Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ *– полилинейно над* $\mathfrak{F}(M)$. *Тогда* S *порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа* $(k, 0)$.

$$S(Y_1, \dots, Y_k) \in \mathcal{F}(M)$$

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ – полилинейно над $\mathfrak{F}(M)$. Тогда S порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа $(k, 0)$.

Док-во: Сначала докажем вспомогательное утверждение:

$\forall\ Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ значение $S(Y_1, \dots, Y_k)(p)$ зависит только от $Y_1(p), \dots, Y_k(p)$, т.е. $\forall\ Y_i, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$

$$Y_1(p) = Z_1(p), \dots, Y_k(p) = Z_k(p) \Longrightarrow S(Y_1, \dots, Y_k)(p) = S(Z_1, \dots, Z_k)(p).$$

Тензоры типов $(k,0)$ и $(k,1)$ на многообразиях

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ – полилинейно над $\mathfrak{F}(M)$. Тогда S порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа $(k,0)$.

Док-во: Сначала докажем вспомогательное утверждение:

$\forall\ Y_1,\dots,Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ значение $S(Y_1,\dots,Y_k)(p)$ зависит только от $Y_1(p),\dots,Y_k(p)$, т.е. $\forall\ Y_i, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$

$$Y_1(p) = Z_1(p),\dots,Y_k(p) = Z_k(p) \Longrightarrow S(Y_1,\dots,Y_k)(p) = S(Z_1,\dots,Z_k)(p).$$

Рассмотрим два случая: Случай $k = 1$.
Этот случай разобъем на два шага

Шаг 1. Фиксируем карту U. Докажем, что если $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ совпадают на U, то $\forall p \in U$ имеем

$$S(Y)(p) = S(Z)(p).$$

Тензоры типов $(k,0)$ и $(k,1)$ на многообразиях

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ – полилинейно над $\mathfrak{F}(M)$. Тогда S порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа $(k,0)$.

Док-во: Сначала докажем вспомогательное утверждение:

$\forall\ Y_1,\dots,Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ значение $S(Y_1,\dots,Y_k)(p)$ зависит только от $Y_1(p),\dots,Y_k(p)$, т.е. $\forall\ Y_i, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$

$$Y_1(p) = Z_1(p),\dots,Y_k(p) = Z_k(p) \Longrightarrow S(Y_1,\dots,Y_k)(p) = S(Z_1,\dots,Z_k)(p).$$

Рассмотрим два случая: Случай $k=1$.
Этот случай разобъем на два шага

Шаг 1. Фиксируем карту U. Докажем, что если $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ совпадают на U, то $\forall p \in U$ имеем

$$S(Y)(p) = S(Z)(p).$$

Пусть $h : M \to \mathbb{R}$ – гладкий спуск с единицы, т.ч. $h(p) = 1$, $h|_{M\setminus U} = 0$.
Тогда

$$hY = hZ \Rightarrow S(hY) = S(hZ) \Rightarrow hS(Y) = hS(Z) \Rightarrow \underbrace{h(p)}_{=1}S(Y)(p) = \underbrace{h(p)}_{1}S(Z)(p) \Rightarrow S(Y)(p) = S(Z)(p).$$

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Продолжаем случай $k = 1$.

Шаг 2. Покажем, что $S(Y)(p)$ зависит только от $Y(p)$, $\forall\ Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

$Y: M \to TM \in C^\infty$

Продолжаем случай $k = 1$.
Шаг 2. Покажем, что $S(Y)(p)$ зависит только от $Y(p)$, $\forall\ Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ – координатные векторные поля карты $U \ni p$. Тогда в карте имеем разложение $Y|_U = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$.

$\alpha_i \in C^\infty$

Гладкое векторное поле $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ можно продолжить (была такая теорема) с карты на все многообразие. Получим новое поле $Z \in \mathfrak{X}(M)$, совпадающее с исходным полем Y в (уменьшенной) карте U. Тогда

$Y|_U = Z|_U$, U - новое

$Z = \sum \alpha_i E_i$ по опр на всем M

$$S(Z) = \sum \alpha_i S(E_i) \quad \text{в силу линейности } S$$

Шаг 1 $\rightsquigarrow$

$$S(Y)(p) = S(Z)(p) = \sum \alpha_i(p) S(E_i)(p).$$

Здесь $\alpha_i(p)$ – координаты вектора $Y(p)$, $S(E_i)(p)$ не зависит от ~~X~~ Y вообще.

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Продолжаем случай $k = 1$.
Шаг 2. Покажем, что $S(Y)(p)$ зависит только от $Y(p)$, $\forall\ Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Пусть $E_1, \dots, E_n$ – координатные векторные поля карты $U \ni p$. Тогда в карте имеем разложение $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$.

