Группа движений

Определение

Движение плоскости Лобачевского – композиция элементарных движений (из теоремы).

Замечание

Движения образуют группу.

Определение

Дробно-линейные преобразования плоскости Лобачевского:

- $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $(ad - bc) > 0$;
- $f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $(ad - bc) < 0$.

Упражнение

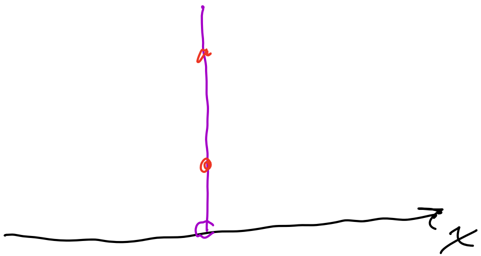
Докажите, что движения $\mathbb{H}^2$ – в точности дробно-линейные преобразования.

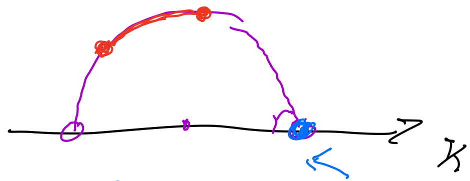
Прямые и отрезки

Определение

Прямыми плоскости Лобачевского называются:

- вертикальные (евклидовы) лучи, начинающиеся на абсолюте;
- (евклидовы) полуокружности с центрами на абсолюте.





инверс с центром
перев. полуокр в
верт луч.

Прямые и отрезки

Определение

Прямыми плоскости Лобачевского называются:

- вертикальные (евклидовы) лучи, начинающиеся на абсолюте;
- (евклидовы) полуокружности с центрами на абсолюте.

Лемма

Вертикальный отрезок – это кратчайшая кусочно-гладкая кривая в плоскости Лобачевского, соединяющая точки (x_0, y_1) и (x_0, y_2), причем единственная с точностью до замены параметра.
Расстояние между (x_0, y_1) и (x_0, y_2) равно $|\ln(y_2) - \ln(y_1)|$.

Прямые и отрезки

Определение

Прямыми плоскости Лобачевского называются:

- вертикальные (евклидовы) лучи, начинающиеся на абсолюте;
- (евклидовы) полуокружности с центрами на абсолюте.

Лемма

Вертикальный отрезок – это кратчайшая кусочно-гладкая кривая в плоскости Лобачевского, соединяющая точки (x_0, y_1) *и* (x_0, y_2)*, причем единственная с точностью до замены параметра.*
Расстояние между (x_0, y_1) *и* (x_0, y_2) *равно* $|\ln(y_2) - \ln(y_1)|$*.*

Док-во: Пусть кривая $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(y))$ соединяет наши точки.

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{y} dt \geq \int_a^b \frac{|y'|}{y} dt \geq \int_a^b \frac{y'}{y} dt = \log(y(b)) - \log(y(a)).$$

Заметим, что выражение справа не зависит от кривой, и для вертикального отрезка достигается равенство. Таким образом, доказали, что вертикальный отрезок — кратчайший. Единственность следует из того, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $x' = 0$ и $y' \geq 0$.

Прямые и отрезки

Теорема (о прямых)

Прямые плоскости Лобачевского изометричны $\mathbb{R}$ (как метрические пространства).

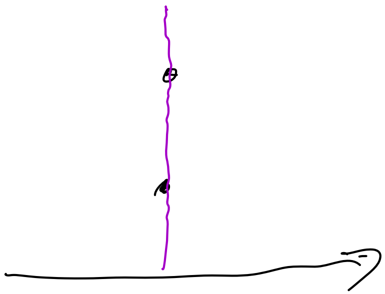
Док-во:

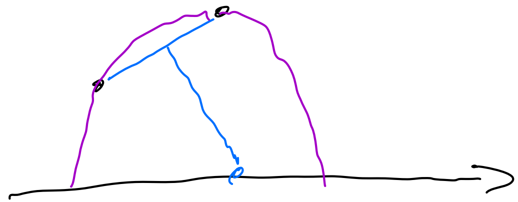
- Вертикальный луч $\{x = x_0, y > 0\}$ изометричен $\mathbb{R}$:

$$f(t) = (x_0, e^t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$$

- Любая полуокружность – образ вертикального луча при инверсии.

