PROIECT

Proiectarea sistemelor digitale cu instrumente HDL

Molnariu Razvan

Minimizarea Quine-McClusky

Algoritmul Quine-McClusky, denumit si metoda implicantilor primi este o metoda folosita pentru minimizarea funtiilor booleene, dezvoltata de logicianul Willard Van Orman Quine si extinsa de Edward J. McCluskey. Este o metoda identica cu maparea Karnaugh, dar forma tabelara o face mult mai eficienta in implementarea algoritmilor calculatoarelor si de asemenea ofera un mod determinist pentru a verifica daca forma minimala a unei functii boolene a fost atinsa.

Algebra booleană, numită si logica booleană, este un subdomeniu al matematicii in care legile gandirii - obiectul de studiu al logicii clasice - sunt studiate cu ajutorul metodelor simbolice.

Algebra booleana este formata din:

- elementele {0,1};
- 2 operații binare numite SAU și SI, notate simbolic cu + sau Ú și × sau U;
- 1 operatie unară numită NU (negație), notată simbolic 0 sau O.

O funcţie booleană este o funcţie f:{0,1}n→{0,1}m pentru m, n ≥ 0. Fiecărei n-tuple x=(x1,...,xn)∈{0,1}n, funcţia îi pune în corespondenţă o m-tuplă unică f(x)=y=(y1,...,ym) ∈{0,1}m.

Metoda Quine-McClusky este utilizabilă, în principiu, pentru minimizarea funcţiilor scalare ori vectoriale cu un număr arbitrar de variabile.

Minimizarea are loc în doi paşi:

(1) stabilirea implicanţilor primi,

(2) calculul acoperirii minimale pentru funcţia respectivă.

Metoda utilizează scrierea binară a mintermilor funcţiei şi printr-o ordonare judicioasă facilitează găsirea implicanţilor adiacenţi dar şi calculul implicanţilor de ordin superior rezultaţi.

Minimizarea funcţiilor scalare prin metoda Quine-McCluskey

Generarea mulţimii implicanţilor primi.

În calculul implicanţilor primi, mintermii funcţiei sunt numiţi implicanţi, sau cuburi, de ordinul 0 ai funcţiei. În timp ce, implicanţii care rezultă prin reducerea unei variabile sau a două sau mai multor variabile, sunt implicanţi de ordinul unu, respectiv de ordinul doi ori superior.

Într-o primă etapă se calculează pentru fiecare implicant de ordinul 0 al funcţiei ponderea acestuia. Prin ponderea unui implicant se înţelege numărul de unităţi din reprezentarea binară a respectivului implicant. Astfel, spre exemplu, implicanţii (de ordinul 0), 0101 şi 1101 au ponderea 2, respectiv 3, iar implicanţii -1-1 şi 01-0 au ponderea 2 (ordinul 2), respectiv 1 (ordinul 1). Toţi implicanţii de acelaşi ordin şi având aceeaşi pondere sunt grupaţi în aceiaşi clasă. Pe durata calculului implicanţilor primi, implicanţii de ordine diferite, chiar dacă au aceiaşi pondere, fac parte din clase distincte. Procesul de calcul al implicanţilor primi începe prin aşezarea implicanţilor iniţiali care au aceeași pondere, într-o aceeaşi clasă. Clasele sunt întotdeauna etichetate prin valoarea ponderii implicanţilor lor.

Etapa a doua este dedicată găsirii implicanţilor de ordin superior (implicanţii rezultaţi prin contopirea a doi implicanţi adiacenţi). Termenii adiacenţi se găsesc întotdeauna printre implicanţii de acelaşi ordin din două clase succesive.

Astfel, se va cerceta sistematic adiacenţa termenilor dintre clasa 0 şi clasa 1, apoi adiacenţa dintre termenii claselor 1 şi 2 etc. Se începe ordonat cu implicanţii clasei cu cea mai mică pondere, dacă aceştia există (clasa 0, spre exemplu, dacă aceasta este nevidă). Este util de remarcat faptul că, implicanţii clasei 1-a, spre exemplu, sunt cercetaţi mai întâi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei 0, iar apoi sunt cercetaţi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei a 2-a.

Adiacenţa, este definită, astfel : doi implicanţi sunt adiacenţi dacă şi numai dacă diferă prin valoarea unui singur rang cu valoare binară, în rest cei doi implicanţi fiind identici.