Гладкое векторное поле $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ можно продолжить (была такая теорема) с карты на все многообразие. Получим новое поле $Z \in \mathfrak{X}(M)$, совпадающее с исходным полем Y в (уменьшенной) карте U. Тогда

$$S(Z) = \sum \alpha_i S(E_i) \quad \text{в силу линейности } S$$

$$S(Y)(p) = S(Z)(p) = \sum \alpha_i(p) S(E_i)(p).$$

Здесь $\alpha_i(p)$ – координаты вектора $Y(p)$, $S(E_i)(p)$ не зависит от X вообще.

Доказ-, что если $Y_i(p) = Z_i(p)$

Рассмотрим случай $k > 1$.
Он сводится к случаю $k = 1$ следующим образом:

$$\underline{S(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k)(p)} = S(Z_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k)(p) =$$
$$= S(Z_1, Z_2, Y_3, \dots, Y_k)(p) = \dots = \underline{S(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k)(p)}.$$

Мы доказали вспомогательное утверждение.

Тензоры типов $(k, 0)$ и $(k, 1)$ на многообразиях

Приступаем к док-ву теоремы: Существование:

Пусть $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Сначала продолжим их до постоянных гладких векторных полей на U, а затем – до полей $V_1, \ldots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Значит, можно определить тензор $\widehat{S}(p)\colon T_pM^k \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\widehat{S}(p)(v_1, \ldots, v_k) = S(V_1, \ldots, V_k)(p).}$$

в силу предыдущего $\widehat{S}(p)$ зав. только от $v_1, \ldots, v_k$

Он будет полилинейным в силу полилинейности отображения S.
Очевидно, что тензорное поле $\{\widehat{S}\}_{p \in M}$ порождает S.

Единственность очевидна в силу формулы, написанной выше на этом слайде.

Упр подумать и объяснить

Касательные векторы и дифференцирования

Определение

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$. Определим функцию $Xf : M \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\forall p \in M$

$$Xf(p) = d_p f(X(p)).$$

Функция Xf – производная функции f вдоль векторного поля X.

Запись производной в координатах

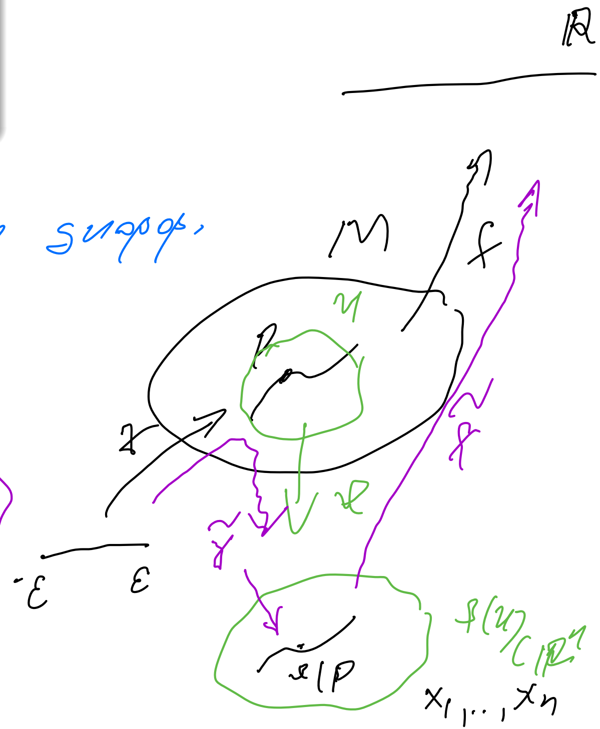
- Пусть $X(p) = [\gamma]$, где $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ – гладкая кривая и $\gamma(0) = p$. Тогда $Xf(p) = [f \circ \gamma] = (f \circ \gamma)'|_{t=0}$. по опр. дифф.
- Пусть (U, φ) – карта на M и $p \in U$. Введем обозначения:

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t));$$

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Т.е. $\tilde{\gamma}(t)$ и $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$ – представление кривой γ и функции f в локальных координатах карты (U, φ). Тогда $f \circ \gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}$ и, следовательно,

$$\boxed{Xf(p) = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\varphi(p))x_i'(0).}$$



Касательные векторы и дифференцирования

- с целью упрощения записи предыдущую формулу пишут в виде

$$\boxed{Xf(p) = \sum_i \alpha_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),}$$

подразумевая, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\varphi(p))$, а также, что $\alpha_i(p) = x_i'(0)$ — функция от кординат точки $\varphi(p)$.

