<u>Определение</u> X — линейное пространство над $\mathbb{R}$

$p: X \to \mathbb{R}$, p — выпуклый, если

$$p(tx + (1-t)y) \le tp(x) + (1-t)p(y), \quad x, y \in X, \ t \in [0,1]$$

p — положительно однородный, если

$$p(tx) = tp(x), \quad x \in X, \ t > 0.$$

Полож. однородный + выпуклый = однородно выпуклый.

<u>Теорема Хан-Банах</u> Пусть X — л.п. над $\mathbb{R}$, p — однородно выпуклый, X_0 — подпространство в X, A_0 — линейный функционал на X_0, такой что

$$A_0(x) \le p(x), \quad x \in X_0.$$

Тогда A_0 можно продолжить до $A: X \to \mathbb{R}$, линейный, $A\big|_{X_0} = A_0$,

$$A(x) \le p(x), \quad x \in X.$$

Теорема (Х.-Б., комплексный вариант). Пусть X — л.п. над $\mathbb{C}$,
Пусть $p: X \to \mathbb{R}_+$, такой что

- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$
- $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$.

Пусть $A_0 : X_0 \to \mathbb{C}$, линейный, X_0 подпр. во X, т.ч.

$$|A_0(x)| \le p(x), \quad x \in X_0.$$

Тогда $\exists\ A: X \to \mathbb{C}$, $A\big|_{X_0} = A_0$,

$$|A(x)| \le p(x), \quad x \in X.$$

Пара слов про однородно выпуклые функционалы.

- p-овф, то $p(x+y) \le p(x)+p(y)$ $\qquad t=\frac{1}{2}$

$$2\,p\left(\frac{x+y}{2}\right) \le 2\,p\left(\frac{x}{2}\right)+2\,p\left(\frac{y}{2}\right) = p(x)+p(y).$$

положительная однородность + нер-во треугольника $\Rightarrow$ выпуклость.

- $p(0)=0$. $\quad p(0) = p(t\cdot 0) = t\cdot p(0) \quad \forall t>0.$

- $\underbrace{p(0)}_{=0} = p(x+(-x)) \le p(x)+p(-x)$, $x\in X$.

Если $p(x)<0 \Rightarrow p(-x)>0$.

- $p(tx) \ge t\cdot p(x)$, $\quad t\in\mathbb{R}$.

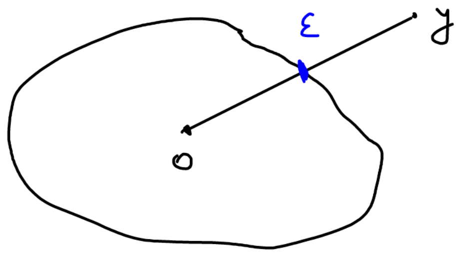
$$0\le p(tx)+p(|t|\cdot x) = p(tx)+|t|\,p(x)$$
$$p(tx) \ge -|t|\,p(x) = t\,p(x).$$
$$-|t| = t,\quad t\le 0.$$

- примеры:
  - линейные
  - нормы
  - полунормы. $\quad C^{\infty}(\mathbb{R})$.
  - функционал Минковского

Определение. Пусть X — лин.пр-во, E — выпуклое множество, такое что

$$\{x\in E:\ \forall y\in X\ \exists\, \varepsilon=\varepsilon(y):\ x+ty\in E,\ |t|<\varepsilon\} \ni 0.$$

$\mathrm{Ker}\,E$ (ядро E).



$$p_E(x) := \inf\{t : \frac{x}{t} \in E,\ t>0\},\ x\in X$$

функционал Минковского для E.

<u>Утв.</u> Функционал Минковского однородно выпуклый, ≥ 0. С другой стороны, пусть p – овф, ≥ 0. Пусть $R>0$, тогда

$$E_R = \{x : p(x) \leq R\} \text{ – выпуклое множество,}$$

$\ker E_R = \{x : p(x) < R\} \ni 0$. При этом $p = p_{E_1}$.

Доказательство. Пусть $s>0,\ x\in X$

$$p_E(sx) = \inf_t \{t>0 : \frac{sx}{t}\in E\} = \inf_{t'}\{st'>0 : \frac{x}{t'}\in E\} =$$

$$= s\cdot \inf_{t'}\{t'>0 : \frac{x}{t'}\in E\} = s\cdot p_E(x).$$

Выпуклость. Пусть $x_1, x_2\in X$, $\varepsilon>0$ – произвольное. Зафиксируем какие-нибудь числа r_1, r_2, т.ч.

$$\left.\begin{array}{l} p_E(x_1) < r_1 < p_E(x_1)+\varepsilon \\ p_E(x_2) < r_2 < p_E(x_2)+\varepsilon \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x_i}{r_i}\in E.$$

Пусть $r = r_1+r_2$, тогда $\frac{x_1+x_2}{r}\in\left[\frac{x_1}{r_1}, \frac{x_2}{r_2}\right]$

$$\frac{x_1+x_2}{r} = \frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{r_1}{r} + \frac{x_2}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r}$$

Т.к. оба конца $\in E$, то по выпуклости $\frac{x_1+x_2}{r}\in E \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_E(x_1+x_2) \leq r = r_1+r_2 < p(x_1)+p(x_2)+\varepsilon+\varepsilon,\ \varepsilon>0 \text{ – произвольно.}$$

