X – лвп над $\mathbb{C}$.

$p: X \to \mathbb{R}_+$ – функционал, овф

- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$.

Теорема (Хан – Банах, $\mathbb{C}$)

X, p, A_0 – функционал, линейный, $A_0: X_0 \to \mathbb{C}$, $X_0 \le X$, такой что

$$|A_0(x)| \le p(x), \quad x \in X_0.$$

Тогда существует линейный функционал $A: X \to \mathbb{C}$, $A\big|_{X_0} = A_0$,

$$|A(x)| \le p(x), \; x \in X.$$

Доказательство

$\operatorname{Re} A_0$ – вещественный линейный функционал на $\tilde{X}_0$ (здесь $\tilde{X}_0$ – это X_0, только над $\mathbb{R}$). $\tilde{X}$ – просто X, рассмотр. над $\mathbb{R}$.

$$|A_0(x)| \le p(x) \Rightarrow |\operatorname{Re} A_0(x)| \le p(x),$$

стало быть по вещественному Х.-Б. существует функционал $R: \tilde{X} \to \mathbb{R}$.

$$R(x) \le p(x), \; x \in \tilde{X}$$

$$R(x) = \operatorname{Re} A_0(x), \; x \in \tilde{X}_0.$$

$$\left.\begin{array}{l} p(-x) \ge R(-x) = -R(x) \\ \;\; \| \\ p(x) \end{array}\right| \Rightarrow |R(x)| \le p(x), \; x \in \tilde{X}.$$

Замечание: пусть B – линейный функционал, $B: X \to \mathbb{C}$.

$$B(x) = \operatorname{Re} B(x) + i \cdot \operatorname{Im} B(x)$$

$$B(ix) = i\,B(x) = i\cdot \operatorname{Re} B(x) - \operatorname{Im} B(x)$$
$$\;\;\| \;\; \operatorname{Re} B(ix) + i \operatorname{Im} B(ix)$$

$$B(x) = \operatorname{Re} B(x) - i \operatorname{Re} B(ix)$$

Положим теперь $A(x) := R(x) - i R(ix)$, $x \in X$.

Замечание $\Rightarrow$
$$A(x) = A_0(x), \quad x \in X_0$$
$$\operatorname{Re} A(x) = R(x), \quad x \in X.$$

Покажем теперь, что $|A(x)| \le p(x)$, $x \in X$.

Пусть не так, тогда найдётся $x_1 \in X$: $|A(x_1)| > p(x_1)$

$A(x_1) = r e^{i\theta}$, положим $y_1 := e^{-i\theta} \cdot x_1$.

$$A(y_1) = A(e^{-i\theta} \cdot x_1) = e^{-i\theta} A(x_1) = r$$

$$R(y_1) = \operatorname{Re} A(y_1) = r > p(x_1) = p(y_1) \text{ — противоречие.}$$

$$p(x_1) = p(e^{-i\theta} \cdot y_1) = |e^{-i\theta}| \cdot p(y_1), \quad |e^{-i\theta}| = 1$$

∎

Версия Х.-Б. для линейных нормированных пространств.

Теорема. Если X — л.н.п. над $\mathbb{R}$, $X_0 \le X$, A_0 — линейный функционал на X_0, ограниченный. Тогда A_0 можно продолжить до A на X с сохранением нормы, т.е.

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \|A_0\|_{\mathcal{L}(X_0, \mathbb{R})}$$

Доказательство: Пусть $c = \|A_0\|_{\mathcal{L}(X_0, \mathbb{R})}$, тогда возьмём $p(x) := c \cdot \|x\|$

$$|A(x)| \le p(x) = c\cdot\|x\|, \quad x\in X. \qquad \blacksquare$$

Опр. Пусть X — л.в.п. над $\mathbb{R}$, пусть $E, F \subset X$; A — линейный функционал X. Тогда A разделяет E и F, если найдётся число C, такое что

$$A(x) \ge C, \quad x\in E$$
$$A(x) \le C, \quad x\in F.$$

Если $>$, $<$ $\Rightarrow$ строго разделяет.

$$\underbrace{E-F}_{=\{x-y,\ x\in E,\ y\in F\}}$$

Замечание.

- A разделяет E и F $\Leftrightarrow$ A разделяет $E-F$ и $\{0\}$

$\Updownarrow$

- A разделяет $\underline{E-x \text{ и } F-x}$ для $\forall x\in X$.

