Для конечномерного H,

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k, \quad \{e_k\} - \text{ОНБ в } \mathbb{R}^n$$
$$c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

Пусть теперь $\dim H = \infty$, пусть $\{e_k\}$ - ОНБ.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \text{ где } c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

$$x \longmapsto \{c_k\}, \quad c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

коэффициенты Фурье по системе $\{e_k\}$.

- как понимать эту сумму?
- любой ли вектор x именно так и представляется.
- что можно сказать про c_k?

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ — ряд Фурье x по системе $\{e_k\}$.

- оценим расстояние между x и пространством, натянутым на первые n векторов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$.

$$\min_{\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}} \|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k}\|_H,$$

применяем ортогональность.

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|_H^2 = \langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, x - \sum_{l=k}^{n} \lambda_k e_k \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\lambda}_k \cdot \underbrace{\langle x, e_k \rangle}\right) + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 =$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, \bar{\lambda}_k c_k\right)} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - \lambda_k)\overline{(c_k - \lambda_k)} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \lambda_k|^2.$$

Min $\Leftrightarrow$ при $\lambda_k = c_k$, $k = 1..n$.

Сразу следует, что $\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) \perp \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \ \forall \beta_k$ iff $c_k = \lambda_k$.

Продолжаем п.2. ≥ 0, т.е. $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0$, и произвольное.

Если $x \in H$, $c_k = \langle x, e_k \rangle$, то $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2}$, если $\{e_k\}$ - онс.

Неравенство Бесселя.

<u>Определение</u> О.н.система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой, если

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2,} \quad \forall x \in H, \text{ и } c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

Равенство Парсеваля

$H \longleftrightarrow \ell^2.$

$x \longmapsto \{c_k\} \in \ell^2,$

то $\underbrace{\|\{c_k\}\|^2_{\ell^2} \leq \|x\|^2_H.}$

Оператор $A: \underset{H}{\underset{\cap}{x}} \longrightarrow \underset{\ell^2}{\underset{\cap}{\{c_k\}}}$ — линейн, однороден, ограничен

A - оператор анализа, $H \xrightarrow{c_k = \langle x, e_k \rangle} \ell^2$, он ограничен.

Можно ещё рассмотреть оператор синтеза $S: \ell^2 \longrightarrow H$,

$S: \underset{\ell^2}{\underset{\cap}{\{\lambda_k\}}} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k.$

<u>Теорема</u>. Пусть H — гильбертово, тогда для ортонормированной системы полнота $\Leftrightarrow$ замкнутость.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{e_k\}$ замкнута, тогда $\sum |c_k|^2 = \|x\|^2$,

$\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, стало быть при $n \longrightarrow \infty$

имеем $\underbrace{\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|_H}_{\Downarrow} \longrightarrow 0$, т.е. $\underset{\sum_{k=1}^{n} c_k e_k}{\underset{\shortparallel}{S_n(x)}} \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_H} x$

$\overline{\text{Span}}\{e_k\} = H.$

С другой стороны пусть имеем это всё, тогда $\forall x \in H$ приближается со сколь угодно большой точностью линейными комбинациями $\{e_n\}$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{kn} e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x, \text{ далее}$$

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|_H \leq \left\|x - \sum_{k=1}^{n} \beta_{kn} e_k\right\|_H$$

$$\downarrow \qquad \leftarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$\downarrow$

верно неравенство Бесселя. ■

Теорема (Рисс - Фишер)

Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированная система в гильбертовом H, пусть $\{\lambda_k\} \in \ell^2$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда найдётся $x \in H$, такой что
- $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$
- $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

Доказательство. Положим $x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \text{ — " —} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+m} |\lambda_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ т.к. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty, \text{ т.е. } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_H} x.$$

Едем дальше. Рассмотрим

$$\langle x, e_i \rangle = \langle x_n, e_i \rangle + \langle x - x_n, e_i \rangle \quad \text{для любого } i.$$

Если $n \geq i$, то $\langle x_n, e_i \rangle = \lambda_i$, а $\langle x - x_n, e_i \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. $|\langle x - x_n, e_i \rangle| \leq \underbrace{\|x - x_n\|}_{\to 0} \cdot \|e_i\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Стало быть,

$\langle x, e_i \rangle = \lambda_i \quad \forall i$. Далее, очевидно, $\|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, стало быть $\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \to 0$,

значит $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \|x\|^2$. ■

Теорема Пусть ОНС (ортонормированная система) $\{e_k\}$ в сепарабельном H полна $\Leftrightarrow$ в H не существует ненулевого элемента, ортогонального всем e_k.

