Bounding Eccentricities

Very Large Graphs

Abstract

Ce document est un résumé de nos recherches et du développement de l'algorithme Bounding Eccentricities introduit dans l'article de 2013 Computing the Eccentricity Distribution of Large Graphs de Frank W. Takes et Walter A. Kosters. Dans ce rapport, nous reprenons toutes les méthodologies de l'article original qui ont été appliquées lors de I' implémentation de l'algorithme Bounding Eccentricities, ainsi que tout autre concept externe provenant d'autres recherches sur le même sujet. Nous montrons également les résultats de diverses expériences en utilisant les mêmes mesures de performance que dans l'article original afin de simplifier la comparaison. En outre, nous montrons l'amélioration relative apportée par toutes les principales méthodologies introduites dans l'article par rapport aux versions précédentes, à savoir les stratégies de sélection et l'optimisation des graphes.

Théo Minary : theo.minary@epita.fr
Jose A. Henriquez Roa : jose.henriquez-roa@epita.fr

July 15, 2021

Contents

1 Introduction

L'excentricité d'un noeud dans un graphe est défini comme étant la longueur la plus grande des plus courts chemins entre ce noeud et le reste de ceux présents dans le graphe. La distribution excentrique de tous les noeuds donne une description pertinente des propriétés d'un graphe, nous avons donc implémenté la méthode dite "exacte" décrite dans le document publié par Frank W. Takes et Walter A. Kosters. Cette méthode se base sur les limites inférieures et supérieures des excentricités d'un graphe, afin de déterminer l'excentricité exacte de chaque noeud. Le but étant d'augmenter la vitesse de calcul comparée à un algorithme direct quand on calcule les limites de la distribution, ainsi que la distribution excentrique comme un tout.

2 Principe

2.1 Intro

Chaque calcul d'excentricité peut-être fait en utilisant l'algorithme de Dijkstra de complexité $O(m)$, si on calcule l'excentricité de chaque noeud d'un graphe avec cette méthode, sur un graphe de n noeuds et m arêtes on obtiendrait une complexité de $O(mn)$. Sur de très large graphe cette méthode prendrait bien trop de temps. Afin de réduire le temps de calcul on peut soit réduire la taille du graphe soit réduire le nombre d'excentricités calculées. La méthode consistant à utiliser les limites d'excentricités supérieures et inférieures permet de réduire le nombre d'excentricités calculées. De plus une stratégie de réduction de graphe sera expliquée et est utilisée afin de combiner les deux types de réduction de temps de calcul.

2.2 Méthode

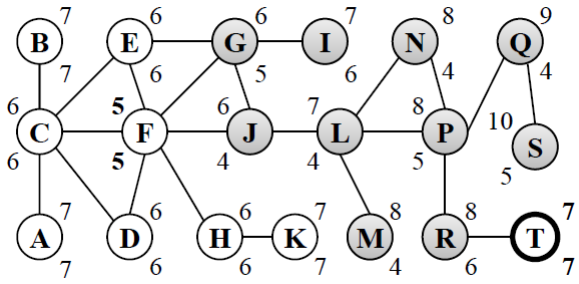
Lorsque l'excentricité d'un noeud v est calculée, les limites de l'excentricité de tous les noeuds w seront calculées selon cette formule :

$$\max(\varepsilon(v) - d(v,w), d(v,w)) \leq \varepsilon(w) \leq \varepsilon(v) + d(v,w). \tag{1}$$

La méthode consiste à sélectionner un noeud d'un set W de manière répétée qui au départ contient tous les noeuds du graphe et de calculer l'excentricité de ce noeud. Puis on met à jour les limites de tous les noeuds de W en utilisant l'équation (1). La valeur de $d(v,w)$ n'a pas à être recalculée car elle a été calculée pour tous les w durant le calcul d'excentricité. Ensuite on retire de W tous les noeuds dont l'excentricité est déjà connu, c'est à dire que ses limites sont égales, ce qui sera toujours le cas pour v. Enfin l'algorithme prend fin lorsque toutes les excentricités ont été calculées, c'est à dire qu'il n'y a plus de noeud dans W, on retourne alors un vecteur contenant toutes les excentricités de tous les noeuds du graphe.
Il existe divers méthodes de sélection du noeud v dans W, par exemple un bon choix pourrait être un noeud dont la différence entre ses deux limites d'excentricités seraient grandes, car en déterminer son excentricité pourrait réduire les limites de plusieurs autres noeuds proches. Nous utilisons la méthode consistant à inter-changer les limites d'excentricités. Pour trouver les noeuds avec une grande excentricité on sélectionne le noeud avec la plus grand limite supérieure et de la même manière le noeud avec la plus petite limite inférieure. Le but étant d'augmenter cette limite inférieure et diminuer la supérieure on inter-change donc le choix du noeud entre celui avec la plus grande limite supérieure et l'autre.