Теорема (Х.-Б. для выпуклых множеств)

Пусть X — л.в.п. над $\mathbb{R}$, E, F — выпуклые подмножества X, причём $\ker E \ne \varnothing$, $\ker E \cap F = \varnothing$. Тогда существует ненулевой линейный функционал, разделяющий E и F.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $0\in \ker E$. Пусть теперь $y_0 \in F$, тогда $-y_0 \in \ker(E-F)$, положим теперь $G := E-F+y_0$, тогда $0\in \ker G$. При этом $y_0 \notin \ker G$, так как $0 \notin \ker(E-F)$, т.к. $\ker E\cap F=\varnothing$.

Пусть p — функционал Минковского для $\ker G$. Тогда $p(y_0)\ge 1$, т.к. $y_0\notin \ker G$.

Положим $A_0 : \underbrace{X_0}_{=\{t\cdot y_0,\ t\in\mathbb{R}\}} \to \mathbb{R} \quad : \quad A_0(t y_0) = t\cdot p(y_0)$

Продолжаем A_0 до $A: X \to \mathbb{R}$, т.ч. $A(x) \le p(x)$.

$A(x) \le p(x) \le 1$ для $x \in G$

$A(y_0) \ge 1$.

Есть разделили G и $\{y_0\}$, стало быть $E-F$ и $\{0\}$, стало быть E и F. $\boxtimes$

Фактор-пространства.

Пусть X — лнп, $X_0 \le X$. Будем считать, что $x \sim y$, если $x - y \in X_0$.

Совокупность всех таких классов и обозначается через X/X_0.

Упражнение. X/X_0 — линейное пространство.

$\dim X/X_0$ — коразмерность X_0 в X.

Для линейных нормированных пространств на X/X_0 можно определить и норму: X_0 — замкнутое.

пусть $\mathcal{X} \in X/X_0$

$\hookrightarrow$ класс эквивалентности,

тогда $\|\mathcal{X}\|_{X/X_0} := \inf\limits_{x \in \mathcal{X}} \|x\|_X$.

Упр. Проверить, что определение корректно — $\|\cdot\|_{X/X_0}$ есть норма.

Утв. Если X — полное, то X/X_0 тоже полное.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{X}_n\}_{n \ge 0}$ — последовательность Коши в X/X_0,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{X}_{n+m} - \mathcal{X}_n\|_{X/X_0} = 0$. $\forall m$.

НУО $\sum\limits_{n \ge 1} \|\mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_n\|_{X/X_0} < +\infty$, $\mathcal{X}_0 = 0$.

$\forall n \ \exists x_n \in \mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_n$, такой что

$$\|\mathscr{X}_{n+1} - \mathscr{X}_n\|_{X/X_0} \geq \frac{\|x_n\|_X}{2}.$$

Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_X$, а стало быть сходится в X ряд $\underbrace{\sum\limits_{n\geq 0} x_n}_{=\tilde{x}}$. Теперь положим $\mathscr{X} := $ класс, содержащий $\tilde{x}$.

Далее $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k \in \sum\limits_{k=0}^{n} (\mathscr{X}_{k+1} - \mathscr{X}_k) = \mathscr{X}_{n+1}$, стало быть

$$\underbrace{\|\mathscr{X} - \mathscr{X}_{n+1}\|_{X/X_0}}_{\downarrow\, 0} \leq \|\tilde{x} - \sum_{k=0}^{n} x_k\|_X \to 0. \quad \blacksquare$$

Пример Класс Дирихле на $\mathbb{D}$

$$= \{ f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n, \quad |z|<1, \text{ т.ч. } \boxed{\|f\|_D = \sqrt{\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 (n+1)} < +\infty} \}.$$

$$f' \quad \sum a_n \cdot n \cdot z^n.$$

Сопряжённые пространства.

$\{A : X \to \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}\}$ — линейные функционалы (огр.).

$\Downarrow$

$L\, X^*$ — сопряжённым к X пространством

Если X — л.н. пр-во, то на $X^* \left(= \mathcal{L}(X, \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})\right)$ определяется норма.

Пример. • $X = \mathbb{R}^n$, то $X^* = \mathbb{R}^n$.

$$A_y(x) := \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

• ℓ^p, $p>1$ $\quad (\ell^p)^* = \ell^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

<u>Теорема (Банах-Штейнгауз).</u> Пусть $\{A_n\}$ - последовательность линейных ограниченных операторов, $A_n : X \to Y$, X - банахово, Y - л.н.п., такая что $\{A_n(x)\}$ - последовательность Коши $\forall\, x \in X$, тогда последовательность $\{A_n\}$ ограничена.