Deîndată ce doi implicanţi se dovedesc adiacenţi, este creat un implicant de ordin imediat superior. Implicanţii adiacenţi respectivi sunt, fiecare în parte, marcaţi. Marcajul implicanţilor adiacenţi semnifică faptul că ambii au un succesor de ordin superior. Implicantul de ordin imediat superior este stocat într-o clasă, cu pondere corespunzătoare, de implicanţi de acelaşi ordin. Dacă s-au identificat doi implicanţi adiacenţi din clasele a 3-a şi a 4-a, de ordinul 0, se va genera un implicant care va fi din clasa a 2-a, dar de ordinul 1, spre exemplu. Odată încheiat ciclul prin care s-au cercetat implicanţii de ordinul zero se continuă cu implicanţii de ordin 1 dacă există cel puţin două clase succesive nevide.

Adiacenţa implicanţilor de ordinul al doilea, sau mai mare, se extinde similar, impunându-se ca rangurile variabilelor reduse să coincidă. Pentru rangurile cu valori binare (nereduse) se menţine acelaşi criteriu : să existe un singur rang prin care să difere. Această etapă, de stabilirea a adiacenţelor şi de producere a implicanţilor de ordin superior este, aşa cum s-a mai menţionat, iterativă. Fiecare iteraţie va fi reluată, cu clasele implicanţilor de ordin superior, atâta vreme cât se pot genera implicanţi de ordin superior celor existenţi la începutul iteraţiei. Procesul iterativ se încheie atunci când nu se mai pot genera implicanţi de ordin superior. În acel moment, mulţimea implicanţilor de ordin maxim (de la care începând, nu s-au mai generat implicanţi superiori acestora) reunită cu mulţimea tuturor implicanţilor, din ordinele inferioare, nemarcaţi (inclusiv implicanţii de ordin zero nemarcaţi), formează mulţimea implicanţilor primi pentru funcţia respectivă.

Se consideră funcţia

f = m0 + m3 + m4 + m7 + m8 + m10 + m11 + m12 + m14 + m15 + m18 + m19 + m23 + m26 + m28 + m29 + m30.

Funcţia are 5 variabile care se noteaza : x0, x1, x2, x3 şi x4. Transcriind şi grupând mintermii în clase se poate începe etapa iterativă a procesului de generare a tuturor implicanţilor primi.

Grupa	Indicii	X_4 X_3 X_2 X_1 X_0
0	0	0 0 0 0 0 •
	4	0 0 1 0 0 •

1	8	0 1 0 0 0 •
2	3 10 12 18	0 0 0 1 1 • 0 1 0 1 0 • 0 1 1 0 0 • 1 0 0 1 0 •
3	7 11 14 19 26 28	0 0 1 1 1 • 0 1 0 1 1 • 0 1 1 1 0 • 1 0 0 1 1 • 1 1 0 1 0 • 1 1 1 0 0 •
4	15 23 29 30	0 1 1 1 1 • 1 0 1 1 1 • 1 1 1 0 1 • 1 1 1 1 0 •

Tabel 1a. Implicanţii de ordinul 0 ai funcţiei

Tabelul 1a are, pentru raţiuni de claritate, incluse anumite elemente suplimentare (redundante) şi simboluri în plus faţă de expunerea algoritmului. Astfel, apar coloanele indicilor în care sunt notate, în zecimal, informaţiile echivalente informaţiei binare alăturate (coloana etichetată prin X_4 X_3 X_2 X_1 X_0, care găzduieşte formatul binar al implicanţilor). Se poate constata faptul că mintermul m0 (făcând parte din grupa 0, cu nici o unitate) se poate grupa cu mintermul m4 şi cu mintermul m8 (care aparţin grupei 1, cu o unitate). Similar, mintermul m4 (făcând parte din grupa cu 1, cu o unitate) se poate grupa cu mintermul m12 iar mintermul m8, din aceeaşi grupă cu mintermul m4, se poate grupa cu mintermul m10 şi mintermul m12 (mintermii m10 şi m12 aparţin grupei 2, cu două unităţi), etc.

Simbolul • inserat în dreapta imaginii binare a implicanţilor reprezintă marcajul aplicat implicanţilor care au fost incluşi în implicanţii de ordin superior în procesul de generare al acestora. Astfel, atât mintermul m8 cât şi mintermul m10, primesc simbolul • în coloana imaginii binare. Se poate remarca faptul că, în tabelul 1a, toţi implicanţii de ordinul 0 au asociat simbolul • în coloana etichetată prin x4x3x2x1x0. În baza acestui fapt se poate concluziona că toţi implicanţii de ordinul 0 au fost incluşi în implicanţi de ordin superior - mai precis în implicanţi de ordinul 1.

