H — гильбертово пространство

$F: H \to \begin{matrix}\mathbb{C}\\ \mathbb{R}\end{matrix}$ — лин. непр.

Если есть $y \in H$, то $F_y(x) := \langle x, y\rangle$ — л.н. функционал.

Теорема (Рисс). Пусть $F: H \to \begin{matrix}\mathbb{C}\\ \mathbb{R}\end{matrix}$ — линейный непрерывный функционал. Тогда найдётся элемент $y_F \in H$, такой что

$$F(x) = \langle x, y_F\rangle$$

$$\|F\|_{\mathcal{B}(H,\mathbb{C})} = \|y_F\|_H .$$

Доказательство. Зафиксируем F, ищем y_F.

$\operatorname{Ker} F = \{x \in H : F(x) = 0\}$.

$\operatorname{Ker} F \leq H$. Линейность очевидна, замкнутость следует из непр. F.

Пусть $\{x_n\} \subset \operatorname{Ker} F$, т.е. $F(x_n) = 0$

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow F(x_n) \longrightarrow F(x) = 0,\ x \in \operatorname{Ker} F.$$

Случай, что $F \not\equiv 0$; зафиксируем $y_0 \notin \operatorname{Ker} F$.

$$H \ominus \operatorname{Ker} F = (\operatorname{Ker} F)^{\perp} = \{x \in H : x \perp y,\ y \in \operatorname{Ker} F\}.$$

$$\operatorname{Ker} F \oplus (\operatorname{Ker} F)^{\perp} = H.$$

$y_0 = z_0 + x_0$, $z_0 \in \operatorname{Ker} F$

$\boxed{x_0} \in (\operatorname{Ker} F)^{\perp}$

$x_1 := \dfrac{x_0}{F(x_0)}$. $\quad \underline{F(x_1) = 1.}$ Зафиксируем произвольный $x \in H$,

положим $F(x) := \varkappa$

$$F(x) - \varkappa F(x_1) = 0 \overset{\text{лин. } F}{\Longleftrightarrow} F(x - \varkappa x_1) = 0,$$

т.е. $x - \varkappa x_1 \in \operatorname{Ker} F$, т.е. $x = \underbrace{(x - \varkappa x_1)}_{\in \operatorname{Ker} F} + \underbrace{\varkappa x_1}_{\in (\operatorname{Ker} F)^{\perp}}$

$$\langle x, x_1\rangle = \alpha\|x_1\|^2 = F(x)\cdot\|x_1\|^2.$$

$$F(x) = \left\langle x, \frac{x_1}{\|x_1\|^2}\right\rangle. \quad \frac{x_1}{\|x_1\|^2} := y_F.$$

Единственность: пусть $F(x) = \langle x, z_F\rangle$, но тогда

$$\langle x, y_F - z_F\rangle = 0 \quad \forall x \Rightarrow y_F = z_F.$$

$$|F(x)| = |\langle x, y_F\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y_F\| \Rightarrow \|F\| \leq \|y_F\|.$$

$$|F(y_F)| = |\langle y_F, y_F\rangle| = \|y_F\|^2, \text{ т.ч. } \underline{\|F\| = \|y_F\|.}$$

$\blacksquare$.

Пример. $L^2(\Omega, d\mu) =$

$$= \left\{ f: \Omega \to \mathbb{C},\ \|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu\right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega, d\mu)} = \int_\Omega f\bar{g}\, d\mu$$

$F: L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, то $F(f) = \int_\Omega f\bar{g}_F\, d\mu$.

$$F: L^p(\Omega, d\mu) \longrightarrow \mathbb{C}\ ?$$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

$$F(f) = \int_\Omega f\bar{g}_F\, d\mu, \quad g \in L^q(\Omega, d\mu) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Когда-нибудь

Базисы Рисса, фреймы, биортогональные системы, воспроизводящие ядра.

$$F_x: \quad f \longrightarrow f(x)$$

Сопряжённые пространства.

X – т.в. пространство – линейное, векторное, топологическое.

$X^* := \{F : X \to \mathbb{C},\ F$ – линейный непрерывный функционал$\}$.

