В самой левой части цепочки равенства подразумевается, что касательное пространство $T_{tv}(T_pM)$ пространства T_pM канонически отождествлено с самим T_pM, так что $\left(d_{tv}\exp_p\right)(v)$ — это значение на векторе $v \in T_{tv}(T_pM) = T_pM$ дифференциала отображения $\exp_p$ в точке tv. Полагая $t = 0$, получаем

$$d_0 \exp_p v = \gamma_v'(0) = v,$$

и нам остается только сослаться на теорему об обратном отображении. ■

Определение. *Радиусом инъективности* многообразия M в точке p называется

$$\rho_{inj} = \sup\{\rho > 0 : \exp_p|_{B_\rho(0)} \text{ — диффеоморфизм}\}.$$

Радиус инъективности может быть бесконечным.

Определение. Пусть V — окрестность нуля в пространстве T_pM из теоремы 2.5.4. Тогда $\exp_p V$ — окрестность точки $p \in M$, называемая *нормальной* окрестностью. Зафиксируем какой-нибудь изоморфизм Φ между векторными пространствами T_pM и $\mathbb{R}^n$. Например, если (U, φ) — карта, содержащая точку p, то нам подходит $d\varphi$. Тогда карта $(\exp_p V, \psi)$, где

$$\psi = \Phi \circ (\exp_p)^{-1} \colon \exp_p V \to \mathbb{R}^n,$$

задает *нормальные (геодезические) координаты* в окрестности точки p.

2.6 Экстремальные свойства геодезических

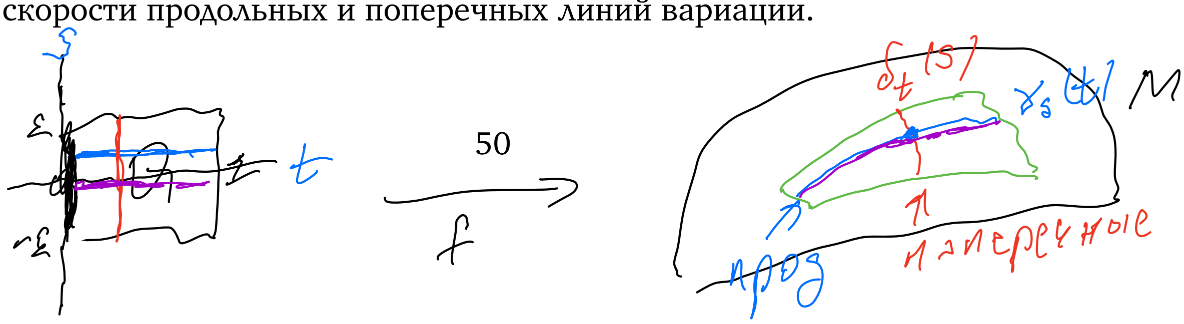
Геодезические на римановых многообразиях обладают экстремальными свойствами, а именно, они представляют собой локально кратчайшие кривые: каждый достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей гладкой кривой, соединяющей свои концевые точки.

Определение. *Вариацией* (или гладкой гомотопией) кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$ называют такое гладкое отображение $f : Q \to M$ прямоугольника $Q = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], s \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$, что $f(t,0) = \gamma(t)$ для любого $t \in [0,1]$.

Пути $\gamma_s(t) = f(t,s)$, где s фиксировано, называют *продольными* линиями вариации, а пути $\delta_t(s) = f(t,s)$, где t фиксировано, — *поперечными* линиями вариации. В частности, $\gamma_0(t) = \gamma(t)$.

Вариация кривой γ называется *геодезической*, если все продольные линии вариации являются геодезическими кривыми.

С каждой вариацией связаны два векторных поля: $\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma_s'(t)$ и $\frac{\partial f}{\partial s} = \delta_t'(s)$ — вектора скорости продольных и поперечных линий вариации.



Лемма 2.6.1.

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Доказательство. Пусть (U, φ) — локальная система координат в окрестности какой-нибудь точки из $f(Q)$. Тогда можно записать

$$\varphi \circ f(t,s) = (x_1(t,s), \ldots, x_n(t,s)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad = E_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}. \quad = E_i$$

Подставляя координаты полей в формулу (2.5), получим:

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \sum_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_i}{\partial t}\Gamma^k_{j,i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial s}\Gamma^k_{i,j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Утверждение леммы следует из равенства вторых смешанных производных и симметричности связности: $\Gamma^k_{j,i} = \Gamma^k_{i,j}$ ■