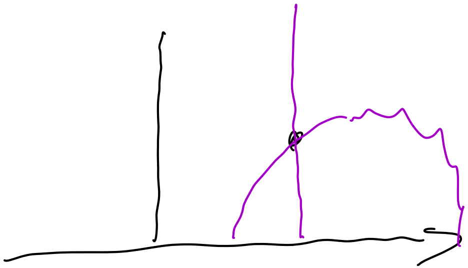
- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.





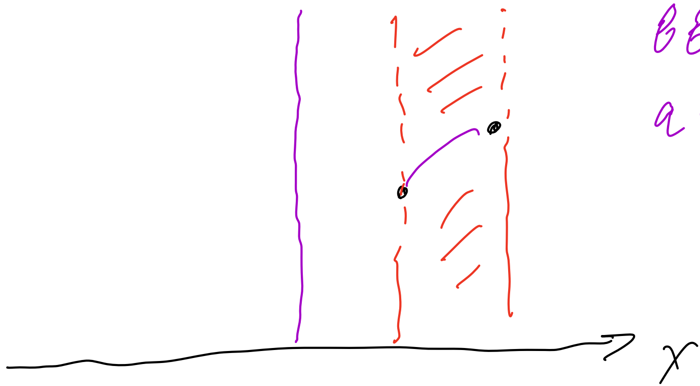
Аксиомы геометрии Лобачевского

- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.
- Аксиома параллельных неверна.



Аксиомы геометрии Лобачевского

- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.
- Аксиома параллельных неверна.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.



Вводим $\sim$

$a \sim b \Longleftrightarrow$ отрезок $[a, b]$

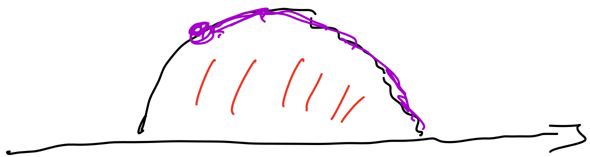
не пересекает прямую

Аксиомы геометрии Лобачевского

- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.
- Аксиома параллельных неверна.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Определение

Флагом называется тройка, состоящая из точки, луча (полупрямой) с началом в этой точке и полуплоскости, инцидентной этому лучу.



- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.
- Аксиома параллельных неверна.
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

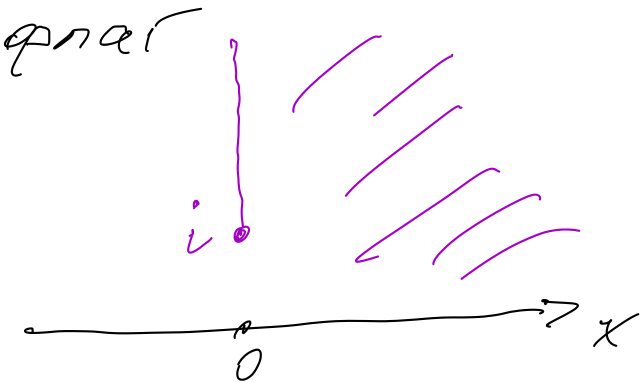
Определение

Флагом называется тройка, состоящая из точки, луча (полупрямой) с началом в этой точке и полуплоскости, инцидентной этому лучу.

