Tor **и** Ext .

1. Пусть M — модуль.

   - Докажите, что следующие условия эквивалентны:
     - M плоский;
     - $\operatorname{Tor}_1^R(X, M) = 0$ для любого правого модуля X;
     - $\operatorname{Tor}_n^R(X, M) = 0$ для любого правого модуля X и любого $n > 0$.
   - Докажите, что следующие условия эквивалентны:
     - M проективен;
     - $\operatorname{Ext}_1^R(M, X) = 0$ для любого модуля X;
     - $\operatorname{Ext}_n^R(M, X) = 0$ для любого модуля X и любого $n > 0$.
   - Докажите, что следующие условия эквивалентны:
     - M инъективен;
     - $\operatorname{Ext}_1^R(X, M) = 0$ для любого модуля X;
     - $\operatorname{Ext}_n^R(X, M) = 0$ для любого модуля X и любого $n > 0$.

2. Пусть A, B — абелевы группы. Докажите, что $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A, B) = 0$ равен нулю для $n > 1$.

3. Пусть A — абелева группа. Вычислите $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A)$ и $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A)$ для всех $m \geq 0$.

4. Докажите, что $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) \cong \{a \in A \mid \exists m \neq 0 : ma = 0\}$.

5. Пусть A — абелева группа кручения. Докажите, что $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

6. Докажите, что, если любая конечно порождённая подгруппа абелевой группы A является плоским $\mathbb{Z}$-модулем, то таковым является и A. Выведите отсюда, что A является плоским $\mathbb{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда A свободна от кручения.

7. Пусть A — абелева m-группа. Вычислите $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, A)$ для всех $n \geq 0$ и $d \mid m$.

8. Докажите, что $\operatorname{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong \frac{I \cap J}{IJ}$ для любых двух двусторонних идеалов I и J кольца R.

9. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — короткая точная последовательность модулей с плоским C. Докажите, что A плоский тогда и только тогда, когда B плоский.

10. Пусть $C \overset{\iota}{\hookrightarrow} P \twoheadrightarrow A$ — короткая точная последовательность R-модулей с проективным модулем P посередине. Сопоставим гомоморфизму $f : C \to B$ короткую точную последовательность $B \hookrightarrow X \twoheadrightarrow A$, где первая стрелка получается пушаутом ι вдоль f. Докажите, что это сопоставление индуцирует биекцию между $\operatorname{Hom}_R(C, B)/\operatorname{Hom}_R(\iota, B) = \operatorname{Ext}^1(A, B)$ и классами изоморфизма коротких точных последовательностей, начинающихся в B и заканчивающихся в A.

11. Пусть $S = k[x]/(x-a)$, $T = k[x]/(x-b)$ — $k[x]$-модули. Опишите все короткие точные последовательности, начинающиеся в T и заканчивающиеся в S.