Напоминание: X — топологическое векторное, X^* — непр. л. ф-лы на X

система окрестностей нуля в слабой топологии в X

$$U_{\varepsilon, F_1, \dots, F_n} := \{ x \in X : |F_i(x)| < \varepsilon ;\ i = 1 \dots n \}.$$

система окрестностей нуля в $*$-слабой топологии в X^*

$$V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n} := \{ F \in X^* : |F(x_k)| < \varepsilon ,\ k = 1 \dots n \}.$$

$*$-сильная топология в X^*

$$E_{\varepsilon, B} := \{ F \in X^* : |F(x)| < \varepsilon ,\ x \in B - \left\{ \frac{\text{огр.}}{\text{слабо огр.}} \right\} \}.$$

Локально выпуклые топологические векторные пространства.

Соображение X — т.в.п., $F \in X^*$

$$F^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) =$$
$$= \{ x : |F(x)| < \varepsilon \}.$$

выпуклая, открытое

$\Downarrow$

$x_1, x_2 \to \underline{t x_1} + \underline{(1-t) x_2}$ лежат там же $0 \le t \le 1$.

X — топологическое векторное пространство над $\mathbb{C}$ / $\mathbb{R}$. **DEF**

$X = (X, T)$

- $(x+y) : X \times X \to X$
- $\lambda \cdot x : \mathbb{C}/\mathbb{R} \times X \to X$

} непрерывны

- хаусдорфовость

$\Downarrow$ (для нашего случая)

$\{x\}$ — замкнута

X – твп, оно:

- локально выпукло, если есть база из выпуклых окрестностей;

<u>Замечание</u>: для задания топологии достаточно иметь базу окрестностей нуля.

- локально ограничено, если есть огр. окрестность нуля;
- локально компактно, если есть предкомп. окрестность нуля;
- метризуемо, если топология совместима с некоторой метрикой;
- F-пространство, если топология порождается полной инв. метрикой;
- пространство Фреше, если F-пространство + лок. выпуклость;
- нормируемо, если метрика $\|\cdot - \cdot\|$ индуцирует ту же топологию

<u>Def.</u> Пусть X – т.в.п., $A \subset X$, тогда A – огр. ("финитистично" ограничено, огр. по фон Нейману), если для любой окрестности нуля U в X найдётся такое число $s = s(U, A) > 0$, такое что $A \subset \lambda U \ \forall |\lambda| > s$.

<u>Набор простых фактов про т.в.п.</u>

<u>Ут.</u> (i) $K, E \subset X$, K – компактно, E – замкнуто, $K \cap E = \varnothing$. Тогда найдётся окрестность нуля V, т.ч. $(K+V) \cap (E+V) = \varnothing$.

<u>Доказательство (набросок)</u>.
- пусть есть окрестность нуля W, тогда найдётся окрестность нуля U, т.ч. $U = -U$, $U + U \subset W$.

из непрерывности сложения имеем W_1, W_2, т.ч.

$W_1 + W_2 \subset W$. Далее имеем $U := W_1 \cap W_2 \cap (-W_1) \cap (-W_2)$.

- пусть $x \in K$, E соответственно не содержит x, значит найдётся такая окрестность нуля V_x, что $x + V_x + V_x + V_x \cap E = \varnothing$, V_x – симметрична, откуда видим, что

$$(\underset{\sim}{x + V_x + V_x}) \cap (E + V_x) = \varnothing.$$

• Найдётся $\{x_k\}_1^n$, такие что
$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k}),$$
положим $V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$. ☒

(ii) $A \subset X \Rightarrow \mathrm{cl}\, A = \bigcap_{V\text{-окр. нуля}} (A+V)$

(iii) $A, B \subset X \Rightarrow \mathrm{cl}\, A + \mathrm{cl}\, B \subset \mathrm{cl}\,(A+B)$

(iiii) Если E – выпуклое в X, то $\mathrm{cl}\, E$, $\mathrm{int}\, E$ – тоже выпукл.

(v) Если E – ограниченное в X, то $\mathrm{cl}\, E$ тоже ограничено.

(vi) Если E – уравновешенное в X, то $\mathrm{cl}\, E$ тоже уравновешено, если $0 \in \mathrm{int}\, E$, то и $\mathrm{int}\, E$ тоже уравновешено.

DEF E – уравновешено, если $\lambda E \subset E$ $\forall\, |\lambda| \le 1$.

(vii) Каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля.

(viii) Каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

(ix) Если $0 < r_1 < r_2 < \dots$, $r_k \to \infty$, V – окрестность нуля, то
$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k \cdot V.$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in X$, по непрерывности умножения множество $\{\lambda : \lambda x \in V\}$ – открыто, содержит ноль, стало быть содержит круг радиуса $\frac{1}{r_n}$ для дост. больших n.

(x) Компактные множества ограничены.

(xi) Если V – ограниченная окрестность 0, $\delta_k \downarrow 0$, то система $\{\delta_k V\}$ – база окрестностей нуля.

(xii) E – ограничено $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_i\} \subset E$, $\forall \{\lambda_i\} : \lambda_i \to 0$ верно $\lambda_i \cdot x_i \longrightarrow 0$.

Локально выпуклые пространства

Напомним: пусть $E \subset X$, тогда $\operatorname{Ker} E = \{x : \forall y \in X \ \exists \varepsilon : x + ty \in E \ \forall |t| < \varepsilon\}$.

Как мы видели выше, в т.в.п. X есть база из уравновешенных окрестностей нуля, т.е. окрестностей V, таких что $\lambda V \subset V \ \forall |\lambda| < 1$.

Если X – л.в. т.в.п., то V ещё и выпуклые.

Напоминание: Если $A \subset X$, выпукло, $\operatorname{Ker} A \ni 0$, то

$$p_A(x) := \inf \{r : \tfrac{x}{r} \in A, \ r > 0\}.$$

Теорема (несколько лекций назад)

- Функционал Минковского выпуклый, положительно однородный, ≥ 0.
- Если p – произвольный выпуклый, положительно однородный, неотрицательный функционал, $k \geq 0$, то $E_k := \{x : p(x) \leq k\}$ – выпуклое тело ($\operatorname{Ker} E \neq \emptyset$), $\operatorname{Ker} E = \{x : p(x) < k\} \ni 0$. Более того $p_{E_1} = p$.

В локально выпуклых т.в.п. элементу базы V – выпуклой уравновешенной окрестности нуля соответствует $p_V : X \to \mathbb{R}_+$.

Выпуклый, неотр., положительно однородный на комплексном X:

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
- $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$
- $p \geq 0$ (следует из предыдущих пунктов).

Утв. (упражнение) В л.в. т.в.п. функционал Минковского непрерывен.

Теорема Пусть X – локально выпуклое топологическое векторное пространство, $\mathcal{B}$ – база окрестностей нуля из выпуклых уравновешенных множеств. Тогда $\{p_V : V \in \mathcal{B}\}$ – разделяющее семейство непрерывных полунорм на X.

Разделяющее означает, что $\forall x \in X \ \exists p_{V_x}(x) \neq 0$.

И обратно. Пусть X — линейное векторное пространство, $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм. Для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$V(p,n) = \{x : p(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — семейство конечных пересечений множеств вида $V(p,n)$.

Тогда $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная база окрестностей нуля, порождающая локально выпуклую топологию в X, причём

- все p непрерывны в этой топологии
- E ограничено $\Leftrightarrow$ $p(E) = \{p(x), x \in E\}$ ограничено $\forall p \in \mathcal{P}$.

Замечание. Конечные пересечения важны, т.е. $\{V(p,n)\}$ — предбаза.