многообразия  $M, N$  называются **изометричными**, если между ними можно установить такой диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$ , что для любой точки  $p \in M$  и любых векторов  $u, v \in T_p M$

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d_p f(u), d_p f(v) \rangle_{f(p)}.$$

## Определение

Пусть  $M^n$  – риманово многообразие,  $(U, \varphi)$  – некоторая карта на  $M$ , и  $X_1, \dots, X_n$  – координатные поля этой карты.

$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle: U \rightarrow \mathbb{R}$  – **коэффициенты римановой метрики** (метрические коэффициенты).

## Лемма

следующие условия эквивалентны:

- 1 для любых гладких векторных полей  $X, Y$  на  $M$  функция  $\langle X, Y \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$  является гладкой.
- 2 в каждой карте метрические коэффициенты – гладкие функции.