

Breaking the Sorting Barrier for Directed Single-Source Shortest Paths

Ein Blick über die wissenschaftliche Arbeit

B. Tascan, B. Durie, S. Lackner

FB Informatik
Universität Salzburg

January 16, 2026



Verzeichnis





SSSP Algorithmen

- Single-Source Shortest Path Algorithmen (SSSP's)



SSSP Algorithmen

- Single-Source Shortest Path Algorithmen (SSSP's)
 - Input: ein Graph G und ein Startknoten s
 - Output: Der kürzeste Pfad von s nach alle anderen Knoten



SSSP Algorithmen

- Single-Source Shortest Path Algorithmen (SSSP's)
 - Input: ein Graph G und ein Startknoten s
 - Output: Der kürzeste Pfad von s nach alle anderen Knoten
- Verwendet meistens für:
 - GPS-Navigation
 - Network Routing
 - Video-Spiele



SSSP Algorithmen

- Single-Source Shortest Path Algorithmen (SSSP's)
 - Input: ein Graph G und ein Startknoten s
 - Output: Der kürzeste Pfad von s nach alle anderen Knoten
- Verwendet meistens für:
 - GPS-Navigation
 - Network Routing
 - Video-Spiele
- Es gibt zwei SSSP Algorithmen, die uns interessieren:
 - Dijkstra's Algorithmus,
 - Bellman-Ford's Algorithmus



kleiner Exkurs

- Greedy Algorithmen:
Algorithmen, die in jedem Schritt die lokalbeste Entscheidung treffen.



kleiner Exkurs

- Greedy Algorithmen:
Algorithmen, die in jedem Schritt die lokalbeste Entscheidung treffen.
- Frontier:
Die Menge bereits abgeschlossener Knoten, durch die jeder noch nicht gefundene kürzeste Pfad zwingend hindurchführen muss.



kleiner Exkurs

- Greedy Algorithmen:
Algorithmen, die in jedem Schritt die lokalbeste Entscheidung treffen.
- Frontier:
Die Menge bereits abgeschlossener Knoten, durch die jeder noch nicht gefundene kürzeste Pfad zwingend hindurchführen muss.
- Ein Knoten relaxieren:
Alle Kanten von einem Knoten checken und die Distanzen verbessern, falls ein kürzerer Pfad entstanden ist.



Dijkstra

- Von Edsger W. Dijkstra im Jahr 1959 publiziert.



Dijkstra

- Von Edsger W. Dijkstra im Jahr 1959 publiziert.
- 66 Jahre lang der asymptotisch schnellste Algorithmus



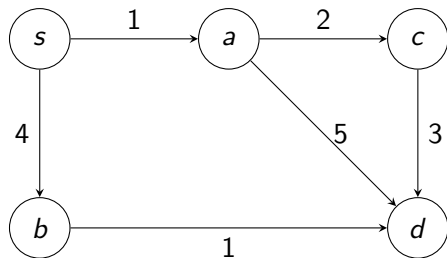
Dijkstra

- Von Edsger W. Dijkstra im Jahr 1959 publiziert.
- 66 Jahre lang der asymptotisch schnellste Algorithmus
- Dijkstra's ist ein *Greedy Algorithmus*.



Dijkstra

- min-Prioritätswarteschlange zur Auswahl des nächsten Knotens
- $\mathcal{O}(m + n \log n)$
-



Bellman-Ford

- Unabhängig von Bellman (1958) und Ford (1956) entwickelt



Bellman-Ford

- Unabhängig von Bellman (1958) und Ford (1956) entwickelt
- Klassischer SSSP-Algorithmus für gerichtete Graphen



Bellman-Ford

- Unabhängig von Bellman (1958) und Ford (1956) entwickelt
- Klassischer SSSP-Algorithmus für gerichtete Graphen
- Funktioniert mit *negativen Kantengewichten*



Bellman-Ford

- Unabhängig von Bellman (1958) und Ford (1956) entwickelt
- Klassischer SSSP-Algorithmus für gerichtete Graphen
- Funktioniert mit *negativen Kantengewichten*
- Kein Greedy-Algorithmus



