Другое определение подмногообразия

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие.
Множество $M \subset N$ – гладкое подмногообразие $\iff$ M является образом некоторого гладкого вложения.

Док-во теоремы:

($\Longleftarrow$): предыдущая теорема.

($\Longrightarrow$)

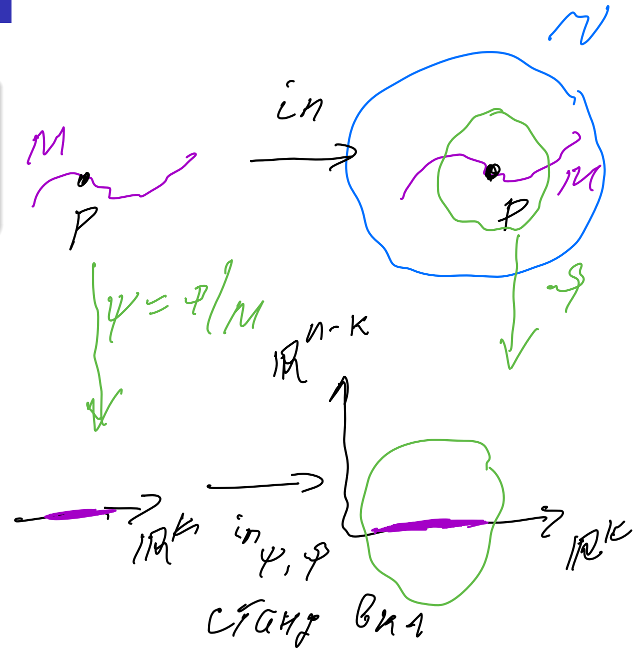
Лемма: M – подмногообразие N $\Longrightarrow$ включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ – гладкое вложение.

Док-во леммы:

- in – гладкое отображение.
  (поскольку $\mathrm{in}_{\varphi,\psi}$ – стандартное включение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ в выпрямляющей карте ψ и карте $\varphi = \psi_{|M}$)
- in – погружение.
  следует из координатного представления дифференциала

$$(d_p\,\mathrm{in}(v))_\psi = d_{\varphi(p)}\,\mathrm{in}_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_pM$$

- in – гомеоморфизм на образ (по определению).



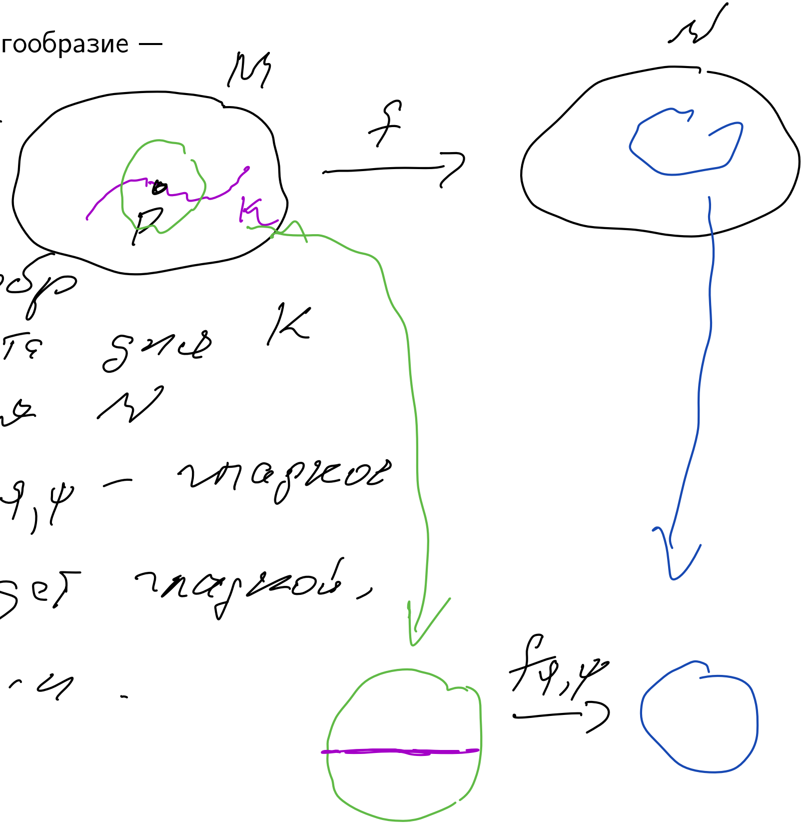
Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

M, N - гл. мн. $f: M \to N$ -
- гл. отобр; K - подмн
в M.

