# Изометрии

**Определение**

Простые поверхности $M_1, M_2$ одинаковой размерности изометричны, если у них есть такие параметризации $r_i\colon U_i \to M_i$ и такой диффеоморфизм $\varphi\colon U_1 \to U_2$, что их первые формы поточечно равны, т.е. их первые формы $\mathbf{I}^{r_1}$ и $\mathbf{I}^{r_2}$ в соответствующих точках $x \in U_1$ и $\varphi(x) \in U_2$ связаны соотношением

$$\mathbf{I}^{r_1}_x(v, w) = \mathbf{I}^{r_2}_{\varphi(x)}(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)), \qquad v, w \in \mathbb{R}^m$$

$r: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$

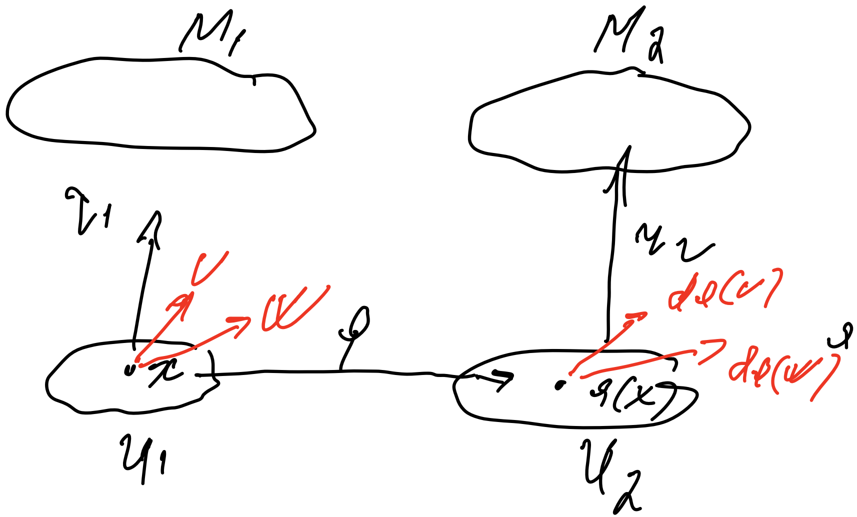
парам-ов

$r_1 \sim r_2 \Rightarrow$ пар-в $= [r_1]$

$M = r(U)$

$\|$

$M$




$\varphi$:

биекция

гладкая

$\varphi^{-1}$ - гладкая

# Изометрии

## Определение

Простые поверхности $M_1, M_2$ одинаковой размерности изометричны, если у них есть такие параметризации $r_i\colon U_i \to M_i$ и такой диффеоморфизм $\varphi\colon U_1 \to U_2$, что их первые формы поточечно равны, т.е. их первые формы $\mathbf{I}^{r_1}$ и $\mathbf{I}^{r_2}$ в соответствующих точках $x \in U_1$ и $\varphi(x) \in U_2$ связаны соотношением

$$\mathbf{I}^{r_1}_x(v, w) = \mathbf{I}^{r_2}_{\varphi(x)}(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)), \qquad v, w \in \mathbb{R}^m$$

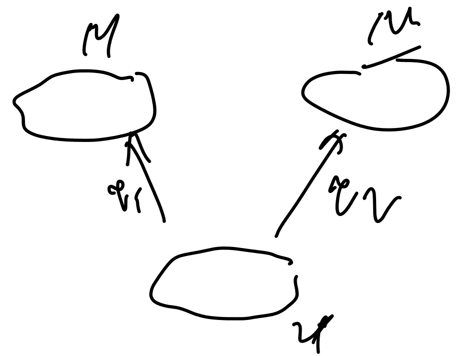
## Определение

Простые поверхности … локально изометричны, если у них есть такие локальные параметризации $r_i\colon U_i \to M_i$ …

Параметризация
"куска" пов-ти

## Замечание

Можно сделать общую область определения параметризаций: … (локально) изометричны, если у них есть такие параметризации $r_i\colon \mathbf{U} \to M_i$, что их первые формы поточечно равны.



