

Пусть M – риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇ .

Теорема

Пусть $p \in M$, $v \in T_p M$, $|v| < \rho_{inj}(p)$, $\gamma_v: [0, 1] \rightarrow M$ – геодезическая, $\gamma(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$. Тогда γ – кратчайший кусочно-гладкий путь между $\gamma_v(0)$ и $\gamma_v(1)$.

Док-во:

- Пусть γ – произвольный кусочно-гладкий путь между $\gamma_v(0)$ и $\gamma_v(1)$, т.е. $\gamma(0) = \gamma_v(0)$ и $\gamma(1) = \gamma_v(1)$. Нужно доказать, что $\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_v)$. ✓

- Сократим путь γ так, чтобы он не проходил через p и не уходил от нее дальше чем $\gamma_v(1)$.

Обозначим $r := |v|$, $\bar{B}_r(0)$ – замкнутый шар в $T_p M$,

$U := \exp_p(B_r(0))$, $\partial U := \exp_p(\partial B_r(0))$. Еще обозначим:

$a := \max\{t \in [0, 1] : \gamma(t) = p\}$,

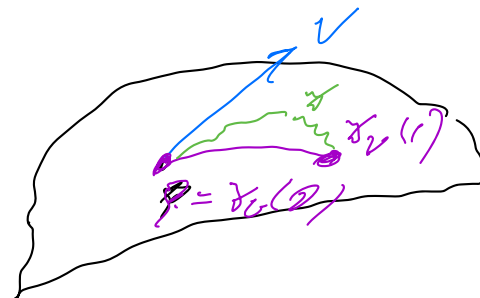
$b := \min\{t \in (a, 1] : \gamma(t) \in \partial U\}$.

Докажем, что $\ell(\gamma|_{[a,b]}) \geq \ell(\gamma_v)$.

- Поднимем $\gamma|_{[a,b]}$ в $T_p M$. $\tilde{\gamma} := \exp_p^{-1}(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.

- Обозначим: $\rho(t) = |\tilde{\gamma}(t)|$, $u(t) = \tilde{\gamma}'(t)/\rho(t)$. }

Тогда $\tilde{\gamma}(t) = \rho(t) \cdot u(t)$.



- Спускаемся обратно на M .

$$\gamma = \exp_p \circ \tilde{\gamma} \quad \gamma'(t) = d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(\tilde{\gamma}'(t)).$$

- $\tilde{\gamma}'(t) = (\rho(t) \cdot u(t))' = \rho'(t) \cdot u(t) + \rho(t) \cdot u'(t)$, где $u \perp u'$, т.к. $|u| = 1$.

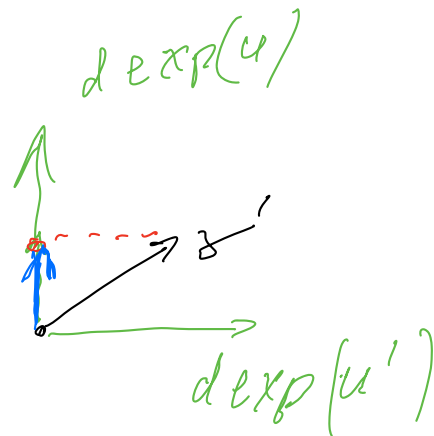
- $d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(\tilde{\gamma}'(t)) = \rho'(t) \cdot d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t)) + \rho(t) \cdot d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(u'(t)).$ ✓

- Т.к. $u \perp u'$ и $|u| = 1$, то по лемме Гаусса $d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t)) \perp d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(u'(t))$ и $|d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t))| = 1$.

- $|\gamma'(t)| = |d_{\tilde{\gamma}(t)} \exp_p(\tilde{\gamma}'(t))| \geq |\rho'(t)| \geq \rho'(t).$

- $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(\tau)| d\tau \geq \int_a^b \rho' d\tau = r = \ell(\gamma_v).$

Теорема доказана.



Определение

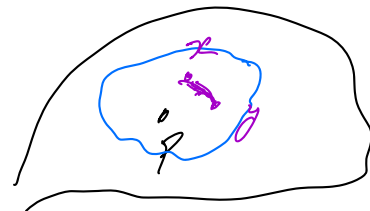
Отрезок в M – кусочно гладкий путь, реализующий расстояние между концами.

Замечание

Отрезок между любыми двумя точками гарантированно существует только в полном многообразии.

Упражнения

- 1 Любой отрезок в M изометричен отрезку в \mathbb{R} .
- 2 $\forall p \in M$ найдется такая окрестность U , что любые две точки этой окрестности соединяются отрезком.
- 3 Любой отрезок в M – геодезическая.
- 4 Пусть $p \in M$ и $r < \rho_{inj}(p)$, $S_r \subset T_p M$ – сфера радиуса r с центром в 0 в $T_p M$. Тогда $\exp_p(S_r)$ – сфера радиуса r с центром в p в M .



