Листочек на рейтинг. Выдан: 28.04.2022. Дедлайн: 14.05.2022, 23:59.

1) **[3]** Функция $g \in C[a,b]$ такова, что $\int_a^b g(x)h^{(k)}(x)\,dx = 0$ при всех $h \in C^k[a,b]$ таких, что

$$h(a) = h'(a) = ... = h^{(k-1)}(a) = h(b) = h'(b) = ... = h^{(k-1)}(b) = 0.$$

Докажите, что g — полином степени не выше $k-1$.

2) **[3]** В гильбертовом пространстве l_2 со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ на множестве финитных последовательностей задан линейный оператор A

$$(A\vec{x})_k = kx_k, \qquad \operatorname{Dom} A = \{\vec{x} \in l_2 : \#\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\} < \infty\}.$$

a) Докажите, что оператор A — симметричный

b) Найдите сопряженный оператор A^* (как действует и какова область определения $\operatorname{Dom} A^* \subset l^2$).

3) **[4]** Найдите однородную плоскую кривую $g(\varphi, r)$, проходящую через точки $(0, a)$ и (θ, b) (в полярных координатах), и имеющую наименьший момент инерции относительно оси перпендикулярной плоскости кривой и проходящей через начало координат. Найдите непрерывные и разрывные решения.

Указание: Моментом инерции материальной точки относительно оси называется величина $I = mr^2$, где m – масса материальной точки, r – расстояние от нее до оси. Момент инерции относительно оси является аддитивной величиной.

4) **[6]** Найдите форму тела вращения относительно оси OX, однородного, имеющего данный объем V и оказывающего наибольшее притяжение по закону всемирного тяготения на точку, на пересечении тела с осью OX.

5) **[6]** Предполагая функцию F достаточно гладкой, найдите общий вид функционала $J[y]$, $y \in C^1[0,l]$,

$$J[y] = \int\limits_0^l F(x, y, y')\,dx,$$

множество экстремалей которого совпадает с множеством прямых $\{y = kx + b : \ k, b \in \mathbb{R}\}$.

6) **[9]** Найдите геодезические на параболоиде вращения $2z = x^2 + y^2$.

Указание: Полезно записать функционал расстояния в подходящих координатах. В задаче требуется лишь найти критические точки этого функционала. Доказывать, что получившиеся кривые дают минимальное расстояние, не нужно.

7) **[9]** Используя первую вариацию функционала $J[z]$

$$J[z] = \int |\nabla z|^2\,dx\,dy,$$

запишите оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в координатах

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \qquad\qquad (ds)^2 = a \cdot (du)^2 + 2b \cdot du\,dv + c \cdot (dv)^2$$

где ds — элемент длины в координатах (x, y), т.е. $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$; а $a = a(u,v), b = b(u,v), c = c(u,v)$ — некоторые функции[1].

Организационные моменты:

- Листочек подразумевает индивидуальное решение.
- Решение задач нужно оформлять письменно с подробным объяснением всех переходов.
- Решение задач присылается **один** раз на почту
  - Группы Б01, Б02, Б03, Б04: morovom@gmail.com
  - Группа Б05: r.bessonov@gmail.com
  - Группа Б06: kryadovkin@gmail.com
- Важно: все решения нужно присылать **единым файлом PDF**. Для удобства стандартизируем название файла: var-N-Surname.pdf, где N — номер группы (1, 2, 3, 4, 5 или 6), Surname — Ваша фамилия. Например, var-2-Osipov.pdf.

[1] Эти функции могут быть легко выражены через функции, задающие обратное отображение $(u, v) \mapsto (x, y)$, но в задаче требуется лишь записать лапласиан, используя a, b и c.