# Изометрия и внутренняя метрика

## Определение

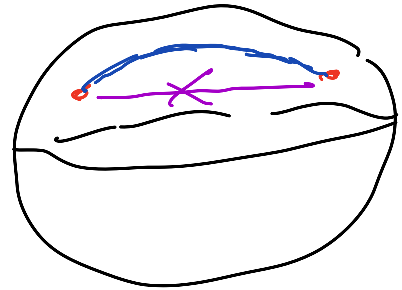
Пусть $M$ – связная поверхность, $p, q \in M$.
Внутреннее расстояние между $p$ и $q$ в $M$ — инфимум длин кусочно-гладких кривых на $M$, соединяющих $p$ и $q$.

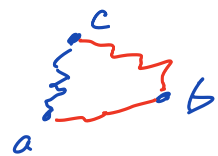
Легко проверить, что

- $M$ с этим расстоянием — метрическое пространство
- Изометрии поверхностей сохраняют внутреннее расстояние.

## Замечание

Интуитивный смысл: изометрия изгибает поверхность без внутренних растяжений и сжатий.





# Локальная изометричность плоскости и цилиндра

- Для плоскости в декартовых координатах параметризация

$$\underline{r(x,y) = (x,y,0)}$$

Поэтому

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Для цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ можно выбрать параметризацию

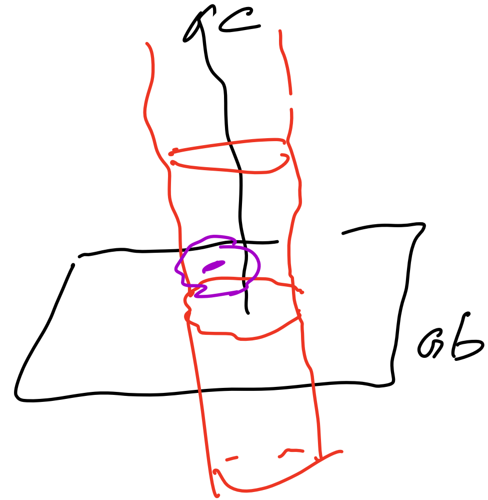
$$r(x,y) = (\cos x, \sin x, y)$$

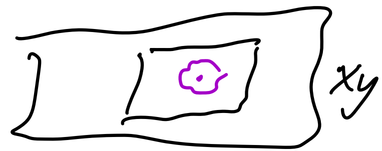
Получается

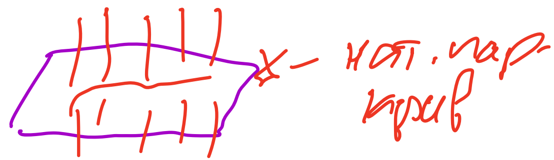
$$r_x = (-\sin x, \cos x, 0)$$

$$r_y = (0,0,1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$






**Задача**

Цилиндр (над любой регулярной кривой) локально изометричен плоскости.

# Локальная изометричность плоскости и конуса

- Для плоскости в полярных координатах параметризация

$$r(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0)$$

Поэтому

$$\{\mathrm{I}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

- Для конуса над любой натурально параметризованной регулярной кривой $\gamma(y)$ на единичной сфере можно выбрать параметризацию