Д-ть: $f|_K$ - гл. отобр

- (U, φ) - согл карта для K
  (V, ψ) - карта для N
- т.к. f - гл., то $f_{\varphi,\psi}$ - гладкое
- $f_{\varphi,\psi}|_{\varphi(U \cap K)}$ - будет гладкой,
  как суж. гл. ф-и.



Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

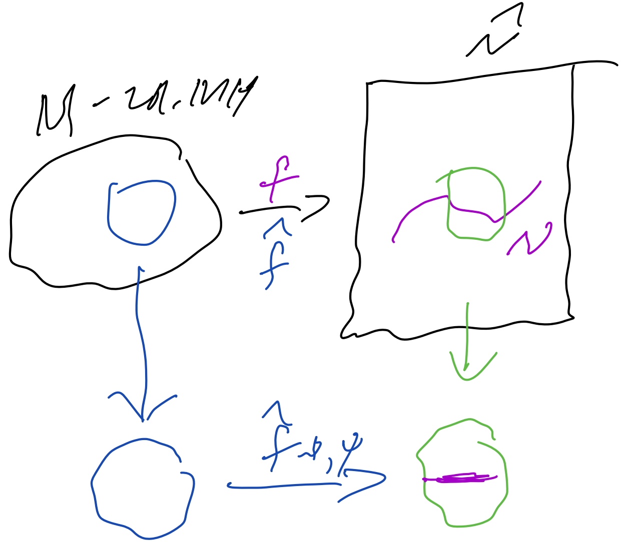
лемма из предыдущей теоремы

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

(3) Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$



$\mathrm{in}: N \to \hat N$ — гладкое

$\hat f = \mathrm{in} \circ f : M \to \hat N$

Надо д-ть: f — гл $\Leftrightarrow$ $\hat f$ — глад.

$(\Rightarrow)$ св-во 2 + гладк. композ

$(\Leftarrow)$ (U, φ) — карта в M, (V, ψ) — выпр. в $\hat N$ для N

$f_{\varphi,\psi}$ гладкое, т.к. это первые коорд отобр $\hat f_{\varphi,\psi}$.

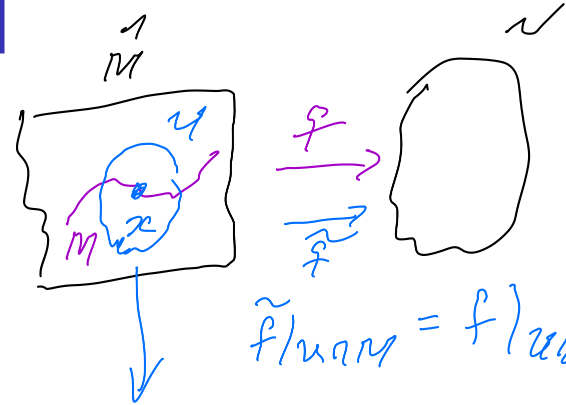
$M = (-\varepsilon, \varepsilon) : N = S^2, \hat N = \mathbb{R}^3$

Гладкие отображения и подмногообразия (свойства)

(1) Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).

(2) Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $\mathrm{in}\colon M \to N$ — гладкое отображение.

(3) Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$



$\tilde{f}|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$

Определение

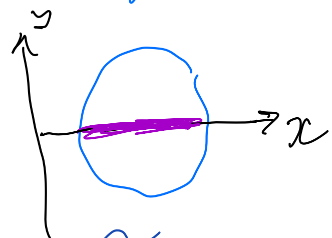
Пусть $\widehat{M}$, N – гладкие многообразия, M – подмногообразие в $\widehat{M}$. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется локально гладко продолжимым, если для любой $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$ в $\widehat{M}$ и гладкое отображение $\tilde{f}\colon U \to N$, продолжающее $f|_{U\cap M}$.

(4) f гладкое $\iff$ f локально гладко продолжимо.

Док-во: $\Longleftarrow$ свойство (1) + поточечная гладкость.

$\Longrightarrow$ в выпрямляющей карте

(U, φ)



$\tilde{f}(x,y) = f(x)$

Транзитивность подмногообразий

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $K \subset M$ — подмножество.
Тогда эквивалентны два свойства:

(1) *K – гладкое подмногообразие M;*

(2) *K – гладкое подмногообразие N.*

При этом размерность K и дифференциальная структура на K, получаемые из M и N, совпадают.

