Теорема (Б-Ш) $\{A_n\}$ — линейные ограниченные операторы: $X \to Y$, X — банахово, Y — анп, пусть $\{A_n(x)\}$ — фундаментальная для каждого $x \in X$.

Тогда $\{A_n\}$ — ограничена

Доказательство (*) Пусть F — некоторый шар в X, т.е. $F = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$, для некоторых $x_0 \in X$, $r > 0$. Пусть на F последовательность $\{A_n(x)\}$ ограничена равномерно, т.е. $\exists\, C : \|A_n(x)\| \leq C \quad \forall x \in F \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leq 1$. По линейности: ξ можно представить в виде

$\xi = \dfrac{x - x_0}{r}$, где $\|x - x_0\| \leq r$, иначе говоря $\xi \cdot r + x_0 \in F$.

$$\|A_n(\xi)\| \leq \frac{1}{r}\|A(x)\| + \frac{1}{r}\|A_n(x_0)\| \leq \frac{C}{r} + \frac{C}{r} = 2C/r. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

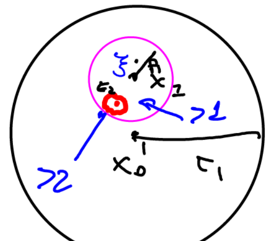
Стало быть $\sup\limits_{\|\xi\| \leq 1} \|A_n(\xi)\| \leq \dfrac{2C}{r}$.

Пусть теперь наше предположение (*) неверно. Т.е. для любого шара $\{\|x - x_0\| \leq r\}$, $r > 0$, $x_0 \in X$ $\{A_n x\}$ не ограничена равномерно.

Зафиксируем шар F_1, в нём точку x_1, номер n_1, такие что $\|A_{n_1}(x_1)\| > 1 + \varepsilon$ НУО $\|x_1 - x_0^1\| < r/2$, x_0^1 — центр F_1.

A_n - огр. $\Leftarrow$ A_n - непрерывные. Стало быть (по непрерывности)

$\|A_{n_1}(\xi)\| > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ для $\xi \in \underbrace{\|\xi - x_1\| \le \rho_1}_{E_1}$



В E_1 последовательность $\|A_n(\xi)\|$ не огр. равномерно, стало быть найдётся точка $x_2 \in E$, n_2, шар E_2 радиуса ρ_2 с центром в x_2,

$\|A_{n_2}(\xi)\| > 2 + \varepsilon/2$ в E_2. И так далее. Мы получим последовательность вложенных замкнутых шаров $\{E_k\}$, последовательность $\{n_k\}$

$\|A_{n_k}(\xi)\| > k$ для $\xi \in E_k$.

Рассмотрим $\xi_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. $\quad \|A_{n_k}(\xi_0)\| > k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Это противоречие с фундаментальностью. ∎

Теорема об обратном операторе / открытом отображении / замкнутом графике.

X, Y - лвп.

$$A: \underset{X}{\underset{\cap}{\mathrm{Dom}\,A}} \xrightarrow{\text{линейный}} \underset{Y}{\underset{\cap}{\mathrm{Range}\,A}}$$

М.б. $\exists\, B$ - оператор, такой что $BA = Id$.

$\exists\, C$ - оператор, такой что $AC = Id$.

Если существуют оба, то $B = B(AC) = (BA)C = C$, и тогда мы его обозначаем за A^{-1}. То же самое, что у уравнения $Ax = y$ существует единственное решение.

Если $A: X \longrightarrow Y$, существует оператор $A^{-1}: Y \to X$, такой что

$$A^{-1}Ax = x \quad \forall x \in X$$
$$AA^{-1}y = y \quad \forall y \in Y$$

, тогда A и A^{-1} называются взаимно обратными.

Например: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Замечание: A^{-1} - тоже линейн.

Пусть $y_1, y_2 \in Y$, рассмотрим $A^{-1}(y_1+y_2) - A^{-1}(y_1) - A^{-1}(y_2) := x$

$Ax = \cancel{AA^{-1}}(y_1+y_2) - \cancel{AA^{-1}}(y_1) - \cancel{AA^{-1}}(y_2) = 0$, откуда было $x = A^{-1}A(x) = A^{-1}(0) = 0$.

Однородность аналогично.

Замечание. Обратный к ограниченному не обязательно ограничен.

$$A(f)(t) := \int_0^t f(x)\,dx, \qquad f \in C[0,1]. \quad 0 \le t \le 1.$$

Теорема (Банаха об обратном операторе)

Пусть A - линейный оператор: $X \to Y$, Range $A = Y$. Чтобы существовал A^{-1} и он был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы нашлось число $m > 0$:

$$\|A(x)\| \geq m \cdot \|x\|, \quad x \in X. \qquad (53)$$

При этом, наибольшее число m, удовлетворяющее (53) и есть $\|A^{-1}\|^{-1}$.

Доказательство. $\Leftarrow$

Пусть есть ограниченный обратный A^{-1}, т.е. $\exists C : \|A^{-1}(y)\| \le C\|y\|$ $\forall y \in Y$. Возьмём x: $A(x) = y$, $x = A^{-1}(y)$,

$$\|x\| \le C \cdot \|Ax\|$$

Стало быть, т.к. y - произвольный, то

$$\|Ax\| \geq \frac{1}{C} \cdot \|x\| \quad \forall x,$$

т.е. имеем (53).

