Примеры римановых многообразий

$M \subset N$

$T_pM \subset T_pN$

1. M – гладкое мн-е, N – римановое мн-е. Тогда вложение $M \subset N$ индуцирует риманову структуру на M.
   Частный случай, $N = \mathbb{R}^n$.

2. M – гладкое мн-е, N – римановое мн-е. Тогда погружение $f : M \to N$ индуцирует риманову структуру на M:
   для любой точки $p \in M$ и любых векторов $u, v \in T_pM$

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d_pf(u), d_pf(v)\rangle_{f(p)}.$$

3. M – область в $\mathbb{R}^n$.
   $g_{ij}(p)$ – набор гладких функций на M таких, что (g_{ij}) – матрица симметричной положительно определенной формы на M.

Пример:

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y > 0\}$

$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

Длины и расстояния

Определение

Пусть (M, g) – риманово многообразие, $p \in M$, $v \in T_p(M)$. Тогда *длиной* вектора v в римановой метрике g называется число

$$|v|_g = \sqrt{g_p(v, v)}. = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Определение

Длина гладкой кривой $\gamma \colon [a, b] \to M$:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|_g dt.$$

Определение

Кривая γ называется *кусочно-гладкой*, если γ непрерывно и существует разбиение отрезка $[a, b]$, на каждом элементе которого γ – гладкая функция.

Определение

Длина кусочно-гладкой кривой – сумма длин ее гладких частей.

Риманово расстояние между точками

Определение

Римановым расстоянием между точками $x, y \in M$ называется число

$$d(x,y) = \inf \ell(\gamma),$$

где инфимум берется по всем кусочно-гладким кривым, соединяющим x и y.

Замечание

Мы добавили условие связности в определение риманова многообразия для корректности определения.

Теорема (о римановом расстоянии)

Пусть (M, g) – риманово многообразие. Тогда (M, d) – метрическое пространствою

Упражнение

Докажите, что топология, индуцированная метрикой d, совпадает с топологией многообразия M.

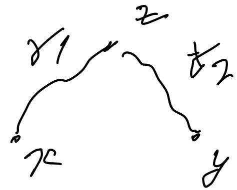
Доказательство теоремы о римановом расстоянии

Свойства $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ – очевидны.

Доказательство теоремы о римановом расстоянии

Свойства $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ – очевидны.

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \gamma_1, \gamma_2$

$$\ell(\gamma_1) < d(x, z) + \varepsilon/2$$

$$\ell(\gamma_2) < d(z, y) + \varepsilon/2$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\underline{d(x, y)} \leq \ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) < \underline{d(x, z) + d(z, y) + \varepsilon}$$

Доказательство теоремы о римановом расстоянии

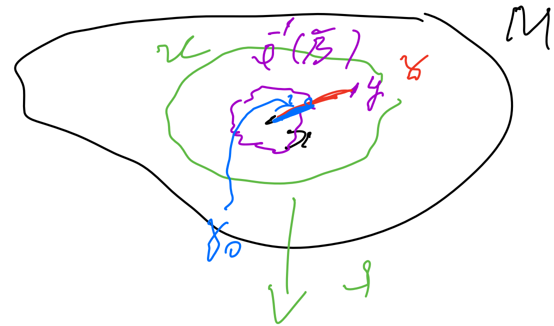
Свойства $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ – очевидны.

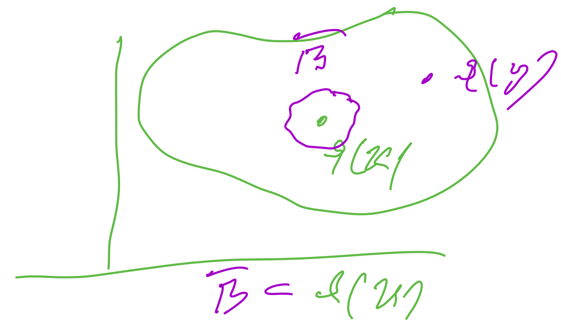
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Остается доказать, что если $x \neq y$, то $d(x,y) > 0$.

- Для этого мы построим вокруг каждой точки некоторую окрестность, выйти из которой можно будет только пройдя ненулевую длину.
- Возьмем любую карту (U, φ), содержащую точку x. Пусть $\overline{B}$ – замкнутый шар с центром в $\varphi(x)$ такого маленького радиуса r, что $\overline{B} \subset \varphi(U)$, и если $y \in U$, то $\varphi(y) \notin \overline{B}$.
- Пусть $\gamma\colon [a,b] \to M$ – кусочно-гладкая кривая, соединяющая x с y. Обозначим $t_0 = \inf\{t \in [a,b] : \gamma(t) \notin \varphi^{-1}(\overline{B})\}$. Пусть $\gamma_0 = \gamma|_{[a,t_0]}$.
- Предъявим такую констатнту c, не зависящую от γ, что $\ell(\gamma_0) \geq cr$.

