Локально любое подмногообразие — регулярный прообраз

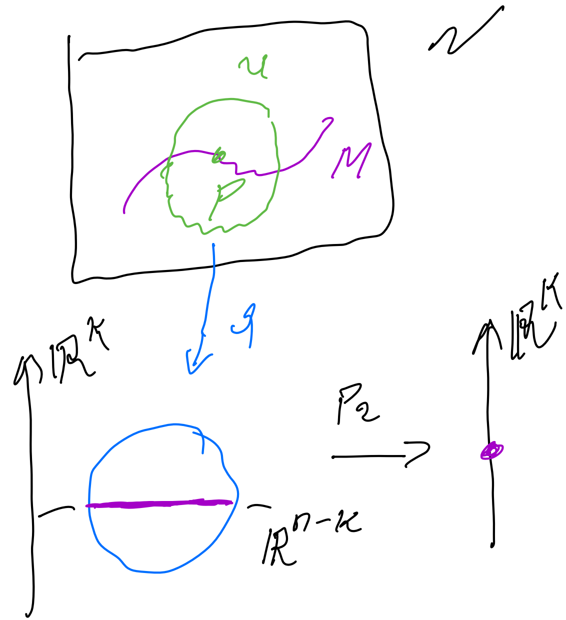
Замечание

Локально верно и обратное: для любого подмногообразия $M^{n-k} \subset \mathbb{N}^n$ и любой точки $p \in M$ существует окрестность $U \subset N$ точки p и субмерсия $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ такая, что $M \cap U = f^{-1}(0)$.

Доказательство.

Возьмем композицию подходящей карты и проекции на $\mathbb{R}^k$. □

выпрямл.



$f = p_2 \circ \varphi$

Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\implies$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

Примен. теоремы
о прообразе рег.
зн-я.

Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\implies$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

Легко видеть, что при $c = 0$ решение (конус) не является даже топологическим многообразием в окрестности точки $(0, 0, 0)$.

Если выколоть $(0, 0, 0)$, то остаётся гладкая поверхность. Это следует из теоремы, применённой к сужению f на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Касательное пространство регулярного прообраза

Теорема

Пусть N и K – гладкие многообразия, $f : N \to K$ – гладкое отображение, $q \in K$ – регулярное значение, $M = f^{-1}(q)$ – подмногообразие, $p \in M$. Тогда

$$T_pM = \ker d_pf\,.$$

Доказательство.

В разделе "Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия" было свойство 1:

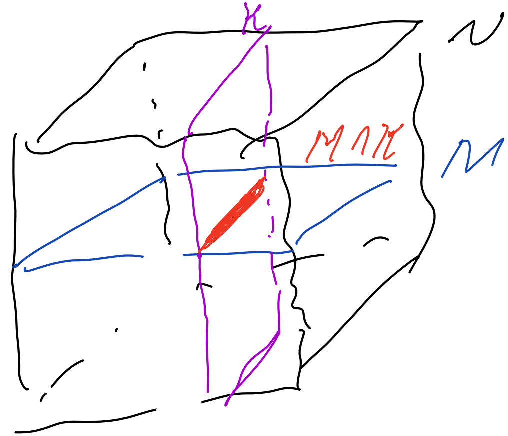
$$\boxed{d_p(f|_M) = (d_pf)|_{T_pM}}$$

Т.к. $f|_M = const$, то $d_p(f|_M) = 0 \implies (d_pf)|_{T_pM} = 0$.

$\implies T_pM \subset \ker d_pf\,.$

Обратное включение следует из равенства размерностей. □

$T_pM \subset T_pN$



Определение

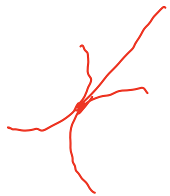
Пусть N^n — гладкое многообразие, M^m и K^k — его подмногообразия. M и K **пересекаются трансверсально** (**трансверсальны**), если для любой точки $p \in M \cap K$ верно, что

$$T_pM + T_pK = T_pN$$

Обозначение: $M \pitchfork K$.

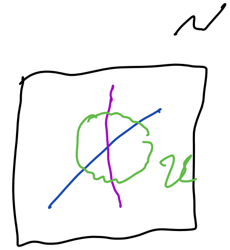
Замечание

Определение содержательно только при $m + k \geq n$.
При $m + k < n$ пересечение трансверсально $\iff$ пусто.



$T_pM = T_pK \neq T_pN$

Трансверсальное пересечение – подмногообразие



Теорема

Пусть N^n — гладкое многообразие, M^m и K^k — его подмногообразия, $m + k \geq n$, $M \pitchfork K$.
Тогда $M \cap K$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$.