Rezultatele grupărilor mintermilor din tabelul 1a se pot urmări în coloanele indicilor şi implicanţilor (X_4 X_3 X_2 X_1 X_0) din tabelul 1b.

Grupa	Indicii	X_4 X_3 X_2 X_1 X_0
0	0,4	0 0 – 0 0 •
	0,8	0 – 0 0 0 •
1	4,12	0 – 1 0 0 •
	8,10	0 1 0 - 0 •
	8,12	0 1 – 0 0 •
2	3,7	00 – 1 1 •
	3,11	0 – 0 1 1 •
	3,19	-0 0 1 1 •
	10,11	01 0 1 - •
	10,14	0 1 – 1 0 •
	10,26	- 1 0 1 0 •
	12,14	011 – 0 •
	12,28	-1 1 0 0 •
	18,19	1 0 0 1 - •
	18,26	1 – 0 1 0 •
3	7,15	0– 1 1 1 •
	7,23	-0 1 1 1 •
	11,15	01 – 1 1 •
	14,15	01 1 1 – •
	14,30	-1 1 1 0 •
	19,23	1 0 – 1 1 •
	26,30	1 1 – 1 0 •
	28,29	

	28,30	1 1 1 0 - 1 1 1 – 0 •

Tabel 1b. Implicanţii de ordinul 1

Tabelul 1b facilitează reluarea procesului de grupare dar, de data aceasta, între implicanţii de ordinul 1 (acoperind fiecare doi implicanţi de ordinul 0). Ca şi în tabelul precedent sunt inserate simboluri • în dreapta imaginii binare a unor implicanţi de ordinul 1. Şi în acest caz, aceasta reprezintă faptul că respectivii implicanţi au fost incluşi în implicanţii de ordin superior (succesori), respectiv implicanţii de ordinul 2 (tabelul 1c). Dar, spre deosebire de tabelul 1a, aici în tabelul 1b sunt imagini binare care nu au acest simbol. Respectivele imagini binare descriu implicanţi primi (respectivii implicanţi nu mai pot fi extinşi astfel încât să acopere mai mulţi mintermi).

Tabelul 1c arată că procesul de grupare al implicanţilor din exemplul 1 s-a încheiat. Aşa cum este alcătuit tabelul 1c nu se mai pot face alte grupări între implicanţii de ordinul 2. În consecinţă, coloana imaginii binare (coloana etichetată prin X_4 X_3 X_2 X_1 X_0) nu conţine nici un, simbol •. Toţi implicanţii de ordinul 2 sunt primi. Procesul generării mulţimii tuturor implicanţilor primi s-a încheiat.

Grupa	Indicii	X_4 X_3 X_2 X_1 X_0
0	0,4,8,12 0,8,4,12	0- -00 (0- -00)
1	8,10,12,14 812,10,14	01- -0 (01- -0)
2	3,7,11,15 3,7,19,23 3,11,7,15 3,19,7,23 10,11,14,15 10,14,26,30 10,26,14,30 12,14,28,30	0- -11 -0-11 (0--11) (-0-11) 01-1- -1-10 (-1-10) -11-0

	12,28,14,30	(-11-0)

Tabelul 1c. Implicantii de ordinal 2

Parantezele rotunde între care sunt scrişi unii dintre implicanţii de ordinul 2 vin să sublinieze faptul că acei implicanţi se repetă urmând să fie consideraţi o singură dată .

Din calculul descris succint în tabelele 1 a, b şi c se pot determina toţi implicanţii primi ai funcţiei. Aceştia sunt descriptibili, în mod unic, prin mintermii acoperiţi: (18,19), (18,26), (28,29), (0,4,8,12), (8,10,12,14), (3,7,11,15), (3,19,7,23), (10,11,14,15), (10,14,26,30) şi (12,14,28,30).

Implicanţii primi sunt, adesea, ilustraţi şi prin imaginea binară asociată lor. Funcţia scalară poate fi descrisă prin suma implicanţilor săi primi. Aceasta sumă de produse prime nu este minimă dar poate fi minimizată:

f = x4x3'x2'x1 + x4x2'x1x0' + x4x3x2x1' + x4'x1'x0' + x4'x3x0' + x4'x1x0 + x3'x1x0 + x4'x3x1 + x3x1x0' + x3x2x0'.