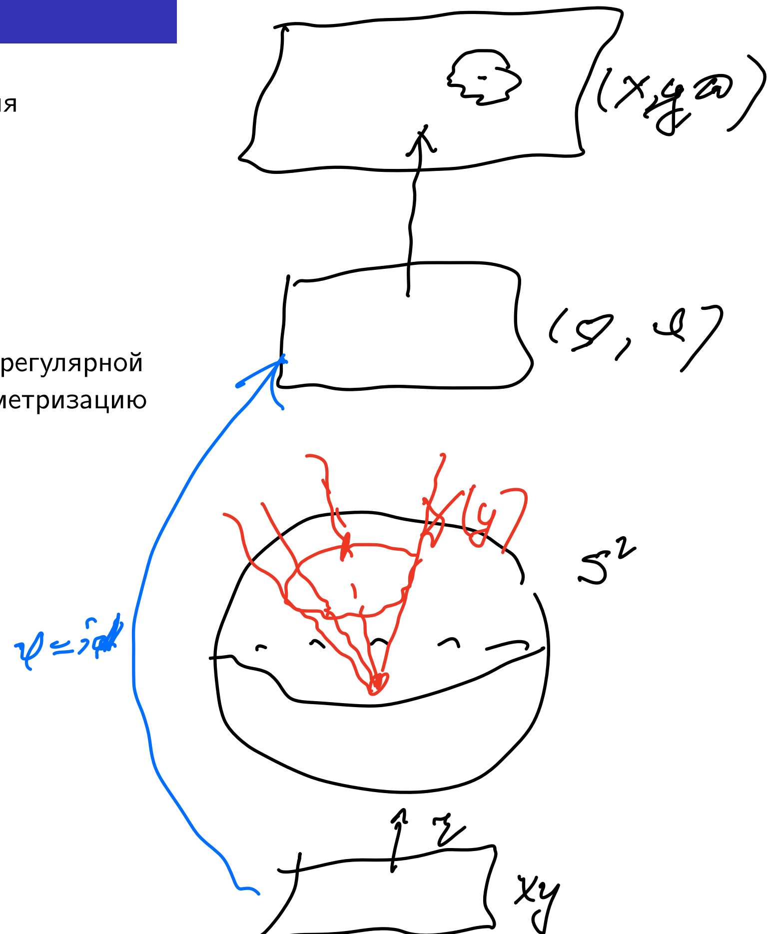
$$r(x, y) = x \cdot \gamma(y)$$

Получается

$$r_x = \gamma(y)$$

$$r_y = x \cdot \gamma'(y)$$

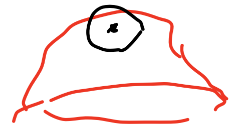
$$\{\mathrm{I}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$



# Внутренняя геометрия поверхности

## Пример

Сфера не локально изометрична плоскости.



## Доказательство.

На сфере другая формула длины окружности:
$\ell = 2\pi \sin \rho$ – на сфере.
$\ell = 2\pi\rho$ – на плоскости. $\square$

## Выводы

Свойство (или характеристика) поверхности относится к внутренней геометрии, если оно одинаково у изометричных поверхностей.

Внутренние свойства — те и только те, которые определяются первой формой.

Например, к внутренней геометрии относятся длины, углы, площади на поверхности.

Кривизны и связанное с ними — обычно не относятся (хотя есть исключения).

# Основное определение изометрии

**Определение**

Пусть $M_1, M_2$ — поверхности (одинаковой размерности).
Изометрия между $M_1$ и $M_2$ — диффеоморфизм $f: M_1 \to M_2$ такой, что для любой точки $p \in M_1$,
дифференциал $d_p f: T_p M_1 \to T_{f(p)} M_2$ сохраняет скалярное произведение.

Поверхности изометричны, если существует изометрия между ними.

**Теорема**

*Определения эквивалентны.*

$v, w \in T_p M_1$

$\langle v, w \rangle = \langle df(v), df(w) \rangle$

## Напоминание

$M = r(u, v)$– поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\quad [\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{II}] = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$

Деривационные формулы Гаусса:

$$\begin{aligned} r''_{uu} &= \Gamma^1_{11} r'_u + \Gamma^2_{11} r'_v + h_{11} n, \\ r''_{uv} &= \Gamma^1_{12} r'_u + \Gamma^2_{12} r'_v + h_{12} n, \\ r''_{vv} &= \Gamma^1_{22} r'_u + \Gamma^2_{22} r'_v + h_{22} n. \end{aligned}$$

**Теорема (3 семестр)**

*Символы Кристоффеля (обоих родов) выражается через $g_{ij}$ и их производные.*

Деривационные формулы Вейнгартена:

$$\begin{aligned} n'_u &= b^1_1 r'_u + b^2_1 r'_v, \\ n'_v &= b^1_2 r'_u + b^2_2 r'_v. \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{pmatrix} = -[\mathbf{I}]^{-1} \cdot [\mathbf{II}].$$ 3 сем

## Блистательная теорема Гаусса

### Теорема (Гаусс, “theorema egregium”)

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left((\Gamma^2_{11})'_v - (\Gamma^2_{12})'_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right).$$