Док-во: Докажем, что $M \cap K$ — гладкое подмногообразие в окрестности точки $p \in M \cap K$.

Шаг 1:

В достаточно малой окрестности $U \ni p$, M и K являются прообразами регулярных значений функций $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ и $g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Считаем, что $M \cap U = f^{-1}(0)$ и $K \cap U = g^{-1}(0)$.

Построим $H : U \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\boxed{H(x) = (f(x), g(x)).}$$

Что нужно док-ть? d_pH - сюръектив.

Заметим, что $M \cap K \cap U = H^{-1}(0)$.

$$d_pH = (d_pf, d_pg)$$

Трансверсальное пересечение – подмногообразие

Продолжаем док-во теоремы:

Шаг 2:

Проверим, что p — регулярная точка H.

$$\dim \boxed{\ker d_pH} = \dim \boxed{(\ker d_pf \cap \ker d_pg)} = m + k - n$$

из формулы для размерности пересечения линейных подпространств

$\implies \operatorname{rank} d_pH = n - (m + k - n) = 2n - k - n$

$\implies p$ — регулярная точка H.

Шаг 3:

Так как множество регулярных точек открыто, в некоторой окрестности $V \ni p$ ($p \in V \subset U \subset N$) все точки регулярные

$\implies M \cap K \cap V$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

$\implies$ (так как p произвольная) $M \cap K$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

- $T_pM + T_pK = T_pN$
- $T_pM = \ker d_pf$, $T_pK = \ker d_pg$
- $\dim(T_pM + T_pK) = \dim T_pM + \dim T_pK - \dim(T_pM \cap T_pK)$

Касательное пространство пересечения

Теорема

Пусть $M, K \subset N$ *— гладкие подмногообразия,* $M \pitchfork K$*,* $p \in M \cap K$*. Тогда*

$$T_p(M \cap K) = T_pM \cap T_pK$$

Доказательство.

Включение $T_p(M \cap K) \subset T_pM \cap T_pK$ следует из включений $M \cap K \subset M$ и $M \cap K \subset K$.

Обратное включение — из равенства размерностей. □

Для информации

Теорема (Уитни)

Любое гладкое многообразие M вкладывается в $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом N.
Можно даже взять $N = 2\dim M$.

Теорема (Сард)

Пусть M, K — гладкие многообразия, $f\colon M \to K$ — гладкое отображение.
Тогда регулярными значениями f являются все точки K, кроме множества меры 0.
Под «множеством меры 0» в многообразии понимается множество, образ которого в любой карте имеет меру 0.

Доказательство будет в 6 семестре.

Риманова геометрия

Книги: Бураго, Залгаллер —
— Введение в риманову геометрию

Manfredo do Carmo —
— Riemannian geometry.