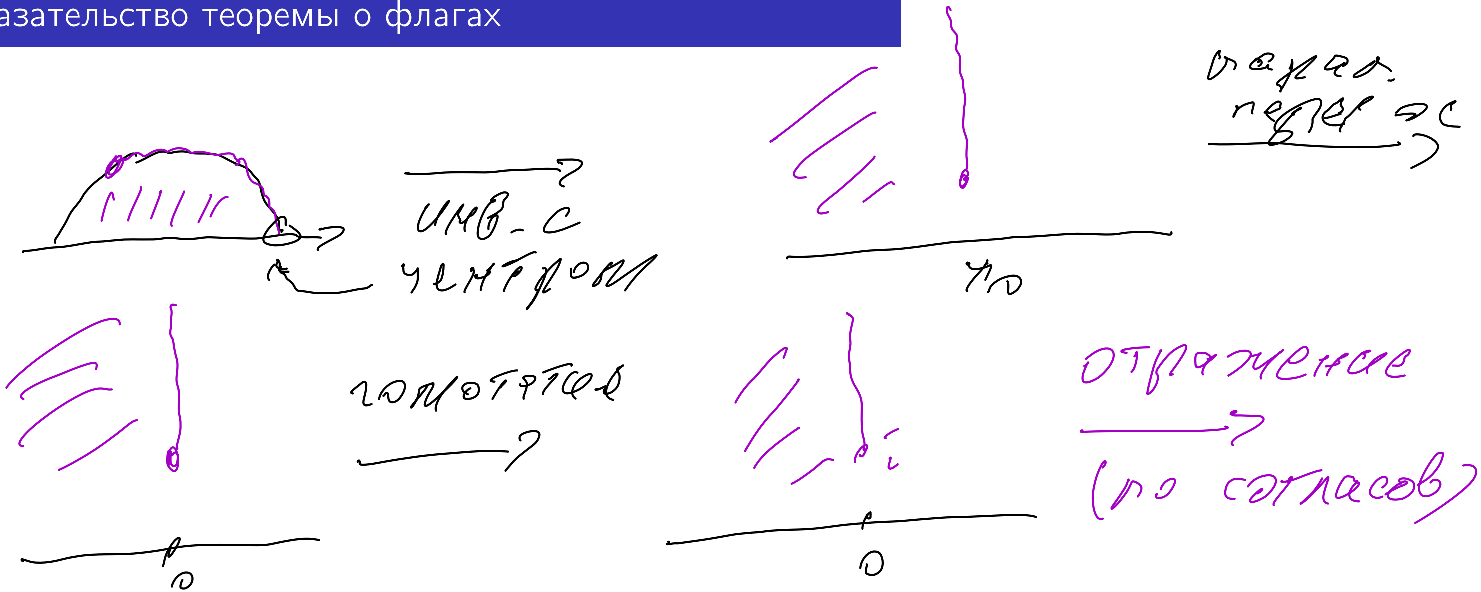
Теорема (о флагах)

Для любых двух флагов существует движение, переводящее один в другой.

Станд. флаг



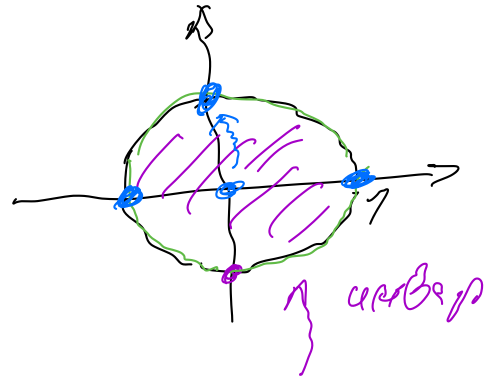
Доказательство теоремы о флагах

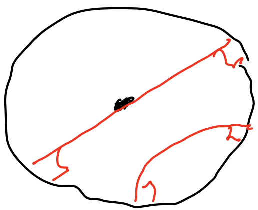


Определение

Модель Пуанкаре в единичном круге – образ модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости при инверсии с центром $(0, -1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

- Почему образ – круг с центром в 0 и радиуса 1?
- Как устроены прямые в новой модели?





Метрические коэффициенты в модели в круге

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Метрические коэффициенты в модели в круге

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$z_0 = (0, -1)$

Док-во: Пусть $\mathbb{D}^2$ – модель в круге с метрикой $\widehat{g}$.

- Инверсия $I\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$, в к.ч. $I(z) = z_0 + 2/\overline{(z - z_0)}$ – суперпозиция параллельного переноса, сопряжения и функции $f(z) = \cancel{1}\,2/(z - z_0)$ (мы смотрим на инверсию как на отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя).

Метрические коэффициенты в модели в круге

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Док-во: Пусть $\mathbb{D}^2$ – модель в круге с метрикой $\widehat{g}$.

- Инверсия $I\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$, в к.ч. $I(z) = z_0 + 2/\overline{(z-z_0)}$ – суперпозиция параллельного переноса, сопряжения и функции $f(z) = 1/(z-z_0)$ (мы смотрим на инверсию как на отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя).
- Пусть $v \in T_q\mathbb{D}^2$. Параллельный перенос и сопряжение сохраняют евклидову длину v. Следовательно

$$|d_qI(v)|_e = |d_qf(v)|_e = 2|v|_e/|z-z_0|^2,$$

поскольку $f'(z) = -2/(z-z_0)^2$ и $d_qf(v) = -2/(z-z_0)^2 \cdot v$.

Метрические коэффициенты в модели в круге

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Док-во: Пусть $\mathbb{D}^2$ – модель в круге с метрикой $\widehat{g}$.

