В самой левой части цепочки равенства подразумевается, что касательное пространство $T_{tv}(T_pM)$ пространства T_pM канонически отождествлено с самим T_pM, так что $\big(d_{tv}\exp_p\big)(v)$ — это значение на векторе $v \in T_{tv}(T_pM) = T_pM$ дифференциала отображения $\exp_p$ в точке tv. Полагая $t = 0$, получаем

$$d_0 \exp_p v = \gamma_v'(0) = v,$$

и нам остается только сослаться на теорему об обратном отображении. ■

Определение. *Радиусом инъективности* многообразия M в точке p называется

$$\rho_{inj} = \sup\{\rho > 0 : \exp_p|_{B_\rho(0)} \text{ — диффеоморфизм}\}.$$

Радиус инъективности может быть бесконечным.

Определение. Пусть V — окрестность нуля в пространстве T_pM из теоремы 2.5.4. Тогда $\exp_p V$ — окрестность точки $p \in M$, называемая *нормальной* окрестностью. Зафиксируем какой-нибудь изоморфизм Φ между векторными пространствами T_pM и $\mathbb{R}^n$. Например, если (U, φ) — карта, содержащая точку p, то нам подходит $d\varphi$. Тогда карта $(\exp_p V, \psi)$, где

$$\psi = \Phi \circ (\exp_p)^{-1} : \exp_p V \to \mathbb{R}^n,$$

задает *нормальные (геодезические) координаты* в окрестности точки p.

2.6 Экстремальные свойства геодезических

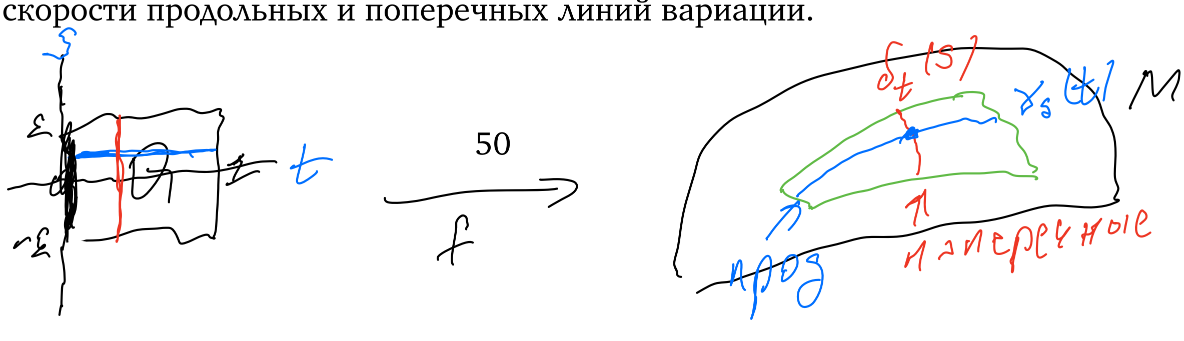
Геодезические на римановых многообразиях обладают экстремальными свойствами, а именно, они представляют собой локально кратчайшие кривые: каждый достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей гладкой кривой, соединяющей свои концевые точки.

Определение. *Вариацией* (или гладкой гомотопией) кривой $\gamma : [0,1] \to M$ называют такое гладкое отображение $f : Q \to M$ прямоугольника $Q = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], s \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$, что $f(t,0) = \gamma(t)$ для любого $t \in [0,1]$.

Пути $\gamma_s(t) = f(t,s)$, где s фиксировано, называют *продольными* линиями вариации, а пути $\delta_t(s) = f(t,s)$, где t фиксировано, — *поперечными* линиями вариации. В частности, $\gamma_0(t) = \gamma(t)$.

Вариация кривой γ называется *геодезической*, если все продольные линии вариации являются геодезическими кривыми.

С каждой вариацией связаны два векторных поля: $\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma_s'(t)$ и $\frac{\partial f}{\partial s} = \delta_t'(s)$ — вектора скорости продольных и поперечных линий вариации.



