Breaking the Sorting Barrier for Directed Single-Source Shortest Paths

B. Tascan, B. Durie, S. Lackner

FB Informatik
Universität Salzburg

January 15, 2026

Verzeichnis

1. Einführung
   - SSSP Algorithmen
     - Dijkstra
     - Bellman-Ford
2. Bounded Multi-Source Shortest Path
   - Der Algorithmus
   - Die Datenstruktur
   - Laufzeit
3. Literatur

-

-
-

-
-
- Datenstrukturen

1. Einführung
   - SSSP Algorithmen
     - Dijkstra
     - Bellman-Ford
2. Bounded Multi-Source Shortest Path
   - Der Algorithmus
   - Die Datenstruktur
   - Laufzeit
3. Literatur

SSSP Algorithmen

- Single-Source Shortest Path Algorithmen (SSSP's)

Dijkstra

Bellman-Ford

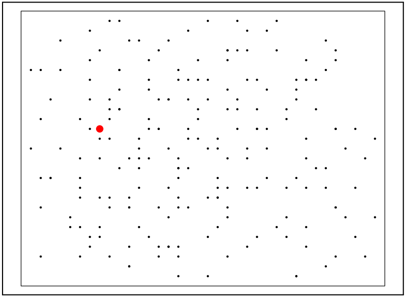
1 Einführung
- SSSP Algorithmen
  - Dijkstra
  - Bellman-Ford

2 Bounded Multi-Source Shortest Path
- Der Algorithmus
- Die Datenstruktur
- Laufzeit

3 Literatur

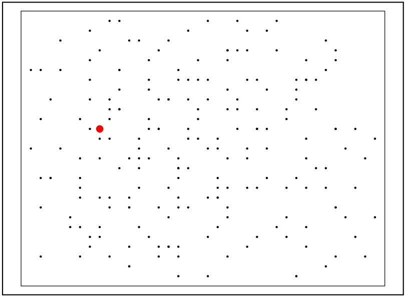
Der Algorithmus - Einleitung

- Dijkstra in $\mathcal{O}(m + n \log n)$



Der Algorithmus - Einleitung

- Dijkstra in $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Sortierbarriere $\Omega(n \log n)$



Der Algorithmus - Lösungsansatz

Sortierbarriere umgehen durch:

- **Eigene Datenstruktur**
  Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung

Der Algorithmus - Lösungsansatz

Sortierbarriere umgehen durch:

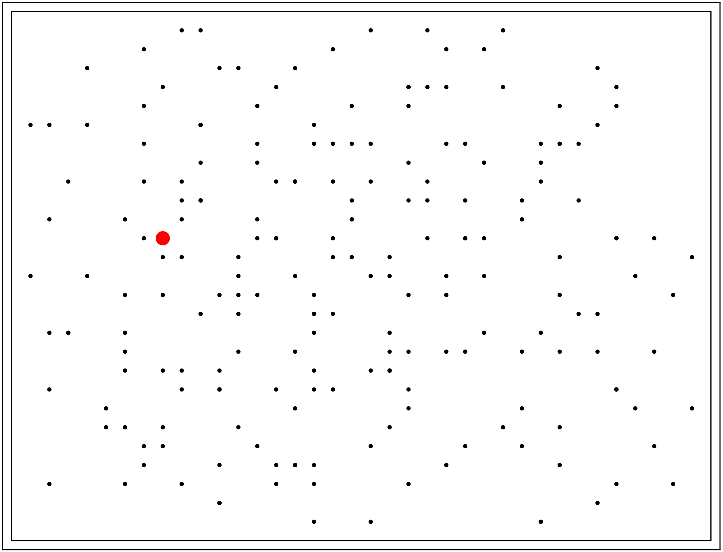
- **Eigene Datenstruktur**
  Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung
- **Pivoting**
  Reduziert den Rechenaufwand

