Касательное расслоение

Определение

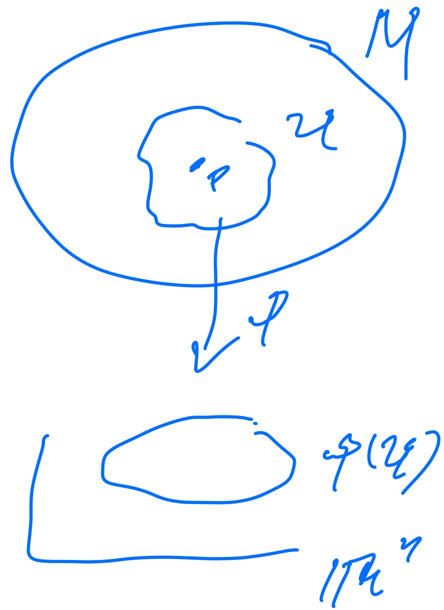
Касательным расслоением гладкого многообразия M^n называется множество

$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M).$$

Касательные пространства вида T_pM называются слоями касательного расслоения $T(M)$.

Теорема

$T(M)$ является гладким многообразием размерности $2n$.



Док-во: Пусть (U, φ) – карта на M. Положим

$$T(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p(M). \quad \subset T(M)$$

Зададим отображение $\Phi_U \colon T(U) \to \mathbb{R}^{2n}$: Для $v \in T_pM$, где $p \in U$, определяем

$$\Phi_U(v) = (\varphi(p), v_\varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Φ_U биективно отображает $T(U)$ на открытое множество $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Касательное расслоение

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

T(M) – топ. пр-во
не док, что это
топ. мн-е.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Гладкий атлас на $T(M)$ – это множество $\{(T(U), \Phi_U)\}$ по всем картам (U, φ) на M.

- эти карты покрывают $T(M)$.
- Пусть $(T(U), \Phi_U)$ и $(T(V), \Phi_V)$ – карты на $T(M)$, порождаемые картами (U, φ) и (V, ψ) на M. Тогда функция перехода имет вид

$$\Phi_V \circ \Phi_U^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})),$$

V

  и согласованность карт в $T(M)$ следует из согласованности карт в M.
- Φ_U – гомеоморфизм.

– биекц – проверили
– Φ_u - открыто по опр топологии
Завершить док-во сам-но.
осталось д-ть непр Φ_u.

Дифференциал отображения в точке

Пусть M^m, N^n – гладкие многообразия,
$f\colon M \to N$ — гладкое отображение,
$p \in M$.

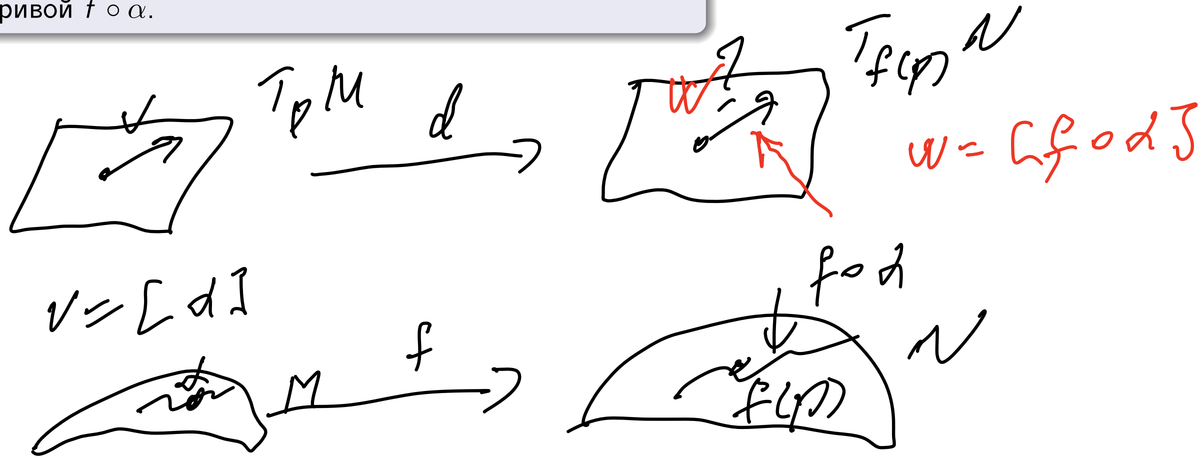
Определение

Дифференциал (касательное отображение) f в точке p — отображение

$$d_p f\colon T_pM \to T_{f(p)}N,$$

определяемое следующим образом:

Для $v \in T_pM$, представленного кривой α, $d_pf(v)$ — вектор из $T_{f(p)}N$, представленный кривой $f \circ \alpha$.



