Пример: сфера

Пример

На сфере S^{n-1} можно задать дифференциальную структуру разными естественными атласами, например

- $2n$ ортогональных проекций;
- две стереографические (центральные) проекции

Проверять гладкость отображений перехода будет проще, если заметить, что карты гладко продолжимы на открытые области в $\mathbb{R}^n$.

На самом деле проверять определение вручную не нужно, так как сфера — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (об этом позже)

Определение гладкого отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f : M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

Пусть $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ — карты в M и N.

Координатное представление f в картах φ и ψ — это отображение

$$f_{\varphi,\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

Определение

Отображение f гладкое, если все его координатные представления гладкие (в том смысле, который определён для $\mathbb{R}^n$).

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ **гладкое в точке** $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*
5. *Тождественное отображение — гладкое.*

Гладкость в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

Лемма (Свойства гладких отображений)

1. *Гладкость в точке не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.*
2. *f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.*
3. *В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.*
4. *Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).*
5. *Тождественное отображение — гладкое.*
6. *Композиция гладких отображений — гладкое.*

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.
Два многообразия диффеоморфны, если существует диффеоморфизм между ними.

Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.

Диффеоморфизм и его свойства

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.
Два многообразия диффеоморфны, если существует диффеоморфизм между ними.

Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.

Лемма

У диффеоморфных многообразий размерности равны.

Доказательство.

Координатное представление диффеоморфизма $f\colon M^m \to N^n$ — диффеоморфизм между областями в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.
Дифференцируя и применяя производную композиции, получаем изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.
Значит, $m = n$. $\square$

Лемма (важная характеризация карт)

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.

Диффеоморфизм и его свойства

Лемма (важная характеризация карт)

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.

Следствие

Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ индуцирует биекцию между картами M и N таким образом:
карте $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ многообразия N соответствует карта
$\psi \circ f\colon f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ многообразия M.

Таким образом, диффеоморфизм — изоморфизм дифференциальных структур.

Количество гладких структур

Пусть M^n – гладкое многообразие.

- Если $n < 4$, то $\exists$ единственная (с точностью до диффеоморфизма) гладкая структура на M.
- Если $n > 4$, то число гладких структур на M конечно.
- Если $n = 4$, то число гладких структур на M может быть бесконечно.
- Ни об одном гладком 4-многообразии мы не знаем, конечно ли число гладких структур на нем.
- На $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$, $\exists$ единственная гладкая структура.
- На $\mathbb{R}^4$ число гладких структур несчетно.

Эквивалентность (соприкосновение) кривых

Пусть M^n – гладкое многообразие и $p \in M$.
Рассм. всевозможные гладкие кривые $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ т.ч. $\alpha(0) = p$.

Определение

Назовем две такие кривые α и β эквивалентными, если существует карта (U, φ) на M такая, что $p \in U$ и

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Пусть M^n – гладкое многообразие и $p \in M$.
Рассм. всевозможные гладкие кривые $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ т.ч. $\alpha(0) = p$.

Определение

Назовем две такие кривые α и β эквивалентными, если существует карта (U, φ) на M такая, что $p \in U$ и

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Лемма

Свойство эквивалентности кривых не зависит от карты: если оно верно для одной карты φ, содержащей p, то оно верно для любой карты ψ, содержащей p.

Док-во: Пусть $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ – гладкая кривая, $\gamma(0) = p$, (U, φ) и (V, ψ) – две карты, содержащие точку p. Тогда

$$\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma). \tag{1}$$

$$(\psi \circ \gamma)'(0) = d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0). \tag{2}$$

Касательный вектор и его координатное представление

Определение

Касательный вектор многообразия M в точке p – класс эквивалентности кривых по вышеуказанному отношению эквивалентности.

Касательное пространство M в точке p — множество всех касательных векторов в точке p.

Обозначение касательного пространства: T_pM.

Структуру векторного пространства на T_pM определим позже.

Определение

Пусть $v \in T_pM$, (U, φ) – карта, $p \in U$.
Рассмотрим вектор
$$v_\varphi := (\varphi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n,$$
где α – любая кривая, представляющая v.

Вектор v_φ – координатное представление касательного вектора v в карте φ.

Его координаты – координаты v в карте φ.

По определению v_φ не зависит от выбора кривой α, представляющей вектор v.

Координаты вектора в карте, замена координат

Определение

Пусть $v \in T_pM$, (U, φ) – карта, $p \in U$.
Координаты v в карте (U, φ) – координаты вектора φ в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$.

Лемма

Пусть (U, φ) и (V, ψ) – две карты, содержащие точку $p \in M$, $v \in T_pM$. Пусть $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ – отображение перехода.
Тогда координатные представления v в картах φ и ψ связаны соотношением:

$$v_\psi = d_{\varphi(p)} f(v_\phi).$$

Док-во: См. пункт (2) доказательства леммы о независимости понятия эквивалентности кривых от выбора карты.

