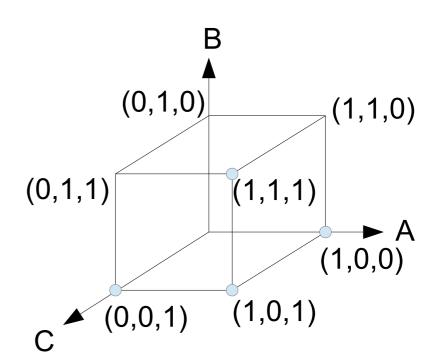
## Reprezentarea funcţiilor logice

## Expresii algebrice

- forma normală (canonică) disjunctivă:
  - $f(x_1, x_2, ..., x_n) = A_1 + A_2 + ... A_n$ , unde  $A_i$  este minterm
  - $Y(A,B,C) = \overline{A} * \overline{B} * C + A * \overline{B} * \overline{C} + A * \overline{B} * C + A * B * C$
- forma echivalenţilor zecimali a mintermilor
  - $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \{i \mid A_i = 1\}$
  - $f(A,B,C) = \{1,4,5,7\}$
- forma normală (canonică) conjunctivă:
  - $f(x_1, x_2, ..., x_n) = B_1 * B_2 * ... B_n$ , unde  $B_i$  este maxterm
  - $Y(A,B,C) = (A+B+\overline{C}) * (\overline{A}+B+C) * (\overline{A}+B+\overline{C}) * (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

#### Cuburi booleene

- Greu de utilizat pentru funcţii cu mai multe variabile
- Reprezentare grafică, important din punct de vedere istoric – a condus la diagrame Karnaugh
- Exemplu:
  - O funcţie Y, cu trei variabile A, B şi C



#### Tabel de adevăr

- Coloane cu combinaţiile posibile ale valorilor + o coloană cu valoarea funcţiei
- Exemplu:
  - O funcţie Y, cu trei variabile de intrare A, B şi C

A	В	С	Υ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

## Diagrame Karnaugh

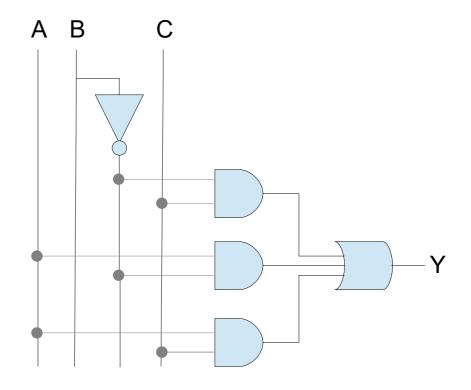
- O reprezentare tabelară a proiecţiei unui cub boolean
- "sistem de coordonate", pe axe valorile sunt aranjate in codare Gray

Α	ВС	0 0	0 1	11	10
0		ABC	ABC	ĀBC	ĀBC
1		$A\overline{BC}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

- Exemplu:
  - O funcţie Y, cu trei variabile de intrare A, B şi C

## Circuite logice

- O reprezentare garfică, uşor de obţinut atât din reprezentări algebrice, cât şi din diagrame Karnaugh
- Exemplu:
  - O funcţie Y, cu trei variabile de intrare A, B şi C



## Minimizarea funcțiilor logice

## Minimizarea funcţiilor logice

- Obiectivul minimizării logice este reducerea mărimii reprezentării funcţiilor Booleene în oricare din formele de reprezentare sume de produse ori produse de sume.
- Se poate remarca faptul că oricare din cele două forme ale funcţiilor Booleene poate fi dedusă din cealaltă cu ajutorul legilor De Morgan iar această transformare păstrează numărul de termeni şi de literali.
- Categorii
  - Pe două nivele (minimizarea Karnaugh, Quine-McCluskey, minimizarea euristică)
  - Multinivel (metode simbolice)

## Definiții

- Literal: variabilă sau forma negată a variabilei
- Implicant: este un grup ce se poate încercui într-o diagrama Karnaugh, un termen (chiar un minterm) care face parte din funcție logică
- Implicanţi prim: scoaterea unui literal din implicant, grupul rezultat nu mai acopera doar valori de 1, ci conţine şi valori de 0
- Acoperire: o acoprire a unei funcții booleane este o multime de implicanți care conține toți termenii a funcției
- Acoperire minimă: acoperire cu număr minim de implicanți

