Проективные и инъективные модули.

1. Пусть P — модуль над кольцом R. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - Для любых гомоморфизма $f : P \to X$ и эпиморфизма $p : Y \to X$ существует гомоморфизм $h : P \to Y$ такой, что $ph = f$;
   - Существует модуль P' такой, что $P \oplus P'$ свободный;
   - Существуют $x_i \in P$, $f_i : P \to R$ (гомоморфизмы модулей), $i \in T$ для некоторого индексирующего множества T такие, что для любого $x \in P$ существует только конечное число $i \in T$ таких, что $f_i(x) \neq 0$ и $x = \sum\limits_{i \in T} f_i(x) x_i$;
   - Для любого эпиморфизма $p : X \to P$ существует $h : P \to X$ такой, что $ph = id_P$.

   Модуль P, удовлетворяющий любому (т.е. всем) условиям задачи называется *проективным*. Для любого модуля M существует эпиморфизм $P \to M$ с проективным P. Это следует из того, что любой свободный модуль проективен (почему?).

2. Докажите, что любой проективный модуль над областью главных идеалов свободен. Докажите, что для следующих колец не любой проективный модуль свободен:

   - $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;
   - $R = M_2(\mathbb{C})$;
   - R — кольцо верхнетреугольных матриц два на два с коэффициентами в $\mathbb{C}$.

3. Пусть Q — модуль над кольцом R. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - Для любых гомоморфизма $f : X \to Q$ и мономорфизма $q : X \to Y$ существует гомоморфизм $h : Y \to Q$ такой, что $hq = f$;
   - Для любого мономорфизма $q : Q \to X$ существует $h : X \to Q$ такой, что $hq = id_Q$.

   Модуль Q, удовлетворяющий любому (т.е. всем) условиям задачи называется *инъективным*. Известны следующие факты. Модуль Q инъективен тогда и только тогда, когда для любого идеала I кольца R любой R-модульный гомоморфизм из I в Q продолжается до R-модульного гомоморфизма из R в Q (в одну сторон это очевидно, в какую?). Для любого модуля M существует мономорфизм $M \to Q$ с инъективным Q.

   Последовательность гомоморфизмов $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ называетс короткой точной, если f — мономорфизм, g — эпиморфизм и образ f совпадает с ядром g. Функтор F называется точным, если он любую корокую точную последовательность $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ переводит в короткую точную последовательность $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$. Аналогично определяется точность для контравариантного функтора.

4. Докажите, что модуль P проективен тогда и только тогда, когда функтор $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ точен. Докажите, что модуль Q инъективен тогда и только тогда, когда функтор $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ точен.

   Модуль T называется плоским, если функтор $-\otimes_R T$ точен.

5. Докажите, что проективный модуль является плоским.

6. Докажите, что $\mathbb{Q}$ не является проективным $\mathbb{Z}$-модулем.

   Можно показать, что $\mathbb{Q}$ — плоский $\mathbb{Z}$-модуль, потому не любой плоский модуль является проективным.

   Подмодуль X модуля Y называется *существенным*, если из того, что Z подмодуль Y и $X \cap Z = 0$ следует, что $Z = 0$. Подмодуль X называется *излишним*, если из того, что Z подмодуль Y и $X + Z = Y$ следует, что $Z = Y$. Мономорфизм $q : X \to Y$ называется существенным, если $\mathrm{Im}\, q$ — существенный подмодуль Y. Эпиморфизм $p : X \to Y$ называется существенным, если $\mathrm{Ker}\, p$ — излишний подмодуль X.

7. Докажите, что мономорфизм $q : X \to Y$ существенный тогда и только тогда, не существует $f : Y \to Z$, не являющегося мономорфизмом, такого, что fq — мономорфизм. Докажите, что эпиморфизм $p : X \to Y$ существенный тогда и только тогда, не существует $f : Z \to X$, не являющегося эпиморфизмом, такого, что pf — эпиморфизм.

8. Покажите, что композиция мономорфизмов $q_2 q_1$ является существенным мономорфизмом тогда и только тогда, когда оба мономорфизма q_1 и q_2 существенны.

9. Покажите, что $\mathbb{Z}$ — существенный подмодуль в $\mathbb{Q}$.

   Проективное накрытие модуля M — это существенный эпиморфизм $\pi : P \to M$ с проективным модулем P. *Инъективная оболочка* модуля M — это существенный мономорфизм $\iota : M \to Q$ с инъективным модулем Q.

10. Докажите, что, если $\pi : P \to M$ — проективное накрытие M, а $p : P' \to M$ — некий эпиморфизм с проективным P', то существует эпиморфизм $f : P' \to P$ такой, что $p = \pi f$. При этом p является проективным накрытием тогда и только тогда, когда f — изоморфизм. Сформулируйте и докажите анадогичное свойство для инъективной оболочки.

11. Докажите, что модуль M инъективен тогда и только тогда, когда не существует существенного мономорфизма $M \to M'$, не являющегося изоморфизмом.

12. Пусть M — подмодуль инъективного модуля Q. Докажите, что существует максимальный подмодуль Q' модуля Q, содержащий M в качестве существенного подмодуля. Докажите, что Q' инъективен и выведите, что у любого модуля существует инъективная оболочка.

13. Покажите, что у $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ не существует проективного накрытия.