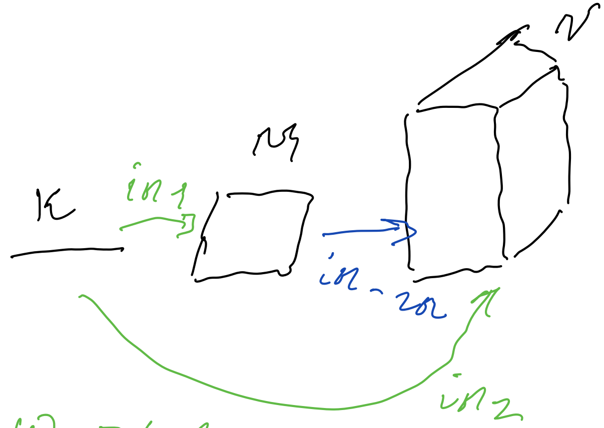
Доказательство.

Пусть $\mathrm{in}\colon M \to N$, $\mathrm{in}_1\colon K \to M$, $\mathrm{in}_2\colon K \to N$ – включения. Тогда

$$\mathrm{in}_2 = \mathrm{in} \circ \mathrm{in}_1 .$$

Теорема сводится к утверждению: если in_1 — гладкое вложение (относительно некоторой дифференциальной структуры на K), то in_2 тоже, и наоборот.

Это следует из равенства $d\,\mathrm{in}_2 = d\,\mathrm{in} \circ d\,\mathrm{in}_1$ □



(1) => (2)
in_1 - гл. => in_2 - гл.

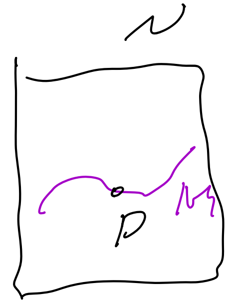
(2) => (1)
Док: что in_1 - гл. влож
гл. следует из св. (2)
если $\ker d\,in_1 \neq \{0\}$,
то $\ker d\,in_2 \neq 0$ против

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия

Пусть N^n – гладкое многообразие, $M^k \subset N$ – его подмногообразие, $p \in M$.

Соглашение

Касательное пространство T_pM – линейное подпространство в T_pN.



Мотивировки:

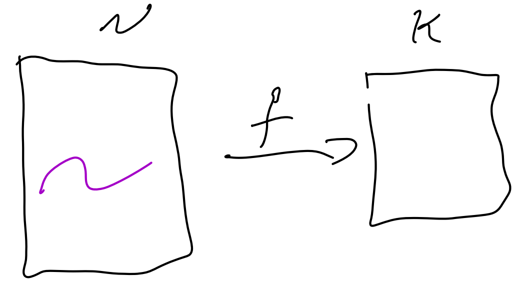
(1) Вектор из T_pM, представленный гладкой кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, отождествляется с вектором из T_pN, представленным той же кривой α.

(2) Рассмотрим включение $in\colon M \to N$.
Так как M подмногообразие N, то in – вложение. Поэтому $d_p in$ – инъекция, а его образ $d_p in(T_pM) \subset T_pN$ – k-мерное линейное подпространство в T_pN.

Отвлечение в сторону

Верно ли, что если $M \subset N$ оба гл. мн-я, $in: M \to N$ гл-е, то M – подмн в N?

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия



Свойство 1

Пусть N, K — гладкие многообразия, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $f : N \to K$ — гладкое отображение. Тогда

$$d_p(f|_M) = (d_p f)|_{T_pM}$$

Док-во:

- $T_pM \subset T_pN$.
- $f|_M = f \circ in$, где $in \colon M \to N$ – включение.
- $d_p(f|_M) = d_p f \circ d_p \, \mathrm{in} = (d_p f)|_{T_pM}$.

Разные взгляды на касательное пространство подмногообразия

Касательное пространство образа вложения

Свойство 2

Пусть $f: M \to N$ — вложение, $p \in M$. Тогда касательное пространство к подмногообразию $K = f(M)$ в точке $f(p)$ – образ дифференциала $d_p f$, т.е.

$$T_{f(p)}K = d_p f(T_p M)$$

Доказательство.

Пусть $\widehat{f}: M \to K$ – то же самое f с заменой формальной области значений. Оно гладкое по свойству 3.

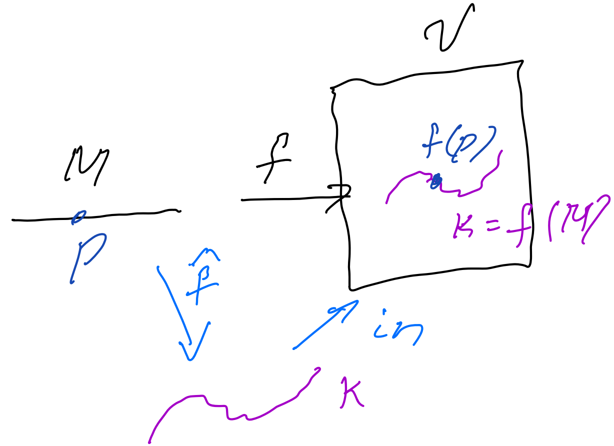
$\implies f = \mathrm{in} \circ \widehat{f}$, где $\mathrm{in}: K \to N$ – включение.

