Геодезические – локально кратчайшие

Пусть M – риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇.

Теорема

Пусть $p \in M$, $v \in T_pM$, $|v| < \rho_{inj}(p)$, $\gamma_v \colon [0,1] \to M$ – геодезическая, $\gamma(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$. Тогда γ – кратчайший кусочно-гладкий путь между $\gamma_v(0)$ и $\gamma_v(1)$.

Док-во:

- Пусть γ – произвольный кусочно-гладкий путь между $\gamma_v(0)$ и $\gamma_v(1)$, т.е. $\gamma(0) = \gamma_v(0)$ и $\gamma(1) = \gamma_v(1)$. Нужно доказать, что $\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_v)$.
- Сократим путь γ так, чтобы он не проходил через p и не уходил от нее дальше чем $\gamma_v(1)$.
  Обозначим $r := |v|$, $B_r(0)$ – замкнутый шар в T_pM,
  $U := \exp_p(B_r(0))$, $\partial U := \exp_p(\partial B_r(0))$. Еще обозначим:
  $a := \max\{t \in [0,1] : \gamma(t) = p\}$,
  $b := \min\{t \in (a,1] : \gamma(t) \in \partial U\}$.
  Доказажем, что $\ell(\gamma|_{[a,b]}) \geq \ell(\gamma_v)$.
- Поднимем $\gamma|_{[a,b]}$ в T_pM. $\widetilde{\gamma} := \exp_p^{-1}(\gamma(t)),\ t \in [a,b]$.
- Обозначим: $\rho(t) = |\widetilde{\gamma}(t)|$, $u(t) = \widetilde{\gamma}(t)/\rho(t)$.

  Тогда $\widetilde{\gamma}(t) = \rho(t) \cdot u(t)$.

Геодезические – локально кратчайшие

- Спускаемся обратно на M.
  $\gamma = \exp_p \circ \widetilde{\gamma} \quad \gamma'(t) = d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(\widetilde{\gamma}'(t))$.
- $\widetilde{\gamma}'(t) = (\rho(t) \cdot u(t))' = \rho'(t) \cdot u(t) + \rho(t) \cdot u'(t)$, где $u \perp u'$, т.к. $|u| = 1$.
- $d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(\widetilde{\gamma}'(t)) = \rho'(t) \cdot d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t)) + \rho(t) \cdot d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(u'(t))$.
- Т.к. $u \perp u'$ и $|u| = 1$, то по лемме Гаусса
  $d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t)) \perp d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(u'(t))$ и $|d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(u(t))| = 1$.
- $|\gamma'(t)| = |d_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp_p(\widetilde{\gamma}'(t))| \geq |\rho'(t)| \geq \rho'(t)$.
- $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(\tau)| d\tau \geq \int_a^b \rho' d\tau = r = \ell(\gamma_v)$.

Теорема доказана.

Геодезические – локально кратчайшие

Определение

Отрезок в M – кусочно гладкий путь, реализующий расстояние между концами.

Замечание

Отрезок между любыми двумя точками гарантированно существует только в полном многообразии.

Упражнения

1. Любой отрезок в M изометричен отрезку в $\mathbb{R}$.
2. $\forall\ p \in M$ найдется такая окрестность U, что любые две точки этой окрестности соединяются отрезком.
3. Любой отрезок в M – геодезическая.
4. Пусть $p \in M$ и $r < \rho_{inj}(p)$, $S_r \subset T_pM$ – сфера радиуса r с центром в 0 в T_pM. Тогда $\exp_p(S_r)$ – сфера радиуса r с центром в p в M.

ρ_{inj} локально отделен от 0

Теорема

Для любой точки $p \in M$ существует такая окрестность $U \ni p$, что

$$\inf_{x \in U} \rho_{inj}(x) > 0.$$

Док-во:

- Мы уже знаем, что:
  $\exp\colon TM \to M$ – гладкое отображение, определенное на открытом подмножестве TM.
  $\exp_p = \exp|_{T_pM}$. $\quad d_0 \exp_p = \mathrm{id}_{T_pM}$.
- Зададим частично определенную гладкую функцию $F\colon TM \to M \times M$ правилом
  $$\forall\ p \in M\ \forall\ v \in T_pM \quad F(v) := (p, \exp_p(v)).$$
- Покажем, что $d_0 F \neq 0$.
  Доказываем в картах, что матрица $d_0 F = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$.
  Пусть $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ – координаты в карте TU.
  Тогда $(\frac{\partial F}{\partial x}) = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix}$, $(\frac{\partial F}{\partial \xi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ [d_0 \exp_p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$.

ρ_{inj} локально отделен от 0

- Применяем теорему об обратной функции:
  Найдется такая окрестность W точки $0 \in T_pM$, что сужение $F|_W$ есть диффеоморфизм W на $F(W)$.

- Найдется такая окрестность U точки $p \in M$ и такое число $r > 0$, что

$$\bigcup_{x \in U} B_r^{T_xM}(0) \subset W.$$

- Тогда $\forall\ x \in U:\ \exp_x = F|_{T_xM}$ – диффеоморфизм шара $B_r^{T_xM}(0)$ на его образ.

Теорема доказана.

Связность Леви-Чивита и символы Кристоффеля для подмногообразий в $\mathbb{R}^n$ (обзорно)

Пример (напоминание): ∇ в $\mathbb{R}^n$.
Любое $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ можно считать гладкой функцией $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда $\forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ определим оператор $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дифференцирования вдоль X равенством:

$$\forall\ Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \text{ полагаем } \nabla_X Y = (Y'_X)_p = d_p Y(X_p).$$

Подмногообразие M в $\mathbb{R}^n$.
Пусть $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ — простая регулярная поверхность, $M = r(U)$, $x \in U$, $p = r(x)$, (x_i) — координаты в U. Размерности любые.

Определение

Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ковариантная производная Y вдоль X определяется равенством

$$\nabla_v W = \mathrm{Pr}_{T_pM}(Y'_X)$$

где Y'_X – как в предыдущем примере, Pr_{T_pM} — ортогональная проекция на T_pM.