Касательное расслоение

Определение

Касательным расслоением гладкого многообразия M^n называется множество
$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M).$$
Касательные пространства вида T_pM называются слоями касательного расслоения $T(M)$.

Теорема

$T(M)$ является гладким многообразием размерности $2n$.

Док-во: Пусть (U, φ) – карта на M. Положим
$$T(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p(M).$$
Зададим отображение $\Phi_U \colon T(U) \to \mathbb{R}^{2n}$: Для $v \in T_pM$, где $p \in U$, определяем
$$\Phi_U(v) = (\varphi(p), v_\varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$
Φ_U биективно отображает $T(U)$ на открытое множество $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Гладкий атлас на $T(M)$ – это множество $\{(T(U), \Phi_U)\}$ по всем картам (U, φ) на M.

- эти карты покрывают $T(M)$.
- Пусть $(T(U), \Phi_U)$ и $(T(V), \Phi_V)$ – карты на $T(M)$, порождаемые картами (U, φ) и (V, ψ) на M. Тогда функция перехода имет вид

  $$\Phi_V \circ \Phi_U^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})),$$

  и согласованность карт в $T(M)$ следует из согласованности карт в M.
- Φ_U – гомеоморфизм.

Дифференциал отображения в точке

Пусть M^m, N^n – гладкие многообразия,
$f : M \to N$ — гладкое отображение,
$p \in M$.

Определение

Дифференциал (касательное отображение) f в точке p — отображение

$$d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N,$$

определяемое следующим образом:

Для $v \in T_p M$, представленного кривой α, $d_p f(v)$ — вектор из $T_{f(p)} N$, представленный кривой $f \circ \alpha$.

Корректность и т.д.

Теорема

1. *$d_p f$ определено корректно;*
2. *$d_p f$ – линейное отображение из T_pM в $T_{f(p)}N$.*
3. *Для карт φ и ψ в окрестностях p и $f(p)$*

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_pM$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

Теорема

1. *$d_p f$ определено корректно;*
2. *$d_p f$ – линейное отображение из $T_p M$ в $T_{f(p)} N$.*
3. *Для карт φ и ψ в окрестностях p и $f(p)$*

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_p M$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

Замечание

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, определение дифференциала согласовано с обычным, с учетом стандартных изоморфизмов $T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ и $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
Это следует из третьего утверждения теоремы для тождественных карт.

Доказательство теоремы

Пусть $v \in T_pM$ представлен кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$.
Переходя в карты φ и ψ,

$$\psi \circ (f \circ \alpha) = f_{\varphi,\psi} \circ (\varphi \circ \alpha)$$

так как $v_\varphi = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, получаем

$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi). \qquad (*)$$

Правая часть не зависит от выбора α
$\implies$ вектор, представленный $f \circ \alpha$, не зависит от α,
$\implies$ определение корректно.

Утверждение 3 следует из $(*)$.

Утверждение 2 (линейность) следует из утверждения 3.

Так как касательные пространства в разных точках не пересекаются, определено отображение

$$df\colon TM \to TN$$

где

$$df|_{T_pM} = d_pf.$$

Оно позволяет «на законных основаниях» не писать p в обозначении d_pf.

Другое обозначение: Tf.

Замечание

df — гладкое отображение из TM в TN.

Теорема

Пусть M, N, K — гладкие многообразия, $f\colon M \to N$, $g\colon N \to K$ — гладкие отображения. Тогда

$$d(g \circ f) = dg \circ df.$$

Или, для $p \in M$,

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f$$

Доказательство.

$(f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha)$. $\square$

Подмногообразия

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \leq k \leq n$. Множество $M \subset N$ называется k-мерным гладким подмногообразием, если:

для любой точки $x \in M$ существует карта (U, φ) многообразия N такая, что $x \in U$ и

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).$$

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть выпрямляющими для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» может пропускаться.

