InT 1. Докажите, что если есть набор целых чисел $\ell_1, \dots, \ell_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leq 1,$$

то существует префиксный код с кодовыми словами $c_1, \dots, c_n$, где $|c_i| = \ell_i$.

Определение

Для случайной величины α с вероятностями событий $(p_1, p_2, \dots)$ меру

$$\mathrm{H}(\alpha) := \sum p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

мы будем называть **энтропия** и обозначать H (иногда h).
Энтропией α при $\beta = b$ мы будем называть энтропию распределения α при условии, что $\beta = b$, то есть следующую величину:

$$\mathrm{H}(\alpha \mid \beta = b) := \sum_i \Pr[\alpha = i \mid \beta = b] \cdot \log \frac{1}{\Pr[\alpha = i \mid \beta = b]}$$

Тогда **энтропией α при условии β** мы назовем среднее значение по b энтропии α при $\beta = b$. Таким образом:

$$\mathrm{H}(\alpha \mid \beta) := \mathop{\mathbb{E}}_{b \sim \beta}[\mathrm{H}(\alpha \mid \beta = b)] = \sum_b \mathrm{H}(\alpha \mid \beta = b) \cdot \Pr[\beta = b].$$

InT 2. Докажите, что величины α, β, γ независимы в совокупности (вероятность события $(\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_j, \gamma = \gamma_k)$ равна произведению трех отдельных вероятностей) тогда и только тогда, когда:

$$\mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{H}(\alpha) + \mathrm{H}(\beta) + \mathrm{H}(\gamma).$$

Определение

Взаимной информацией между случайными величинами α и β будем называть функцию $I(\alpha{:}\,\beta) := \mathrm{H}(\alpha) - \mathrm{H}(\alpha \mid \beta)$.
Также определим взаимную информацию в α и β при условии γ. $I(\alpha{:}\,\beta \mid \gamma) = \mathrm{H}(\alpha \mid \gamma) - \mathrm{H}(\alpha \mid \beta, \gamma)$.

InT 3. Докажите следующие свойства взаимной информации:

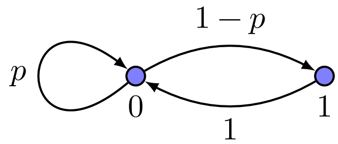
а) $I(\alpha{:}\,\beta) = I(\beta{:}\,\alpha)$;

б) α и β независимы тогда и только тогда, когда $I(\alpha{:}\,\beta) = 0$;

в) $I(f(\alpha){:}\,\beta) \leq I(\alpha{:}\,\beta)$ для любой функции f.

InT 4. Докажите неравенство $2\,\mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \mathrm{H}(\alpha, \beta) + \mathrm{H}(\alpha, \gamma) + \mathrm{H}(\beta, \gamma)$.
Комментарий. Верно и более общее утверждение. Пусть $T_1, \dots, T_k$ — произвольные кортежи, составленные из переменных $\alpha_1, \dots \alpha_n$, причем каждая переменная входит ровно в r кортежей. Тогда $r\,\mathrm{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \mathrm{H}(T_1) + \mathrm{H}(T_2) + \dots + \mathrm{H}(T_k)$ (Shearer's inequality).

InT 5. Пусть $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — это случайная величина, задающая последовательность состояний Марковской цепи, изображенной на рисунке.
Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\mathrm{H}(\alpha)}{n}$?



INT 6. Имеется набор из n камней. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти самый тяжелый и самый лёгкий камни (на каждую чашу можно класть не более одного камню)?

INT 7. Докажите, что следующее неравенство выполнено *не для всех* троек случайных величин (α, β, γ).

$$2\,\mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \mathrm{H}(\alpha, \beta) + \mathrm{H}(\alpha, \gamma \mid \beta) + \mathrm{H}(\beta, \gamma \mid \alpha)$$