### Следствие

*Гауссова кривизна $K$ является внутренним инвариантом поверхности (т.е. сохраняется при изометриях), поскольку выражается через $g_{ij}$ и их производные.*

### Следствие

*Сфера не изометрична плоскости, так как у сферы гауссова кривизна равна $1/R^2$, а у плоскости она равна нулю.*

# Топологические многообразия (повтор)

**Определение (напоминание)**

Многообразие размерности $n$ — хаусдорфово пространство со счётной базой такое, что у любой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$

Многообразия с краем пока не рассматриваем.

**Замечание**

Если у точки есть окрестность, гомеоморфная открытому $U \subset \mathbb{R}^n$, то есть и окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$
(так как открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$).

**Обозначение**

Для краткости размерность многообразия часто указывают верхним индексом.
Запись «многообразие $M^n$» означает то же самое, что «многообразие $M$ размерности $n$»

# Примеры топологических многообразий

1) $\mathbb{R}^n$

2) $S^n$

3) $\mathbb{RP}^n$

4) двум. пов-ти

$D^2_1$

гомеом $\partial D^2_1 \to \partial D^2_2$

$D^2_2$

$\to S^2$.

$D^2 \times S^1$ $\qquad$ $D^2 \times S^1$

тор $\to$ тор

$\parallel$

линзов. пр-во

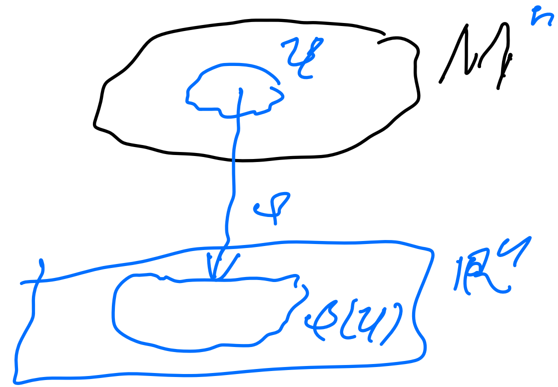
$L_{p,q}$

# Атласы и их гладкость

## Определение

Пусть $M$ — $n$-мерное многообразие.

Карта — гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $(\mathcal{U}, \varphi)$
где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ открыты.
Атлас — набор карт, области определения которых покрывают $M$ (примечание: используется вольность речи «карты покрывают $M$»).
Карты также называют локальными координатами.



### Определение

Пусть $M$ — $n$-мерное многообразие.

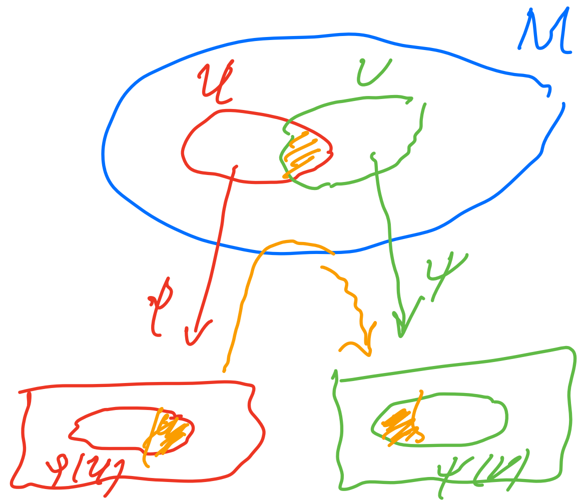
Карта — гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$,
где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ открыты.
Атлас — набор карт, области определения которых покрывают $M$
(примечание: используется вольность речи «карты покрывают $M$»).
Карты также называют локальными координатами.

Отображение перехода между картами $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ —
отображение

$\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Две карты гладко согласованы, если отображение перехода между ними гладкое.
Атлас — гладкий, если все его карты гладко согласованы.