Bellman-Ford

- Initialisiere Distanzen



Bellman-Ford

- Initialisiere Distanzen
- Wiederhole $n - 1$ Mal:



Bellman-Ford

- Initialisiere Distanzen
- Wiederhole $n - 1$ Mal:
 - Relaxiere **alle Kanten**



Bellman-Ford

- Initialisiere Distanzen
- Wiederhole $n - 1$ Mal:
 - Relaxiere **alle Kanten**
- Optional: zusätzliche Runde erkennt negative Zyklen



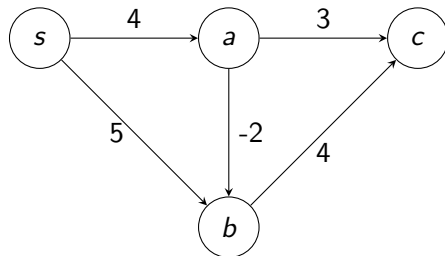
Bellman-Ford

- Initialisiere Distanzen
- Wiederhole $n - 1$ Mal:
 - Relaxiere **alle Kanten**
- Optional: zusätzliche Runde erkennt negative Zyklen
- Jede Iteration erweitert bekannte kürzeste Pfade um genau eine Kante



Bellman-Ford

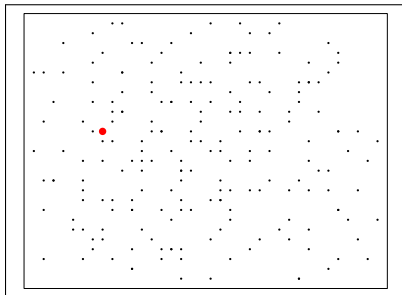
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot m)$
- Deutlich langsamer als Dijkstra
- Dafür sehr robust





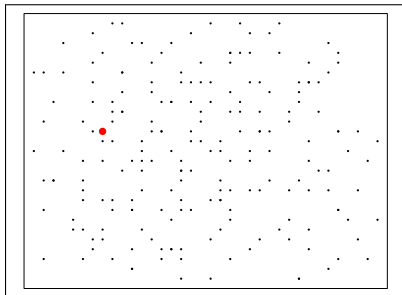
Der Algorithmus - Einleitung

- Dijkstra in $\mathcal{O}(m + n \log n)$



Der Algorithmus - Einleitung

- Dijkstra in $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Sortierbarriere $\Omega(n \log n)$



Der Algorithmus - Lösungsansatz

Sortierbarriere umgehen durch:

- **Eigene Datenstruktur**

Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung



Der Algorithmus - Lösungsansatz

Sortierbarriere umgehen durch:

- **Eigene Datenstruktur**

Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung

- **Pivoting**

Reduziert den Rechenaufwand



Der Algorithmus - Lösungsansatz

Sortierbarriere umgehen durch:

- **Eigene Datenstruktur**

Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung

- **Pivoting**

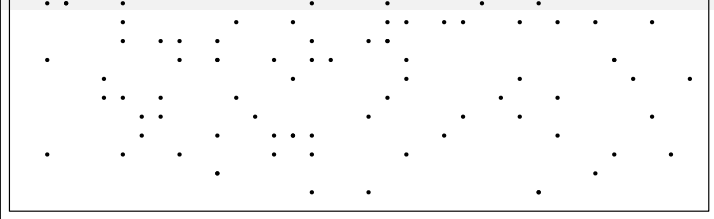
Reduziert den Rechenaufwand

- **Divide & Conquer**

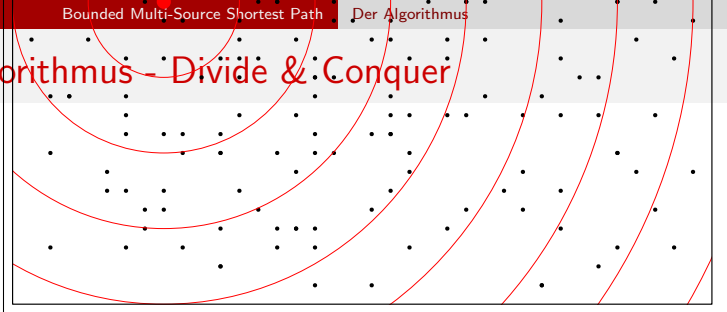
Mindert die Problemgröße durch Rekursion



