Другое определение подмногообразия

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие.
Множество $M \subset N$ – гладкое подмногообразие $\iff$ M является образом некоторого гладкого вложения.

Док-во теоремы:
($\Longleftarrow$): предыдущая теорема.

Лемма: M – подмногообразие $N \Longrightarrow$ включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ – гладкое вложение.

Док-во леммы:

- in – гладкое отображение.
  (поскольку $\mathrm{in}_{\varphi,\psi}$ – стандартное включение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ в выпрямляющей карте ψ и карте $\varphi = \psi_{|M}$)
- in – погружение.
  следует из координатного представления дифференциала

$$(d_p \,\mathrm{in}(v))_\psi = d_{\varphi(p)} \,\mathrm{in}_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_pM$$

- in – гомеоморфизм на образ (по определению).

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

(3) Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

(3) Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$

Определение

Пусть $\widehat{M}$, N – гладкие многообразия, M – подмногообразие в $\widehat{M}$. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется локально гладко продолжимым, если для любой $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$ в $\widehat{M}$ и гладкое отображение $\widetilde{f}\colon U \to N$, продолжающее $f|_{U \cap M}$.

(4) f гладкое $\iff$ f локально гладко продолжимо.

Док-во: $\Longleftarrow$ свойство (1) + поточечная гладкость.

$\Longrightarrow$ в выпрямляющей карте

Транзитивность подмногообразий

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $K \subset M$ — подмножество.
Тогда эквивалентны два свойства:

(1) *K – гладкое подмногообразие M;*

(2) *K – гладкое подмногообразие N.*

При этом размерность K и дифференциальная структура на K, получаемые из M и N, совпадают.

Доказательство.

Пусть $\mathrm{in}\colon M \to N$, $\mathrm{in}_1\colon K \to M$, $\mathrm{in}_2\colon K \to N$ – включения. Тогда

$$\mathrm{in}_2 = \mathrm{in} \circ \mathrm{in}_1 .$$

Теорема сводится к утверждению: если in_1 — гладкое вложение (относительно некоторой дифференциальной структуры на K), то in_2 тоже, и наоборот.

Это следует из равенства $d\,\mathrm{in}_2 = d\,\mathrm{in} \circ d\,\mathrm{in}_1$ □

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия

Пусть N^n – гладкое многообразие, $M^k \subset N$ – его подмногообразие, $p \in M$.

Соглашение

Касательное пространство T_pM – линейное подпространство в T_pN.

Мотивировки:

(1) Вектор из T_pM, представленный гладкой кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, отождествляется с вектором из T_pN, представленным той же кривой α.

(2) Рассмотрим включение $in\colon M \to N$.
Так как M подмногообразие N, то in – вложение. Поэтому $d_p in$ – инъекция, а его образ $d_p in(T_pM) \subset T_pN$ – k-мерное линейное подпространство в T_pN.

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия

Свойство 1

Пусть N, K — гладкие многообразия, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $f\colon N \to K$ — гладкое отображение. Тогда

$$d_p(f|_M) = (d_p f)|_{T_pM}$$

Док-во:

- $T_pM \subset T_pN$.
- $f|_M = f \circ in$, где $in\colon M \to N$ – включение.
- $d_p(f|_M) = d_pf \circ d_p \,\mathrm{in} = (d_pf)|_{T_pM}$.

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия

Касательное пространство образа вложения

Свойство 2

Пусть $f: M \to N$ — вложение, $p \in M$. Тогда касательное пространство к подмногообразию $K = f(M)$ в точке $f(p)$ – образ дифференциала $d_p f$, т.е.

$$T_{f(p)}K = d_p f(T_p M)$$

Доказательство.

Пусть $\widehat{f}: M \to K$ – то же самое f с заменой формальной области значений. Оно гладкое по свойству 3.

$\implies f = \mathrm{in} \circ \widehat{f}$, где $\mathrm{in}: K \to N$ – включение.

$\implies d_p f = d_{f(p)} \mathrm{in} \circ d_p \widehat{f}$

$\implies d_p f(T_p M) = d_{f(p)} i(d_p \widehat{f}(T_p M))$.

Так как $\widehat{f}$ — диффеоморфизм, $d_p \widehat{f}$ – биекция между $T_p M$ и $T_{f(p)}K$.

$\implies d_p f(T_p M) = d_{f(p)} \mathrm{in}(T_{f(p)}K)$. $\square$

Регулярные точки и регулярные значения

Пусть M^n и K^k — гладкие многообразия, $n \geq k$, $f\colon M \to K$ — гладкое отображение.

Определение

Точка $p \in M$ — регулярная точка f, если дифференциал $d_p f\colon T_p M \to T_{f(p)} N$ сюръективен (эпиморфизм).
Эквивалентно, $\operatorname{rank} d_p f = k$

Точка $q \in K$ — регулярное значение f, если все точки из $f^{-1}(q)$ — регулярные точки.

f — субмерсия, если все точки из M — регулярные точки для f.

Замечание

Множество регулярных точек открыто
(так как регулярность точки эквивалентна тому, что хотя бы один из миноров $k \times k$ матрицы дифференциала не равен 0).
Следовательно, в окрестности регулярной точки отображение является субмерсией.

