Напоминание

Для доказательств будем использовать

Теорема

Пусть $S : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathfrak{F}(M)$ *– полилинейно над* $\mathfrak{F}(M)$*. Тогда* S *порождается некот. (единств.) гладким тензорным полем типа* $(k, 0)$*.*

производную функции f вдоль векторного поля X

$$Xf(p) = d_p f(X(p)) \qquad \text{другие обозначения } D_X f, f'_X.$$

ее свойства

$$X(af + bg) = aXf + bXg \quad X(f \cdot g) = f \cdot Xg + Xf \cdot g$$

$$(X + Y)f = Xf + Yf \quad (fX)g = f(Xg)$$

скобку Ли

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

ее свойства

$$[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X \quad [X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$$

Аффинные связности

Цель: Построить дифференцирование одного векторного поля вдоль другого.

Определение

Аффинной связностью на гладком многообразии M называется отображение $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$,

где $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Определение

Пусть $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ — аффинная связность на гладком многообразии M, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда $\nabla_X Y$ называется ковариантной производной векторного поля Y вдоль (или, в направлении) векторного поля X.

Примеры аффинных связностей

1) $M = \mathbb{R}^n$.
Любое $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ можно считать гладкой функцией $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, т.к. $Y : M \to TM$, где $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и на первое $\mathbb{R}^n$ отображение тождественно.
Тогда $\forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дифференцирования вдоль X равенством:

$$\forall\ Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \text{ полагаем } \nabla_X Y = (Y'_X)_p = d_p Y(X_p).$$

Нужно проверить выполнение трех условий на ∇.

2) Координатное дифференцирование.
Пусть (U, φ) – карта на M, $E_1, \ldots, E_n$ – координатные векторные поля,

$$Y = \sum f_i E_i.$$

Тогда полагаем

$$\nabla^{\varphi}_X Y := \sum (f_i)'_X E_i.$$

Лемма

1. *Разность двух аффинных связностей – тензор типа (2,1).*
2. *Аффинная связность + тензор типа (2,1) – аффинная связность.*

Док-во

1) Пусть ∇ и $\widetilde{\nabla}$ – две аффинные связности на гладком многообразии M. Покажем, что отображение $\nabla - \widetilde{\nabla} \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ линейно по каждому из аргументов, что в силу теоремы с предыдущей лекции означает его порождаемость гладким тензорным полем типа (2,1). Линейность по первому аргументу очевидна в силу определения аффинной связности, Линейность по второму:

$$\nabla_X(fY) - \widetilde{\nabla}_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf)Y - f \cdot \widetilde{\nabla}_X Y - (Xf)Y = f \cdot (\nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y).$$

2) Пусть ∇ – аффинная связность и Γ – тензор типа (2,1). Покажем, что $\widetilde{\nabla} = \nabla + \Gamma$ – аффинная связность.

$$\widetilde{\nabla}_X(fY) = \nabla_X(fY) + \Gamma(X, fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y + f\Gamma(X, Y) = f\widetilde{\nabla}_X Y + (Xf)Y$$

Лемма

Пусть ∇ – аффинная связность на гладком многообразии M. Тогда $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $\forall\, p \in M$ значение $(\nabla_X Y)_p$ зависит только от X_p и от сужения Y на любую окрестность точки p.

Док-во

Фиксируем поле Y. Тогда $\nabla_X Y$ линейное над $\mathfrak{F}(M)$ отображение $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. В силу теоремы с предыдущей лекции оно порождено некоторым единственным гладким тензорным полем $\{\widehat{S}_p\}_{p \in M}$ типа $(1, 1)$. Поэтому $(\nabla_X Y)_p$ зависит только от X_p.