2.3 Optimisations

Afin d'optimiser l'algorithme, une stratégie visant à réduire le graphe avant peut-être appliquée. On peut observer la chose suivante :
En supposant $n > 2$ avec n la taille d'un graphe. Pour un $v \in V$ donné, tous les noeuds $w \in N(v)$ avec $deg(w) = 1$ ont $\varepsilon(w) = \varepsilon(v) + 1$.
Pour chaque noeud $v \in V$ on peut déterminer si v a des voisins w avec $deg(w) = 1$. Si c'est le cas, on peut en garder qu'un et supprimer les autres car leur excentricités seront égales vu qu'ils passent tous par v pour aller à tout autre noeud.



Ici par exemple on peut supprimer soit le noeud A soit le noeud B.

3 Implementation

Dans cette section, nous allons passer en revue les parties les plus importantes du code. Comme indiqué, nous avons utilisé la bibliothèque igraph, et pour le langage, nous avons choisi C++.

La fonction qui implémente l'algorithme Bounding Eccentricities est celle qui a la signature suivante : i

```
1 void
2 boundingEccentricities(const igraph_t& originalGraph,
3                         std::vector<long>& eccentricities);
```

Situé dans le fichier eccentiricity.cc. La structure de la fonction est celle que l'on peut attendre d'une implémentation de l'algorithme de Bounding Eccentricity. Nous allons donc nous concentrer sur les éléments de la fonction qui ne sont pas aussi détaillés dans l'article de recherche. Ainsi, nous parlerons principalement des fonctions de sélection des candidats et pruning du graphe.

3.1 Sélection des candidats

Pour la fonction de sélection des candidats, nous avons choisi la même approche que celle choisie par Frank Takes dans son implémentation de l'algorithme Bounding Diameter situé dans le repo github suivant : `https://github.com/franktakes/teexgraph`. La stratégie de sélection des candidats utilisée dans son code est celle surnommée Interchanging eccentricity bounds. Comme expliqué dans l'article de recherche, celle-ci consiste à sélectionner de manière interchangeable les sommets ayant les limites d'excentricité les plus élevées et les plus basses à chaque itération. Le code responsable du suivi du sommet à la limite inférieure est le suivant (comme vous pouvez l'imaginer, celui du sommet à la limite supérieure est presque identique):

```
if (minLowerVertex == -1) {
  minLowerVertex = candidate;
} else if (lowerBounds[candidate] == lowerBounds[minLowerVertex] &&
           VECTOR(degrees)[candidate] > VECTOR(degrees)[minLowerVertex]) {
  minLowerVertex = candidate;
} else if (lowerBounds[candidate] < lowerBounds[minLowerVertex]) {
  minLowerVertex = candidate;
}
```

Ces clauses if/else sont exécutées pour chaque candidat du vecteur de candidats à chaque itération. La première clause est exécutée une fois par itération et son but est essentiellement de permettre l'indexation du vecteur `lowerBounds` dans les exécutions ultérieures avec d'autres candidats. Enfin, les deuxième et troisième clauses stockent essentiellement le candidat ayant la borne inférieure minimale, et le degré le plus élevé en cas d'égalité des bornes inférieures, dans la variable `minLowerVertex`. Cette variable est ensuite utilisée au début de chaque itération dans la fonction `selectCandidate` de signature:

```
long
selectCandidate(const std::set<long>& candidates,
                const long& minLowerVertex,
                const long& maxUpperVertex,
                bool& chooseUpper)
```

qui renvoie le candidat choisi pour l'itération.