A BC	0 0	00 01		10	
0	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

# Metode grafice (diagrame Karnaugh)

- Valorile în diagramele Karnaugh aşa sunt plasate, încât două poziţii diferă doar într-un singur bit
- Factorizarea mintermilor este mai uşor:

$$-ABC + ABC = AC(B+B)$$

CD AB	0 0	0 1	11	10	
0 0	0	0	0	0	
0 1	1	1	1	0	
11	1	1	1	0	
10	0	1	0	0	

CD AB	0 0	0 1	11	10	
0 0	0	0	0	0	
01	1	0	1	1	
11_	1 0		1	1	
10	0	1	0	0	

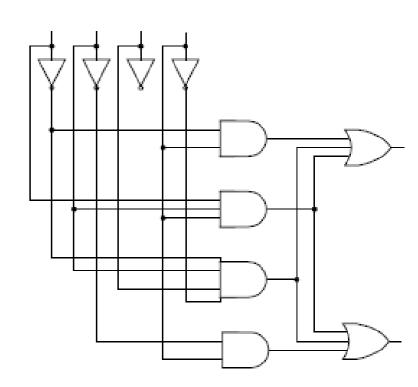
# Metode grafice (diagrame Karnaugh)

- Minimizarea grafică a funcţiilor cu mai multe ieşiri:
  - se caută minimizarea unei perechi de funcţii logice:

• 
$$Y_1 = \overline{A} * D + B * D + \overline{A} * B * C$$

• 
$$Y_2 = A * D + B * D + \overline{A} * B * C * \overline{D}$$
.

- Realizările individuale costă 29 de unităţi:
  - Y<sub>1</sub> costă 1 poartă SAU, 3 porţi ŞI şi
     14 fire de legătură
  - Y<sub>2</sub> costă 1 poartă SAU, 3 porţi ŞI şi
     11 fire de legătură



# Metode grafice (diagrame Karnaugh)

- Minimizarea grafică a funcţiilor cu mai multe ieşiri:
  - Indetificarea părților comune a celor două funcții

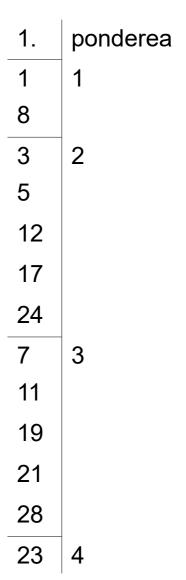
• 
$$Y_1 = \overline{A} * D + A * B * D + \overline{A} * B * C * \overline{D}$$

• 
$$Y_2 = A * D + A * B * D + \overline{A} * B * C * \overline{D}$$

 implementarea comună a funcţiilor necesită doar 2 porţi SAU, 4 porţi ŞI şi 17 fire, per total costul fiind 23

- Minimizarea prin această metodă presupune parcurgerea paşilor următoare:
  - ordonarea mintermilor
  - determinarea implicaţilor primi
  - determinarea tabelului de acoperire a funcţiei.
  - calculul formal de determinare a tuturor soluţiilor funcţiei
- Exemplu
  - $F(A,B,C,D,E) = \{1,3,5,7,8,11,12,17,19,21,23,24,28\}$

- Exemplu
  - Ordonarea termenilor



- determinarea implicaţilor primi
  - sunt comparate implicanţii care figurează în grupuri consecutive
  - toate elementele grupului cu pondere mai mică sunt comparate cu toate elementele grupului cu pondere mai mare

1.	2.
1√	1,3 (2)
8	
3✓	_
5	
12	
17	
24	
7	_
11	
19	
21	
28	
23	

- determinarea implicaţilor primi
  - condiţiile de unificare a doi implicanţi:
    - diferenţa ponderilor este 1;
    - diferenţa valorilor decimale ale implicanţilor este egală cu o putere a lui 2 (adică 1, 2, 4, 8, 16, etc);
    - valoarea decimala a mintermului cu pondere mai mare trebuie sa fie mai mare;
    - toate aceste condiţii trebui să se indeplinească în aceeaşi moment.