Из леммы следует второе определение касательного вектора.

Определение

Касательный вектор в точке p — отображение v из множества всех карт, содержащих p, в $\mathbb{R}^n$ $(\varphi \mapsto v_\varphi)$ такое, что для любых двух карт φ и ψ верно равенство из предыдущего свойства:

$$v_\psi = d_{\varphi(p)} f(v_\varphi).$$

Вектор задается своими координатами

Лемма

Для любой карты (U, φ), содержащей p, соответствие $v \mapsto v_\varphi$ – биекция между T_pM и $\mathbb{R}^n$.

Инъективность следует из определения эквивалентности кривых.
Сюръективность: Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим кривую

$$\widehat{\gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{\gamma}(t) = \varphi(p) + \xi t.$$

Тогда для вектора $v = [\gamma]$, где $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \widehat{\gamma}(t)$, имеем $v_\varphi = \xi$.

Структура векторного пространства на T_pM

Определение

Пусть $v, w \in T_pM$, φ – карта в окрестности p.
Определим сумму $v + w \in T_pM$ как такой вектор из T_pM, что

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi$$

(складываем координаты и в карте и берём вектор с полученными координатами).
Аналогично определяется умножение касательного вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda v)_\varphi = \lambda(v_\varphi)$.

- Определение корректно (вектор с такими свойствами существует и единственен).
- Определение не зависит от выбора карты φ.
  Это следует из линейности правила пересчёта координат касательного вектора при замене карты.
- Координатное представление $v \mapsto v_\varphi$ — изоморфизм векторных пространств T_pM и $\mathbb{R}^n$.

Касательное расслоение

Определение

Касательным расслоением гладкого многообразия M^n называется множество

$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M).$$

Касательные пространства вида T_pM называются слоями касательного расслоения $T(M)$.

Теорема

$T(M)$ является гладким многообразием размерности $2n$.

Док-во: Пусть (U, φ) – карта на M. Положим

$$T(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p(M).$$

Зададим отображение $\Phi_U \colon T(U) \to \mathbb{R}^{2n}$: Для $v \in T_pM$, где $p \in U$, определяем

$$\Phi_U(v) = (\varphi(p), v_\varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Φ_U биективно отображает $T(U)$ на открытое множество $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Зададим топологию на $T(M)$:

$X \subseteq T(M)$ открыто $\iff$ для любой карты (V, ψ) на M множество $\Phi_V(X \cap T(V))$ открыто в $\mathbb{R}^{2n}$.

Это топология, так как Φ_V – биекция, то есть Φ_V сохраняет объединения и пересечения.

Гладкий атлас на $T(M)$ – это множество $\{(T(U), \Phi_U)\}$ по всем картам (U, φ) на M.

- эти карты покрывают $T(M)$.
- Пусть $(T(U), \Phi_U)$ и $(T(V), \Phi_V)$ – карты на $T(M)$, порождаемые картами (U, φ) и (V, ψ) на M. Тогда функция перехода имет вид
$$\Phi_V \circ \Phi_U^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})),$$
и согласованность карт в $T(M)$ следует из согласованности карт в M.
- Φ_U – гомеоморфизм.

Дифференциал отображения в точке

Пусть M^m, N^n – гладкие многообразия,
$f\colon M \to N$ — гладкое отображение,
$p \in M$.

Определение

Дифференциал (**касательное отображение**) f в точке p — отображение

$$d_p f\colon T_p M \to T_{f(p)} N,$$

определяемое следующим образом:

Для $v \in T_p M$, представленного кривой α, $d_p f(v)$ — вектор из $T_{f(p)} N$, представленный кривой $f \circ \alpha$.

Теорема

1. *$d_p f$ определено корректно;*
2. *$d_p f$ — линейное отображение из T_pM в $T_{f(p)}N$.*
3. *Для карт ϕ и ψ в окрестностях p и $f(p)$*

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\phi(p)} f_{\phi,\psi}(v_\phi), \qquad \forall\, v \in T_pM$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

Корректность и т.д.

Теорема

1. $d_p f$ *определено корректно;*
2. $d_p f$ *— линейное отображение из* $T_p M$ *в* $T_{f(p)} N$.
3. *Для карт* ϕ *и* ψ *в окрестностях* p *и* $f(p)$

$$(d_p f(v))_\psi = d_{\phi(p)} f_{\phi,\psi}(v_\phi), \qquad \forall\, v \in T_p M$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

Замечание

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, определение дифференциала согласовано с обычным, с учетом стандартных изоморфизмов $T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ и $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
Это следует из третьего утверждения теоремы для тождественных карт.