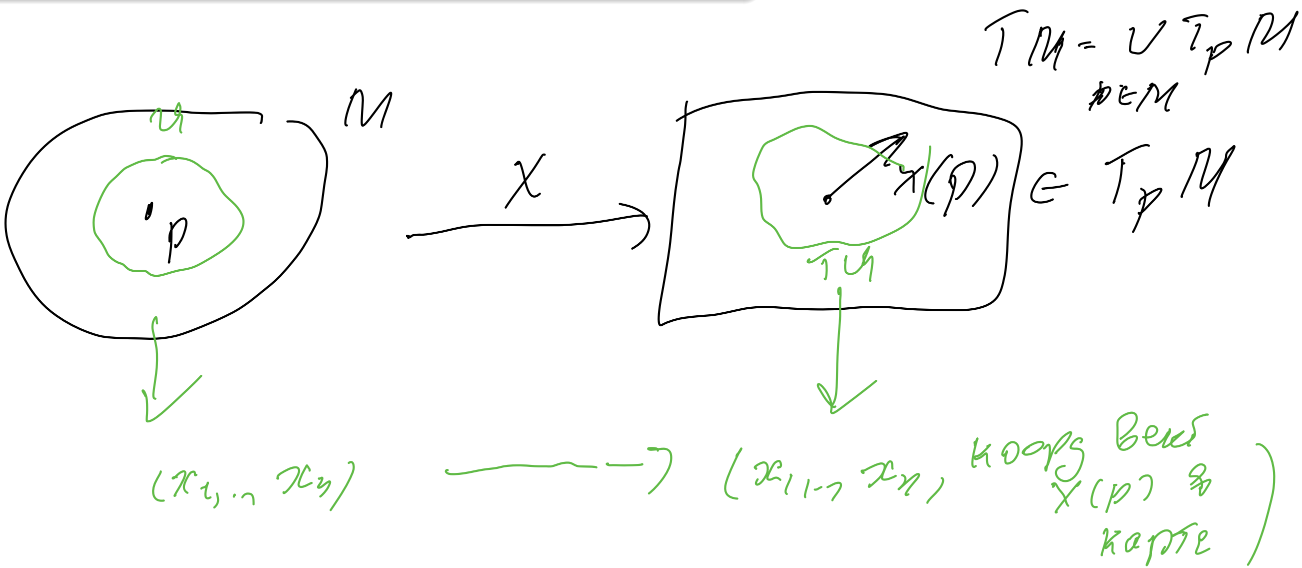
Гладкие векторные поля

Определение

Пусть M – гладкое многообразие, U открыто в M. Гладкое отображение $X\colon U \to T(M)$ такое, что $X(p) \in T_p(M)$ для всех $p \in U$, называется гладким векторным полем в U на M.

Как правило будем рассматривать случай $U = M$.

Обозначение: $\mathfrak{X}(M)$ – множество всех гладких векторных полей на M.



Гладкие векторные поля

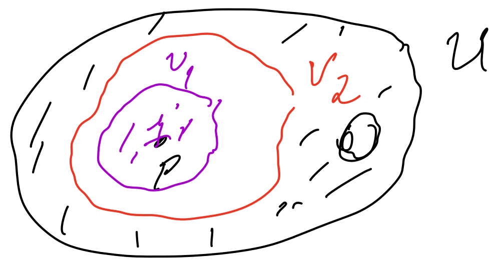
Пример

Пусть (U, φ) – некоторая карта на M, и $p \in U$ – произвольная точка. Каждому i можно сопоставить координатное векторное поле X_i, переводящее точку p в i-ый базисный вектор стандартного базиса в $T_p(M)$.

$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 1, \dots, 0)$

Поле X_i задано только в карте U. Чтобы продолжить X_i на всё M построим гладкий спуск с единицы, т.е. такие окрестности $V_1(p)$, $V_2(p)$ и гладкую функцию $h\colon U \to [0,1]$, что

1. $V_1(p) \subset V_2(p) \subset U$;
2. $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V}_1(p), \\ 0, & \text{если } x \in U \setminus V_2(p), \end{cases}$ и $0 \leq h(x) < 1$, если $x \in V_2(p) \setminus \overline{V}_1(p)$.



Тогда hX_i — координатные векторные поля в карте (V_1, φ), которые очевидном образом продолжаются до гладких полей на всем M.

Риманова структура

Определение

Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова структура, если в каждом касательном пространстве $T_p(M)$ определено скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (т.е. симметричная положительно определенная билинейная форма), гладко зависящее от точки p.

Последнее означает, что для любых гладких векторных полей X, Y на M функция $\langle X, Y\rangle\colon M \to \mathbb{R}$ является гладкой.

Римановым многообразием называется связное гладкое многообразие, на котором задана риманова структура.

Замечание

- Синонимы римановой структуры: риманова метрика, метрический тензор.
- Другие обозначения римановой структуры: $g = \{g_p\}_{p\in M}$.

$g(X, Y)$

Определение

Два римановых многообразия M, N называются изометричными, если между ними можно установить такой диффеоморфизм $f\colon M \to N$, что для любой точки $p \in M$ и любых векторов $u, v \in T_pM$

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d_pf(u), d_pf(v)\rangle_{f(p)}.$$

Коэффициенты римановой метрики

Определение

Пусть M^n – риманово многообразие, (U, φ) – некоторая карта на M, и $X_1, \dots X_n$ – координатные поля этой карты.

$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle \colon U \to \mathbb{R}$ – **коэффициенты римановой метрики** (метрические коэффициенты).

Лемма

следующие условия эквивалентны:

1. *для любых гладких векторных полей X, Y на M функция $\langle X, Y \rangle \colon M \to \mathbb{R}$ является гладкой.*
2. *в каждой карте метрические коэффициенты – гладкие функции.*

Д-во: (1) $\Rightarrow$ (2)

• продолжить коорд поле на все M

• $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$

(2) $\Rightarrow$ (1) Надо д-ть: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\langle X, Y \rangle$ – гладк. ф-я.

Док. поточечно, т.е берем карту слева (в M)

$X = \sum a_i X_i$ $\Rightarrow$ $\langle X, Y \rangle = \sum a_i b_j g_{ij}$

$Y = \sum b_j X_j$