Der Algorithmus - Lösungsansatz

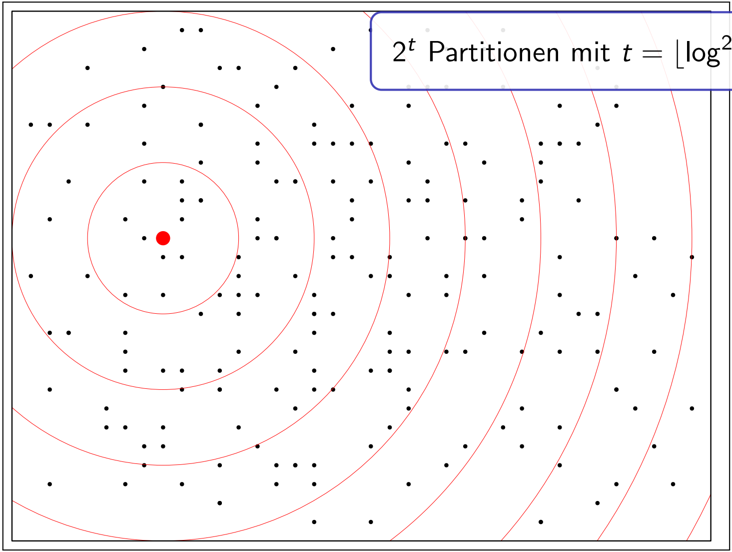
Sortierbarriere umgehen durch:

- **Eigene Datenstruktur**
  Ermöglicht effizientes *Bucketing*, verhindert Sortierung
- **Pivoting**
  Reduziert den Rechenaufwand
- **Divide & Conquer**
  Mindert die Problemgröße durch Rekursion