Прообраз регулярного значения

Теорема

Пусть M^n и K^k — гладкие многообразия, $n \geq k$, $f : M \to K$ — гладкое отображение, $q \in K$ — регулярное значение f.

Тогда $f^{-1}(q)$ — гладкое подмногообразие в M.
Его размерность равна $n - k$.

Док-во: Построим выпрямляющую карту.

- Рассмотрим некоторое $p \in f^{-1}(q)$, а так же карты (U, φ) и (V, ψ), содержащие точки p и q соответственно. По определению регулярного значения p – регулярная точка.
- Далее работаем с картами. Пусть $A = \varphi(U)$, $C = \psi(V)$, $x = \varphi(p)$, $y = \psi(q)$. Можно считать, что U и V выбраны так, что $F = f_{\varphi,\psi} : A \to C$.
- Т.к. x – регулярная точка F, то $rankF = k$. Тогда будем считать, что матрица $d_x F$, образованная из первых k строк и столбцов, имеет ненулевой определитель.

Продолжаем док-во теоремы:

- Рассмотрим отображение

$$G\colon A \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \qquad G(a,b) = (F(a,b), b).$$

  Тогда определитель $k \times k$ в левом верхнем углу матрицы $d_x G$ отличен от нуля, поэтому $rank_x G = n$.

$$\underset{\cdot}{g} = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0.$$

- По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $E(x) \in A$ и $W(G(x)) \in \mathbb{R}^n$, что $G|_{E(x)}\colon E(x) \to W(G(x))$ —диффеоморфизм.
- По построению, $F \circ \varphi$ — выпрямляющая карта в точке p. □

Локально любое подмногообразие — регулярный прообраз

Замечание

Локально верно и обратное: для любого подмногообразия $M^{n-k} \subset \mathbb{N}^n$ и любой точки $p \in M$ существует окрестность $U \subset N$ точки p и субмерсия $f: U \to \mathbb{R}^k$ такая, что $M \cap U = f^{-1}(0)$.

Доказательство.

Возьмем композицию подходящей карты и проекции на $\mathbb{R}^k$. $\square$

Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\implies$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\implies$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

Легко видеть, что при $c = 0$ решение (конус) не является даже топологическим многообразием в окрестности точки $(0, 0, 0)$.

Если выколоть $(0, 0, 0)$, то остаётся гладкая поверхность. Это следует из теоремы, применённой к сужению f на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Касательное пространство регулярного прообраза

Теорема

Пусть N и K – гладкие многообразия, $f: N \to K$ – гладкое отображение, $q \in K$ – регулярное значение, $M = f^{-1}(q)$ – подмногообразие, $p \in M$. Тогда

$$T_pM = \ker d_pf.$$

Доказательство.

В разделе "Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия" было свойство 1:

$$d_p(f|_M) = (d_pf)|_{T_pM}$$

Т.к. $f|_M = const$, то $d_p(f|_M) = 0 \implies (d_pf)|_{T_pM} = 0.$

$\implies T_pM \subset \ker d_pf.$

Обратное включение следует из равенства размерностей. □

Трансверсальные пересечения

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, M^m и K^k — его подмногообразия. M и K пересекаются трансверсально (трансверсальны), если для любой точки $p \in M \cap K$ верно, что

$$T_pM + T_pK = T_pN$$

Обозначение: $M \pitchfork K$.

Замечание

Определение содержательно только при $m + k \geq n$.
При $m + k < n$ пересечение трансверсально $\iff$ пусто.

Трансверсальное пересечение – подмногообразие

Теорема

Пусть N^n — гладкое многообразие, M^m и K^k — его подмногообразия, $m + k \geq n$, $M \pitchfork K$.
Тогда $M \cap K$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$.

Док-во: Докажем, что $M \cap K$ — гладкое подмногообразие в окрестности точки $p \in M \cap K$.

Шаг 1:

В достаточно малой окрестности $U \ni p$, M и K являются прообразами регулярных значений функций $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ и $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Считаем, что $M \cap U = f^{-1}(0)$ и $K \cap U = g^{-1}(0)$.

Построим $H\colon U \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$H(x) = (f(x), g(x)).$$

Заметим, что $M \cap K \cap U = H^{-1}(0)$.

Трансверсальное пересечение – подмногообразие

Продолжаем док-во теоремы:

Шаг 2:

Проверим, что p — регулярная точка H.

$$\dim \ker d_p H = \dim(\ker d_p f \cap \ker d_p g) = m + k - n$$

из формулы для размерности пересечения линейных подпространств

$\implies \operatorname{rank} d_p H = n - (m + k - n) = 2n - k - n$

$\implies p$ — регулярная точка H.

Шаг 3:

Так как множество регулярных точек открыто, в некоторой окрестности $V \ni p$ ($p \in V \subset U \subset N$) все точки регулярные

$\implies M \cap K \cap V$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

$\implies$ (так как p произвольная) $M \cap K$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

Касательное пространство пересечения

Теорема

Пусть $M, K \subset N$ *— гладкие подмногообразия,* $M \pitchfork K$, $p \in M \cap K$. *Тогда*

$$T_p(M \cap K) = T_pM \cap T_pK$$

Доказательство.

Включение $T_p(M \cap K) \subset T_pM \cap T_pK$ следует из включений $M \cap K \subset M$ и $M \cap K \subset K$.
Обратное включение — из равенства размерностей. □