- Инверсия $I\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$, в к.ч. $I(z) = z_0 + 2/\overline{(z-z_0)}$ – суперпозиция параллельного переноса, сопряжения и функции $f(z) = 1/(z-z_0)$ (мы смотрим на инверсию как на отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя).
- Пусть $v \in T_q\mathbb{D}^2$. Параллельный перенос и сопряжение сохраняют евклидову длину v. Следовательно

$$|d_qI(v)|_e = |d_qf(v)|_e = 2|v|_e/|z-z_0|^2,$$

  поскольку $f'(z) = -2/(z-z_0)^2$ и $d_qf(v) = -2/(z-z_0)^2 \cdot v$.
- Вторая координата точки $I(x,y)$ равна $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{1-x^2-y^2}{|z-z_0|^2}$.

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Док-во: Пусть $\mathbb{D}^2$ – модель в круге с метрикой $\widehat{g}$.

- Инверсия $I\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$, в к.ч. $I(z) = z_0 + 2/\overline{(z-z_0)}$ – суперпозиция параллельного переноса, сопряжения и функции $f(z) = 1/(z-z_0)$ (мы смотрим на инверсию как на отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя).
- Пусть $v \in T_q\mathbb{D}^2$. Параллельный перенос и сопряжение сохраняют евклидову длину v. Следовательно

$$|d_q I(v)|_e = |d_q f(v)|_e = 2|v|_e/|z-z_0|^2,$$

  поскольку $f'(z) = -2/(z-z_0)^2$ и $d_q f(v) = -2/(z-z_0)^2 \cdot v$.
- Вторая координата точки $I(x,y)$ равна $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{1-x^2-y^2}{|z-z_0|^2}$.
- $|v|_{\widehat{g}} = |d_q I(v)|_h = |d_q f(v)|_e/(\text{вторая координата точки } I(x,y)) = \frac{2}{1-x^2-y^2}|v|_e$.

$q = (x, y)$

Метрические коэффициенты в модели в круге

Теорема

Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид:

$$\widehat{g}_{ij}(x,y) = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Док-во: Пусть $\mathbb{D}^2$ – модель в круге с метрикой $\widehat{g}$.

- Инверсия $I\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$, в к.ч. $I(z) = z_0 + 2/\overline{(z-z_0)}$ – суперпозиция параллельного переноса, сопряжения и функции $f(z) = 1/(z-z_0)$ (мы смотрим на инверсию как на отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя).
- Пусть $v \in T_q\mathbb{D}^2$. Параллельный перенос и сопряжение сохраняют евклидову длину v. Следовательно

$$|d_qI(v)|_e = |d_qf(v)|_e = 2|v|_e/|z-z_0|^2,$$

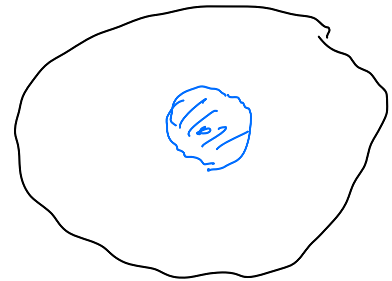
  поскольку $f'(z) = -2/(z-z_0)^2$ и $d_qf(v) = -2/(z-z_0)^2 \cdot v$.
- Вторая координата точки $I(x,y)$ равна $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{1-x^2-y^2}{|z-z_0|^2}$.
- $|v|_{\widehat{g}} = |d_qI(v)|_h = |d_qf(v)|_e/($вторая координата точки $I(x,y)) = \frac{2}{1-x^2-y^2}|v|_e$.
- Пусть $\lambda = 2/1-x^2-y^2$. Тогда

$$\langle v_1, v_2\rangle_{\widehat{g}} = \frac{|v_1+v_2|^2_{\widehat{g}} - |v_1-v_2|^2_{\widehat{g}}}{4} = \lambda^2\frac{|v_1+v_2|^2_e - |v_1-v_2|^2_e}{4} = \lambda^2\langle v_1, v_2\rangle_e.$$

Шары плоскости Лобачевского

Теорема

В обеих моделях плоскости Лобачевского метрические шары – это евклидовы шары с другим центром.



Док-во:

① Шар в модели $\mathbb{D}^2$ с центром в O → евкл шар с центр в O

(прям. в $\mathbb{D}^2$ ч/з O — диаметры)

② Применим к этому шару инверсию $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$. Он перейдёт в евкл. шар, т.к инверсия.

Упр: закончить теорему.