Der Algorithmus - Divide & Conquer

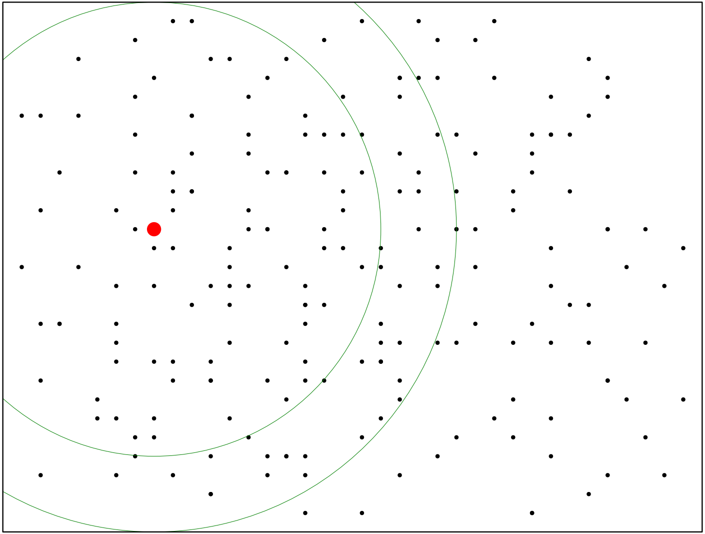


Der Algorithmus - Divide & Conquer

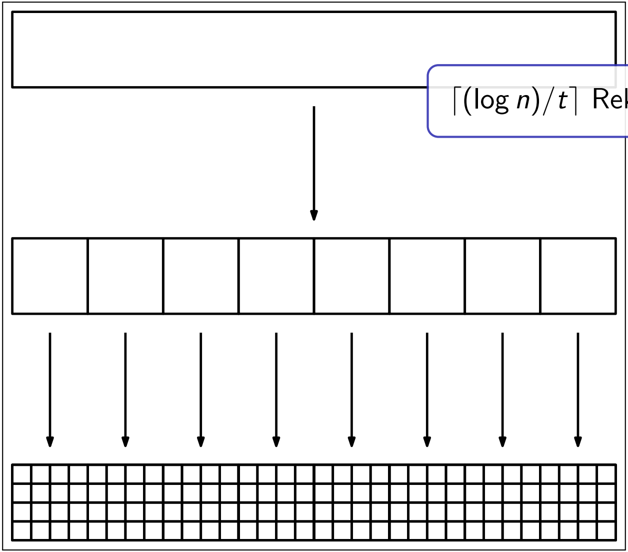


2^t Partitionen mit $t = \lfloor \log^{2/3} n \rfloor$

Der Algorithmus - Divide & Conquer



Der Algorithmus - Divide & Conquer



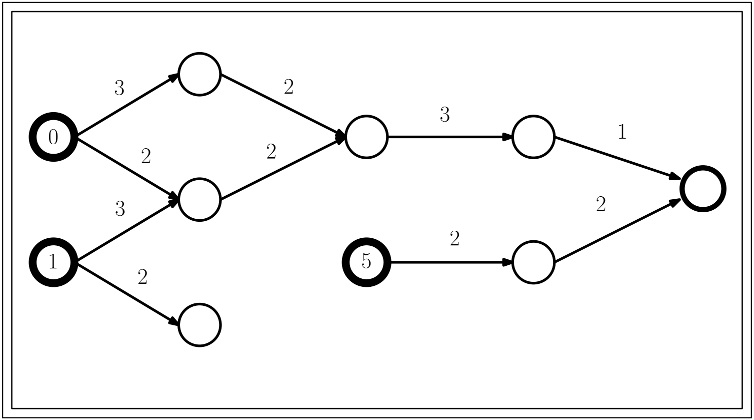
$\lceil (\log n)/t \rceil$ Rekursionen

Der Algorithmus - Divide & Conquer

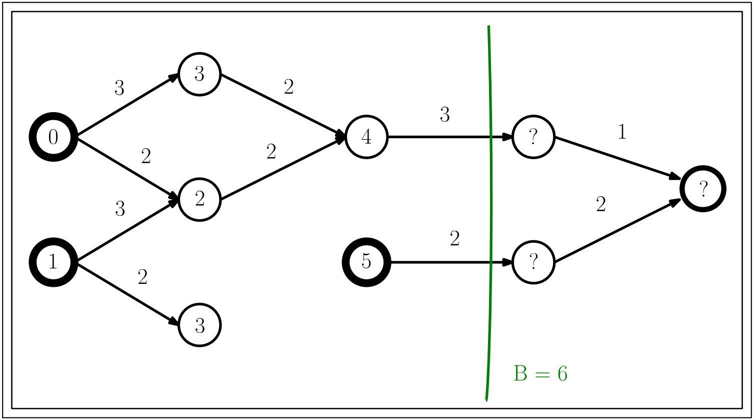
Wozu das ganze? ist notwendiges Hilfsmittel für:

- **BMSSP**
  funktioniert nur dank Abgrenzungen
- **Pivots**
  erlaubt schnelle Auswahl von wichtigen Knoten