- Пусть $E_1, \ldots, E_n$ – координатные векторные поля карты (U, φ).

$$E_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

т.е. дифференцирование функции вдоль координатного поля есть взятие частной производной, координатные поля часто обозначают $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Замечание

Все функции, стоящие в правой части формулы для $Xf(p)$, будут гладкими, поскольку $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Касательные векторы и дифференцирования

Св-ва дифференци-рований

Лемма

Докажите, что $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall\ f, g \in \mathfrak{F}(M),\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$:

1. $Xf \in \mathfrak{F}(M)$.
2. $X(af + bg) = aXf + bXg$.
3. $X(f \cdot g) = f \cdot Xg + g \cdot Xf$
4. $(X + Y)f = Xf + Yf$.
5. $(fX)g = f(Xg)$.

Док-во: опирается на формулу производной в координатах (с предыдущего слайда)

$$Xf(p) = \sum_i \alpha_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

Касательные векторы и дифференцирования

Определение

Отображение $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, удовлетворяющее условиям:

$$D(af + bg) = aD(f) + bD(g), \quad \text{(линейность над } \mathbb{R}\text{)}$$

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

для любых $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ и $a, b \in \mathbb{R}$ называется дифференцированием (оператором дифференцирования) кольца $\mathfrak{F}(M)$.

В силу леммы с предыдущего слайда, дифференцирование вдоль векторного поля X является оператором дифференцирования и обычно обозначается D_X.

Теорема (для информации, на экзамен не выносится)

Пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ — дифференцирование кольца $\overset{\mathfrak{F}}{\cancel{\mathfrak{A}}}(M)$. Тогда $D = D_X$ для некоторого единственного векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Для желающих: доказательство в лекциях С.В. Иванова – 3 семестр, лекция 14.

Скобка Ли векторных полей

$E_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$

$E_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f$

Лемма

Для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ существует единственное поле $Z \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ справедливо равенство

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf).$$

Док-во: Единственность: Пусть Z – такое поле, (U, φ) – карта на M и $p \in U$. Запишем поля X, Y в локальных координатах

$$X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

– разл. поля по базису

Тогда $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$

$$X(Yf)(p) = X\left(\sum_j \beta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$Y(Xf)(p) = Y\left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

По лемме св-ва дифф-з.

Следовательно,

$$Zf(p) = \sum_{i,j} \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

Формула (1) гарантирует нам единственность.

Скобка Ли векторных полей

Док-во: Существование: В каждой карте атласа многообразия M зададим поле

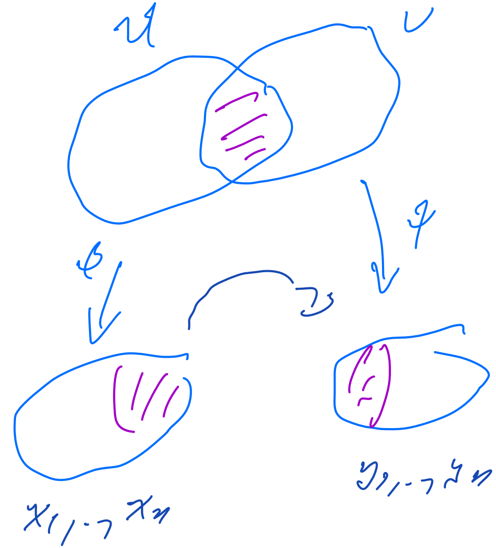
$$Z = \sum_{i,j} \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Осталось показать, что на пересечении карт построенные поля совпадут. Пусть (V, ψ) – такая карта на M с координатами y_i, что $p \in U \cap V$.

Упражнение

Докажите, что координаты α_i и $\widetilde{\alpha}_i$ вектора $v \in T_pM$ в картах U и V связаны формулой

$$\alpha_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \widetilde{\alpha}_s.$$



$$\varphi \circ \psi^{-1} = (x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n))$$

Закончить док-во.

