Опр.

Пусть: X, Y – линейные нормированные пространства.

$f: X \to Y$, Dom f – область определение f
Range f – область значений f
$\operatorname{Ker} f = \{x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = 0\}$

$\operatorname{Dom} f \subset X$, $\operatorname{Range} f \subset Y$.

f - линейный оператор, если Dom f – линейное подпространство X и

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

Опр. Пусть $f: X \to Y$ – линейный оператор. Он ограничен, если образ любого ограниченного множества ограничен.

Опр. Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность операторов, $f_n : X \to Y$. $\{f_n\}$ сходится на множестве $D \subset X$ к оператору f, если $D \subset \operatorname{Dom} f_n \ \forall n$, $\operatorname{Dom} f$ и

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \quad \forall x \in D.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \|_Y = 0$$

Опр. $\{f_n\}$ сходится равномерно к f, $f_n \rightrightarrows f$ если

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} \| f_n(x) - f(x) \|_Y = 0.$$

Примеры:

- Id – тождественный оператор, $Id: X \to X$.
- $X = C([0,1])$, $Af(x) := x \cdot f(x)$

  $\operatorname{Dom} A = X = C([0,1])$
  $\operatorname{Range} A \neq C([0,1])$
- $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

умножение на матрицу $n\times m$. $\quad \operatorname{Dom} M = \mathbb{R}^n$.
$\operatorname{Range} M$ = разное.

- $X = C([0,1])$
  $A: f \to \frac{\partial}{\partial x} f.$

$\operatorname{Dom} A \neq C([0,1])$
$\operatorname{Range} A$ = разное.
$\operatorname{Ker} A = \{const\}$

<u>Обозначим</u> $\quad L(X,Y) = \{$ограниченные линейные операторы $X \to Y\}$. $\operatorname{Dom} A = X$.

Легко видеть, что $A \in L(X,Y)$ непрерывен $\Leftrightarrow$ A непрерывен в нуле.

$x_0 \in \operatorname{Dom} A$, $x \to x_0$ $\qquad A(x) \to A(x_0)$ – непрерывность в x_0.

$$A(x) - A(x_0) = A(x-x_0), \quad x \to x_0 \Leftrightarrow x - x_0 \to 0.$$

<u>Утв.</u> Пусть $A: X \to Y$, ограничен на единичном шаре, т.е.

$$\forall \underset{\|x\|\le 1}{x \in \operatorname{Dom} A} \qquad \|A(x)\| \le C,$$

Тогда A – огр. оператор.

<u>Доказательство</u>. Пусть $E \subset \operatorname{Dom} A$, E – ограничено, тогда $\exists R$:
$\|x\| \le R \ \ \forall x \in E$, а тогда $\|A(x)\| = R \cdot \|A\left(\frac{x}{R}\right)\| \le CR$. ∎

<u>Определение</u> Пусть $A: X \to Y$, норма $\|A\|$ оператора A есть:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|\le 1} \|A(x)\|, \quad x \in \operatorname{Dom} A.$$

Легко видеть, что A – ограничен $\Leftrightarrow$ $\|A\| < +\infty$; $\|A\| \ge 0$

<u>Утв.</u> Линейный оператор $A: X \to Y$ ограничен $\Leftrightarrow$ $\exists C > 0$, т.ч.
$\|A(x)\| \le C \cdot \|x\| \quad \forall x \in \operatorname{Dom} A$.

($\Rightarrow$). A – ограничен $\Rightarrow$ $\|A\| < +\infty \Leftrightarrow \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|A(x)\| \le C < +\infty$.
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in \operatorname{Dom} A \quad A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \le C$$

($\Leftarrow$) тривиально.

∎

Утв. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|A(x)\|}{\|x\|}$, $x \in \mathrm{Dom}\, A$.

Доказательство. $\|A\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\|$. С другой стороны, пусть $0<\|x\|\leq 1$,

тогда $\|A(x)\| = \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \cdot \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|$. ∎

Следствие $\|A(x)\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in \mathrm{Dom}\, A$.

Следствие Если A - ограничен $\Rightarrow$ A непрерывен. Действительно,

$\|A(x) - A(x_0)\| \leq$

$\leq \|A\| \cdot \|x-x_0\|$ ∎

Утв. Пусть $\mathrm{Dom}\, A = X$. Тогда A - ограничен $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A непрерывен в нуле.

Доказательство: ($\Rightarrow$) следствие выше.

($\Leftarrow$). Пусть A - непрерывен в точке 0, но не ограничен.

Тогда $\forall\, n\ \exists\, x_n \in X$: $\|x_n\|\leq 1$; $\|A(x_n)\| \geq n \Rightarrow \left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \longrightarrow 0 \Rightarrow$ противоречие. ∎

Теорема. Пусть A - ограниченный линейный оператор, $A: X \to Y$, $\mathrm{Dom}\, A$ плотно в X; Y - банахово. Тогда $\exists\ A': X \to Y$, такой что

$A'(x) = A(x)\ \forall\, x \in \mathrm{Dom}\, A$, $\mathrm{Dom}\, A' = X$, $\|A'\| = \|A\|$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $x \notin \mathrm{Dom}\, A$, хотим определить $A'(x)$.

