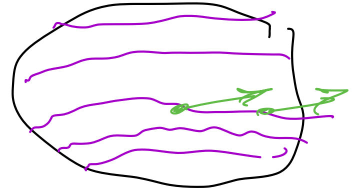
Геодезические на римановом многообразии



Пусть M – риманово многообразие о связностью Леви-Чивита ∇.

Определение

Гладкая кривая $\gamma\colon I \to M$ называется **геодезической** (в точке или на $[a,b] \subseteq I$), если $\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0$.

Замечание

Это определение зависит от параметризации.

Упр: Если φ – замена параметра и $\widetilde{\gamma} = \gamma(\varphi)$ – геодез., то φ – линейно

Лемма (простейшие свойства геодезических)

Пусть $\gamma(t)$ – геодезическая на M. Тогда

1. $|\gamma'(t)| = const.$
2. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ *кривая* $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(at+b)$ *будет геодезической.*

Док-во:

прошлая лекция

1.
$$\frac{d}{dt}\langle\gamma',\gamma'\rangle = 2\langle\frac{\nabla}{dt}\gamma',\gamma'\rangle = 0 \implies |\gamma'|^2 = \langle\gamma',\gamma'\rangle = \text{const}$$

2.
$$\frac{\nabla}{dt}\widetilde{\gamma}' = \nabla_{\widetilde{\gamma}'}\widetilde{\gamma}' = \nabla_{a\gamma'}a\gamma' = a^2\nabla_{\gamma'}\gamma' = \frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0.$$

св-во 3 – Почему применимо?

Геодезические на римановом многообразии

Замечание

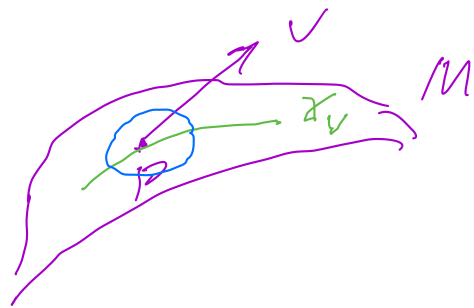
Из этой леммы можно сделать 2 вывода.

1. Там где это удобно можно рассматривать натурально параметризованные геодезические.
2. Постоянный путь $\gamma(t) = p = const$ при всех $t \in I$ всегда является геодезической. Такие геодезические называют *вырожденными*. Если на геодезической γ хотя бы в одной точке $\gamma'(t_0) = 0$, то и во всех точках $\gamma'(t) = 0$ и геодезическая – *вырожденная*. Поэтому невырожденная геодезическая всегда является регулярным путем.

.

Теорема (существование и единственность геодезической)

Пусть M – риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇, p – произвольная точка из M, и $v \in T_pM$ – произвольный касательный вектор. Тогда существует геодезическая γ_v, такая, что $\gamma_v(0) = p, \gamma_v'(0) = v$. Более того, такая геодезическая единственна в том смысле, что любые две такие геодезические совпадают в пересечении областей определения.



Док-во (теоремы о существовании и единственности геодезической):

Теорема

Для любой гладкой кривой γ на M, любой точки $t_0 \in I$ и любого вектора $V^0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ существует единственное параллельное векторное поле V вдоль γ такое, что $V(t_0) = V^0$.

Здесь кривая $\gamma(t)$ была задана изначально. Мы фиксировали карту и обозначали через $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ локальное представление $\gamma(t)$. Поле $V(t) = \sum v_i(t)E_i(t)$ возникало как решение системы дифференциальных (линейных) уравнений на $v_k(t)$

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{ij} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0$$

с начальным условием $v_k(t_0) = v_k^0$. Заменим v_k на x_k'

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Задача Коши для последней системы при любых начальных условиях

$$x_i(0) = a_i, \quad x_i'(0) = b_i$$

имеет единственное решение в некоторой окрестности точки 0.

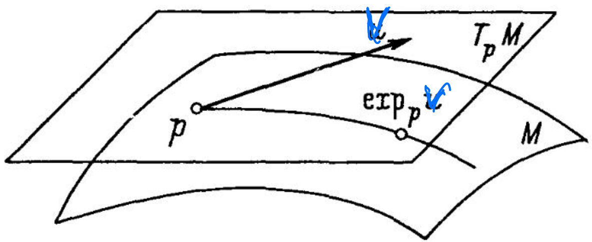
Экспоненциальное отображение (экспонента)

Определение

Для фиксированной точки p риманова многообразия M отображение $\exp_p : T_pM \to M$, действующее по правилу

$$\exp_p v := \gamma_v(1),$$

где $v \in T_pM$ и γ_v — такая геодезическая, что $\gamma_v(0) = p, \gamma_v'(0) = v$, называется экспоненциальным отображением.



Проблема: Хотя геодезическая γ_v существует, она может быть не продолжима до значения параметра $t = 1$.