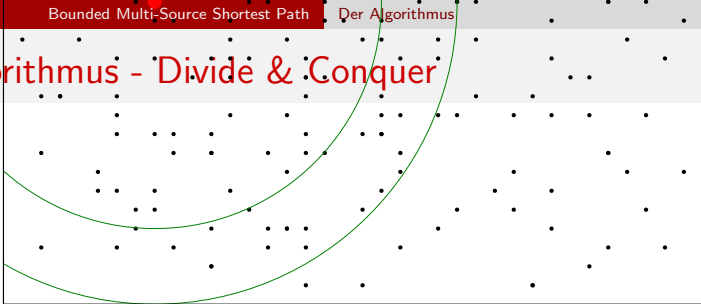
Der Algorithmus - Divide & Conquer



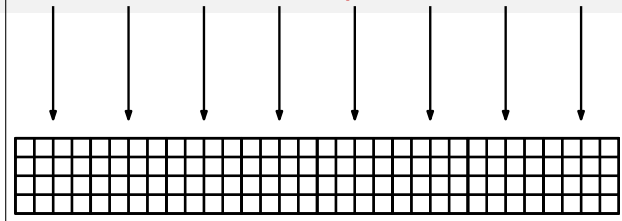
Der Algorithmus - Divide & Conquer



Der Algorithmus - Divide & Conquer



Der Algorithmus - Divide & Conquer



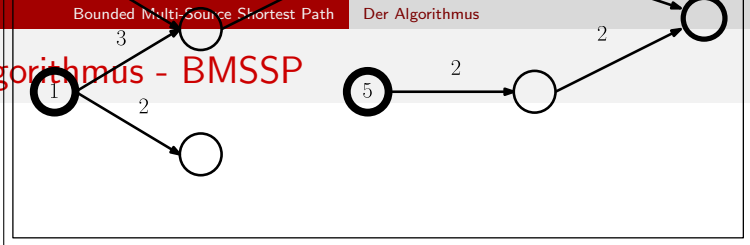
Der Algorithmus - Divide & Conquer

Wozu das ganze? ist notwendiges Hilfsmittel für:

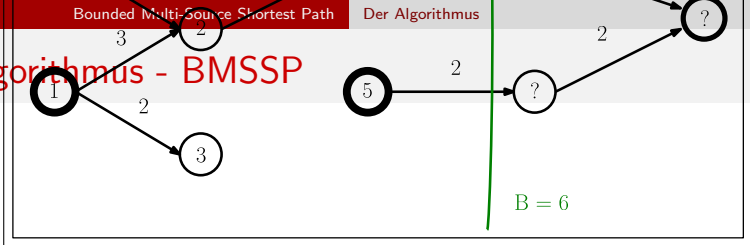
- **BMSSP**
funktioniert nur dank Abgrenzungen
- **Pivots**
erlaubt schnelle Auswahl von wichtigen Knoten



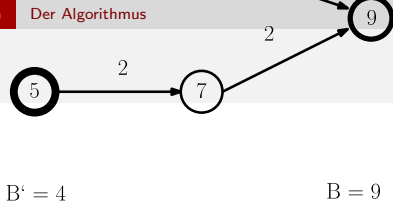
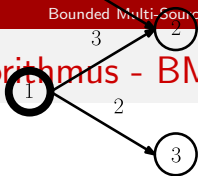
Der Algorithmus - BMSSP