$\mathrm{Dom}\, A$ плотно в $X \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset \mathrm{Dom}\, A$: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

$\|A(x_n) - A(x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \Rightarrow \{A(x_n)\}$ - посл-ть Коши,

стало быть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A(x_n) \in Y$. Положим теперь:

$A'(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A(x_n)$.

Пусть $\{\tilde{x}_n\} \subset \mathrm{Dom}\, A$, $\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

$$z := \lim_{n\to\infty} A(x_n);\quad \tilde{z} = \lim_{n\to\infty} A(\tilde{x}_n).$$

$$\|z-\tilde{z}\| \leq \|z - A(x_n)\| + \|A(x_n) - A(\tilde{x}_n)\| + \|A(\tilde{x}_n) - \tilde{z}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\Downarrow$$

$$z = \tilde{z}.$$

A' линеен, т.к. lim линеен. Далее очевидно, что $\|A'\| \geq \|A\|$.

С другой стороны, $\|A x_n\| \leq \|A\| \cdot \|x_n\| \quad \forall n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|A'x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \Rightarrow \|A'\| \leq \|A\|.$$

∎

$$L(X,Y) = \{A : X \to Y,\ \mathrm{Dom}\, A = X,\ A - \text{огр.}\}.$$

Теорема. $L(X,Y)$ – линейное нормированное пространство, кроме того, если Y – банахово, тогда $L(X,Y)$ – банахово.

Доказательство. Если A, B – линейные огр. операторы, $\mathrm{Dom}\, A = \mathrm{Dom}\, B = X$, то $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ – такой же, где $(\lambda_1 A + \lambda_2 B)(x) := \lambda_1 A(x) + \lambda_2 B(x)$, $x \in X$

линейность совсем очевидна. Ограниченность:

- A, B – ограничены, то $A+B$ тоже. Действительно, $\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|A(x) + B(x)\| \leq$

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\|A(x)\| + \|B(x)\| \right) \leq \|A\| + \|B\|.$$

- A – ограничен, то λA – тоже. $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|\lambda A(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\lambda| \cdot \|A(x)\| =$

$$= |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, т.е. $A(x) = 0 \ \forall x \in X$.

$$\Downarrow\ \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow A(x) = 0 \ \forall x.$$

Сходимость в $L(X,Y)$ – сходимость по норме, т.е.

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \Leftrightarrow \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_n(x) - A(x)\|,$$ следовательно

сходимость по норме $\Leftrightarrow$ равномерной сходимости A_n на шаре $\{\|x\| \le 1\}$.

Проверяем банаховость $L(X, Y)$ по модулю банаховости Y.

Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная.

$$\|A_{m+n}(x) - A_n(x)\| \le \underbrace{\|A_{m+n} - A_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \cdot \|x\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{A_n(x)\}$ — фундаментальная. Y полно $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ $\underline{\forall x \in X}$ $= y$

положим $\underline{A(x) := y}$ — мы задали оператор A, $\mathrm{Dom}\, A = X$.

Покажем, что A ограничен. Имеем: $\forall n$: $\underline{\|A_n(x)\|} \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le$

$\le \underline{C \cdot \|x\|}$, т.к. $\{\|A_n\|\}$ — фундаментальная, т.к.

$$\big|\,\|A_{m+n}\| - \|A_n\|\,\big| \le \|A_{m+n} - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Переходим к пределу, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n(x)\| \le C\|x\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|A(x)\| \le C \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,$$

следовательно A — огр. оператор. $\blacksquare$

Пример. $A_n \xrightarrow[L(X,Y)]{} A \Leftrightarrow$ равномерная сходимость $\Leftrightarrow \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|A_n(x) - A(x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$

$A_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} A$, т.е. $\forall x \in X$ $A_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x)$.

$$\ell^2 = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) =: x;\ \|x\|_{\ell^2} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}.$$

$$P_n : x \in \ell^2 \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$$

$P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ $\forall x \in X$, действительно:

$$\|P_n(x)-x\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow P_n \xrightarrow[\text{р.ш.}]{} Id$$

С другой стороны, сходимость не равномерная:

$$e_k=(0,\dots,\underset{\underset{k}{\uparrow}}{1},\dots,0,\dots), \quad \|e_k\|=1$$

$$\sup_{x\in\{e_k\}}\|P_n(x)-x\|=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$\wedge$$

$$\sup_{\|x\|=1}\|P_n(x)-x\|=\|P_n-Id\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

ℓ^2, единичный шар в ℓ^2.

<u>Теорема (Хан–Банах).</u> Пусть p – однородно-выпуклый функционал, $p: X\to\mathbb{R}$, X – вещественное ЛНП, пусть X_0 – линейное подпространство X. Если A_0 – линейный функционал, заданный на X_0, такой что

$A_0(x)\le p(x)$, $x\in X_0$, то тогда существует функционал $A: X\to\mathbb{R}$, линейный, $A(x)\le p(x)$, $x\in X$, $A\big|_{X_0}=A_0$.

<u>Опр.</u> Функционал на ЛНП X есть отображение $X\to\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$.

Однородно выпуклый: (i) $p(tx_1+(1-t)x_2)\le$
$\le tp(x_1)+(1-t)p(x_2)$, $0\le t\le 1$. $x_1,x_2\in X$.

(ii) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$, $x\in X$, $\lambda>0$.

$p: X\to\mathbb{R}$.