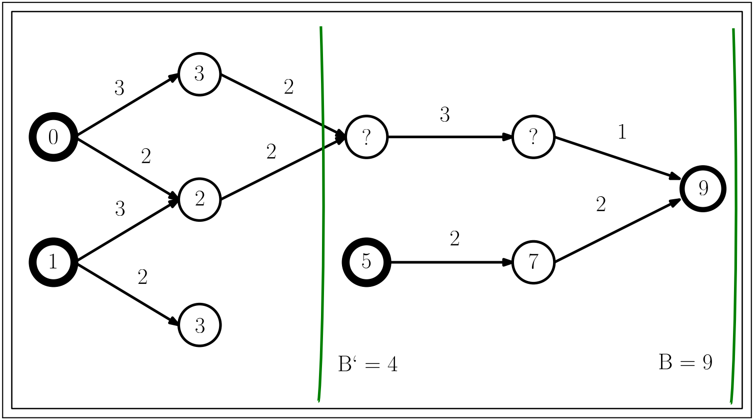
Der Algorithmus - BMSSP



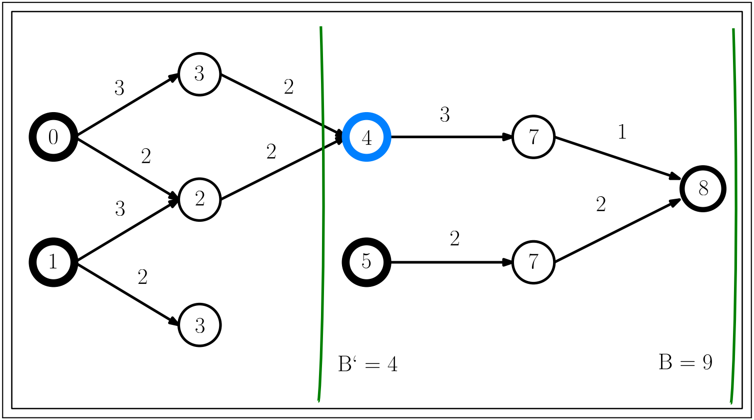
Der Algorithmus - BMSSP



Der Algorithmus - BMSSP

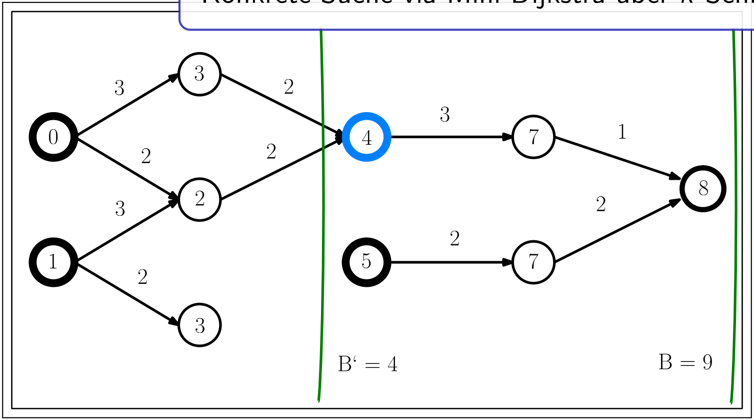


Der Algorithmus - BMSSP



Der Algorithmus - BMSSP

Konkrete Suche via Mini-Dijkstra über k-Schritte

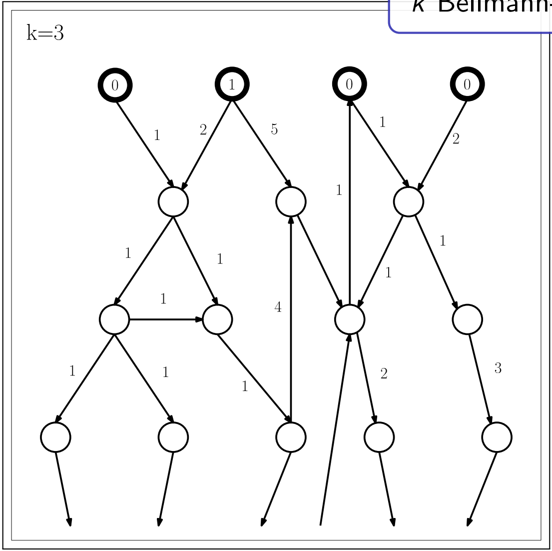


Der Algorithmus - BMSSP

Wozu das ganze?