1.	2.
1✓	1,3 (2)
8	
3✓	
5	
12	
17	
24	
7	
11	
19	
21	
28	
23	

- Exemplu
  - determinarea implicaţilor primi

1.	2.
1✓	1,3 (2)
8√	1,5 (4)
3√	1, 17 (16)
5✓	8, 12 (4)
12√	8, 24 (16)
17✓	3, 7 (4)
24✓	3, 11 (8)
7✓	3, 19 (16)
11✓	5, 7 (2)
19√	5, 21 (16)
21√	12,28 (16)
28✓	17, 19 (2)
23✓	17, 21 (4)
	24, 28 (4)
	7, 23 (16)
	19, 23 (4)
	21,23 (2)

- Exemplu
  - determinarea implicaţilor primi

1.		1 <b>VIU X 31</b> 1 ) 2.	3.
1	/	1,3 (2) 🗸	1,3,5,7 (2,4)
8,		1,5 (4)√	1,3,17,19 (2,16)
3,		1, 17 (16)✓	1,5,17,21 (4,16)
5×		8, 12 (4)✓	8,12,24,28 (4,16)
12	2√	8, 24 (16)✓	3,7,19,23 (4,16)
17	7✓	3, 7 (4)✓	5,7,21,23 (2,16)
24	ļ√	3, 11 (8) (a)	17,19,21,23 (2,4)
7~		3, 19 (16)✓	
11	✓	5, 7 (2)√	
19	)√	5, 21 (16)✓	
21	<b>√</b>	12,28 (16)✓	
28	}√	17, 19 (2)✓	
23	3√	17, 21 (4)✓	
	_	24, 28 (4)✓	
		7, 23 (16)✓	
		19, 23 (4)✓	
		21,23 (2)✓	

	1.	2.	3.	4.
		1,3 (2)√	1,3,5,7 (2,4)	1,3,5,7,17,19,21,23 (2,4,16). (c)
<ul> <li>Exe</li> </ul>	8✓	1,5 (4)√	1,3,17,19 (2,16) 🗸	
	3✓	1, 17 (16)✓	1,5,17,21 (4,16)✓	
_ (	5✓	8, 12 (4)✓	8,12,24,28 (4,16) (b)	
II	12√	8, 24 (16)	3,7,19,23 (4,16)✓	
			5,7,21,23 (2,16)✓	
	24✓	3, 11 (8) (a)	17,19,21,23 (2,4)✓	
	7✓	3, 19 (16)✓		
	11√	5, 7 (4)✓		
	19√	5, 21 (16)√		
	21✓	12,28 (16)✓		
	28✓	17, 19 (2)✓		
	23✓	17, 21 (4)✓		
	_	24, 28 (4) 🗸		
		7, 23 (16)✓		
		19, 23 (4)✓		
		21,23 (2)✓		

- Determinarea unei acoperiri
- Pe prima coloană se scriu implicanţii găsiţi, iar pe prima linie termenii funcţiei.
- Pentru fiecare implicant prim se notează în tabel (matricea de incidenta) care sunt termenii acoperiţi de el.

	1	3	5	7	8	11	12	17	19	21	23	24	28
а		X				X							
b					X		X					X	X
С	X	X	X	X				X	X	X	X		

- Determinarea unei acoperiri
- Se poate construi o funcţie complementară X pentru a determina implicanţilor necesari:

$$-X = (c)(a+c)(c)(c)(b)(a)(b)(c)(c)(c)$$
 $(c)(b)(b)$ 

$$-X = abc$$

	1	3	5	7	8	11	12	17	19	21	23	24	28
а		X				X							
b					X		X					X	X
С	X	X	X	X				X	X	X	X		

- Transcierea implicanţilor în variabilele funcţiei
- Primul implicant a 3,11 (8).
  - Se scrie un minterm în formă disjunctivă 3 este ABCDE
  - Diferenţa calculată încă la gruparea mintermilor, arată care dintre variabilă a funcţiei se şterge: diferenţa fiind 8, se şterge variabila cu ponderea 8, adică variabila B
  - Se obţine expresia implicantului: ACDE.
- Al doilea implicant 8,12,24,28 (4,16)
  - se scrie echivalentul mintermului 8: ABCDE.
  - se şterg variabilele cu ponderea 4 şi 16: BDE.
- A treilea implicant cu expresia 1,3,5,7,17,19,21,23
   (2,4,16) va fi egal cu BE.

- Exemplu
  - Rezultatul este:  $F = \overline{ABCDE} + \overline{BDE} + \overline{BE}$ .
- Metoda Quine-McCluskey se poate utiliza si cu termeni nedeterminati
  - In prima faza de cautare a implicantilor termenii nedeterminati sunt incluse in cautare (sunt considerate termeni obisnuiti)
  - In a doua faza de determinare a acoperiiri in matricea de incidenta lipsesc coloanele termenilor nedeterminati

- Utilizarea metodei in cazul minimizarii functiilor logice cu multiple iesiri
  - Se consideră funcţia

$$f_2=m_1+m_5+m_6+m_7;$$
  
 $f_1=m_1+m_4+m_5+m_6;$   
 $f_0=m_0+m_2+m_5+m_6+m_7;$ 

Generarea implicanţilor primi pentru această funcţie vectorială se face printr-un procedeu foarte puţin diferit în comparaţie cu cazul funcţiilor scalare.