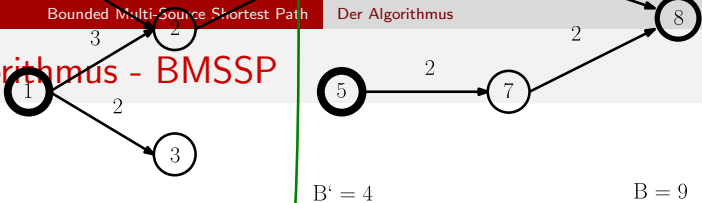
Der Algorithmus - BMSSP



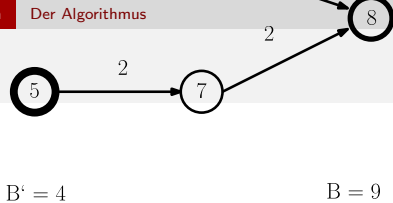
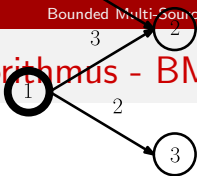
Der Algorithmus - BMSSP

 $B' = 4$ $B = 9$ 

Der Algorithmus - BMSSP



Der Algorithmus - BMSSP


 $B' = 4$
 $B = 9$


Der Algorithmus - BMSSP

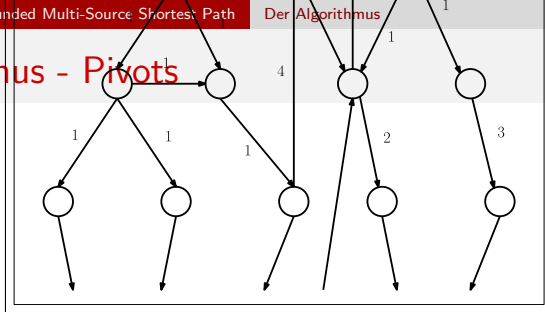
Wozu das ganze?

- **Sortierbarriere**

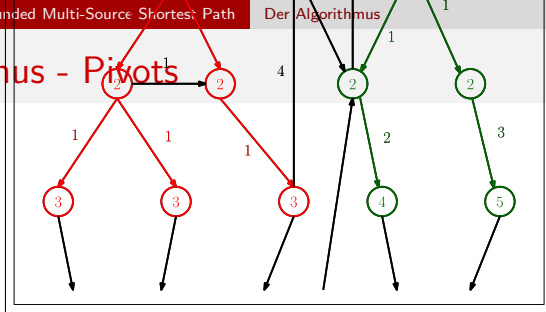
Ermöglicht Umgehung der $\Omega(n \log n)$ Schranke dank Bucketing