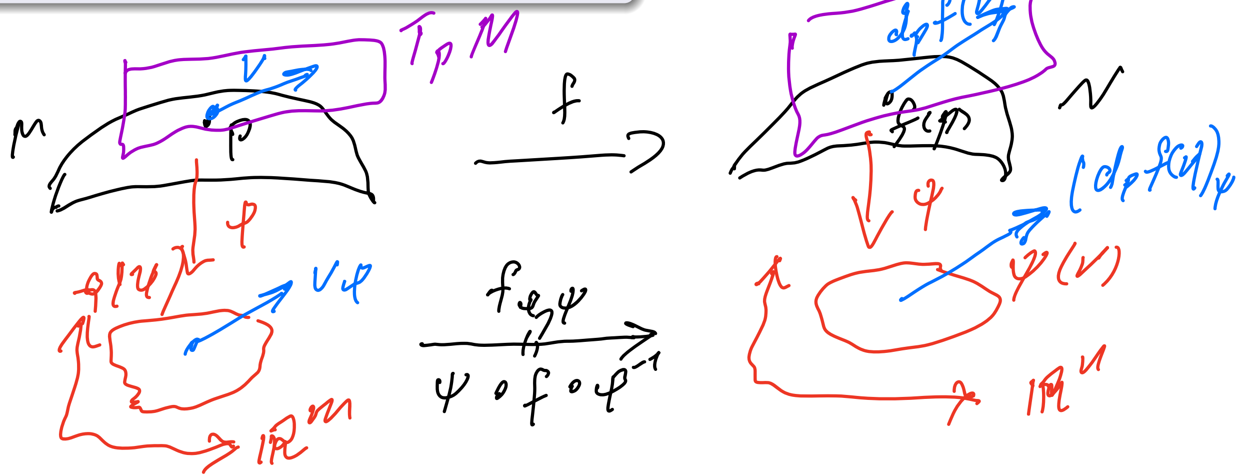
Корр ⟺ не зависит от кривой из кл. эквив

Теорема

1. $d_p f$ определено корректно;
2. $d_p f$ – линейное отображение из $T_p M$ в $T_{f(p)} N$.
3. Для карт φ и ψ в окрестностях p и $f(p)$

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_p M$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.



Корректность и т.д.

Теорема

1. $d_p f$ *определено корректно;*
2. $d_p f$ *– линейное отображение из* $T_p M$ *в* $T_{f(p)} N$.
3. *Для карт* φ *и* ψ *в окрестностях* p *и* $f(p)$

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_p M$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

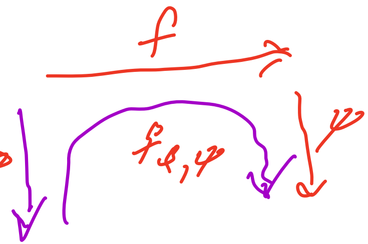
Замечание

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, определение дифференциала согласовано с обычным, с учетом стандартных изоморфизмов $T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ и $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
Это следует из третьего утверждения теоремы для тождественных карт.

Доказательство теоремы

$v = [\alpha]$

$(d_p f(v))|_\psi$



Пусть $v \in T_pM$ представлен кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$.
Переходя в карты φ и ψ,

$$\boxed{\psi \circ (f \circ \alpha) = f_{\varphi,\psi} \circ (\varphi \circ \alpha)}$$

так как $v_\varphi = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, получаем

$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi). \qquad (*)$$

Правая часть не зависит от выбора α
$\Longrightarrow$ вектор, представленный $f \circ \alpha$, не зависит от α,
$\Longrightarrow$ определение корректно.

Утверждение 3 следует из $(*)$.

Утверждение 2 (линейность) следует из утверждения 3.

Глобальное касательное отображение

$f: M \to N$ - гладкое

M, N - мн-вы

$d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$

Так как касательные пространства в разных точках не пересекаются, определено отображение

$$df : TM \to TN$$

где

$$df|_{T_p M} = d_p f.$$

Оно позволяет «на законных основаниях» не писать p в обозначении $d_p f$.

