$\boxed{\text{Теорема Б-А.}}$

Пусть V — окр-ть нуля в топ. векторном X,

$$K = V^{\circ} = \{F \in X^* : |F(x)| \le 1, x \in V\}$$

Тогда K — слабо-* компактно.

Доказательство • Для произвольного элемента $x \in X$ $\exists\, t_x : x \in t_x V$, т.е.

$$|F(x)| \le t_x, \; x \in X, \; F \in K.$$

$\mathcal{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

• Рассмотрим диск $\{|\lambda| \le t_x\} := D_x \subset \mathcal{F}$

рассмотрим декартово произведение

$$P := \prod_{x \in X} D_x,$$ и топологию произведения в нём.

слабая-* в X^*

$\{|F(x)| < \varepsilon$, для $x \in A\}$ — конечное множество

• Что такое элемент P? Это функции $f: X \to \mathcal{F}$, такие что

$$|f(x)| \le t_x, \; x \in X.$$

$$\underbrace{K \subset X^* \cap P.}$$

(i) τ — топология декартова произведения, наследованная из P

(ii) w^*

• (i) = (ii); K - τ-замкнуто.

Эквивалентность топологий. Пусть $F_0 \in K$, зафиксируем $x_1, \dots, x_n \in X$, $\delta > 0$

(a) $W_1 := \{F \in X^* : |F(x_j) - F_0(x_j)| < \delta, \; j = 1..n\}$ → н. база в X^* по w^*.

(б) $W_2 := \{f \in P : |f(x_j) - F_0(x_j)| < \delta, \; j = 1..n\}$

↳ н. база в P по τ окр-ей F_0.

$$W_1 \cap K = W_2 \cap K.$$

Замкнутость K в τ. Пусть $f_0 \in \operatorname{clos}_\tau K$. Зафиксируем $x, y \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$.

$$\{f \in P : |f - f_0| < \varepsilon \text{ на } x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y\} \ni$$ хотя бы одно $f \in K$.

$$f_0(\lambda_1 x + \lambda_2 y) - \lambda_1 f_0(x) - \lambda_2 f_0(y) = \underline{(f_0 - f)}\,\underbrace{(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} +$$
$$+ \underline{\lambda_1 (f - f_0)}\,(x) \; \underline{+ \lambda_2 (f - f_0)}\,(y)$$

$$|f_0(\lambda_1 x+\lambda_2 y) - \lambda_1 f_0(x) - \lambda_2 f_0(y)| < (1+|\lambda_1|+|\lambda_2|)\cdot\varepsilon$$

ε - произвольное, λ_1, λ_2 - тоже $\Rightarrow$ f_0 - линейный функционал.

Если $x \in V$, $\varepsilon > 0$, достаточно $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$, кроме того $|f(x)| \leq 1$.

$$\Downarrow$$

$$|f_0(x)| \leq 1.$$

Следовательно $f_0 \in K$. ⊠

<u>Следствие.</u> Если X - сепарабельное т. в. пространство, K - $w*$-компакт в X^*, то K метризуемо.

<u>Доказательство.</u> $\{x_n\}$ - сч. всюду плотное в X, для $F \in X^*$ положим $f_n(F) := F(x_n)$. Все f_n $w*$-непрерывны на X^*. Если $f_n(F) = f_n(F')$ для каких-то F, F' и $\forall n$, то $F(x_n) = F'(x_n)\ \forall n$, но тогда $F = F'$ - т.к. $\{x_n\}$ - плотно в X.

f_n - счётное семейство функций, непр. на X^*, разделяющее точки.

$$\rho(F,G) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f_k(G) - f_k(F)|.$$ ⊠

<u>Теорема.</u> Для локально выпуклого пространства X ограниченность совпадает со слабой ограниченностью.

E - огр. $\Leftrightarrow$ $\forall V$-окр-ть нуля $\exists t_0 \in \mathbb{R}$: $E \subset \lambda V$ $\forall |\lambda| \geq t_0$.

E - слабо огр. $\Leftrightarrow$ $\forall F \in X^*$ $|F(x)| \leq const$, $x \in E$.

<u>Теорема.</u> Пусть $E \subset X$, <u>X - лок. выпуклое</u>. Тогда $\mathrm{clos}_w E = \mathrm{clos}\, E$.

$$\underbrace{\{x: |F_k(x)| < \varepsilon,\ k = 1..n\}}_{\cap\, X}.$$

<u>Теорема о биполяре.</u> X - лок. выпуклое, $E \subset X$ - <u>уравновешенное</u>. Тогда $E^{\circ\circ} = \mathrm{clos}(\mathrm{conv}\, E)$.