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \leq k \leq n$. Множество $M \subset N$ называется k-мерным гладким подмногообразием, если:

для любой точки $x \in M$ существует карта (U, φ) многообразия N такая, что $x \in U$ и
$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).$$

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть выпрямляющими для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» может пропускаться.

Лемма

Гладкое подмногообразие размерности k является гладким многообразием размерности k.

Доказательство.

Это очевидным образом следует из того, что если (V, ψ) — карта на N, то $(V \cap M, \psi|_{V \cap M})$ — карта на M. □

Пример: графики

Пример

Пусть $V \subset \mathbb{R}^k$ открытое, $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-k}$ гладкое.
Тогда график f, то есть множество

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$$

является гладким подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности k.

Будем называть такие множества k-мерными графиками.

Доказательство: Напомним, что гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$.

Пусть $U = V \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = (x, y - f(x)).$$

(U, ψ) – карта на $\mathbb{R}^n$, согласованная с картой $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$. Следовательно, она входит в максимальный атлас на $\mathbb{R}^n$.

Эта карта является выпрямляющей для любой точки из Γ_f.

Локальность

Свойства

Определение подмногообразия локально:

- *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*
- *Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

Локальность

Свойства

Определение подмногообразия локально:

- *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*
- *Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

Следствие

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ таково, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, представимая в виде k-мерного графика (при некотором выборе координат), то M — k-мерное гладкое подмногообразие.

Легко видеть, что это условие выполняется для сферы (и многих других примеров).

Пример

Открытые полусферы S^{n-1} – $(n-1)$-мерные графики (каждая в своей системе координат).
$\implies S^{n-1}$ — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$.

Погружения и вложения

Пусть M^k, N^n — гладкие многообразия, $k \le n$.

Определение

(Гладкое) погружение — гладкое отображение $f : M \to N$ такое, что $d_p f$ инъективно (мономорфизм) для всех $p \in M$.

(Гладкое) вложение — гладкое погружение, которое является топологическим вложением (т.е. гомеоморфизмом на образ).

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$, это то же самое, что регулярные поверхности и простые регулярные поверхности.

Определение

Регулярная k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ — такое гладкое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, что для любой точки $x \in U$ дифференциал $d_x f$ инъективен (условие регулярности).

Перефомулировки: $\operatorname{rank} d_x f = k$, $\ker d_x f = \{0\}$.

Простая регулярная поверхность – регулярная поверхность, которая является топологическим вложением.

Теорема

Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность.

1. *Локально f — вложение.*
   Т.е. у любой $p \in U$ существует окрестность V ($p \in V \subset U$) такая, что $f|_V$ — вложение.
2. *Если f — вложение, то $f(U)$ — гладкое подмногообразие.*
   При этом f^{-1} — карта этого подмногообразия.

Доказательство

1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Доказательство

1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Пусть $V = W \cap \mathbb{R}^k$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ – выпрямляющая карта для $f(V)$.

Доказательство

1. Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Пусть $V = W \cap \mathbb{R}^k$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ – выпрямляющая карта для $f(V)$.

Мы доказали всё, кроме последнего утверждения теоремы (f^{-1} — карта для $f(U)$). Оно доказано для V вместо U. Общий случай следует из локальности свойства гладкой согласованности карт. $\square$

Теорема

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ два свойства эквивалентны:

1. *M — гладкое k-мерное подмногообразие;*
2. *У каждой точки $x \in M$ есть окрестность $U \subset M$, которая является образом простой регулярной k-мерной поверхности.*

Определение

Если образ простой регулярной поверхности f является открытым подмножеством M, то f называется локальной параметризацией многообразия M.

Замечание

Локальные параметризации — это в точности отображения, обратные к картам (локальным координатам).

Доказательство теоремы

$2 \implies 1$: из предыдущей теоремы.

$1 \implies 2$: Пусть $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$ — выпрямляющая карта для M, где W — окрестность x в $\mathbb{R}^n$.

Возьмём $U = W \cap M$. Тогда $(\varphi^{-1})|_{\varphi(W)\cap\mathbb{R}^k}$ — искомая регулярная поверхность