Tabelul 4a Iniţializarea metodei Quine-McCluskey, aplicată funcţiei vectoriale din Exemplul 7.

Implicanţii de ordinul 0										
Grupa	Indicii	$X_2X_1X_0$	$f_2 f_1 f_0$							
0	0	000	001√							
	1	001	110√							
1	2	010	001√							
	4	100	010√							
2	5	101	111							
	6	110	111							
3	7	111	101√							

Doi implicanţi ai unei funcţii vectoriale sunt adiacenţi dacă îndeplinesc condiţia de adiacenţă a implicanţilor funcţiilor scalare, aplicată părţilor de intrare, la care se adaugă condiţia de compatibilitate a părţii de ieşire.

Aceasta constă dintr-o intersecție nevidă a respectivelor părți de ieșire.

Astfel, spre exemplu, implicanții de ordinul 0: (000 | 001) și (001 | 110), au partea de intrare adiacentă dar functiile sunt disjuncte.

În concluzie, aceşti implicanţi de ordinul 0 nu sunt adiacenţi, aşa cum se poate remarca şi din tabelul 4a.

Tabelul 4b Implicanții de ordinul 1 ai funcției vectoriale din Exemplul 7.

	ACTION ON		<u></u>
Grupa	Indicii	$X_2X_1X_0$	$f_2 f_1 f_0$
0	0,2	0-0	001
	1,5	-01	110
	2,6	-10	001
1	4,5	10-	010
	4,6	1-0	010
2	5,7	1-1	101
	6,7	11-	101

Deîndată ce un implicant are un succesor de index superior, acesta este marcat (cu caracterul  $\sqrt{\ }$ ).

Astfel, (010 | 001) şi (110 | 111) sunt adiacenţi dar este marcat doar primul

Tabelul 4c Matricea de incidență a implicanților primi ai funcției vectoriale din exemplul 7.

Ir	Termenii canonici														
				f	2			f	1				$f_0$		
Simbol	Binar	Indicii	1	5	6	7	1	4	5	6	0	2	5	6	7
р	(101   111)	5		*					*				*		
q	(110   111)	6			*					*				*	
r	(0-0   001)	0,2									*	*			
S	(-01   110)	1,5	*	*			*		*						
t	(-10   001)	2,6										*		*	
и	(10-   010)	4,5						*	*						
V	(1-0   010)	4,6						*		*					
W	(1-1   101)	5,7		*		*							*		*
X	(11-   101)	6,7			*	*								*	*

pentru că succesorul lor este în fapt doar succesorul primului, spre exemplu.

Deoarece, exceptând cei doi implicanţi din grupa 0, nici un alt implicant de ordin 0 nu are partea de ieşire complet reprezentată, rezultă că implicanţii grupei 0 nu au succesori si vor fi implicanţi primi, spre exemplu.

Implicanții primi ai funcției f sunt:

Se ataşează fiecărui implicant prim din lista iniţială câte un simbol distinct:

$$p = (101 \mid 111), q = (110 \mid 111), r = (0-0 \mid 001), s = (-01 \mid 110), t = (-10 \mid 001), u = (10- \mid 010), v = (1-0 \mid 010), w = (1-1 \mid 101)$$
si  $x = (11- \mid 101).$ 

Matricea de incidență a acestei funcții vectoriale este prezentată în tabelul 4c.

Tabelul 4d Matricea de incidență după îndepărtarea implicanților primi p și q apartinând celor trei functii  $f_2$ ,  $f_1$  și  $f_0$ .

	aparşırıa	iliu celoi ti	ei iui	ı <b>c</b> şıı <i>1</i> 2	<i>, ।</i> १ ३।	10.				
	mplicanții primi		Termenii canonici							
			1	2	1	1		<b>f</b> 0		
simbol	binar	indicii	1	7	1	4	0	2	7	
r	(0-0   001)	0,2					*	*		
s	(-01   110)	1	*		*					
t	(-10   001)	2						*		
и	(10-   010)	4				*				
V	(1-0   010)	4				*				
W	(1-1   101)	7		*					*	
X	(11-   101)	7		*	·		·	·	*	

