# (Ко)гомологии групп.

Во всех задачах $G$ — группа, $A$ — $G$-модуль.

1. Пусть имеется расширение группы $G$ абелевой группой $A$: $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$. Докажите, что автоморфизмы $E$, индуцирующие тождественные автоморфизм $A$ и $G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством 1-коциклов $Z^1(G, A)$ и при этом соответствии 1-кограницы соответствуют сопряжениям элементами из $A$.

2. Поймите, что для тривиального модуля $A$ выполнено: $\mathrm{H}^1(G, A) = \mathrm{Hom}\,(G, A)$ (Hom в категории групп).

3. Опишите для всех чисел $m, n$ и $C_m$-модулей $A$ группы $\mathrm{H}_n(C_m, A)$ и $\mathrm{H}^n(C_m, A)$.

4. Агументационный идеал $\mathcal{J}_G$ — это ядро $\mathbb{Z}G$-линейного отображения $\pi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, которое переводит $1_G$ в единицу (и, следовательно переводит любой $g \in G$ в единицу). Докажите, что $\{g - 1 \mid g \in G \setminus \{1_G\}\}$ — $\mathbb{Z}$-базис $\mathcal{J}_G$.

5. Пусть $G = F\langle X\rangle$ — свободная группа на множестве образующих $X$. Докажите, что $\mathcal{J}_G$ — свободный $\mathbb{Z}G$-модуль с базисом $\{x - 1 \mid x \in X\}$. Выведите отсюда, что $H_n(F\langle X\rangle, A) = H^n(F\langle X\rangle, A) = 0$ для любого $A$ и любого $n \geq 2$. Докажите, что, если $A$ — тривиальный $G$-модуль, то $H_1(G, A) \cong \bigoplus\limits_{x\in X} A$ и $H^1(G, A) \cong \prod\limits_{x\in X} A$.

6. Пусть $G$ — конечная группа. Определим гомоморфизм $\phi_n : \mathbb{Z}G^{\otimes(n+1)} \to \mathbb{Z}G^{\otimes(n+2)}$ равенством $\phi_n(g_0\otimes\cdots\otimes g_n) = \sum\limits_{g\in G} g_0\otimes\cdots\otimes g_n\otimes g$. Проверьте, что для $n > 0$ выполнено $(\delta_n\phi_n + \phi_{n-1}\delta_{n-1})(g_0\otimes \cdots\otimes g_n) = |G| g_0\otimes\cdots\otimes g_n$и выведите отсюда, что $\mathrm{H}_n(G, A)$ и $\mathrm{H}^n(G, A)$ являются $|G|$-группами для любого $n > 0$.

7. Пусть $|G| = m$ и $A$ — абелева группа, для которой гомоморфизм умножения на $m$ (операцию в $A$ мы считаем сложением) является изоморфизмом. Докажите, что $\mathrm{H}_n(G, A) = \mathrm{H}^n(G, A) = 0$ для любого $n > 0$.

8. Докажите, что для любой конечной группы $G$ выполнено $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}\,(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, где структура $G$-модуля на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ тривиальна.

9. Пусть имеется расщепляющееся расширение $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G$ группы $G$ абелевой группой $A$. Докажите, что, если $\sigma_1, \sigma_2 : G \to E$ — два расщепления, то отображение $h : G \to A$ определённое равенством $\sigma_1(g) = h(g)\sigma_2(g)$ является 1-коциклом.

10. Пусть имеется расщепляющееся расширение $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G$ группы $G$ абелевой группой $A$, причём $|G| = m$ взаимно просто с $|A| < \infty$. Докажите, что любые две подгруппы в $E$ порядка $m$ сопряжены элементом из $A$.