Теорема

Для любой точки $p \in M$ существует такая окрестность $U \ni p$, что

$$\inf_{x \in U} \rho_{inj}(x) > 0.$$

Док-во:

- Мы уже знаем, что:
 $\exp: TM \rightarrow M$ – гладкое отображение, определенное на открытом подмножестве TM .

$$\exp_p = \exp|_{T_p M}. \quad d_0 \exp_p = \text{id}_{T_p M}.$$

- Зададим частично определенную гладкую функцию
 $F: TM \rightarrow M \times M$ правилом

$$\forall p \in M \forall v \in T_p M \quad F(v) := (p, \exp_p(v)).$$

- Покажем, что $d_0 F \neq 0$. *det $\neq 0$*

Доказываем в картах, что матрица $d_0 F = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$.

Пусть $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ – координаты в карте TU .

$$\text{Тогда } \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ [d_0 \exp_p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}.$$

*$0 \notin d_0 F$??
 $0 \in T_p M$*

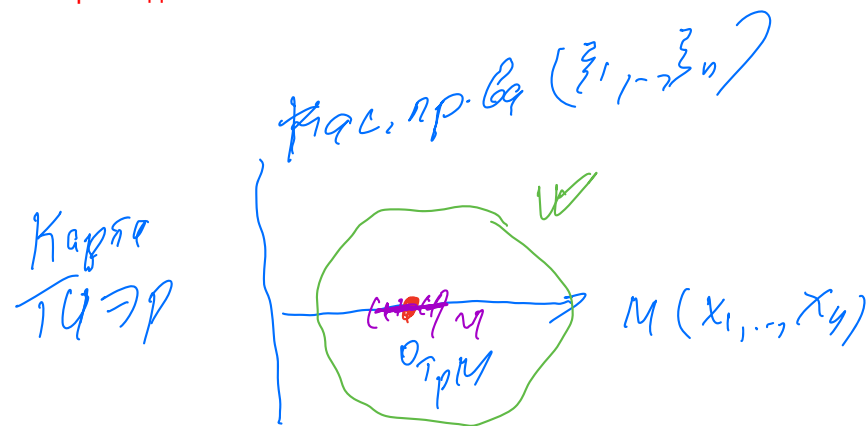
- Применяем теорему об обратной функции:
Найдется такая окрестность W точки $0 \in T_p M$, что сужение $F|_W$ есть диффеоморфизм W на $F(W)$.

- Найдется такая окрестность U точки $p \in M$ и такое число $r > 0$,
что

$$\bigcup_{x \in U} B_r^{T_x M}(0) \subset W.$$

- Тогда $\forall x \in U$: $\exp_x = F|_{T_x M}$ – диффеоморфизм шара $B_r^{T_x M}(0)$ на его образ.

Теорема доказана.



Связность Леви-Чивита и символы Кристоффеля для подмногообразий в \mathbb{R}^n (обзорно)

Пример (напоминание): ∇ в \mathbb{R}^n .

Любое $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ можно считать гладкой функцией $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда

$\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$

дифференцирования вдоль X равенством:

$\forall Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ полагаем $\nabla_X Y = (Y'_X)_p = d_p Y(X_p)$.

Подмногообразие M в \mathbb{R}^n .

Пусть $r: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ — простая регулярная поверхность, $M = r(U)$,

$x \in U$, $p = r(x)$, (x_i) — координаты в U . Размерности любые.

Определение

Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ковариантная производная $\nabla_X Y$ вдоль X определяется равенством

$$\nabla W = \Pr_{T_P M}(Y'_X)$$

где Y'_X — как в предыдущем примере, $\text{Pr}_{T_p M}$ — ортогональная проекция на $T_p M$.

Дип: За τ - сложность τ -го
левый-учб

$$\nabla - \text{св. } n-4$$

↑ 4 сэтгэср

3) СЕМЕСТР

$$\gamma - \text{ноб-тб}$$

$$\gamma_{ij} = \text{Pr}_{\text{ipm}}(\gamma_{x_i x_j})$$

Γ^k_{ij} - part of Γ^i_j
no day 24

$$Y'_X = X(Y)$$

Поиск $Y = \sum g_i \mathcal{Z}_{X_i} \quad (E_i = \mathcal{Z}_{X_i})$
 $X = \sum f_j \mathcal{Z}_{X_j}$

$$\mathcal{Z}_{X_j}(\mathcal{Z}_{X_i}) = \mathcal{Z}_{X_i X_j}$$

полн функ

произв функ
вдоль поля

Xf
в коорд

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = E_i f$$