Вариант 1

Найдите допустимые экстремали при указанных условиях:

$$1)\ J[y] = \int\limits_0^1 \Big[y''^2 + 2y\Big]\,dx + y'(1), \qquad y(1) = 0,\ y'(0) + 2y(0) = 0;$$

$$2)\ J[y,z] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y'z' + yz\right]dx, \qquad y(0) = z(0) = 0,\ y(1) = \operatorname{sh} 1,\ z(1) = -\operatorname{ch} 1.$$

3) Найдите кривую, соединяющую прямые $x = -1$ и $x = 1$, ограничивающую вместе с ними и осью абсцисс наибольшую площадь, при условии, что сумма длины кривой и ординат концов равна $l > \pi$.

4) Найдите расстояние между кривыми

$$2y = x^2, \qquad (x-6)^2 + y^2 = 5.$$

5) Найдите собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0, \\ y'(a) = y'(b) = 0, \quad b > a > 0. \end{cases}$$

1) $y = \dfrac{-x^4 + 2x - 1}{24}$;

2) $y = \operatorname{sh} x, \quad z = -x \operatorname{ch} x$;

3) $x^2 + (y - c)^2 = 1, \quad c = \dfrac{l - \pi}{2}$;

4) $dist = \sqrt{5}$;

5) $\lambda_k = \dfrac{\pi^2 k^2}{\ln^2 \frac{b}{a}}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$y_k = \operatorname{tg} \frac{\pi k \ln a}{\ln \frac{b}{a}} \sin \frac{\pi k \ln x}{\ln \frac{b}{a}} + \cos \frac{\pi k \ln x}{\ln \frac{b}{a}}.$$