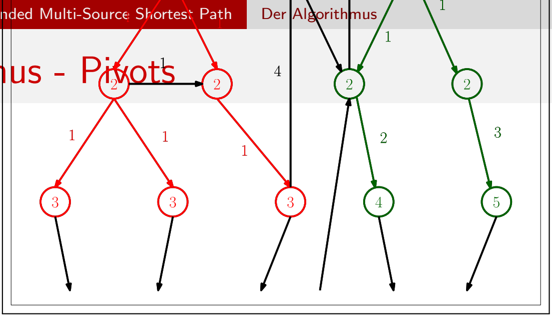
- **Sortierbarriere**
  Ermöglicht Umgehung der $\Omega(n \log n)$ Schranke dank Bucketing

Der Algorithmus - Pivots

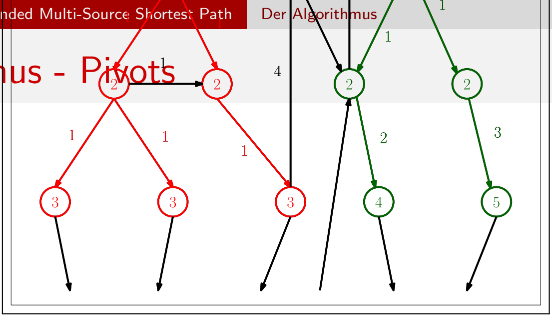


k Bellmann-Ford Schritte

Der Algorithmus - Pivots

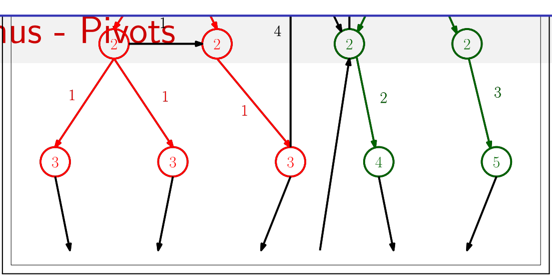


Der Algorithmus - Pivots

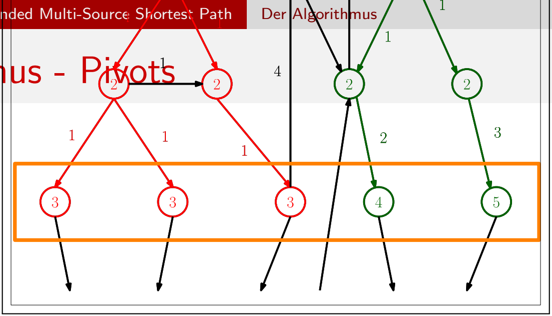


Der Algorithmus - Pivots

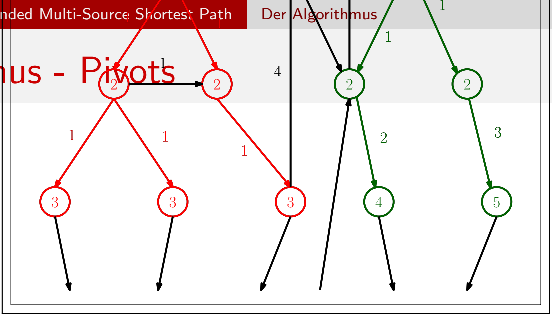
$\Rightarrow$ Maximal n/k Pivots



Der Algorithmus - Pivots

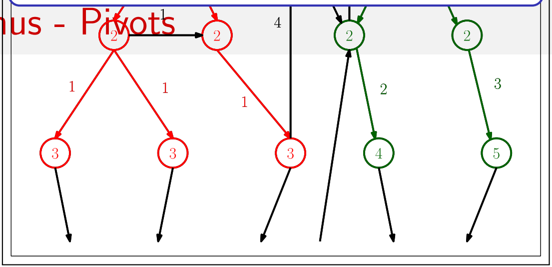


Der Algorithmus - Pivots



⇒ Nur Pivots werden weiterverfolgt

Der Algorithmus - Pivots

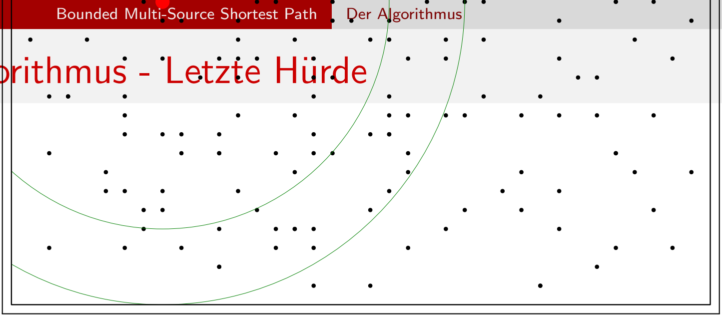


Der Algorithmus - Pivots

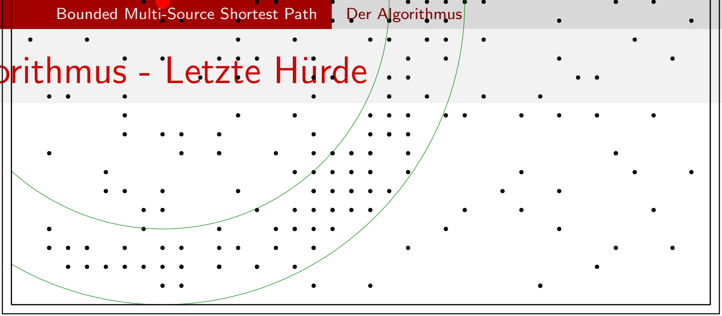
Wozu das ganze? Hauptgrund für Geschwindigkeit:

- **Kostenreduktion**
  reduziert Aufwand durch gezielte Knotenwahl
- **Faktor**
  reduziert BMSSP Knotenanazahl um $\log^{1/3} n$

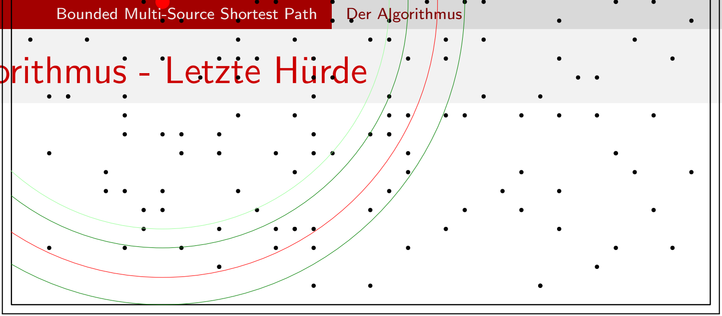
Der Algorithmus - Letzte Hürde



Der Algorithmus - Letzte Hürde