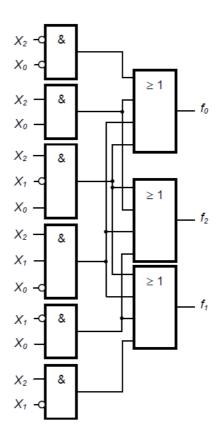
## Metoda Quine — McCluskey Raţionând după apartenenţa la funcţii, implicanţii primi p = (101 | 111), având

Raţionând după apartenenţa la funcţii, implicanţii primi  $p = (101 \mid 111)$ , având indicele 5, şi  $q = (110 \mid 111)$ , având indicele 6, aparţin intersecţiei celor trei funcţii  $f_2 \cdot f_1 \cdot f_0$  şi vor avea ramificaţii spre cele trei linii de ieşire reprezentând  $f_2$ ,  $f_1$  şi  $f_0$ .

Cu alte cuvinte, implicanții primi p și q, aparțin oricărei soluții de acoperire minimă primă care poate fi alcătuită prin setul actual de implicanți primi.

Trebuie menţionat faptul că odată acoperiţi mintermii intersecţiei celor trei funcţii  $(m_5 \, \text{şi} \, m_6)$ , coloanele acestora (5 şi 6) vor fi îndepărtate din matricea de incidenţă împreună cu liniile celor doi implicanţi primi.

Această transformare a matricei de incidență este ilustrată în tabelul 4d.



Considerând matricea de incidență rezultată după îndepărtarea implicanților primi p și q, aparținând celor trei funcții  $f_2$ ,  $f_1$  și  $f_0$ , se remarcă faptul că implicantul prim s aparține intersecției funcțiilor  $f_2$  și  $f_1$ .

Acest implicant prim acoperă termenul canonic  $m_1$ , iar acest termen canonic este chiar intersecția celor două funcții,  $m_1 = f_2 \cdot f_1$ .

Implicantul prim s va avea ramificaţii atât spre linia de ieşire a funcţiei  $f_2$ , cât şi spre linia de ieşire a funcţiei  $f_1$ . În această manieră se dovedeşte că implicantul prim s va aparţine oricărei acoperiri minime prime a acestei funcţii vectoriale.

Tabelul 46 Matricea de incidenţă după îndepărtarea implicantului prim s si a coloanelor  $m_1$ .

In	nplicanţii prim	Te	Termenii canonici					
			<b>f</b> 2	<b>f</b> 1		$f_0$		
simbol	binar	indicii	7	4	0	2	7	
r	(0-0   001)	0,2			*	*		
t	(-10   001)	2				*		
и	(10-   010)	4		*				
V	(1-0   010)	4		*				
W	(1-1   101)	7	*				*	
X	(11-   101)	7	*				*	

Tabelul 4e prezintă matricea de incidență după excluderea implicantului prim s și a coloanelor corespunzătoare termenului canonic  $m_1$ , atât din dreptul funcției  $f_2$  cât și din dreptul funcției  $f_1$ .

Matricea de incidență din tabelul 4e a scăzut considerabil în complexitate.

Astfel, termenul canonic  $m_7$  aparţinând funcţiei  $f_2$  şi funcţiei  $f_0$  poate fi acoperit de implicantul prim w sau de implicantul prim x, unul dintre aceştia.

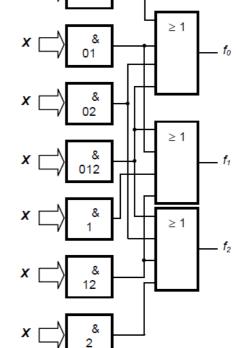
În mod analog, termenul canonic  $m_4$ , aparţinând funcţiei  $f_1$ , poate fi acoperit de implicantul prim u sau de implicantul prim v, oricare dintre aceştia.

Implicantul prim r domină implicantul prim t, în consecință acesta din urmă poate fi îndepărtat din matrice.

Acoperirea primă minimă a funcției vectoriale arată astfel:

(101|111), (110|111), (-01|110), (1-1|101), (10-|010), (0-0|001).

Implementarea prin circuite logice ŞI şi SAU a descrierii simbolice corespunzătoare acoperirii prime minime a acestei funcţii vectoriale este prezentată în figura 5.



(

În cazul unei funcții vectoriale, având trei componente scalare, de forma:

$$F: \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^3$$

structura minimizată generică a funcției F arată ca în figura 6.

Toate porțile *ŞI* sunt generice și sunt indexate.