Теорема 2.6.2 (лемма Гаусса[13]). Пусть $p \in M$ и экспоненциальное отображение определено на векторе $v \in T_pM$. Тогда для любого вектора $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$ справедливо равенство

$$\langle (d_v \exp_p)(v), (d_v \exp_p)(w) \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{2.15}$$

Доказательство. Пусть $w = w_T + w_N$, где $w_T || v$ и $w_N \perp v$. Из формулы (2.14) следует, что

$$|\big(d_v \exp_p\big)(v)| = |\gamma_v'(1)| = |v|.$$

1 часть

Поэтому, в силу линейности дифференциала и скалярного произведения, имеем

$$\langle (d_v \exp_p)(v), (d_v \exp_p)(w_T) \rangle = \langle v, w_T \rangle.$$

Это означает, что нам достаточно доказать равенство (2.15) для случая $w = w_N \neq 0$

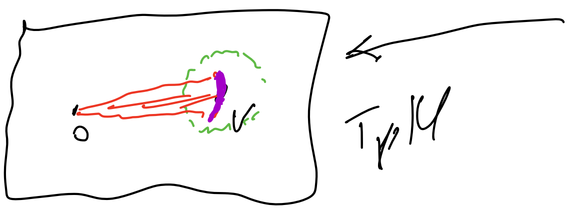
$w_T = Pr_v w$

Так как отображение $\exp_p$ определено на векторе v, найдется такое $\varepsilon > 0$, что отображение $\exp_p$ определено также на любом векторе

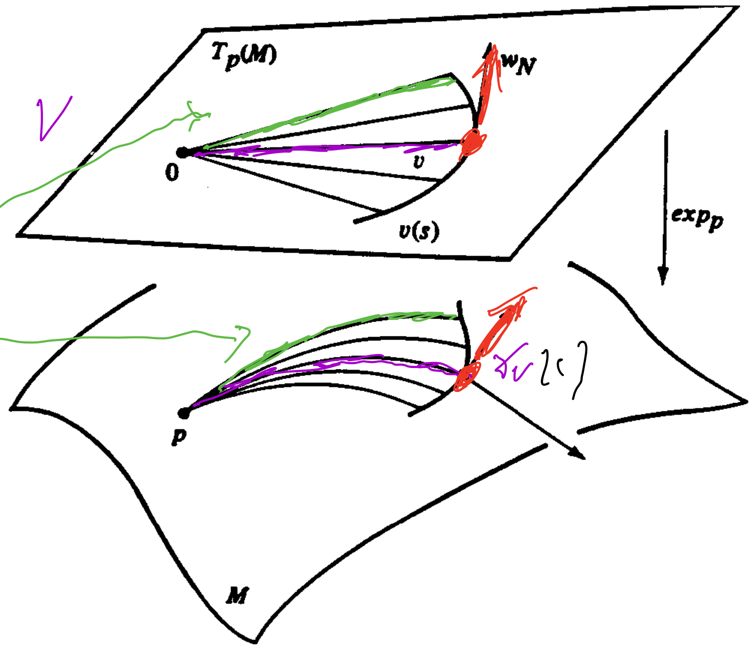
? почему

$$u = tv(s),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ -\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon,$$

[13] В различных книгах под леммой Гаусса (в данном контексте) понимаются совершенно различные утверждения. Мы следуем книге [2]



где $v(s)$ — такая кривая в T_pM, что $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ и $|v(s)| = const$.



Рассмотри вариацию $f : Q \to M$, заданную формулой

$$\boxed{f(t,s) = \exp_p tv(s).}$$

Заметим, что для фиксированного s_0 кривая $f(t,s_0)$ является геодезической ~~(см. доказательство пункта 3 леммы 2.5.3)~~. Далее заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0) = (d_v \exp_p)(w_N), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(1,0) = (d_v \exp_p)(v).$$

Поэтому

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle(1,0) = \langle (d_v \exp_p)(w_N), (d_v \exp_p)(v) \rangle. = 0 \ ? \qquad (2.16) \quad s=0$$

Далее, для любых $(t,s) \in Q$ в силу формулы (2.7) имеем

$$? \quad 0 \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} \rangle. \quad =$$

Второе слагаемое справа равно 0, так как $\frac{\partial f}{\partial t}$ — поле касательных векторов геодезической. Преобразуем первое слагаемое справа:

$$= \quad \langle \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \overset{[14]}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \overset{[15]}{=} 0.$$

[14] Нужно взять выражение справа от равенства и применить к нему формулу (2.7)

[15] $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle$ — квадрат длины вектора скорости геодезической, который одинаков для всех продольных геодезических

$$2) \quad \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{II} \quad 0$$

лемма 2.6.1 выше