$E^{\circ} = \{F \in X^*: |F(x)| \leq 1\ \forall x \in E\}$, $E^{\circ\circ} = \{x \in X: |F(x)| \leq 1\ \forall F \in E^{\circ}\}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $x_0 \notin \operatorname{clos} E$. По одному из следствий Х–Б (об отделимости выпуклых множеств) применяем к $\operatorname{clos} E$ и $\{x_0\}$,

$$\exists F \in X^*, t \in \mathbb{R} : \forall x \in \operatorname{clos} E : \quad \operatorname{Re} F(x_0) < t < \operatorname{Re} F(x).$$

Рассмотрим тогда $\{x \in X : \operatorname{Re} F(x) < t\} \ni x_0$

↳ слабо открытое множество | слабо открытая окрестность, $\not\subset \operatorname{clos} E$.

Стало быть $x_0 \notin \operatorname{clos}_w E$. ∎

Теорема Крейна–Мильмана

Определение. Пусть X — линейное векторное, $K \subset X$. Множество $S \subset K$ называется крайним, если

$$tx + (1-t)y \in S,\ x, y \in K \Rightarrow x, y \in S.$$

Точка x_0 называется крайней, если $\{x_0\}$ — крайнее множество.

Теорема (Крейн–Мильман) Пусть X — топологическое векторное пространство, X^* разделяет точки. Пусть K — компактное выпуклое подмножество X. Тогда

$$K = \operatorname{clos} \operatorname{conv} \{\text{крайние точки } K\}.$$

Доказательство. Пусть семейство $\mathcal{P}$ — совокупность всех крайних компактных $S \subset K$.

- $\mathcal{P} \neq \varnothing$.
- $\{S_\alpha\} \subset \mathcal{P}$, $\bigcap_\alpha S_\alpha \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap_\alpha S_\alpha \in \mathcal{P}$.
- $S \in \mathcal{P}$, $F \in X^*$, $t_F = \max\limits_{x \in S} \operatorname{Re} F(x)$, пусть $S_F = \{x \in S : \operatorname{Re} F(x) = t_F\}$

$$\Downarrow$$

$$S_F \in \mathcal{P}.$$

Пусть $x, y \in K$, а точка $\boxed{z = tx + (1-t)y \in S_F}$.

Из условия $x, y \in S \Rightarrow \operatorname{Re} F(x) \le t_F$, $\operatorname{Re} F(y) \le t_F$ | (!) $\operatorname{Re} F(z) = t_F \Rightarrow \operatorname{Re} F(x) = \operatorname{Re} F(y) = t_F$.

$\Rightarrow x, y \in S_F$.

Зафиксируем какое-нибудь $S \in \mathcal{P}$, положим

$$\mathcal{P}' = \{E \subset S : E \in \mathcal{P}\}. \quad S \in \mathcal{P}' \Rightarrow \mathcal{P}' \neq \varnothing.$$

Заведём на $\mathcal{P}'$ порядок по включению.

Пусть Ω — максимальное линейно упорядоченное семейство в $\mathcal{P}$!

Рассмотрим $M = \bigcap\limits_{E\in\Omega} E$. Ясно было $M\neq\emptyset \Rightarrow M\in\mathcal{P}$!

Пусть $M'\subset M$. Если $\underline{M'\in\mathcal{P}} \Rightarrow \underline{M'=M} \Rightarrow F\in X^*$ — тожд. константа на M. Пусть не так, т.е. $\exists$ непостоянный F на M, рассм. $M_F\neq\emptyset$, $\underset{\text{строго}}{\subset} M$.

$\underline{M_F\in\mathcal{P}.}$

Ясно было любой F из X^* постоянен на M.

По разделению точек $M=\{x_0\}$ — крайняя точка

Итого: любое крайнее (компактное) S содержит крайнюю точку.

Следовательно $H=\operatorname{conv}(\text{крайние точки } K)$ и для $\forall S\in\mathcal{P}$ $H\cap S\neq\emptyset$.

Далее, K — компакт, так что $\operatorname{clos} H\subset K$, $\operatorname{clos} H$ — компактно.

Пусть $x_0\in K$,
$x_0\notin\operatorname{clos} H$.

Claim. Найдётся такой функционал $F\in X^*$, что $\operatorname{Re}F(x)<\operatorname{Re}F(x_0)$ $\forall x_0\in\operatorname{Clos} H$. Следовательно $K_F\cap\operatorname{clos}H=\emptyset$

$$K_F = \{x\in K: \operatorname{Re}F(x)=\max_{x\in K}\operatorname{Re}F(x)\}.$$

Наконец, $K_F\in\mathcal{P}$, противоречие.