Indexul unei porți *ŞI* este înscris, în figura 6, la baza simbolului porții respective. Circuitele *ŞI* sunt generice în sensul că pot fi mai multe circuite având același index dar realizând fiecare, în parte, alt termen produs. Doi termeni produs, având același index, pot diferi atât prin paritatea variabilelor cât și prin faptul că liniile lor de intrare pot defini două submulțimi distincte ale domeniului de definiție.

Codul indexului unui circuit SI este determinat în raport cu ramificațiile pe care le are linia de ieșire a respectivului circuit. Astfel, un circuit SI având indexul 012 va avea linia de ieșire ramificată spre circuitele SAU aparținând liniilor funcțiilor scalare  $f_0$ ,  $f_1$  și  $f_2$ .

În mod similar, o poartă SI având indexul 12 își ramifică liniile de ieșire spre porțile SAU ale funcțiilor scalare  $f_1$  și  $f_2$ . În timp ce o poartă SI cu indexul 0 se va conecta doar la poarta SAU a cărei linie de ieșire este etichetată prin  $f_0$ , spre exemplu.

Porțile indexate printr-o singură cifră (0, 1 sau 2, în cazul acesta) nu au linia de ieșire ramificată dar sunt generice. Aceste porți se conectează, fiecare, doar intrarea unei porți SAU a unei singure funcții scalare (respectiv  $f_0$ ,  $f_1$  sau  $f_2$ ).

Analog, sunt definibile structurile generice pentru funcțiile multi-ieșire având patru ori mai multe linii scalare de ieșire.

- În cazul circuitelor reale, mărimea de ordin a numărul variabilelor de intrare a unei funcţii booleene poate să ajungă la un ordin de 1000 sau şi mai mare.
- Minimizarea euristică nu caută o acoperire minimă, ci o acoperire destul de bună.
- Minimizarea funcţiilor se face iterativ, prin aplicarea operatorilor de expandare, neredundanţă şi reducere

- Exemplu
- Se proneşte de la o acoperire oarecare, poate fi şi definiţia funcţiei

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	0-10	1	b
11			1	1	1001	1	С
10	1	1	1	1	1101	1	d
					1-1-	1	е

#### Exemplu

Expandare, acest operator calculează o acoperire primă şi minimală în raport cu conţinerea într-un singur implicant. Implicanţii care formează acoperirea sunt procesaţi rând pe rând. Fiecare implicant care nu este prim este expandat într- un implicant prim, adică este înlocuit printr-un implicant prim care-l conţine. Consecutiv, toţi implicanţii din acoperire (cei încă ne-procesaţi) care sunt conţinuţi în acest implicant prim sunt îndepărtaţi.

- Exemplu
- După expandare

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	10	1	b
11			1	1	01	1	С
10	1	1	1	1	1-0-	1	d
					1-1-	1	е

- Minimizare euristică
  - Exemplu
    - iredundant, are drept acţiune calculul unei acoperiri iredundante. Operatorul alege un subset al implicanţilor astfel încât nici un implicant al acestui subset nu este acoperit de ceilalţi implicanţi din subset.

- Exemplu
- După iredundant

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	10	1	b
11			1	1	<del>01</del>	4	е
10	1	1	1	1	1-0-	1	d
					1-1-	1	е

- Minimizare euristică
  - Exemplu
    - Reduce, este un operator care realizează transformarea unei acoperiri oarecare, într-o acoperire ne-primă dar de aceeaşi cardinalitate cu cea iniţială. Implicanţii sunt procesaţi unul câte unul. Acest operator încearcă să înlocuiască fiecare implicant printr-un altul care este conţinut în acesta, cu condiţia că implicanţii reduşi împreună cu cei rămaşi continuă să acopere funcţia.

- Exemplu
- După reducere

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	0-10	1	b
11			1	1	<del>01</del>	4	е
10	1	1	1	1	1-01	1	d
					1-1-	1	е

- Exemplu
- Încă o operație de expandare

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	10	1	b
11			1	1	<del>01</del>	4	е
10	1	1	1	1	11	1	d
					1-1-	1	е

- Exemplu
- Încă o operație de iredundant

	00	01	11	10	abcd	F	implicant
00	1	1			0-0-	1	а
01	1	1	1	1	10	1	b
11			1	1	<del>01</del>	4	е
10	1	1	1	1	11	1	d
					1-1-	4	e

## Unelte pentru minimizarea funțiilor

## Unelte pentru minimizarea funțiilor

Programul espresso