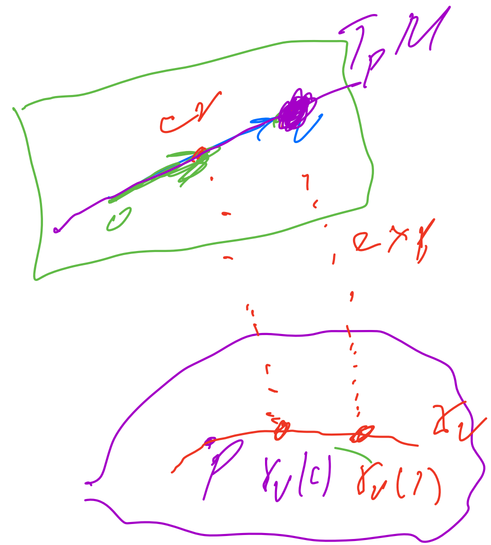
Экспоненциальное отображение

Лемма

Пусть $v \in T_pM$ — произвольный ненулевой вектор.

1. *Если $\exp_p v$ неопределено, то $\exists\ c \in (0,1)$ такое, что $\exp_p(cv)$ определено.*
2. *Если $\exp_p v$ определено, то $\exp_p(cv)$ определено $\forall\ c \in [0,1]$.*
3. *Если $\exp_p v$ определено, то геодезическая $\gamma_v(\tau)$ на участке $\tau \in [0,1]$ имеет длину $|v|$.*

Док-во: $\gamma_v(1)$ не опр.



1) $\exists\ c \in (0,1)$ такое, что $\gamma_v(c)$ определена. Тогда $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma_v(ct)$ – геодезическая (получается из γ линейной заменой), $\widetilde{\gamma}(0) = p$ и $\widetilde{\gamma}'(0) = c\gamma_v'(0) = cv$. Поэтому $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma_{cv}(t)$. Следовательно, равенство

$$\boxed{\gamma_v(ct) = \gamma_{cv}(t)}$$

справедливо $\forall\ t \in [0,1] \implies \exp_p(cv) = \gamma_{cv}(1)$ определено.

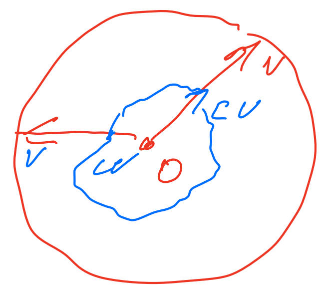
2) $\exp_p v = \gamma_v(1)$ определено $\implies \exp_p(cv) = \gamma_{cv}(1) = \gamma_v(c)$ определено, поскольку $c \leqslant 1$.

3)

$$\int_0^1 |\gamma_v'(\tau)|d\tau = \int_0^1 |\gamma_v'(0)|d\tau = |\gamma_v'(0)| = |v|.$$

Теорема

Для любой точки $p \in M$ существует такая окрестность V нуля в пространстве T_pM, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено для всех $v \in V$ и является диффеоморфизмом окрестности V на ее образ $\exp_p V$ в M.



Док-во:

1) Докажем, что $\exp_p$ определена в некоторой окрестности нуля и является гладкой.

В силу леммы, для каждого направления $v \in T_pM$, $|v| = 1$, существует такое число $c > 0$, что отображение $\exp_p$ определено на отрезке $[0, cv] \subset T_pM$.

Теперь возьмем самое маленькое такое λ_0 при движении вектора v по окружности. Конечно для такого выбора λ_0 нужно еще применять компактность окружности и теорему о гладкой зависимости от начальных данных решения системы из диффуров. Тогда отображение $\exp_p$ определено в шаре $B_{\lambda_0}(0)$ пространства T_pM.

$f(v) = c \in C^{\infty}$???

Продолжаем доказательство теоремы

2) Докажем, что $d_0 \exp_p = id_{T_pM}$.

$d_0 \exp_p : T_0(T_pM) = T_pM \to T_pM$. Здесь касательное пространство $T_0(T_pM)$ пространства T_pM канонически отождествлено с самим T_pM.

Пусть $v \in T_pM$ и $\alpha(t) = tv$ – кривая в T_pM. Тогда $v = [\alpha]$.

$d_0 \exp_p(v) = (\exp_p \circ \alpha)'(0) = \gamma_v'(0) = v$.

Применяем теорему об обратной функции и теорема доказана.

Определение

Радиусом инъективности многообразия M в точке p называется

$$\rho_{inj} = \sup\{\rho > 0 : \exp_p|_{B_\rho(0)} \text{ — диффеоморфизм}\}.$$

Радиус инъективности может быть бесконечным.

Теорема (ρ_{inj} локально отделен от 0)

Для любой точки $p \in M$ существует такая окрестность $U \ni p$, что

$$\inf_{x \in U} \rho_{inj}(x) > 0.$$

Пока без доказательства.