Claim следует из

Утверждение. Пусть X — топологическое векторное, X^* разд. точки, A, B — выпуклые компакты, $A\cap B=\emptyset$. Тогда $\exists\, F\in X^*$:

$$\sup_{x\in A}\operatorname{Re}F(x) < \inf_{x\in B}\operatorname{Re}F(x).$$

Доказательство. A, B компакты в $X_w=(X,w)$ $\Rightarrow$ они замкнуты в слабой топологии.

↳ локально выпуклое

$F\in(X_w)^*$ — удовл. условию $\Rightarrow F\in X^*$. ∎

$\boxed{\text{Применение К-М.}}$

$C(S)$ — непрерывные функции $S \to \mathbb{C}$, S — комп. Хаусдорфово

$A \subset C(S)$: $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$.

E — множество антисимметрии для A, если $\forall f \in A$, f — вещественнозначная $\Rightarrow f\big|_E \equiv \mathrm{const}$.

Пример: S — компакт в $\mathbb{C}$, $A = \mathrm{Hol}(\mathrm{Int}\, S')$, тогда множества антисимметрии — вкл. компоненты связности $\mathrm{Int}\, S'$.

Теорема (Бишоп) Пусть A — замкнутая подалгебра в $C(S)$, содержащая константы. Если $g \in C(S)$ и $g\big|_E \in A\big|_E$ для каждого максимального множества антисимметрии E, то $g \in A$. Т.е. если $\forall E \uparrow\ \exists \varphi \in A$: $\varphi \equiv g$ на E $\Rightarrow g \in A$.

$$\|f\|_{C(S)} = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Следствие (Стоун — Вейерштрасс)

Пусть A — замкнутая подалгебра в $C(S)$, сод. константы, разделяющая точки. Если A симметрична ($f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$), то $A = C(S)$.

Вывод следствия. Симметричность $\Rightarrow$ вещ. функции разделяют точки $\Rightarrow$ множества антисимметрии одноточечные $\Rightarrow$ произвольная непрерывная $g \in C(S)$ удовлетворяет условию теоремы Бишопа $\Rightarrow g \in A \Rightarrow A = C(S)$. ∎

Доказательство. Используется: теорема Рисса — Маркова — Какутани про $(C(S))^*$.

$(C(S))^*$ — радоновские меры на S, комплекснозначные.

$\hookrightarrow$ борелевские
регулярные
конечная на комп.

$f \in C(S)$ $\quad F_\mu : f \longmapsto \int_S f \, d\mu \in \mathbb{C}$.

Доказательство

Рассмотрим аннулятор A: $A^\perp = \{ F \in (C(S))^* : F(f) = 0\ \forall f \in A \}$.

$\quad \Vert$ Р-М-К

$\{ \mu$ — регулярные, борелевские, конечные на S': $\int f \, d\mu = 0 \ \forall f \in A \}$.

• Рассмотрим $\underbrace{K = \{\mu \in A^{\perp} : \|\mu\| \le 1\}}$,

полная вариация.

$\mu = \operatorname{Re}\mu + i \operatorname{Im}\mu$

ν-вещ. $\nu_+(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A\}$

$\nu_-(A) = \inf\{\nu(B) : B \subseteq A\}$.

$|\mu| = \operatorname{Re}\mu_+ + \operatorname{Re}\mu_- + (\operatorname{Im}\mu)_+ - (\operatorname{Im}\mu)_-$

$\|\mu\| = |\mu|(S)$.

• K — выпуклое, уравновешенное, слабо-* компактное.

• $K = \{0\}$, то $A^{\perp} = \{0\}$, а тогда $A = C(S)$.

• Считаем, что $K \ne \{0\}$, рассмотрим крайнюю точку K, обозначим её через μ. Проверим, что $\|\mu\| = 1$. Положим $\operatorname{supp}\mu := E$.

Рассмотрим функцию $f \in A$, такую что $0 < f < 1$ на $\forall x \in E$.

$d\sigma := f\,d\mu$

$d\tau := (1-f)\,d\mu$.

$\sigma, \tau \in A^{\perp}$. Тогда $\|\sigma\|, \|\tau\| > 0$.

$\sigma(E) := \int_E f\,d\mu$.

- $\|\sigma\| + \|\tau\| = 1$.

$$\int_S f\,d|\mu| + \int_S (1-f)\,d|\mu| = \|\mu\| = 1.$$

Стало быть, μ есть выпуклая комбинация мер $\sigma_1 = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$, $\tau_1 = \frac{\tau}{\|\sigma\|}$

μ — крайняя точка, стало быть либо $\mu = \begin{cases}\sigma_1 \\ \tau_1\end{cases}$.