Доказательство $\boxed{\Rightarrow}$ Система полна, стало быть замкнута, стало быть, если $x \perp e_k \ \forall k \Rightarrow c_k \equiv 0$, $c_k = \langle x, e_k \rangle$, стало быть

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\{e_k\}$ не полна, тогда равенство Парсеваля не выполняется для какого-то $y \in H$, т.е.

$$\boxed{\langle y, y \rangle > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2}, \quad \text{где } c_k = \langle y, e_k \rangle.$$

По т. Рисса–Фишера найдётся такой $x \in H$, что $\langle x, e_k \rangle = c_k$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Легко видеть, что $\langle x-y, e_k \rangle = c_k - c_k = 0$, стало быть $x - y \perp e_k \ \forall k$, причём $(x-y) \neq 0$, т.к.

$$\|x\|^2 < \|y\|^2 \quad \blacksquare$$

Теорема Рисса и ортогональное дополнение.

• нехитрое соображение: пусть $x \in H$, тогда $\{y : y \perp x\} \leq H$.

Утверждение. Всякое подпространство сепарабельного гильбертова само сепараб. гильбертово. подпространство — замкнутое подмножество, содержащее все лин. комб. своих элем.

Свойство Всякое подмножество сепарабельного метрического пространства само сепарабельно. $\blacksquare$

Рассмотрим H – гильбертово, сепарабельно, рассмотрим $M \leq H$.

Ув. В M существует ортонормированная система $\{e_k\}$, т.ч. что $\overline{\mathrm{span}}\{e_k\} = M$. Доказательство: по замкнутости M $\blacksquare$

Положим $M^{\perp} := H \ominus M - \{y \in H, \text{т.е. } y \perp x \ \forall x \in M\}$.

$M^{\perp}$ – тоже подпространство (линейное замкнутое).

Линейность – по линейности скалярного произведения т.к.

$\langle y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \rangle = 0$, если $x_1, x_2 \in M$, $y \in M^{\perp}$.

Замкнутость следует из непрерывности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по норме H,

т.е. $\langle y, x \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle y_n, x \rangle = 0$, если $y_n \in M^{\perp}$

$y_n \to y$.

<u>Утверждение.</u> Если M – замкнутое, то для любого $x \in H$ верно

сепарабельность

$x = z + z'$, где $z \in M$

$z' \in M^{\perp}$, разложение единственно.

<u>Доказательство.</u> Найдем $\{e_k\}$ в M, положим $c_k := \langle x, e_k \rangle$,

положим $z := \sum\limits_{k \geq 1} c_k e_k$. Определение корр. по неравенству

Бесселя, т.к. $\sum |c_k|^2 < +\infty$. Осталось положить $z' = x - z$.

Далее $(z', e_k) = 0$ $\forall k$, кроме того рассмотрим произвольный элемент

$y \in M$, он раскладывается как $\sum\limits_{k \geq 1} \beta_k \cdot e_k$, $\beta_k = \langle y, e_k \rangle$,

ну и $\langle z', y \rangle = \sum\limits_{k \geq 1} \beta_k \langle z', e_k \rangle = 0$. Имеем $z' \in M^{\perp}$.

Пусть разложение не единственное, т.е. $x = z + z'$ $\quad z, \zeta \in M$

$x = \zeta + \zeta'$ $\quad z', \zeta' \in M^{\perp}$.

Тогда $\langle z, e_k \rangle = \langle \zeta, e_k \rangle = c_k$, стало быть $z = \zeta$, ну и $\zeta' = z'$.

<u>Следствия.</u> • $(M^{\perp})^{\perp} = M$

• каждая ОНС может быть расширена до ОНБ.

• записывают так $H = M \oplus M^{\perp}$.

если вдруг есть $\{M_k\}_{k=1}^{n}$, $M_k \subseteq H$, $x_k \perp x_j$, где $x_k \in M_k$, $x_j \in M_j$ произв.,

и любой $\underset{H}{x \in} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in M_k$, и $\sum\limits_{k \geq 1} \|x_k\|^2 < \infty$,

Тогда говорят, что $H = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots \oplus M_k \oplus \ldots$

$\oplus M_j$.

Ещё пример: $H = L^2(\mathbb{R})$, $H_k = \{ f \in L^2(\mathbb{R}),$ т.ч. $f \equiv 0$ за пределами $[k, k+1) \}$.

<u>Теорема (Рисс)</u> Пусть H – г.п., $F: H \longrightarrow \mathbb{C}$ – л. непр. функционал. Тогда $\exists !\, y \in H$, т.ч. $F(x) = \underbrace{\langle x, y \rangle}$ $\forall x \in H$.

При этом $\|F\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{C})} = \|y\|_H$.

<u>Доказательство</u> Каждому $y \in H$ очевидно соответствует н.л.ф. F_y. А как наоборот, добыть y исходя из F? Давайте рассмотрим $\operatorname{Ker} F = \{ x \in H : F(x) = 0 \}$ — подпр. в H.