Листочек 10. Комплексно-аналитический
Математический анализ. 2 курс

Выдан: 5 марта.   Дедлайн (крайний срок): 1 апреля.

Базовые задачи

1. Выясните, существуют ли непостоянные функции $\psi(t)$, такие, что соответствующие функции $u(x, y)$ гармоничны. Если существуют, опишите все такие функции:

a) (1 балл) $u(x,y) = \psi(\frac{y}{x})$, b) (1 балл) $u(x,y) = \psi(xy)$, c) (1 балл) $u(x,y) = \psi(x^2+y^2)$.

2. (2 балла) Пусть функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитична вне единичного диска и всюду непрерывно дифференцируема. Докажите, что существует целая функция g, такая что $f - g \in L_\infty(\mathbb{C})$.

3. (1 балл) Докажите, что ряд

$$\sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

сходится к $\frac{1}{1-z^2}$ при $|z| < 1$ и к $\frac{1}{z(1-z^2)}$ при $|z| > 1$. В каких областях мы можем гарантировать равномерную сходимость этого ряда?

4. (1 балла) Пусть точки $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ не лежат на одной прямой. Докажите, что уравнение окружности, проходящей через эти точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. (1,5 балла) Пусть $f = u + iv$ голоморфна при $|z| < 1 + \epsilon$ и $f(0) = 0$. Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t)^4 dt < 36 \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t)^4 dt$$

6. (2 балла) Если $f(z)$ аналитична в $\mathrm{Im} z > 0$ и $\mathrm{Im} f(z) > 0$, то $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|} \leq \frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$ $\frac{f'(z)}{\mathrm{Im} z} \leq \frac{1}{y}$.

7. (2 балла) Пусть функция U гармоничная в единичном шаре. Докажите, что функция

$$r \mapsto \Big(\frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r} |U(x)|^p \, d\sigma(x)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

не убывает, если $p \geq 1$. Символом S_r обозначена сфера радиуса r с центром в нуле, а $d\sigma$ — мера площади на этой сфере.

8. (1,5 балла) Функция $f(z) = \sum_{n=1}^\infty z^{n!}$ (очевидно) аналитична в $\mathbb{D} := \{z\colon |z| < 1\}$. Докажите, что f нельзя продолжить аналитически ни через какую дугу единичной окружности $\mathbb{T}$, то есть: не существует области $G \supset \mathbb{D}$, $G \neq \mathbb{D}$ такой, что f продолжается до функции, аналитичной в G.

9. (1 балл) Посчитайте интеграл Френеля:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = ?$$

10. a. (2 балла) Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество, а функция f задана и аналитична в некоторой окрестности K. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся рациональная функция r с полюсами вне K, для которой $\|f - r\|_{L^\infty(K)} < \varepsilon$.

b. (1 балл) Покажите, что функцию $\bar{z}$ нельзя сколь угодно хорошо равномерно приблизить полиномами от z на единичной окружности $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

11. (2 балла) Пусть $f \in L_1([0, 1])$, $f \neq 0$. Докажите, что множество решений уравнения

$$\int_0^1 e^{i\lambda x} f(x)\, dx = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

дискретно. Может ли оно быть конечным?

Рейтинговые задачи

12. Пусть $f(z)$, $z = x+iy$ аналитическая функция в круге и квадрат ее модуля $|f(z)|^2 = \phi(x, y)$ является алгебраической функцией вещественных переменных x и y. Тогда сама f является алгебраической функцией переменной z.

13. Тригонометрический полином

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ \ldots\ + a_n \cos n\theta,$$

где $0 < a_0 < a_1 < \ \ldots\ < a_n$, имеет ровно $2n$ корней на отрезке $(0, 2\pi]$.

14. Пусть $0 < r_1 < r_2 < \infty$ и функция f аналитична в кольце $r_1 \leq |z| \leq r_2$. Положим $M(r) = \max\{|f(z)|; |z| = r\}$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Доказать неравенство

$$M(r) \leq M(r_1)^\alpha M(r_2)^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)}.$$

15. Пусть E — компакт в $\mathbb{C}$. Пусть функция f ограничена и непрерывна в области $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, а также аналитична в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$. Докажите, что

$$f(E) = f(\widehat{\mathbb{C}}).$$

16. Пусть P многочлен степени 3. Какое максимальное число корней может иметь уравнение $P(z) = \bar{z}$?

17. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, содержащая вместе с каждой точкой z отрезок длины δ, проходящий через z. Докажите неравенство

$$\|f'\|^2_{L_\infty(\Omega)} \leq C_\delta \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|f''\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad f \text{ аналитична в } \Omega,$$

где постоянная C_δ зависит лишь от δ.