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, p – его точка,
$F(M)$ – множество всех функций $M \to \mathbb{R}$,
$\mathfrak{F}(M)$ – множество всех гладких функций $M \to \mathbb{R}$,
$V(M)$ – множество всех векторных полей на M
$\mathfrak{X}(M)$ – множество всех гладких векторных полей на M.

в алгебре тензор типа (k, t)
в $p \in M$

$$(T_p^* M)^{\otimes k} \otimes (T_p M)^{\otimes t}$$

Тензоры типов $(k,0)$ и $(k,1)$ на многообразиях

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, p – его точка,
$F(M)$ – множество всех функций $M \to \mathbb{R}$,
$\mathfrak{F}(M)$ – множество всех гладких функций $M \to \mathbb{R}$,
$V(M)$ – множество всех векторных полей на M
$\mathfrak{X}(M)$ – множество всех гладких векторных полей на M.

- тензор типа $(k,0)$ в точке p – полилинейное отображение

$$\widehat{S}(p)\colon\ T_pM^k \to \mathbb{R}.$$

- тензор типа $(k,1)$ в точке p – полилинейное отображение

$$\widehat{S}(p)\colon\ T_pM^k \to T_pM.$$

- Тензорное поле типа (k,t) на M – семейство $\{\widehat{S}(p)\}_{p\in M}$, где $\widehat{S}(p)$ – тензор типа (k,t) в точке $p \in M$.

$t=0$ или 1

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, p – его точка,
$F(M)$ – множество всех функций $M \to \mathbb{R}$,
$\mathfrak{F}(M)$ – множество всех гладких функций $M \to \mathbb{R}$,
$V(M)$ – множество всех векторных полей на M
$\mathfrak{X}(M)$ – множество всех гладких векторных полей на M.

- тензор типа $(k, 0)$ в точке p – полилинейное отображение

$$\widehat{S}(p) \colon T_pM^k \to \mathbb{R}.$$

- тензор типа $(k, 1)$ в точке p – полилинейное отображение

$$\widehat{S}(p) \colon T_pM^k \to T_pM.$$

- Тензорное поле типа (k, t) на M – семейство $\{\widehat{S}(p)\}_{p \in M}$, где $\widehat{S}(p)$ – тензор типа (k, t) в точке $p \in M$.

t - фиксир

- Тензорное поле $\{\widehat{S}(p)\}_{p \in M}$ порождает отображение

$$\widehat{S} \colon V(M)^k \to F(M) \quad \text{или} \quad \widehat{S} \colon V(M)^k \to V(M)$$

следующим образом: $\forall Y_1, \ldots, Y_k \in V(M)$ и $\forall p \in M$

$$\widehat{S}(Y_1, \ldots, Y_k)(p) := \widehat{S}(p)(Y_1(p), \ldots, Y_k(p)).$$

Соглашение

Далее будем рассматривать только тензоры типа $(k,0)$. Случай тензоров типа $(k,1)$ идентичен.

- Тензорное поле типа $(k,0)$ называется гладким, если $\forall Y_1,\dots,Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ функция $\widetilde{S}(Y_1,\dots,Y_k) \in \mathfrak{F}(M)$.
- Т.о. гладкое тензорное поле $\{\widehat{S}(p)\}_{p\in M}$ задаёт отображение $S\colon \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ – свое сужение на $\mathfrak{X}(M)^k$.

Пример

Риманова структура – гладкое тензорное поле типа $(2,0)$.

Упр: Д-ть, что $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ их поточечное умн-е $f \circ X \in \mathfrak{X}(M)$

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Лемма

Пусть $\{\widehat{S}(p)\}_{p\in M}$ – гладкое тензорное поле. Тогда $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \underline{\mathfrak{F}(M)}$ линейно по каждому аргументу над $\mathfrak{F}(M)$.

Док-во: Покажем, что $S(f_1 Y_1, \ldots, f_k Y_k) = f_1 \cdots f_k S(Y_1, \ldots, Y_k)$.
Достаточно проверить равенство поточечно $\forall p \in M$.

$$S(f_1 Y_1, \ldots, f_k Y_k)(p) = \widehat{S}(p)(f_1(p) Y_1(p), \ldots, f_k(p) Y_k(p)) =$$

$$= f_1(p) \cdots f_k(p) \widehat{S}(p)(Y_1(p), \ldots, Y_k(p)) = \underset{\substack{\uparrow \\ f_1(p)\ldots f_k(p)}}{f_1} \cdots f_k S(Y_1, \ldots, Y_k)(p).$$

линейность от суммы
д-ть сам-но