$\implies d_p f = d_{f(p)} \mathrm{in} \circ d_p \widehat{f}$ in

$\implies d_p f(T_p M) = d_{f(p)} i(d_p \widehat{f}(T_p M))$.

Так как $\widehat{f}$ — диффеоморфизм, $d_p \widehat{f}$ – биекция между $T_p M$ и $T_{f(p)}K$.

$\implies d_p f(T_p M) = d_{f(p)} \mathrm{in}(T_{f(p)}K)$. □



Регулярные точки и регулярные значения

Пусть M^n и K^k — гладкие многообразия, $n \geq k$, $f\colon M \to K$ — гладкое отображение.

Определение

Точка $p \in M$ — регулярная точка f, если дифференциал $d_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ сюръективен (эпиморфизм).
Эквивалентно, $\operatorname{rank} d_pf = k$

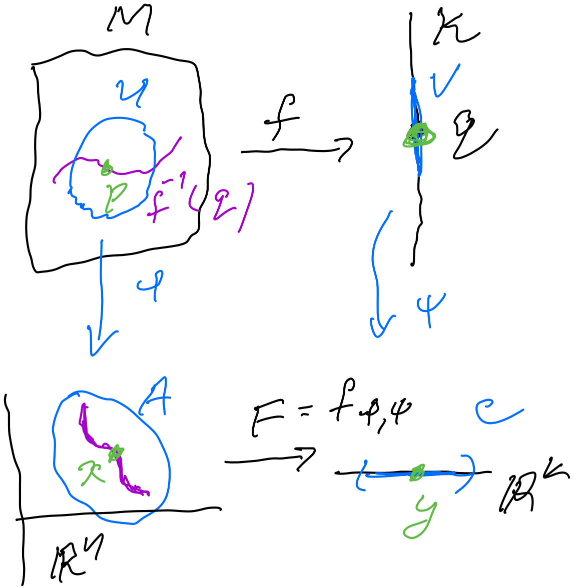
Точка $q \in K$ — регулярное значение f, если все точки из $f^{-1}(q)$ — регулярные точки.

f — субмерсия, если все точки из M — регулярные точки для f.

Замечание

Множество регулярных точек открыто
(так как регулярность точки эквивалентна тому, что хотя бы один из миноров $k \times k$ матрицы дифференциала не равен 0).
Следовательно, в окрестности регулярной точки отображение является субмерсией.

Прообраз регулярного значения



Теорема

Пусть M^n и K^k — гладкие многообразия, $n \geq k$, $f: M \to K$ — гладкое отображение, $q \in K$ — регулярное значение f.

Тогда $f^{-1}(q)$ — гладкое подмногообразие в M.
Его размерность равна $n - k$.

Док-во: Построим выпрямляющую карту.

- Рассмотрим некоторое $p \in f^{-1}(q)$, а так же карты (U, φ) и (V, ψ), содержащие точки p и q соответственно. По определению регулярного значения p – регулярная точка.
- Далее работаем с картами. Пусть $A = \varphi(U)$, $C = \psi(V)$, $x = \varphi(p)$, $y = \psi(q)$. Можно считать, что U и V выбраны так, что $F = f_{\varphi,\psi} : A \to C$.
- Т.к. x – регулярная точка F, то $rankF = k$. Тогда будем считать, что матрица d_xF, образованная из первых k строк и столбцов, имеет ненулевой определитель.

допущение для упр док.
Упр: док-то в общем случае

Прообраз регулярного значения

Продолжаем док-во теоремы:

- Рассмотрим отображение

V

$$G\colon A \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{\cancel{n-k}}, \qquad \boxed{G(a,b) = (F(a,b), b).}$$

Тогда определитель $k \times k$ в левом верхнем углу матрицы $d_x G$ отличен от нуля, поэтому $rank_x G = n$.

$$d_x G = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad V \qquad \det A \neq 0.$$

- По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $E(x) \in A$ и $W(G(x)) \in \mathbb{R}^n$, что $G|_{E(x)}\colon E(x) \to W(G(x))$ —диффеоморфизм.

- По построению, $F \circ \varphi$ — выпрямляющая карта в точке p. $\square$

$G \circ \varphi$