$c > 0$





$v \in TU = \bigcup\limits_{z \in U} T_z M$ $\quad v \to |v|_g$

$v \longrightarrow |v|_e$ — евкл. длина коорд. предст. v.

v : коорд предст $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$

$|v|_e = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}$ $\qquad |v|_g = \sqrt{\sum g_{ij} \xi^i \xi^j}$

Ф-я : $\dfrac{|v|_g}{|v|_e}$ — непр. (вл бр нул вект) Сужаем эту ф-ю. Точка $\in f^{-1}(\overline{B})$, $|v|_e = 1$

Непр на комп ф-я имеет наиб и наим зн-е $c, C > 0$.

γ - кривая в $f^{-1}(\overline{B})$

$l_e(\gamma) \cdot c \leq l_g(\gamma) \leq l_e(\gamma) \cdot C$

Цель: $\exists$ const $C, c > 0$: $\forall z \in f^{-1}(\overline{B})$ $\forall v \in T_z M$

$c|v|_e \leq |v|_g \leq C|v|_e$.

Плоскость Лобачесвского (гиперболическая плоскость)

Определение

Плоскостью Лобачевского называется множество $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ с римановой структурой

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Абсолют плоскости Лобачевского – прямая $y = 0$.

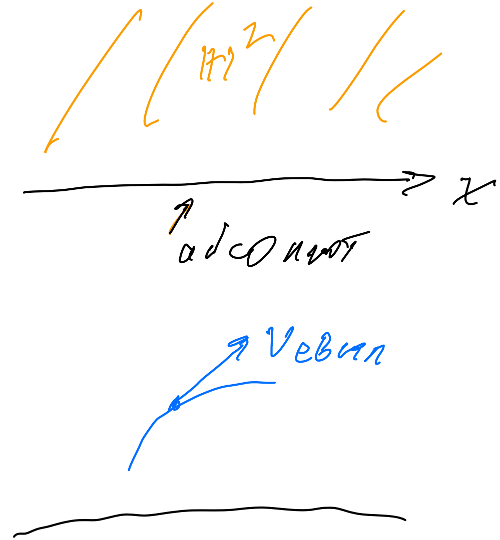
- длина вектора $v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$

$$\boxed{|v|_h = \frac{|v|_e}{y}.}$$

- длина кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(y))$

$$\ell_h(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|_e}{y(t)}dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}dt.$$

- углы между касательными векторами в плоскости Лобачевского совпадают с обычными евклидовыми углами.



Элементарные движения плоскости Лобачесвского

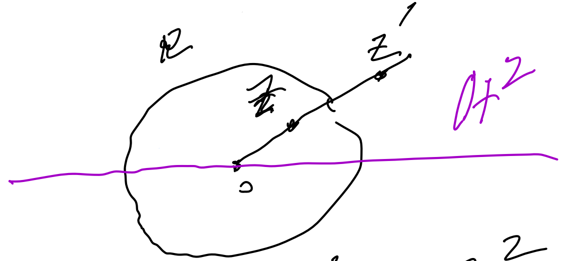
Теорема

Следующие преобразования $\mathbb{H}^2$ являются изометриями $\mathbb{H}^2$:

1. *Горизонтальные параллельные переносы.*
2. *Симметрии относительно вертикальных прямых.*
3. *Евклидовы гомотетии с центром на абсолюте и положительным коэффициентом.*
4. *Инверсии с центром на абсолюте.*

Определение

Движения из теоремы называются элементарными.



$|Oz| \cdot |Oz'| = R^2$

$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

Осн. идея: док-ть, что (1)–(4) сохр длины векторов

(1) гор. перенос — диффеоморфизм

$|v|_e$ – сохр, коорд y точки тоже сохр.

(3) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \gamma' = (x'(t), y'(t))$

$f \circ \gamma(t) = (k \cdot x, k \cdot y)$ $\quad (f \circ \gamma)' = (k \cdot x', k \cdot y')$

гомотетия с центром в O (п 1. позв перенос. центр)

4) дост. рассм инв-и с центром в 0 и радиусом 1 (гомотетия)

С: инв $I(z) = \frac{1}{z} = \overline{\frac{1}{z}} = f(z)$

$f'(z) = -1/z^2$

$$\boxed{d_z f(v) = -\frac{1}{z^2} \cdot v}$$

Остаётся понять, что после преобр v длина вект становится $|v|_e / |z|^2$

а точка с коорд y переходит в точку с коорд $y/|z|^2$.