$\Rightarrow$ Пусть верно (53).

- Если $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. Тогда существует обратный оператор, т.к. A - инъективен ($A(x_1) \neq A(x_2)$ для $x_1 \neq x_2$). Рассмотрим теперь какой-нибудь $y \in Y$, положим $x := A^{-1}(y)$. Из (53) следует,

$$\|A(x)\| = \|AA^{-1}(y)\| = \|y\| \geq m \cdot \|A^{-1}(y)\|,$$

т.е. $\|A^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \quad \forall y,$

т.к. $\|A^{-1}\| = \sup\limits_{\|y\|=1} \|A^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m} \sup\limits_{\|y\|=1} \|y\| = \frac{1}{m}.$

И сразу имеем ограниченность. ∎

Теорема. Пусть A – линейный, ограниченный, $: X \to X$, $\|A\| = q < 1$.
(X – банахово)

Тогда оператор $Id + A$ имеет огр. обратный.

Доказательство. Рассмотрим ряд:

$$(54) \quad Id - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^n \cdot A^n + \dots,$$

где $A^n(x) = \underbrace{A(A(\dots A}_{n \text{ раз}}(x)))\dots).$

Соображение $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, т.к. $\forall A, B: X \to X$ верно

$$\|A(B(x))\| \leq \|A\| \cdot \|B(x)\| \leq$$
$$\leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (54), $S_k := Id - A + A^2 - \dots + (-1)^k A^k$

$n, m \geq 0$

$$\|S_{n+m} - S_n\| = \|(-1)^{n+1}A^{n+1} + (-1)^{n+2}A^{n+2} + \dots + (-1)^{n+m}A^{n+m}\| \leq$$

$$\leq \|A\|^{n+1} + \dots + \|A\|^{n+m} \leq q^{n+1} + \dots + q^{n+m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\{S_k\}_{k\geq 1}$ – фундаментальная, а т.к. $\mathcal{L}(X,X)$ – полное (X – банахово), то $S_k \xrightarrow[\text{в } \mathcal{L}(X,X)]{} \underline{S}.$

Рассмотрим теперь $S(Id + A) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_n}\, \underline{(Id + A)},$

Т.к. если $A_n \to A$ в $\mathcal{L}(X,X)$, $B_n \to B$ в $\mathcal{L}(X,X)$, то $A_n B_n \to AB$ в $\mathcal{L}(X,X)$.

(доказательство - упр.)

$$S_n(Id+A) = (Id - A + A^2 - \dots + (-1)^n A^n)\cdot(Id+A) =$$

$$= Id - A^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}.$$ Кроме того, $\|A^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Стало быть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\underbrace{(Id+A)} = Id$, т.е. $S = (Id+A)^{-1}$.

$$\|S\| \le \sum_{n\geq 0} \|A\|^n \le \sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}.$$ ■

<u>Теорема</u> Пусть $A: \overset{\delta}{X} \to \overset{\delta}{Y}$ имеет обратный, и пусть линейный оператор $\Delta A: X \to Y$ таков, что

$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Тогда у оператора $B := A + \Delta A$ есть обратный B^{-1}, причём

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\cdot\|A^{-1}\|^2.$$

<u>Доказательство</u>

$$A + \Delta A = A(Id + A^{-1}\Delta A)$$

$\|A^{-1}\Delta A\| \le \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$. Следовательно у $Id + A^{-1}\Delta A$ есть

$X \circlearrowleft$

обратный, при этом

$$(Id + A^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-A^{-1}\Delta A)^n$$

Стало быть $\underline{(Id + A^{-1}\Delta A)^{-1}\cdot A^{-1}}$ есть обратный к

$$A(\mathrm{Id} + A^{-1}\Delta A) = \underline{A + \Delta A}.$$

$$\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\underbrace{(\mathrm{Id} + A^{-1}\Delta A)}^{-1} - \mathrm{Id}\| \le$$

$$\le \|A^{-1}\| \sum_{n\ge 1} \|A^{-1}\Delta A\|^n = \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\| \le \frac{\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|}$$

∎

В будущем: будем рассматривать операторы вида $\underline{A + \lambda \cdot \mathrm{Id}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема (Банах, обратный оператор)

Пусть X, Y — банаховы, $A: X \to Y$ — линейный, ограниченный, биекция между X и Y. Тогда существует A^{-1}, линейный и ограниченный, $A^{-1}: Y \to X$.

Доказательство. Достаточно доказать ограниченность A^{-1}.

Замечание. $C[0,1]$ $\quad A: f \longmapsto \underline{\int_0^t f(x)\,dx}$

$(Af)(0) = 0$

(Af) — дифф. функция.

Опр. Пусть X — м.пр-во, мн-во E в X называется множеством первой категории, если можно представить $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n — нигде не плотно. Если E — не первой категории, то оно называется множеством второй категории.

Лемма Пусть X — полное метрическое пространство. Тогда оно второй категории (т.е. нельзя представить $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, X_n нигде не плотно в X).