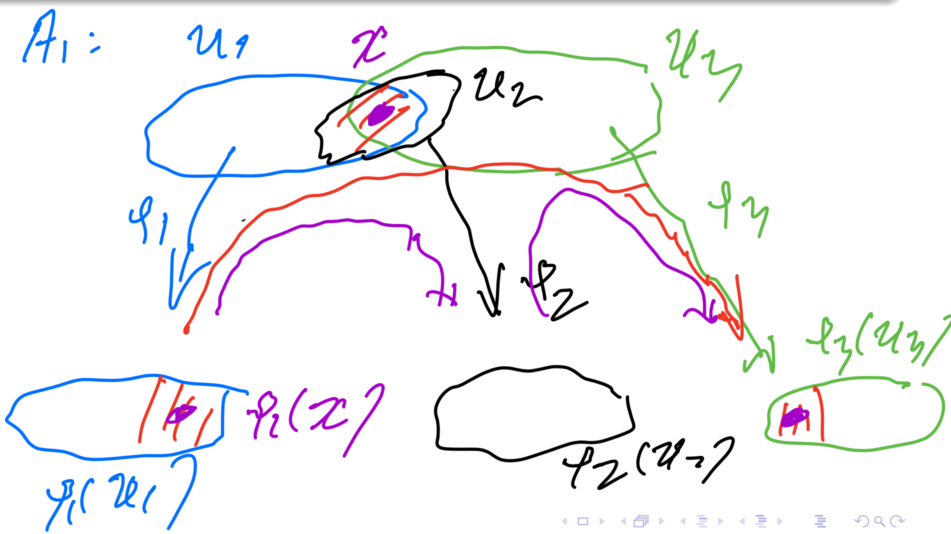
# Эквивалентность атласов

## Определение

Два гладких атласа **эквивалентны**, если их объединение — тоже гладкий атлас.

## Лемма

- *Это действительно отношение эквивалентности.*
- *В каждом классе эквивалентности есть единственный максимальный (по включению) атлас — объединение всех атласов из класса эквивалентности.*




Д-во 1 пункта

$A_1, A_2, A_3$ — атласы на $M$: $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3$

Цель: д-ть $A_1 \sim A_3$

Докажем гл-ть отобр $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1 \cap U_3))$ поточечно

$(U_2, \varphi_2) \in A_2$

$x \in U_2$

$U_1 \cap U_2 \cap U_3$

$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} =$

$= (\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$

# Определение гладкого многообразия

## Определение

Гладкое многообразие — многообразие с заданным на нём максимальным гладким атласом.
Максимальный атлас также называют стуктурой гладкого многообразия или дифференциальной структурой.

### Терминология

- Вместо «гладкое многообразие» также говорят «многообразие класса $C^\infty$».
  Аналогично определяются многообразия класса $C^k$, $k \in \mathbb{N}$.
- Область определения карты называется носителем карты.
  Будем использовать вольность речи: вместо «носитель карты содержит то-то» писать «карта содержит то-то».
- Отображения, обратные к картам, называются локальными параметризациями. Иногда их тоже называют картами.
- Если $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — карта и $x \in U$, то координаты точки $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ называются координатами точки $x$ в карте $\varphi$.

## Простейшие примеры

### Замечание

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на $M$.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathcal{A}$.

# Простейшие примеры

**Замечание**

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на $M$.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathcal{A}$.

- $\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие
  Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.
  Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.

# Простейшие примеры

**Замечание**

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на $M$.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathcal{A}$.

- $\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие
  Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.
  Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.
- Открытое подмножество гладкого многообразия – гладкое многообразие той же размерности.

# Простейшие примеры

**Замечание**

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на $M$.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathcal{A}$.

- $\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие
  Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.
  Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.
- Открытое подмножество гладкого многообразия – гладкое многообразие той же размерности.
- 0-мерные многообразия — дискретные пространства и только они. На 0-мерном многообразии есть единственная дифференциальная структура.

# Простейшие примеры

## Замечание

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на $M$.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathcal{A}$.

- $\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие
  Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.
  Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.
- Открытое подмножество гладкого многообразия – гладкое многообразие той же размерности.
- 0-мерные многообразия — дискретные пространства и только они.
  На 0-мерном многообразии есть единственная дифференциальная структура.

## Пример двух различных структур на $\mathbb{R}$

1. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$ (стандартная).
2. $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^3$.