Лемма 2.6.1.

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Доказательство. Пусть (U, φ) — локальная система координат в окрестности какой-нибудь точки из $f(Q)$. Тогда можно записать

$$\varphi \circ f(t,s) = (x_1(t,s), \ldots, x_n(t,s)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad = E_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}. \quad = E_i$$

Подставляя координаты полей в формулу (~~2.5~~), получим:

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \sum_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_i}{\partial t}\Gamma^k_{j,i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial s}\Gamma^k_{i,j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Утверждение леммы следует из равенства вторых смешанных производных и симметричности связности: $\Gamma^k_{j,i} = \Gamma^k_{i,j}$ ■

Теорема 2.6.2 (лемма Гаусса[13]). Пусть $p \in M$ и экспоненциальное отображение определено на векторе $v \in T_pM$. Тогда для любого вектора $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$ справедливо равенство

$$\langle (d_v \exp_p)(v), (d_v \exp_p)(w) \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $w = w_T + w_N$, где $w_T || v$ и $w_N \perp v$. Из формулы (~~2.14~~) следует, что

$$\left| \left(d_v \exp_p \right)(v) \right| = |\gamma_v'(1)| = |v|.$$

Поэтому, в силу линейности дифференциала и скалярного произведения, имеем

$$\langle (d_v \exp_p)(v), (d_v \exp_p)(w_T) \rangle = \langle v, w_T \rangle.$$

1 часть

Это означает, что нам достаточно доказать равенство (2.15) для случая $w = w_N \neq 0$

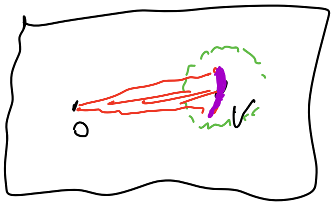
Так как отображение $\exp_p$ определено на векторе v, найдется такое $\varepsilon > 0$, что отображение $\exp_p$ определено также на любом векторе

$w_T = Pr_v w$

? почему

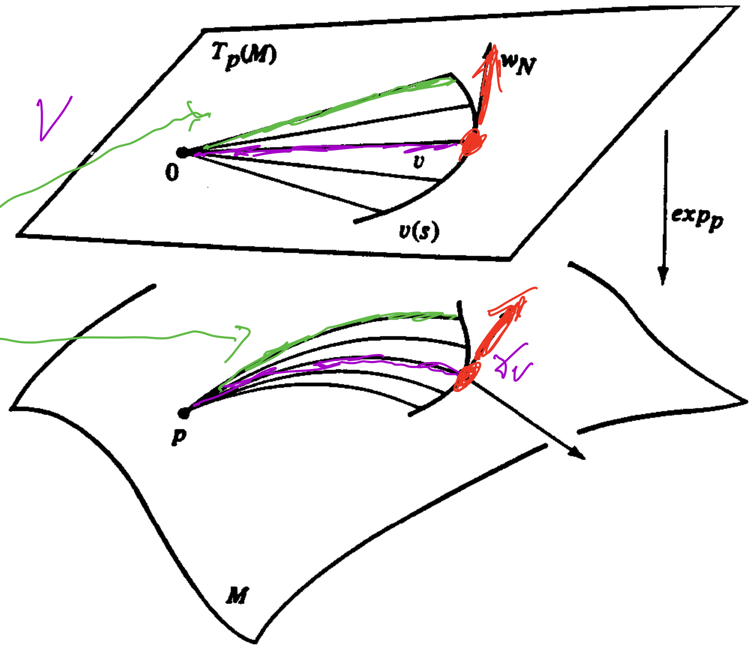
$$u = tv(s), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ -\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon,$$

[13] В различных книгах под леммой Гаусса (в данном контексте) понимаются совершенно различные утверждения. Мы следуем книге [2]



T_pM

где $v(s)$ — такая кривая в T_pM, что $v(0)=v$, $v'(0)=w_T$ и $|v(s)|=const$.