В обратную сторону. Пусть p – о.в.ф., ≥ 0. Рассмотрим $E_R = \{p(x)\leq R\}$

Пусть $x, y\in E_R$, $t\in(0,1)$

$$p(tx+(1-t)y) \leq t\overset{\leq R}{p(x)} + (1-t)\overset{\leq R}{p(y)} \leq R \Rightarrow tx+(1-t)y\in E_R.$$

Пусть теперь $p(x)<R$, $t>0$, $y\in X$.

$$p(x \pm ty) \le p(x) + t\,p(\pm y). \qquad p(y),\ p(-y) \geq 0.$$

Пусть одно из $p(y), p(-y) \neq 0$. Тогда положим

$$\varepsilon(y) := \frac{R - p(x)}{\max(p(y), p(-y))},$$ тогда для $t < \varepsilon$ $\quad x \mp ty \in E$,

т.к. $$p(x) + t\,p(\pm y) \le p(x) + \frac{R - p(x)}{\max(p(\pm y))} \cdot p(\pm y) \le$$

$$\le \cancel{p(x)} + R - \cancel{p(x)} = R.$$ Если же оба числа $p(\pm y) = 0$,

$$p(x \pm ty) \le p(x) + t \cdot 0 \le R.$$

$$p_{E_1}(x) = \inf_t \{t > 0 : \tfrac{x}{t} \in E_1\} = \inf_t \{t > 0 : p(\tfrac{x}{t}) \le 1\} =$$

$$= \inf_t \{t > 0 : p(x) \le t\} = p(x) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Доказательство Х.-Б. для } \mathbb{R}.}$ Пусть $X_0 \neq X$, ~~тогда~~ зафиксируем точку $z \in X \setminus X_0$. Рассмотрим пространство X_1, натянутое на X_0 и z,

$X_1 = \{tz + x,\ x \in X_0,\ t \in \mathbb{R}\}$. Чего мы хотим от A_1 (A_1 – продолжение A_0 на X_1):

$$A_1(\underline{tz + x}) = t\,\overset{\lambda}{\overset{!!}{A_1(z)}} + A_1(x) = \underline{t\,A_1(z)} + \underline{A_0(\overset{X_0}{\overset{\cup}{x}})}$$

Будем выбирать $\lambda = A_1(z)$, чтобы сохранилось подчинение, т.е.

$$(51) \quad A_1(\underline{tz + x}) = \underline{t \cdot \lambda + A_0(x) \le p(tz + x)} \quad \forall x \in X_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $t > 0$. Тогда $(51) \Leftrightarrow \lambda + A_0\left(\frac{x}{t}\right) \le p\left(z + \frac{x}{t}\right)$, т.е.

$$\underline{\lambda \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) - A_0\left(\frac{x}{t}\right)}.$$

Пусть $t<0$, тогда (S1) равносильно

$$A_0\left(\frac{x}{t}\right)+\lambda \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right), \text{ т.е. } \underline{\lambda \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-A_0\left(\frac{x}{t}\right)}$$

Ищем λ, такое что

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \leq p\left(\frac{x}{t}+z\right)-A_0\left(\frac{x}{t}\right), \forall x\in X_0,\ t>0 \\ \lambda \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-A_0\left(\frac{x}{t}\right), \forall x\in X_0,\ t<0. \end{array}\right\}$$

Зафиксируем два произвольных элемента $y_1, y_2 \in X_0$, тогда имеем:

$$A_0(y_2)-A_0(y_1) \leq p(y_2-y_1) = p((y_2+z)+(-(y_1+z))) \leq$$

$$\leq p(y_2+z)+p(-y_1-z) \Rightarrow \qquad \forall y_1,y_2\in X_0.$$

$$\Rightarrow -A_0(y_2)+p(y_2+z) \geqslant -A_0(y_1)-p(-y_1-z)$$

Положим:

$$\lambda_1 := \sup_{y_1\in X_0}\left(-A_0(y_1)-p(-y_1-z)\right)$$

$$\lambda_2 := \inf_{y_2\in X_0}\left(-A_0(y_2)+p(y_2+z)\right)$$

Немедленно видим, что $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, теперь возьмём $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$.

$$\underline{A_1(tz+x) := t\lambda + A_0(x).}$$

$\mathfrak{A}$ – всевозможные продолжения A_0 с сохранением подчинения.

A_1, A_2 – продолжение A_0 и A_1 продолжает A_2, то можно сказать, что $A_1 \geqslant A_2$.

Пусть $\mathfrak{A}_0$ – л.у. подмножество $\mathfrak{A}$, верхняя грань $\mathfrak{A}_0$ – функционал

$\tilde{A}$, $\operatorname{dom}\tilde{A} = \bigcup\limits_{\tilde{\tilde{A}} \in \mathfrak{A}_0} \operatorname{dom}\tilde{\tilde{A}}$, $\tilde{A}(x) = \tilde{\tilde{A}}(x)$ на $\operatorname{dom}\tilde{\tilde{A}}$.

Тогда есть в $\mathfrak{A}$ максимальный элемент, и это и есть искомое продолжение A. $\blacksquare$