3.2 Pruning

La stratégie pruning proposée dans l'article, et donc mise en œuvre ici, consiste à supprimer tous les sommets de degré égal à un du graphe, et donc du vecteur candidat, et à fixer leur excentricité à l'excentricité du voisin unique plus un après la fin de l'exécution de la boucle principale. La fonction responsable de ceci est :

```
void
pruneGraph(igraph_t& graph,
           std::map<long, std::vector<long>>& prunedNeighborBuckets,
           long& prunedVertexCount) {
  bucketOutliers(graph, prunedNeighborBuckets);
  removeOutliers(graph, prunedNeighborBuckets, prunedVertexCount);
}
```

La fonction de la ligne 5 trouve tous les sommets à pruner et les stocke dans la map `prunedNeighborBuckets`, qui stocke les sommets pruner par voisinage, où les clés sont les voisins des sommets pruner. La ligne 6 suivante supprime tous les sommets précédents du graphe.

Après avoir calculé toutes les excentricités des sommets du graphe pruner, la fonction suivante est exécutée :

```
1  void
2  computePrunedEccentricities(
3      const std::map<long, std::vector<long>>& prunedNeighborBuckets,
4      std::vector<long>& eccentricities) {
5
6    for (const auto& p : prunedNeighborBuckets) {
7      long neighbor = p.first;
8      const std::vector<long>& bucket = p.second;
9      for (const auto& vertex : bucket) {
10       eccentricities[vertex] = eccentricities[neighbor] + 1;
11     }
12   }
13 }
```

Dans celle-ci, la variable `prunedNeighborBucket` est utilisée pour calculer les excentricités des sommets pruner. Ceci est fait dans la ligne 10.

4 Experiments

Dans cette section, nous présentons une analyse des performances de notre implémentation de cet algorithme. Pour évaluer les performances de notre implémentation par rapport aux résultats trouvés dans la section 6 de l'article [1], nous fournissons certaines des mêmes mesures de performance. Nous avons ainsi mesuré le nombre d'exécution de notre algorithme de recherche du plus court chemin nécessaire pour calculer toutes les excentricités. Dans cette section, nous allons d'abord analyser les performances des différentes stratégies de sélection ainsi que la stratégie de prunning du graphe donnée dans l'article. Le nombre d'itérations prises après l'implémentation de chaque méthode présentée dans les colonnes respectives pour les ca-CondMat, ca-HepPh et ca-HepTh est donné dans le tableau suivant :

Dataset	Random	Pruning	Interchanging bound	Degree centrality
ca-HepPh	8444	8211	1662	1589
ca-HepTh	6175	5886	1101	1053
ca-CondMat	9439	9268	3486	3271

The best performing variant was evaluated on 2 more datasets of higher sizes. The following table shows the results:

Dataset	Nodes	Edges	Pruned	Iterations
ca-HepPh	11 204	117 619	282	1 589
ca-HepTh	8 638	24 806	351	1 051
ca-CondMat	21 363	91 286	353	3 271
web-NotreDame	325 729	1 090 108	141 178	142
web-Stanford	255 265	1 941 926	1 0350	9

5 Conclusion

Nous avons donc implémenté l'algorithme et avons trouvé des résultats très similaires pour chacun des graphes utilisés dans l'article. Nous avons également constaté l'amélioration relative de chaque méthode d'optimisation proposée dans l'article. Cependant, certaines améliorations peuvent encore être réalisées. Une voie d'amélioration possible serait de trouver une meilleure méthode de sélection des candidats, mais cela nécessiterait plus de recherches. Une autre voie d'amélioration qui demanderait moins d'efforts serait de paralléliser les calculs du plus court chemin afin d'exploiter au maximum les systèmes à plusieurs cœurs qui sont beaucoup plus populaires aujourd'hui qu'ils ne l'étaient en 2013.

6 References

1. Takes, F.W.; Kosters, W.A. Computing the Eccentricity Distribution of Large Graphs. Algorithms 2013, 6, 100-118. https://doi.org/10.3390/a6010100
2. Frank W. Takes and Walter A. Kosters. 2011. Determining the diameter of small world networks. In Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management (CIKM '11). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1191–1196. DOI:https://doi.org/10.1145/2063576.2063748