Рассмотри вариацию $f: Q \to M$, заданную формулой

$$f(t,s)=\exp_p tv(s).$$

Заметим, что для фиксированного s_0 кривая $f(t,s_0)$ является геодезической ~~(см. доказательство пункта 3 леммы 2.5.3)~~. Далее заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0)=(d_v\exp_p)(w_N),\quad \frac{\partial f}{\partial t}(1,0)=(d_v\exp_p)(v).$$

Поэтому

$$\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle(1,0)=\langle(d_v\exp_p)(w_N),(d_v\exp_p)(v)\rangle. \tag{2.16}$$

Далее, для любых $(t,s)\in Q$ в силу формулы (2.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle=\langle\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle.$$

Второе слагаемое справа равно 0, так как $\frac{\partial f}{\partial t}$ — поле касательных векторов геодезической. Преобразуем первое слагаемое справа:

$$\langle\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle=\langle\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle=^{14}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle=^{15}0.$$

[14]Нужно взять выражение справа от равенства и применить к нему формулу (2.7)

[15]$\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle$ — квадрат длины вектора скорости геодезической, который одинаков для всех продольных геодезических

Следовательно, скалярное произведение $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ не зависит от t. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \lim_{t\to 0}(d_{tv} \exp_p)(tw_N) = 0,$$

то $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle(1,0) = 0$, что вместе с равенством (2.16) завершает доказательство. ■

Теорема 2.6.3. Пусть U — нормальная окрестность точки $p \in M$, $B \subset U$ — нормальный шар[16] с центром в точке p. Пусть также $\gamma\colon [0,1] \to B$ — геодезическая на M с условием $\gamma(0) = p$, и $c\colon [0,1] \to M$ — какая-то кусочно-гладкая кривая, соеденяющая $\gamma(0)$ с $\gamma(1)$. Тогда $\ell(\gamma) \leqslant \ell(c)$[17], причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Доказательство. Предположим для начала, что $c([0,1])$ лежит в шаре B. Поскольку $\exp_p$ — диффеоморфизм на U, кривую $c(s)$, где $s \neq 0$, можно единственным образом переписать как

$$c(s) = \exp_p(r(s)\cdot v(s)) = f(r(s), s),$$

где отображение $s \to v(s)$ — это кривая на T_pM с $|v(s)| = 1$ и без самопересечений (иначе выкинем петлю), $r\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ — положительная кусочно-гладкая функция, а вариация f определена в теореме 2.6.2.

Тогда везде кроме множества меры ноль

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot r'(s) + \frac{\partial f}{\partial s}.$$

По лемме Гаусса $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0$. Но, так как $|\frac{\partial f}{\partial r}| = 1$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}\right|^2 = |r'(s)|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 \geqslant |r'(s)|^2,$$

а значит

$$\int_\varepsilon^1 \left|\frac{\partial c}{\partial s}\right| \mathrm{d}s \geqslant \int_\varepsilon^1 |r'(s)|\,\mathrm{d}s \geqslant \int_\varepsilon^1 r'(s)\,\mathrm{d}s = r(1) - r(\varepsilon).$$

Устремив $\varepsilon \to 0$ получаем $\ell(c) \geqslant \ell(\gamma)$, поскольку, в силу пункта 4 леммы 2.5.3, имеем $r(1) = \ell(\gamma)$. Понятно, что если одно из двух последних неравенств строгое, то $l(c) > l(\gamma)$. Если же $\ell(c) = \ell(\gamma)$, то $|\frac{\partial f}{\partial s}| = 0$ и $v(s) =$, $|r'(s)| = r'(s) > 0$. То есть c — натуральная параметризация γ, и $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Если же $c([0,1])$ не содержится в шаре B, то посмотрим на первую точку $t_1 \in (0,1)$, для которой $c(t_1)$ лежит на границе B :

$$\ell(c) \geqslant \ell_{[0,t_1]}(c) \geqslant \rho > \ell(\gamma),$$

[16] Образ шара при экспоненциальном отображении.

[17] $\ell(\gamma)$ — длина кривой.