Фиксируем поле X. Фиксируем карту U. Пусть $p \in U$ и $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ совпадают на U. Пусть $h : M \to \mathbb{R}$ – гладкий спуск с единицы, т.ч. $h(p) = 1$, $h|_{M \setminus U} = 0$ и $d_p h = 0$. Тогда

$$hY = hZ \Rightarrow \nabla_X(hY) = \nabla_X(hZ) \Rightarrow h\nabla_X(Y) + (Xh)\cdot Y = h\nabla_X(Z) + (Xh)\cdot Z.$$

Подставляем точку p.

$$h(p)\nabla_X(Y)_p + (Xh)(p)\cdot Y(p) = h(p)\nabla_X(Z)_p + (Xh)(p)\cdot Z(p).$$

Т.к. $d_p h = 0$, то $(Xh)(p) = d_p h(X_p) = 0$. С учетом $h(p) = 1$ имеем

$$\nabla_X(Y)_p = \nabla_X(Z)_p.$$

Следствие

В карте (U, φ) любая аффинная связность ∇ имеет вид

$$\nabla_X Y = \nabla^{\varphi}_X Y + \Gamma(X, Y), \text{ где } \Gamma - \text{ тензор типа } (2, 1).$$

$$X = \sum_i f_i E_i, \quad Y = \sum_j g_j E_j.$$

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(\sum_j g_j E_j \right) = \sum_j g_j \nabla_X E_j + \sum_j (X g_j) E_j = \Gamma(X, Y) + \nabla^{\varphi}_X Y.$$

Определим символы Кристоффеля 1-го рода связности ∇ в карте (U, φ)

$$\Gamma_{ij} := \nabla_{E_i} E_j = \Gamma(E_i, E_j).$$

Гладкие функции Γ^k_{ij} называются символами Кристоффеля 2-го рода, где

$$\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} E_k.$$

Следствие

$(\nabla_X Y)_p$ однозначно определяется значением X_p и сужением Y на любую кривую в направлении X_p.

Док-во Это верно для координатного дифференцирования, а Γ вообще не зависит от производных.

Симметричные связности

Определение

Аффинная связность ∇ на гладком многообразии M называется **симметричной**, если

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Определение

Оператор $T = T_\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, заданный формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

называется **тензором кручения** данной аффинной связности.

Лемма

Тензор кручения – тензор типа (2,1).

Док-во Т.к. $[X, Y] = -[Y, X]$, то $T(X, Y) = -T(Y, X)$. Поэтому достаточно доказать линейность по второму аргументу.

$$T(X, Y+Z) = \nabla_X(Y+Z) - \nabla_{Y+Z}X - [X, Y+Z] = T(X, Y) + T(X, Z),$$

$$T(X, fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] - (Xf)Y = fT(X, Y).$$

Следствие (симметричность в координатах)

Аффинная связность ∇ симметрична $\iff \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}, \forall i, j.$

Док-во Условие симметричности равносильно условию "тензор T равен 0". Так как значения тензора определяются на координатных векторных полях, то последнее равносильно условию

$$0 = T(E_i, E_j) = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = \Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}.$$

Риманова связность

Определение

Пусть M – риманово многообразие. Аффинная связность ∇ на M называется согласованной с римановой метрикой $\langle , \rangle$, если $\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Для простоты такую ∇ называют также римановой связностью.

Зададим оператор $S : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ формулой

$$S(X, Y, Z) = X\langle Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Лемма

S – тензор типа (3, 1).

Док-во: Линейность по X очевидна, а по Y и Z формула симметрична, так что достаточно проверить линейность для одного из полей.

$$S(X, fY, Z) = X\langle fY, Z\rangle - \langle \nabla_X fY, Z\rangle - \langle fY, \nabla_X Z\rangle =$$

$$= (Xf)\langle Y, Z\rangle + f(X\langle Y, Z\rangle) - \langle f\nabla_X Y + (Xf)\cdot Y, Z\rangle - f\langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$= f(X\langle Y, Z\rangle) - f\langle \nabla_X Y, Z\rangle - f\langle Y, \nabla_X Z\rangle = fS(X, fY, Z).$$

Определение

Связностью Леви-Чивита на римановом многообразии называется симметричная аффинная связность, согласованная с метрикой.

Теорема (основная теорема римановой геометрии)

На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивита.

Док-во: Единственность. Пусть ∇ — связность Леви-Чивита. Тогда

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

Складывая 1 с 2 и вычитая 3, а также используя симметричность ∇, получаем

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_X Y\rangle.$$

Поэтому

$$\langle Z, \nabla_X Y\rangle = \frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\right).$$