Pot să existe, în general, multiple variante de obţinere a unei acoperiri minimale care să cuprindă mai puţini termeni produs.

Calculul prin care se găsesc acoperirile minime iredundante este realizat în cel de-al doilea pas al algoritmului Quine – Mc Cluskey.

Determinarea acoperirilor prime minime şi minimale.

Matricea, tabelul, de incidenţă are câte o coloană pentru fiecare termen canonic al funcţiei, şi câte o linie pentru fiecare implicant prim calculat prin algoritmul precedent.

Este de menţionat un aspect remarcabil legat de termenii canonici neprecizaţi ai funcţiei. Aceştia au fost utilizaţi atunci când s-au generat implicanţii primi, dar nu vor fi consideraţi în problema de acoperire deoarece termenii, pentru care funcţia are valoare neprecizată, nu trebuie acoperiţi. Matricea de incidenţă se completează linie cu linie. Deîndată ce implicantul prim pi, corespunzător liniei i din matrice, acoperă, sau conţine, termenul canonic mj corespunzător coloanei j, elementul matricei aij, este marcat cu simbolul *, altfel spaţiu. În maniera aceasta sunt marcate toate elementele matricei.

Ideea centrală, în continuare, este să se aleagă un număr cât mai mic de implicanţi primi care, fiecare în parte, să acopere cât mai mulţi termeni canonici, iar reuniunea lor să acopere în totalitate termenii canonici.

Pentru aceasta, după completarea întregii matrice, se examinează rând pe rând coloanele (corespunzătoare termenilor canonici precizaţi) şi liniile (corespunzătoare implicanţilor primi) matricei pentru anumite situaţii particulare.

Implicanţii primi esenţiali.

Ori de câte ori pe o coloană apare un singur marcaj (*), corespunzător acestuia, se determină un implicant prim pi corespunzător liniei pe care se află marcajul unic, care acoperă în exclusivitate termenul canonic respectiv, mj. Implicantul prim respectiv trebuie, în mod cert, inclus în orice acoperire a funcţiei deoarece este singurul care acoperă mintermul mj neacoperit de alţi implicanţi primi. Astfel de implicanţi primi se numesc implicanţi primi esenţiali. Implicanţii primi esenţiali sunt îndepărtaţi din matricea de incidenţă, micşorând mărimea acesteia şi complexitatea procesului determinării acoperirilor minime şi respectiv minimale.

Extragerea liniei unui implicant prim esenţial din tabelul de incidenţă se soldează cu îndepărtarea a cel puţin o coloană, corespunzătoare termenului canonic acoperit în exclusivitate. Mai pot fi şi alte coloane acoperite de implicantul prim pi. Acestea, dacă există, sunt îndepărtate din tabel deoarece sunt acoperite de implicantul prim pi care acum face parte în mod sigur din compoziţia oricărei soluţii.

Mulţimea implicanţilor primi ai acestei funcţii este: f = x4x3’x2’x1 + x4x2’x1x0’ + x4x3x2x1’ + x4’x1’x0’ + x4’x3x0’ + x4’x1x0 + x3’x1x0 + x4’x3x1 + x3x1x0’ + x3x2x0’. Asocierea dintre implicanţii primi şi termenii canonici este descrisă în tabelul 2a.

Implicantii primi	Indicii Mintermilor Acoperiţi
1001-	18,19
1-010	18,26
1110-	28,29
0- -00	0,4,8,12
01- -0	8,10,12,14
0- -11	3,7,11,15

-0-11	3,7,19,23
01-1-	10,11,14,15
-1-10	10,14,26,30
-11-0	12,14,28,30

Tabelul 2a. Corespondenţa dintre implicanţii primi şi termenii canonici

Matricea de incidenţă a termenilor canonici şi a implicanţilor primi este alcătuită, aşa cum s-a descris anterior şi este prezentată în tabelul 2b.

Tabelul 2b

Matricea de incidenţă iniţială

Implicanţii primi	Termenii canonici 0	3	4	7	8	10	11	12	14	15	18	19	23	26	28	29	30	
1001-											*	*						
1-010											*			*				
1110-															*	*		e
0- -00	*		*		*			*										e
01- -0					*	*		*	*									
0- -11		*		*			*			*								
-0-11		*		*								*	*					e
01-1-						*	*		*	*								
-1-10						*			*					*			*	
-11-0								*	*						*		*	

Deoarece implicantul prim 1110- este unicul implicant prim care acoperă termenul canonic m29 acesta este esenţial. Aceasta înseamnă că în orice soluţie de acoperire a funcţiei, acest implicant prim este sigur selecţionat. Îndepărtarea din matrice a acestui implicant prim conduce la îndepărtarea coloanelor corespunzătoare termenilor canonici: m28 şi m29 acoperiţi de implicantul prim 1110-.