Свойства скобки Ли

Определение

Скобкой Ли (коммутатором) векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ называется такое векторное поле $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, что

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M).$$

Лемма

Пусть M – гладкое многообразие, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $[aX, Y] = a[X, Y]$.
2. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
3. $[X, Y] = -[Y, X]$.
4. $[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X$.
5. $[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$.
6. *Тождество Якоби:* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

(1) $[aX, Y] = aX(Yf) - Y((aX)f)$

$Y(a(Xf))$

$aY(Xf)$

Св-ва !
диф-я :

Свойства скобки Ли

Определение

Скобкой Ли (коммутатором) векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ называется такое векторное поле $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, что

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M).$$

Лемма

Пусть M – гладкое многообразие, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $[aX, Y] = a[X, Y]$.
2. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
3. $[X, Y] = -[Y, X]$.
4. $[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X$.
5. $[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$.
6. *Тождество Якоби:* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Док-во: пункт 5

$\forall g \in \mathfrak{F}(M)$ имеем:

опр [ ]

$$[X, fY]g = X((fY)g) - (fY)(Xg) = X(f(Yg)) - f(Y(Xg)) =$$
$$= (Xf)(Yg) + f(X(Yg)) - f(Y(Xg)) = (f[X, Y])g + (Xf)(Yg) =$$
$$= (f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y)g.$$

Скобка Ли координатных полей

Определение

Векторные поля называются *коммутирующими*, если их скобка Ли равна 0.

Упражнение

Докажите, что

1. Скобка Ли координатных векторных полей равна 0.
2. Если два векторных поля имеют постоянные координаты в некоторой карте, то их скобка Ли в пределах этой карты равна 0.

Поведение скобки Ли при отображениях

Соглашение

Иногда вместо $X(p)$ удобнее писать X_p, где $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.

Определение

Пусть M, N — гладкие многообразия, $F\colon M \to N$ — гладкое отображение. Будем говорить, что F *переводит* векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ в векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(N)$, если для всех $p \in M$

$$Y_{F(p)} = d_pF(X_p).$$

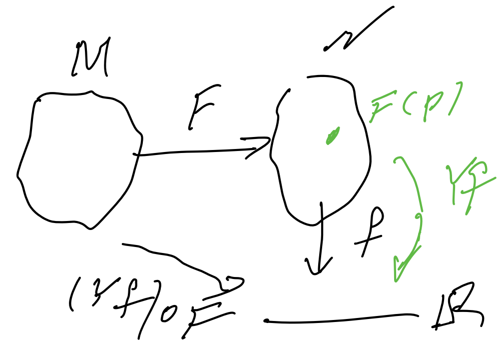
Замечание

Поле Y, удовлетворяющее этому определению, может быть не единственным. Однозначно определены лишь его значения в точках из $F(M)$.

Кроме того, такое поле Y не обязательно существует (например, если $F(p) = F(q)$, но $d_pF(X_p) \neq d_qF(X_q)$ для некоторых $p, q \in M$).

Существование и единственность поля Y имеет место, если F – диффеоморфизм.

Поведение скобки Ли при отображениях



Лемма

Условие "F переводит X в Y" эквивалентно следующему:

$$(Yf)\circ F = X(f\circ F)$$

для любой функции $f\in\mathfrak{F}(N)$.

Док-во: F переводит X в $Y \Leftrightarrow \forall p\in M\ d_pF(X_p) = Y_{F(p)} \Leftrightarrow f\in\mathfrak{F}(N)$

$$X(f\circ F)(p) = d_p(f\circ F)(X_p) = d_{F(p)}f(d_pF(X_p)) = d_{F(p)}f(Y_{F(p)}) = Yf(F(p)).$$

Теорема

Пусть M, N – гладкие многообразия, $F\colon M\to N$ – гладкое отображение. Предположим, что F переводит поля $X_1, X_2\in\mathfrak{X}(M)$ в поля $Y_1, Y_2\in\mathfrak{X}(N)$, соответственно. Тогда F переводит $[X_1, X_2]$ в $[Y_1, Y_2]$.

Док-во: Из леммы получаем

$$(Y_1(Y_2f))\circ F = X_1((Y_2f)\circ F) = X_1(X_2(f\circ F)).$$

Вычитая аналогичное тождество с переставленными индексами 1 и 2, получаем

$$([Y_1, Y_2]f)\circ F = [X_1, X_2](f\circ F),$$

что и требовалось.

Поведение скобки Ли при отображениях

Пусть N – гладкое подмногообразие в M.

Определение

Будем говорить, что векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ касается N, если для любой точки $p \in N$ верно, что $X_p \in T_pN$.

Следствие

Пусть N — гладкое подмногообразие в M, X и Y — векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$, касающиеся N. Тогда $[X, Y]$ тоже касается N. Более того, сужение $[X, Y]|_N$ скобки Ли на N совпадает со скобкой Ли полей $X|_N$ и $Y|_N$, рассматриваемых как элементы $\mathfrak{X}(N)$.

Док-во: Применим теорему к отображению вложения $i : N \to M$, заметив, что оно переводит $X|_N$ и $Y|_N$ в X и Y соответственно.