Der Algorithmus - Letzte Hürde



1. Einführung
   - SSSP Algorithmen
     - Dijkstra
     - Bellman-Ford
2. Bounded Multi-Source Shortest Path
   - Der Algorithmus
   - Die Datenstruktur
   - Laufzeit
3. Literatur

Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$

Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$
- Um diese Laufzeit zu verbessern, wird eine spezielle Datenstruktur benötigt

Die Datenstruktur

- Dijkstra hat eine asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$
- Um diese Laufzeit zu verbessern, wird eine spezielle Datenstruktur benötigt
- Diese Struktur ist eine sogenannte Block-based linked List

Die Datenstruktur

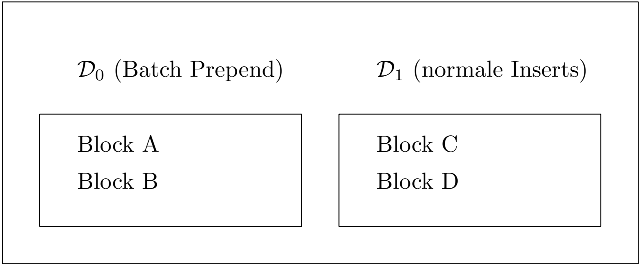
- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}_1$, welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B

Die Datenstruktur

- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}_1$, welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B
- $\mathcal{D}_0$ enthält Batch Prepend Elemente, unbounded