Пусть, например, $\sigma_1 = \mu$. Стало быть $f\,d\mu = \|\sigma\|\,d\mu \Rightarrow f \equiv \underset{\|\sigma\|}{\overset{\|}{const}}$

Действ.: Функция f непрерывна, $\{x \in E : f(x) = \|\sigma\|\}$ — компакт,

$|\mu|(\{\ \}) = \|\mu\|$, а E — наименьшее $\Rightarrow$

$= E$"

$A \supset \{const\}$, стало быть: для любой μ — крайней точки K её носитель есть множество антисимметричное относительно A.

f — вещ. функция из A. $f = f_+ - f_-$, $f_+ \geq 0$, $f_- \geq 0$.

НУО f лежит между 0 и 1. Пусть теперь g удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\int g\, d\mu = 0$ $\forall$ крайней точки μ аннуляторного шара K, μ аннулирует A

$$\int f\, d\mu = \int_{\operatorname{supp}\mu} f\, d\mu.$$

Итак, любое такое g из условие аннулируется крайними точками множества K.

Если g аннулируется крайними точками $K \Rightarrow$

$\Rightarrow$ g аннулирует $\operatorname{conv}\{$крайних точек $K\}$.

Теперь проверим, что g аннулирует $\operatorname{clos}\operatorname{conv}\{$кр. точек$\}$.

Рассмотрим отображение $G[\mu]: \mu \mapsto \int g\, d\mu$.

G — w^* непрерывно на K, стало быть если

$\int g\, d\mu = 0$ $\forall \mu \in \operatorname{conv}\{$кр. точек$\} \Rightarrow \forall \mu \in \operatorname{clos}\operatorname{conv}\{$кр. точек $K\}$.

$\Downarrow$

K-M, значит $\int_S g\, d\mu = 0$ $\forall \mu \in K \Rightarrow \forall \mu \in A^\perp$.

$\Downarrow$

$g \in A$ по Х.-Б. $\blacksquare$

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \operatorname{Hol}(\mathbb{D}),\ \left(\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta \right)^{1/2} < \infty \right\} = \left\{ f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k : \left(\sum |a_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

$$\begin{array}{c|ccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & b_0 & b_1 & b_2 \dots \end{array}$$

K_θ : $S: K_\theta \hookrightarrow K_\theta$. $\quad H^2 \ominus \theta H^2$

Доказательство. Пусть E – слабо ограничено $\xrightarrow{\text{хотим}}$ ограниченность.

U – окрестность нуля. $\exists$ ~~уравновешенная~~ выпуклая окрестность нуля V: $\overline{V} \subset U$. Рассмотрим $K = V^\circ$,

$$K = \{F \in X^* : |F(x)| \le 1,\ x \in V\}.$$

Claim: $\operatorname{clos} V = \{x \in X : |F(x)| \le 1 \ \forall F \in K\}$.

- $\forall F \in X^* \ \exists t_F < \infty : \ \forall x \in E \quad |F(x)| \le t_F$. (52)

K – выпукло, слабо $*$ компактно, отображение $\underbrace{x(F) : F \longmapsto F(x)}$ слабо-$*$ непрерывно.

(52) + "некоторая версия теоремы Б-Штейнгауза" влечёт

$\exists t < +\infty$, такое что $|F(x)| \le t$, $x \in E$, $F \in K$.

Теорема (Банах-Штейнгауз, v.2) Пусть X, Y – топологические векторные, K – выпуклый компакт в X, Γ – некоторое подмножество $\mathcal{L}(X, Y)$, такое что

$$\Gamma(x) := \{F(x) : F \in \Gamma\} \text{ – ограничено.}$$

Тогда найдётся такое ограниченное $B \subset Y$, что $F(K) \subset B \ \forall F \in \Gamma$.

$X = X^*$ $\qquad \Gamma = \{f_x : X^* \to \mathbb{C},$

$Y = \mathbb{C}$ $\qquad f_x(F) = F(x),\ x \in E\}$.

$\exists t : \ \forall x \in E,\ \forall F \in K \quad |F(x)| \le t$.

Claim (Биполяры) $\operatorname{clos} V = \{x \in X : |F(x)| \le 1 \ \forall F \in K\}$

$x \in E \Rightarrow \quad \frac{1}{t} \cdot x \in \operatorname{clos} V \subset U$ ☒

РУДИН глава 3, теорема 3.12, 3.15,

3.18 (и контр)
3.19, 3.20
5.7.