Der Algorithmus - Pivots



Der Algorithmus - Pivots



Multi-Source Shortest Path

Der Algorithmus

Red - Pivot

1

2

3

4

5

1

1

1

1

1

1

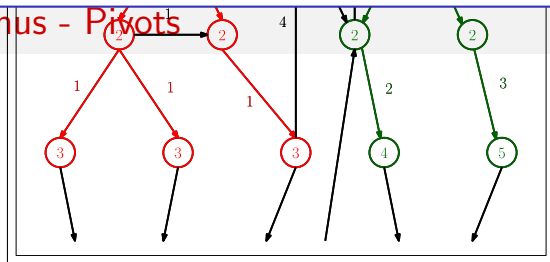
2

3

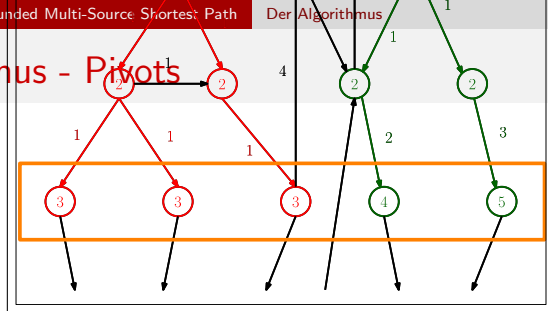


⇒ Maximal n/k Pivots

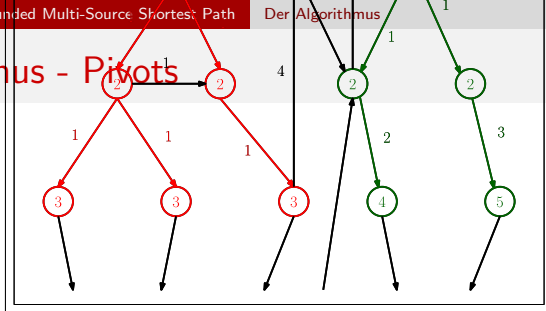
Der Algorithmus - Pivots



Der Algorithmus - Pivots

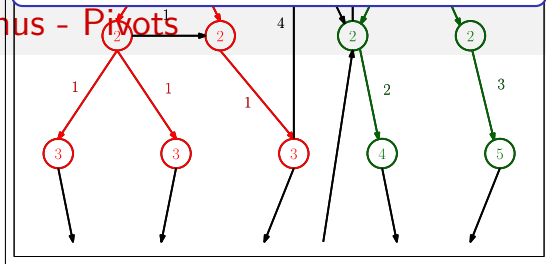


Der Algorithmus - Pivots



⇒ Nur Pivots werden weiterverfolgt

Der Algorithmus - Pivots



Der Algorithmus - Pivots

Wozu das ganze? Hauptgrund für Geschwindigkeit:

- **Kostenreduktion**

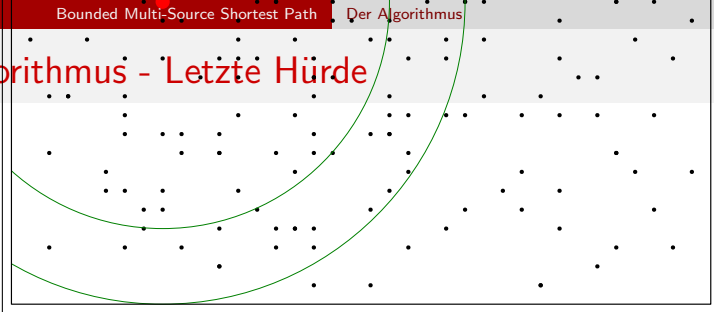
reduziert Aufwand durch gezielte Knotenwahl

- **Faktor**

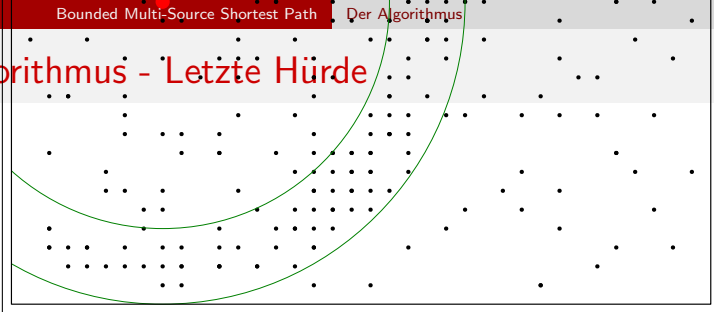
reduziert BMSSP Knotenanzahl um $\log^{1/3} n$



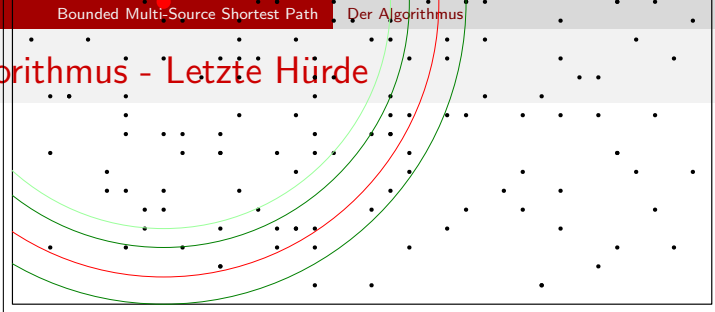
Der Algorithmus - Letzte Hürde



Der Algorithmus - Letzte Hürde



Der Algorithmus - Letzte Hürde





Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$



Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$
- Um diese Laufzeit zu verbessern, wird eine spezielle Datenstruktur benötigt



Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$
- Um diese Laufzeit zu verbessern, wird eine spezielle Datenstruktur benötigt
- Diese Struktur ist eine sogenannte Block-based linked List



Die Datenstruktur

- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1 , welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B



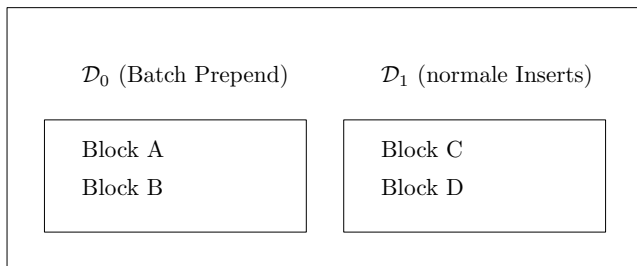
Die Datenstruktur

- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1 , welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B
- \mathcal{D}_0 enthält Batch Prepend Elemente, unbounded



Die Datenstruktur

- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1 , welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B
- \mathcal{D}_0 enthält Batch Prepend Elemente, unbounded
- \mathcal{D}_1 enthält mit Insert eingefügte Elemente, bounded mit $O(\max\{1, N/M\})$



Die Datenstruktur

- Dijkstra Laufzeit $\mathcal{O}(m \log n)$



Die Datenstruktur

- Dijkstra Laufzeit $\mathcal{O}(m \log n)$
- Verbesserung mit spezieller Datenstruktur



Die Datenstruktur

- Dijkstra Laufzeit $\mathcal{O}(m \log n)$
- Verbesserung mit spezieller Datenstruktur
- Block-based Linked List



Die Datenstruktur

- Zwei Sequenzen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1



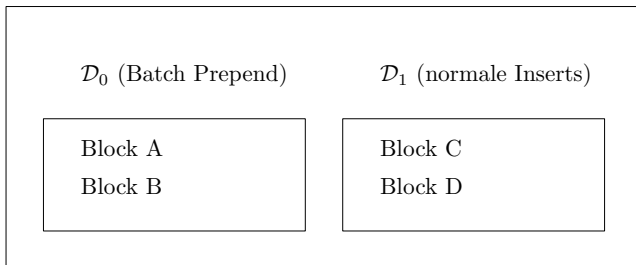
Die Datenstruktur

- Zwei Sequenzen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1
- Maximal M Key/Value Paaren



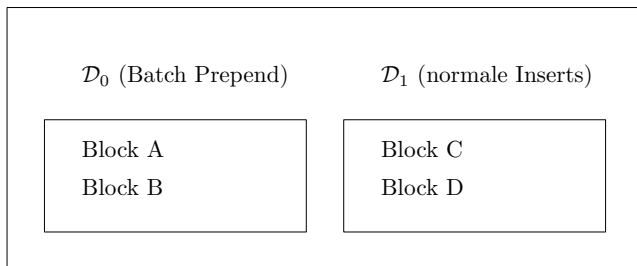
Die Datenstruktur

- Zwei Sequenzen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1
- Maximal M Key/Value Paaren
- Upperbound von B



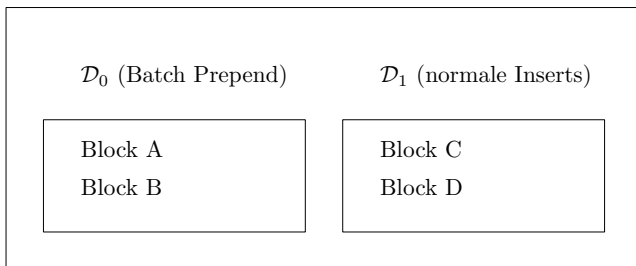
Die Datenstruktur

- Zwei Sequenzen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1
- Maximal M Key/Value Paaren
- Upperbound von B
- \mathcal{D}_0 enthält Batch Prepend Elemente, unbounded