Если X – нормированное, то

$$\|F\|_{X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})} := \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|F(x)\|_{\mathbb{C}}}{\|x\|_X}.$$

Замечание. Если X – не полное, $\tilde{X}$ – пополнение X, то $X^* \simeq (\tilde{X})^*$.
↑ изоморфно

Топология в X^* (в общем случае) задаётся системой окрестностей

$$U_{\varepsilon,A} = \{F \in X^* : |F(x)| < \varepsilon,\ x \in A\},\quad \varepsilon > 0$$

A – огр. множеств.

Сильная топология на X^*.

Замечание (всегда верно)

- Для произвольного $F_0 \in X^*$ $\exists$ окрестность $U_{\varepsilon_0,A_0}(0) \not\ni F_0$. $A_0 = \{x_0\}$, $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}|F(x_0)|$
- локальная выпуклость – $U_{\varepsilon,A}$ выпукла в X^*.

Примеры. $H^* = H$.

$$W^{1,2}(\Omega) = \overline{\{f \in C^\infty(\Omega) : \|f\|^2_{W^{1,2}} = \int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 dx < +\infty\}}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\ell^p = L^p\begin{pmatrix}\Omega = \mathbb{N} \\ \mu \text{ – сч. мера}\end{pmatrix} = \{\{z_k\} : \left(\sum |z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$$

$$(\ell^p)^* = \ell^q, \text{ где } q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

$$p=2 \Rightarrow q=2.$$

$$C(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$C(\Omega)^* = \{\text{меры с комп. носителем}\}.$$

$$F_\mu : f \longmapsto F(f)$$

$$F_\mu(f) = \int_\Omega f \, d\mu$$

• Второе сопряжённое пространство. $(X^*)^*$

$$x \in X \longmapsto \Phi_x$$

$\Phi_x(F) := F(x)$. Φ_x очевидно линеен.

Проверим непрерывность. Пусть $\varepsilon > 0$, A – огр. множество, содержащее x.
Рассмотрим $U_{\varepsilon,A} = \{F : |F(y)| < \varepsilon, \ y \in A\}$.

$$\Phi_x(F) = F(x) \Rightarrow |\Phi_x(F)| < \varepsilon \text{ для } F \in U_{\varepsilon,A}.$$

Итак, есть вложение

$$\pi : X \hookrightarrow X^{**}$$

Топология в $X \longrightarrow$ сильная топология в $\underbrace{X^*}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{\text{сильная}^2 \text{ в } X^{**}}$

$$H \to H^* = H \to H \to \dots$$

$$\ell^p \to \ell^q \to \ell^p \to \dots$$

$$\ell^1 \to \ell^\infty \to \ ?\dots$$

X с какой-то топологией $\longrightarrow$ $\boxed{X^* \text{ с сильной топологией} \quad *\text{-слабая топология}}$ $\longrightarrow X^{**}$ сильная.

слабая топология

Замечание (упражнение) π — изометрия (т. е. если X — нормированное пространство, то $\|x\|_X = \|\pi(x)\|_{X^{**}}$.

Слабая топология в X.

$$x_n \xrightarrow[\text{исх. топ.}]{} x$$

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow F(x_n) \to F(x) \quad \forall F \in X^*.$$

- $x_n \longrightarrow x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$
- не наоборот

очевидный пример: ℓ^2, $\{x_n\} = \{e_n\}$,

$e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n\text{-е место}}{1}, 0, \ldots)$

$e_n \xrightarrow{w} 0$

$$F(e_n) = \langle e_n, y_F \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Пусть X — л.в. топол. пространство, X^* — л. непр. функционалы на X. Рассмотрим конечный набор $F_1, \ldots, F_n$, множества

$$\{x : |F_k(x)| < \varepsilon, \ k = 1..n\}.$$

$\hookrightarrow$ открытая окрестность нуля.

Топология, задаваемая такой системой, называется слабой топологией. Сложение, умножение на скаляр непрерывны и в слабой.

Упражнение Слабая сходимость есть сходимость в слабой топологии.

Пусть $x_n \xrightarrow{w} 0$, т.е. $F(x_n) \longrightarrow 0 \ \forall F$ — л.н. функц.

Рассмотрим произвольную окрестность нуля

$$\{ x : |F_k(x)| < \varepsilon, \quad k = 1 \dots n \}.$$

$\exists N: \; x_n \in \quad \forall n \geq N$. Если $\forall$ окрестности подобного вида мы в неё попадаем, начиная с какого-то N, то сразу $F(x_n) \longrightarrow 0$.