Другое обозначение: Tf.

Замечание

df — гладкое отображение из TM в TN.

Док-во: $\forall$ карт φ, ψ коорд предст df будет гладким

$$(df)_{\varphi,\psi}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{коорд точки } p}, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_n}_{\text{коорд вект } V}) = (f_{\varphi,\psi}(x_1, \dots, x_n), d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_n))$$

Производная композиции

Теорема

Пусть M, N, K — *гладкие многообразия,* $f\colon M \to N$, $g\colon N \to K$ — *гладкие отображения. Тогда*

$$d(g \circ f) = dg \circ df.$$

Или, для $p \in M$,

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f$$

Доказательство.

$(f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha)$. $\square$

Подмногообразия

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \le k \le n$. Множество $M \subset N$ называется k-мерным гладким подмногообразием, если:

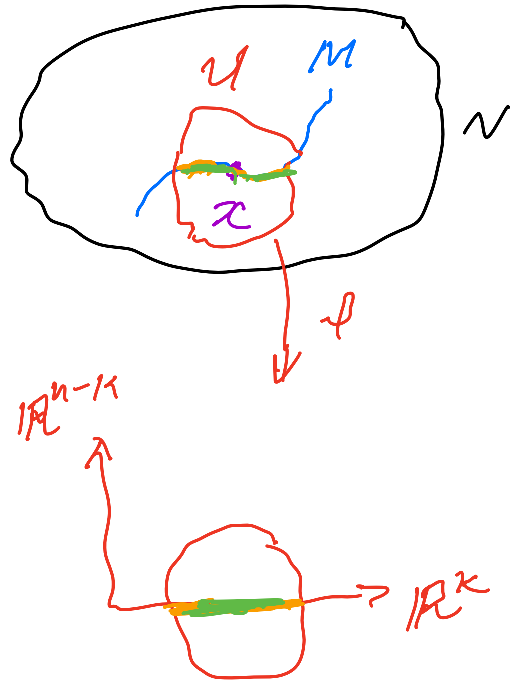
для любой точки $x \in M$ существует карта (U, φ) многообразия N такая, что $x \in U$ и

$$\boxed{\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).}$$

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть выпрямляющими для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» может пропускаться.



$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0),\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Подмногообразия

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \leq k \leq n$. Множество $M \subset N$ называется *k-мерным гладким подмногообразием*, если:

для любой точки $x \in M$ существует карта (U, φ) многообразия N такая, что $x \in U$ и

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).$$

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть *выпрямляющими* для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» может пропускаться.

Лемма

Гладкое подмногообразие размерности k является гладким многообразием размерности k.

Доказательство.

Это очевидным образом следует из того, что если (V, ψ) — карта на N, то $(V \cap M, \psi|_{V \cap M})$ — карта на M. $\square$

Атлас на M пол-ся
сут. всех выпрямл.
карт. для M

Пример: графики

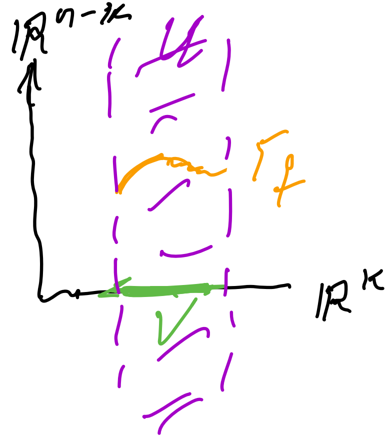
Пример

Пусть $V \subset \mathbb{R}^k$ открытое, $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-k}$ гладкое.
Тогда график f, то есть множество

$$M = \Gamma_f := \{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$$

является гладким подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности k.

Будем называть такие множества *k-мерными графиками*. $= M$



Доказательство: Напомним, что гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$.

(U, id) согл с $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$

Пусть $U = V \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = (x, y - f(x)). \text{ — гладкое}$$

φ согл (U, φ)

$\varphi^{-1} = (x, y + f(x))$

(U, ψ) – карта на $\mathbb{R}^n$, согласованная с картой $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$. Следовательно, она входит в максимальный атлас на $\mathbb{R}^n$.

Эта карта является выпрямляющей для любой точки из Γ_f.

$$(x, f(x)) \xrightarrow{\varphi} (x, 0)$$