Die Datenstruktur

- Es gibt zwei Sequenzen an Blöcken, $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}_1$, welche beide Linked Lists sind mit maximal M Key/Value Paaren und einem Upperbound von B
- $\mathcal{D}_0$ enthält Batch Prepend Elemente, unbounded
- $\mathcal{D}_1$ enthält mit Insert eingefügte Elemente, bounded mit $O(\max\{1, N/M\})$



Die Datenstruktur

- Beide Sequenzen sind nach deren Werten sortiert, d.h. der Upperbound eines Blocks ist nie größer als alle Werte des darauffolgenden Blocks

Die Datenstruktur

- Beide Sequenzen sind nach deren Werten sortiert, d.h. der Upperbound eines Blocks ist nie größer als alle Werte des darauffolgenden Blocks
- Die Blöcke werden von einem binären Suchbaum gebalanced

Block C (max = 6)

G(4), B(5), F(6)

Die Datenstruktur

- Beide Sequenzen sind nach deren Werten sortiert, d.h. der Upperbound eines Blocks ist nie größer als alle Werte des darauffolgenden Blocks
- Die Blöcke werden von einem binären Suchbaum gebalanced

$$\boxed{\boxed{\leq 3} \rightarrow \boxed{\leq 5} \rightarrow \boxed{\leq 7}}$$

Die Datenstruktur

- Insert

Die Datenstruktur

- Insert
- Batch Prepend

Die Datenstruktur

- Insert
- Batch Prepend
- Pull

Die Datenstruktur

- Insert(a, b):

Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Sollten mehrere Key/Value Paare den selben Key haben, so wird das Paar mit dem kleineren Value bevorzugt

Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Sollten mehrere Key/Value Paare den selben Key haben, so wird das Paar mit dem kleineren Value bevorzugt
- Der entsprechende Block wird mithilfe des Binären Baums gesucht

Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Sollten mehrere Key/Value Paare den selben Key haben, so wird das Paar mit dem kleineren Value bevorzugt
- Der entsprechende Block wird mithilfe des Binären Baums gesucht
- Insert beim gefunden Block in$\mathcal{D}_1$

Die Datenstruktur

- Insert(a, b):
- Sollten mehrere Key/Value Paare den selben Key haben, so wird das Paar mit dem kleineren Value bevorzugt
- Der entsprechende Block wird mithilfe des Binären Baums gesucht
- Insert beim gefunden Block in$\mathcal{D}_1$
- Laufzeit von Insert $O(\max\{1, \log(N/M)\})$

Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):

Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare werden so eingetragen dass keine kleineren Werte vorhanden sind

Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare werden so eingetragen dass keine kleineren Werte vorhanden sind
- Insert ist immer am Beginn von $\mathcal{D}_0$

Die Datenstruktur

- Batch Prepend(L):
- L Key/value Paare werden so eingetragen dass keine kleineren Werte vorhanden sind
- Insert ist immer am Beginn von $\mathcal{D}_0$
- Laufzeit von Batch Prepend $O(L \cdot \max\{1, \log(L/M)\})$

Die Datenstruktur

- Pull:

Die Datenstruktur

- Pull:
- Pull gibt eine Menge S', mit einem Upper Bound x, an kleinsten Werten zurück

Die Datenstruktur

- Pull:
- Pull gibt eine Menge S', mit einem Upper Bound x, an kleinsten Werten zurück
- Das führt zu einer Sortierung in Gruppen statt einer genauen Sortierung der Werte

Die Datenstruktur

- Pull:
- Pull gibt eine Menge S', mit einem Upper Bound x, an kleinsten Werten zurück
- Das führt zu einer Sortierung in Gruppen statt einer genauen Sortierung der Werte
- Laufzeit von Pull $O(|S'|)$

1 Einführung
- SSSP Algorithmen
  - Dijkstra
  - Bellman-Ford

2 Bounded Multi-Source Shortest Path
- Der Algorithmus
- Die Datenstruktur
- Laufzeit

3 Literatur

Literatur