

# Оглавление

0.1 Второе занятие . . . . .	2
0.2 третье занятие . . . . .	3



Последнее обновление 3 марта 2022 г.

актуальная версия этого файла лежит по адресу

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/2022/topology4.pdf>

## Топология и геометрия, практика, МКН СПбГУ весна 2022

**Задача 1.** Найдите первую форму для  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  с полярными координатами  $(\rho, \phi)$ , и запишите длину кривой  $(\rho(t), \phi(t))$ .

**Задача 2.** Рассмотрим единичную сферу без полюсов, параметризованную широтой и долготой, то есть как  $(\theta, \phi)$  где  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

а) Найдите первую форму в этих координатах.

б) Используя её, покажите, что площадь круга радиуса  $r$  на сфере равна  $2\pi(1 - \cos r)$ .

в) (теорема Архимеда) Нашу сферу пересекают две плоскости на расстоянии  $h$ . Докажите, что площадь участка сферы между плоскостями равна  $2\pi h$ .

**Задача 3.** В плоскости  $xOz$  задана регулярная кривая  $x = f(u)$ ,  $z = g(u)$ , не пересекающая ось  $Oz$ . Найдите параметризацию поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси  $Oz$  и её первую форму.

**Задача 4.** Найдите параметризацию и площадь тора, как поверхности вращения окружности радиуса  $r$  в  $\mathbb{R}^3$  (пусть окружность находится в одной плоскости с осью, вокруг которой мы её вращаем, и расстояние от центра окружности до оси равно  $R$ ).

**Задача 5.** Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми, посчитав первую квадратичную форму (До вычислений ответьте на вопрос: как, посчитав первую форму и образа и прообраза понять, что отображение сохраняет углы?).

**Задача 6.** Найдите длину регулярной кривой на единичной сфере, которая идет от полюса до полюса и образует постоянный угол  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  с меридианами.

**Задача 7. \*\*\*** (можно сдавать до 25 февраля) Доказать, что криволинейные четырехугольники, образованные координатными линиями  $u = a_1$ ,  $u = a_2$ ,  $v = b_1$ ,  $v = b_2$ , являются “параллелограммами” (в смысле равенства соответствующих сторон), равносильно тому, что  $E_v = G_u = 0$ . Показать, что в этом случае локально существует такая параметризация поверхности, в которой ее первая квадратичная форма имеет вид

$$I(X) = X_1^2 + 2 \cos \phi X_1 X_2 + X_2^2.$$

## 0.1 Второе занятие

**Задача 8.** Найдите натуральную параметризацию кривой из задачи 6.

**Задача 9.** Покажите, что для любой точки поверхности вращения существует параметризация некоторой её окрестности, сохраняющая углы.

**Задача 10.** Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho \cos v, y = \rho \sin v, z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперboloид вращения

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = \sqrt{r^2 - 1}$$

если соответствие устанавливается уравнениями

$$\phi = v + \operatorname{arctg} \rho, r^2 = \rho^2 + 1.$$

**Задача 11.** Поверхность допускает параметризацию, в которой коэффициенты  $E, F, G$  первой квадратичной формы постоянны. Докажите, что эта поверхность локально изометрична плоскости.

**Задача 12.** Напишите параметризацию цилиндрической поверхности, для которой кривая  $\gamma(u)$  является направляющей, а образующие параллельны вектору  $e$ . Покажите, что она локально изометрична плоскости.

**Задача 13.** Напишите параметризацию конуса с вершиной в точке  $M(a, b, c)$  и с направляющей кривой  $\gamma(u) = (f(u), g(u), h(u))$ . Покажите, что такой конус локально изометричен плоскости (везде, кроме своей вершины).

**Задача 14.** \*\*\* (можно сдавать до 4 марта) Пусть  $\gamma(t)$  – натурально параметризованная кривая с ненулевой кривизной в каждой точке. Поверхностью касательных называется поверхность с параметризацией

$$(t, s) \rightarrow \gamma(t) + s\gamma'(t).$$

Покажите, что поверхность касательных локально изометрична плоскости.

## 0.2 третье занятие

**Задача 15.** Рассмотрим гиперболический параболоид  $xy = az$ . Найдите кривые на этом параболоиде, ортогональные образующим параболоида.

**Задача 16.** Рассмотрим геликоид  $(u \cos v, u \sin v, v)$ . Вычислите первую и вторую формы, а также главные кривизны. Проверьте, что  $H = 0$  (средняя кривизна).

**Задача 17.** Линия кривизны на поверхности – это кривая, вектор скорости которой в каждой точке принадлежит главному направлению в этой точке. Докажите

а) (Теорема Родригеса) Кривая  $\gamma$  на поверхности – линия кривизны тогда и только тогда, когда  $\gamma'(t) \parallel n'(t)$ , где  $n(t)$  – нормаль к поверхности в точке  $\gamma(t)$ .

б) "Меридианы" и "параллели" поверхности вращения – линии кривизны.

**Задача 18.** Пусть  $\gamma$  – кривая в  $\mathbb{R}^3$ , содержащаяся в поверхности  $z = ax^2 + by^2$ ,  $a, b > 0$  и такая, что  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ . Докажите, что кривизна  $\gamma$  (как пространственной кривой) в каждой точке не меньше  $\min(a, b)$ .

**Задача 19.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^3$  простая поверхность и  $\gamma$  – натурально параметризованная кривая в  $M$ . Пусть  $v(t) = \gamma'(t)$ ,  $n(t)$  – нормаль к  $M$  в  $\gamma(t)$  и  $w(t) = n(t) \times v(t)$ . Докажите, что

$$v' = \kappa_g \cdot w + \kappa_n \cdot n$$

$$w' = -\kappa_g \cdot v + \tau_g \cdot n$$

$$n' = -\kappa_n \cdot v - \tau_g \cdot w$$

где  $\kappa_g = \widehat{II}(v, v)$ ,  $\tau_g = \widehat{II}(v, w)$ ,  $\kappa_g$  некоторая функция, а  $\widehat{II}$  – вторая форма (на касательной плоскости) поверхности  $M$  в точке  $\gamma(t)$ .

**Задача 20.** Поверхность такова, что для любой ее точки прямая, проведенная через эту точку в направлении нормали, пересекает координатную ось  $OZ$ . Докажите, что в достаточно малой окрестности каждой точки данная поверхность совпадает с подмножеством некоторой поверхности вращения.

**Задача 21.** \*\*\* Диффеоморфизм между двумя поверхностями сохраняет углы и площадь. Докажите, что это изометрия.

**Задача 22.** \*\*\* Рассмотрим единичную сферу и точку  $p$  на экваторе. Докажите, что маленькая окрестность  $U$  точки  $p$  допускает “искривление”, то есть существуют такие поверхности изометричные  $U$ , что каждая поверхность в семействе – часть какой-то поверхности вращения (вокруг оси  $z$ ). Причем экваториальные точки  $U$  соответствуют экваториальным точкам поверхностей (экваториальная значит, что касательная плоскость в точке параллельна оси вращения) и расстояние от экваториальных точек до оси вращения разное для разных поверхностей из семейства