InT 1. Пусть загадано число от 1 до N. Можно задавать любые вопросы на «да/нет». Сколько вопросов потребуется, если на один ответ можно дать неверный ответ, а вопросы:

а) можно задавать адаптивно;

б) нужно написать заранее?

InT 2. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^3$ будем обозначать $\pi_{ij}(A)$ проекцию A на координатную плоскость, задаваемую осями i, j (индексы $i, j \in [3]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$2 \log |A| \leq \log |\pi_{12}(A)| + \log |\pi_{13}(A)| + \log |\pi_{23}(A)|.$$

InT 3. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}^4$ будем обозначать $\pi_{ijk}(A)$ проекцию A на координатную плоскость, задаваемую осями i, j, k (индексы $i, j, k \in [4]$). Докажите, что для любого конечного A выполняется:

$$3 \log |A| \leq \log |\pi_{123}(A)| + \log |\pi_{124}(A)| + \log |\pi_{134}(A)| + \log |\pi_{234}(A)|.$$

InT 4. Пусть имеется некоторая карточка, про которую известно, что на одной её стороне написано целое неотрицательное число n, а на другой — целое число $n+1$. Алиса и Боб сидят друг напротив друга смотрят на эту карточку с разных сторон и между ними происходит следующий разговор.

А: Я не знаю числа на стороне Боба.

Б: Я не знаю числа на стороне Алисы.

Это повторяется 10 раз и после этого Алиса говорит, что знает число на стороне Боба. Какие числа могли быть написаны на карточке?

InT 5. Пусть $\sum p_i = 1$ и все $p_i > 0$. Определим функцию $h(p) := \sum\limits_i p_i \log \frac{1}{p_i}$. К чему стремится значение этой функции для следующих последовательностей:

а) $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, 1/2^n$;

б) $1/3, 1/3, 1/9, 1/9, \dots, 1/3^n, 1/3^n, 1/3^n$?

Определение

Будем называть **кодом** функцию $C\colon \{a_1, \dots, a_n\} \to \{0,1\}^*$, сопоставляющую буквам некоторого алфавита **кодовые слова**. Если любое сообщение, которое получено применением кода C, декодируется однозначно (т.е. только единственным образом разрезается на образы C), то такой код называется **однозначно декодируемым**.

Код называется **префиксным (беспрефиксным, prefix-free)**, если никакое кодовое слово не является префиксом другого кодового слова.

InT 6. Докажите, что для любого префиксного кода со множеством кодовых слов $a_1, \dots, a_n$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-|a_i|} \leq 1.$$