Теорема

Пусть на пространстве X задано разделяющее семейство полунорм $\mathcal{P}$, Введём систему окрестностей

$$\boxed{V(p,n)=\{x:\ p(x)<\tfrac{1}{n}\}}$$

Эта система образует предбазу топологии, которая превращает X в локально выпуклое пространство, причём

p непрерывна в этой топологии, $\underset{\substack{\cap\\ X}}{E}$ ограничено $\Leftrightarrow$ каждая полунорма ограничена на E.

$x=(x_1,x_2)$

Замечание: почему именно предбаза? $\mathbb{R}^2=X$, $p_1(x)=|x_1|$, $p_2(x)=|x_2|$

Доказательство. • Замкнутость точек. Пусть $x\in X$, $x\neq 0$, тогда $p(x)>0$ для какой-то полунормы p, тогда $n\cdot p(x)>1$ для какого-то n, т.е. $x\notin V(p,n)$, стало быть $x\notin cl(\{0\})$, стало быть всё.

$$\Updownarrow$$

$$0\notin x-V(p,n)$$

• Непрерывность линейных векторных операций.
сложения, умножения на скаляры.

Докажем, что для каждой U-окрестности нуля найдётся окрестность $V\ni 0$:

$$V+V\subset U \qquad V(p,n)=\{x:\ p(x)<\tfrac{1}{n}\}$$

Найдётся набор $V(p_k,n_k)$, $k=1..m$, т.е.

$$U\supset V(p_1,n_1)\cap\ldots\cap V(p_m,n_m)$$

Положим $V=\bigcap_{k=1}^{m} V(p_k,2n_k)$. Легко видеть, что $V+V\subset U$.

• умножение $\lambda\in\mathbb{C}$, $x\in X$, U-окрестность, V — окрестность выше. Тогда $x\in sV$ для некоторого $s>0$, положим $t:=\dfrac{s}{1+|\lambda|s}$, тогда если $y\in x+tV$, и $|\lambda+\Delta\lambda-\lambda|<\frac{1}{s}$, то

$$(\lambda+\Delta\lambda)y-\lambda x=\lambda(y-x)+\Delta\lambda\cdot y=(\lambda+\Delta\lambda)\underbrace{(y-x)}+\underbrace{\Delta\lambda}\cdot x\in$$

$$\in|\lambda+\Delta\lambda|\cdot tV+|\Delta\lambda|\cdot sV\subset V+V\subset U.$$

• непрерывность полунорм: непрерывность в нуле очевидна; + полуаддитивность ⇒ ⇒ непрерывность на всем X.

• пусть $E \subset X$ — ограничено, т.е. для любой окрестности U $\exists$ t_0: $\forall |\lambda| > t_0$ $\lambda U \supset E$. Зафиксируем полунорму p, $V(p,1)$ — окрестность нуля, т.е. $t_0 \cdot V(p,1) \supset E \Rightarrow \underset{x \in E}{p(x)} \le Const$

Пусть все полунормы ограничены. Зафиксируем окрестность нуля V.

$V \supset \bigcap_{k=1}^{m} V(p_k, n_k)$, но конечном полунорм $p_k(x) \le M_k$ на E

Выбирая $t_0 \geq \max(n_k \cdot M_k)$, видим, что $E \subset t_0 \cdot V$.

$C^\infty(\mathbb{R})$ — локально выпуклое пространство со счетным семейством полунорм.

$\mathcal{S}$ — пространство Шварца $= \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| f^{(\alpha)}(t) \right| \cdot \left(1 + |t|^2\right)^{s} \le Const(\alpha, s) \}.$$

$s \geq 0$.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial t_1)^{\alpha_1} \dots (\partial t_n)^{\alpha_n}}$$

Если $\mathcal{P}$ — счётное.

Положим

$$\boxed{d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}}$$

$$\frac{d}{1+d}$$

d — МЕТРИКА, d совместима с τ, задаваемой ЧЕРЕЗ $V(p,n)$ $p \in \mathcal{P}$.

Надо проверить, что шары $B(0, \frac{1}{M})$ образуют локальную базу.

• шары открыты.

• Возьмем окрестность нуля $U \supset \bigcap_{k=1}^{m} V(p_k, n_k)$ теперь пусть

$x \in B_{\frac{1}{M}}$, тогда $\left| \frac{2^{-j} p_j(x)}{1 + p_j(x)} \right| < \frac{1}{M}$ для всех j, стало

быть если M достаточно большое, то $p_k(x) < \frac{1}{n_k}$, т.е. $B_{\frac{1}{M}} \subset V(p_k, n_k)$.

Теорема (без доказательства)

Пусть X – т.в. пространство со счётной базой окрестностей нуля. Тогда X метризуемо. При этом, если X – лок. выпуклое, то метрику можно выбрать так, чтобы шары были выпуклы.

Хан-Банах, комплексные версии.

Теорема. Пусть X – линейное векторное пространство, $p: X \to \mathbb{R}$ – полунорма, F – линейный функционал на X_0 – подпространстве X, т.ч.

$$|F(x)| \le p(x), \quad x \in X_0.$$

Тогда на X есть продолжение F, именно существует функционал $G: X \to \mathbb{C}$, т.что

$$G(x) = F(x), \quad x \in X_0$$
$$|G(x)| \le p(x), \quad x \in X.$$

Теорема. Пусть A, B – непустые выпуклые подмножества X (т.в.пр.), $A \cap B = \varnothing$.

1) Если A открыто, то найдётся такой функционал $F \in X^*$, такое $t \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathrm{Re}\, F(x) < t \le \mathrm{Re}\, F(y), \quad \begin{matrix} x \in A \\ y \in B. \end{matrix}$$

2) Если A – компактно, B – замкнуто, X – локально выпукло, то найдётся функционал $G \in X^*$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathrm{Re}\, G(x) < t_1 < t_2 < \mathrm{Re}\, G(y), \quad \begin{matrix} x \in A \\ y \in B. \end{matrix}$$

Замечание. • Достаточно доказать для X над $\mathbb{R}$.

Как (1) $\Rightarrow$ (2). Существует выпуклая окрестность нуля V, такая что $(A+V) \cap B = \varnothing$. Применим 1 к $A+V$ и B соответственно.

$F(A+V)$, $F(B)$ – выпуклые подмножества $\mathbb{R}$, при этом $F(A+V)$ открыто, лежит слева от $F(B)$, ну и $F(A)$ — компактно.

<u>Следствие</u> Если X — л. выпуклое т.в. пр., то X^* разделяет точки в X.

Доказательство: Пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда положим $A = \{x_1\}$
$B = \{x_2\}$,

применяем пункт (2) теоремы выше.

<u>Теорема (Банах — Алаоглу)</u> Alaoglu

Пусть V — окрестность нуля в топологическом векторном пространстве X, положим

$$K = V^{\circ} = \{F \in X^* : \quad |F(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in V\}.$$

Тогда K — слабо-* компактно.

Доказательство Б-А; теорема Крейна — Мильмана, слабая ограниченность в локально выпуклом $\Leftrightarrow$ ограниченность.