Die Datenstruktur

- Zwei Sequenzen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1
- Maximal M Key/Value Paaren
- Upperbound von B
- \mathcal{D}_0 enthält Batch Prepend Elemente, unbounded
- \mathcal{D}_1 enthält mit Insert Elemente, bounded mit $O(\max\{N/M\})$



Die Datenstruktur

- Sequenzen sortiert nach Wert



Die Datenstruktur

- Sequenzen sortiert nach Wert
- Balancing mit Binären Suchbaum

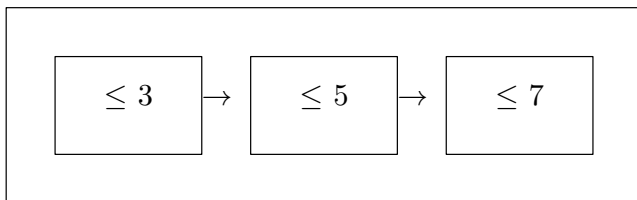
Block C (max = 6)

G(4), B(5), F(6)



Die Datenstruktur

- Sequenzen sortiert nach Wert
- Balancing mit Binären Suchbaum



Die Datenstruktur

- Insert



Die Datenstruktur

- Insert
- Batch Prepend



Die Datenstruktur

- Insert
- Batch Prepend
- Pull



Die Datenstruktur

- $\text{Insert}(a, b)$:



Die Datenstruktur

- $\text{Insert}(a, b)$:
- Mehrere gleiche Key/Value Paare, niedrigere Value bevorzugt



Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Mehrere gleiche Key/Value Paare, niedrigere Value bevorzugt
- Blocksuche mit Binär Baum



Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Mehrere gleiche Key/Value Paare, niedrigere Value bevorzugt
- Blocksuche mit Binär Baum
- Insert in Block in \mathcal{D}_1



Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Mehrere gleiche Key/Value Paare, niedrigere Value bevorzugt
- Blocksuche mit Binär Baum
- Insert in Block in \mathcal{D}_1
- Laufzeit $O(\max\{\log(N/M)\})$



Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):



Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare



Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare
- Insert, am Beginn von \mathcal{D}_0



Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare
- Insert, am Beginn von \mathcal{D}_0
- Laufzeit $O(L \cdot \max\{\log(L/M)\})$



Die Datenstruktur

- Pull:



Die Datenstruktur

- Pull:
- Menge S' an kleinsten Werten, Upper Bound x



Die Datenstruktur

- Pull:
- Menge S' an kleinsten Werten, Upper Bound x
- Sortierung in Gruppen, statt einer genauen Sortierung



Die Datenstruktur

- Pull:
- Menge S' an kleinsten Werten, Upper Bound x
- Sortierung in Gruppen, statt einer genauen Sortierung
- Laufzeit von Pull $O(|S'|)$





Ist der Algorithmus praktisch umsetzbar?



Benchmarking

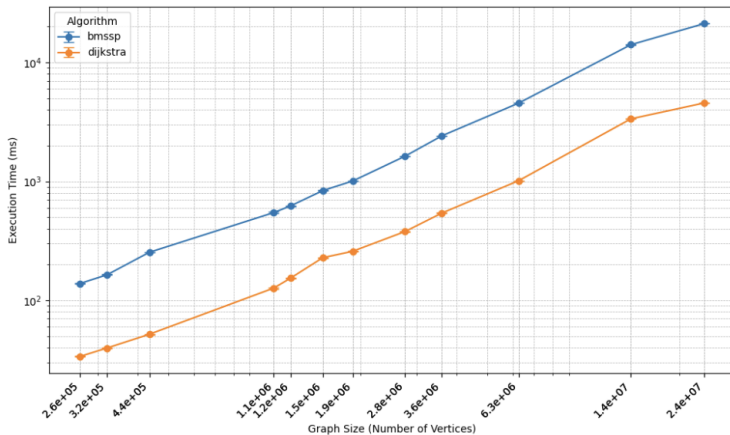


Figure 4 Execution time versus graph size for the USA road network instances, plotted on log-log scale.



Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!