Mai sunt încă doi implicanţi primi esenţiali în matrice. Implicantul prim 0- -00 este esenţial (a se vedea coloanele corespunzătoare mintermilor m0 şi m4). Îndepărtarea acestui implicant prim se soldează cu eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: m0,m4,m8 şi m12.

Al treilea implicant prim esenţial este -0-11 (din cauza coloanei corespunzătoare mintermului m23). Îndepărtarea acestui implicant prim produce eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: m3, m7, m19 şi m23.

În tabelul 2c este prezentată matricea care rezultă după eliminarea implicanţilor esenţiali şi a termenilor canonici acoperiţi de aceştia. S-a introdus, faţă de tabele 2a şi 2b, coloana care conţine numărul curent al fiecărei linii, respectiv indexul liniei. Această coloană este menită să faciliteze urmărirea comparaţiei dintre liniile matricei dar va fi utilizată şi ulterior în calculul formulei lui Petrick asociat acestei matrice.

Tabelul 2c

Matricea de incidenţă redusă, după eliminarea implicanţilor esenţiali.

Implicanţi i primi	Termenii Canonici 10	11	14	15	18	26	30	Nr. crt.
1001-					*			1
1-010					*	*		2
01- -0	*		*					3
0- -11		*		*				4
01-1-	*	*	*	*				5
-1-10	*		*			*	*	6
-11-0			*				*	7

Linia 5, a implicantului prim 01-1-, domină liniile 4 şi 3, ale implicanţilor 0- -11 şi 01- -0. Implicanţii primi 0- -11 şi 01- -0 vor fi eliminaţi din matrice.

Linia 6, a implicantului prim -1-10 domină linia 7, a implicantului -11-0. Acesta din urmă, -11-0, va fi eliminat din matrice.

Tabelul 2d

Matricea de incidenţă redusă, în care sunt marcate liniile dominate.

Implicanţii primi	Termenii Canonici 10	11	14	15	18	26	30	Număr crt.
1001-					*			1
1-010					*	*		2
01- -0	*		*					3
0- -11		*		*				4
01-1-	*	*	*	*				5
-1-10	*		*			*	*	6
-11-0			*				*	7

Linia 1 din matricea redusă, prezentată în tabelul 2c, corespunzătoare implicantului prim 1001-, este dominată de linia 2, a implicantului prim 1-010. Primul implicant, 1001-, este eliminat. În tabelul 2d liniile dominate din matricea de incidenţă redusă, sunt marcate în prin subliniere.

Toţi implicanţii eliminaţi, în urma dominanţei altor implicanţi primi, nu vor fi utilizaţi în calculul soluţiilor de acoperire a funcţiei f.

Se poate remarca faptul că, implicanţii eliminaţi (0- -11, 01 - - 0, -11-0 şi 1001-) nu mai apar, în actuala matrice, ca fiind implicanţi primi (maximali) din cauza ştergerilor (anterioare) de linii şi coloane din matrice cauzate de extragerea implicanţilor primi esenţiali.

Tabelul 2e

Matricea finală

Implicanţii primi	Termenii Canonici							Obs.
	10	11	14	15	18	26	30	
1-010					*	*		e
01-1-	*	*	*	*				e
-1-10	*		*			*	*	e

Implicanţii primi care au mai rămas sunt toţi esenţiali, aşa cum se poate remarca din matricea de incidenţă finală, prezentată în tabelul 2e.

Acoperirea funcţiei se calculează din implicanţii primi esenţiali:

(1110-) + (0- -00) + (-0-11) + (-1-10) + (01-1-) + (1-010), formula algebrică a acesteia fiind: f = x4 x3 x2 x1’ + x4’ x1’ x0’ + x3’ x1 x0 + x3 x1 x0’ + x4’ x3 x1 + x4 x2’ x1 x0’.

Bibliografie

1.https://en.wikipedia.org/wiki/Quine%E2%80%93McCluskey_algorithm

2.http://andrei.clubcisco.ro/cursuri/1pl/cursuri/Metoda%20Quine-McCluskey.pdf

3.https://biblioteca.regielive.ro/proiecte/calculatoare/implementarea-algoritmului-quine-mccluskey-24929.html

4.https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1410/1410.1059.pdf