

## 2.1 线性表及其实现

# 多项式的表示

## [例] 一元多项式及其运算

一元多项式： $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

主要运算：多项式相加、相减、相乘等

## 【分析】如何表示多项式？

多项式的关键数据：

- 多项式项数 **n**
- 各项系数  **$a_i$**  及指数 **i**

## 方法1: 顺序存储结构直接表示

数组各分量对应多项式各项:

$a[i]$ : 项 $x^i$ 的系数 $a_i$

例如:  $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 1$

表示成:

|      |   |   |         |   |   |        |       |
|------|---|---|---------|---|---|--------|-------|
| 下标i  | 0 | 1 | 2       | 3 | 4 | 5      | ..... |
| a[i] | 1 | 0 | -3      | 0 | 0 | 4      | ..... |
|      | 1 |   | $-3x^2$ |   |   | $4x^5$ |       |

两个多项式相加: 两个数组对应分量相加

问题: 如何表示多项式  $x+3x^{2000}$  ?

## 方法2：顺序存储结构表示非零项

每个非零项  $a_i x^i$  涉及两个信息：系数  $a_i$  和指数  $i$   
可以将一个多项式看成是一个  $(a_i, i)$  二元组的集合。

用结构数组表示：数组分量是由系数 $a_i$ 、指数 $i$ 组成的结构，  
对应一个非零项

例如：  $P_1(x) = 9x^{12} + 15x^8 + 3x^2$  和  $P_2(x) = 26x^{19} - 4x^8 - 13x^6 + 82$

|          |    |    |   |       |
|----------|----|----|---|-------|
| 下标i      | 0  | 1  | 2 | ..... |
| 系数 $a_i$ | 9  | 15 | 3 | —     |
| 指数i      | 12 | 8  | 2 | —     |

(a)  $P_1(x)$

|          |    |    |     |    |       |
|----------|----|----|-----|----|-------|
| 下标i      | 0  | 1  | 2   | 3  | ..... |
| 系数 $a_i$ | 26 | -4 | -13 | 82 | —     |
| 指数i      | 19 | 8  | 6   | 0  | —     |

(b)  $P_2(x)$

按指数大小有序存储！

## 方法2：顺序存储结构表示非零项

相加过程：从头开始，比较两个多项式当前对应项的指数

**P1: (9,12), (15,8), (3,2)**

**P2: (26,19), (-4,8), (-13,6), (82,0)**

**P3: (26,19) (9,12) (11,8) (-13,6) (3,2) (82,0)**

$$P_3(x) = 26x^{19} + 9x^{12} + 11x^8 - 13x^6 + 3x^2 + 82$$

## 方法3：链表结构存储非零项

链表中每个结点存储多项式中的一个非零项，包括系数和指数两个数据域以及一个指针域

| coef | expon | link |
|------|-------|------|
|------|-------|------|

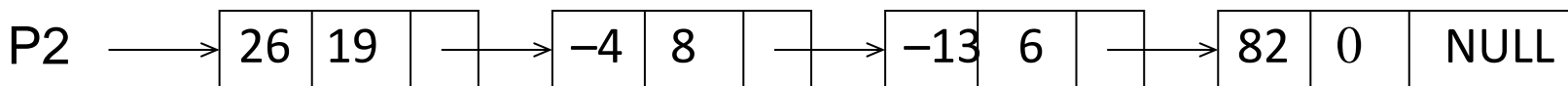
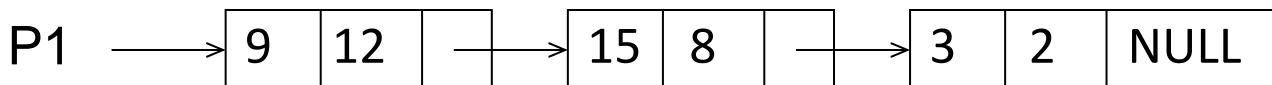
```
typedef struct PolyNode *Polynomial;  
struct PolyNode {  
    int coef;  
    int expon;  
    Polynomial link;  
}
```

例如：

$$P_1(x) = 9x^{12} + 15x^8 + 3x^2$$

$$P_2(x) = 26x^{19} - 4x^8 - 13x^6 + 82$$

链表存储形式为：



# 什么是线性表

多项式表示问题的启示：

1. 同一个问题可以有不同的表示（存储）方法
2. 有一类共性问题：有序线性序列的组织和管理

“**线性表(Linear List)**”：由同类型**数据元素**构成**有序序列**的线性结构

- 表中元素个数称为线性表的**长度**
- 线性表没有元素时，称为**空表**
- 表起始位置称**表头**，表结束位置称**表尾**

# 线性表的抽象数据类型描述

类型名称：线性表（**List**）

数据对象集：线性表是  $n$  ( $\geq 0$ ) 个元素构成的有序序列(  $a_1, a_2, \dots, a_n$  )

操作集：线性表  $L \in \text{List}$ ，整数  $i$  表示位置，元素  $X \in \text{ElementType}$ ，  
线性表基本操作主要有：

- 1、**List MakeEmpty()**：初始化一个空线性表  $L$ ；
- 2、**ElementType FindKth( int K, List L )**：根据位序  $K$ ，返回相应元素；
- 3、**int Find( ElementType X, List L )**：在线性表  $L$  中查找  $X$  的第一次出现位置；
- 4、**void Insert( ElementType X, int i, List L )**：在位序  $i$  前插入一个新元素  $X$ ；
- 5、**void Delete( int i, List L )**：删除指定位序  $i$  的元素；
- 6、**int Length( List L )**：返回线性表  $L$  的长度  $n$ 。



# 线性表的顺序存储实现

利用数组的连续存储空间顺序存放线性表的各元素

下标  $i$     0    1    .....     $i-1$      $i$     .....     $n-1$     .....     $\text{MAXSIZE}-1$

|      |       |       |       |       |           |       |       |       |   |
|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|---|
| Data | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $a_i$ | $a_{i+1}$ | ..... | $a_n$ | ..... | — |
|------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|---|

↖ Last

```
typedef struct LNode *List;
struct LNode{
    ElementType Data[MAXSIZE];
    int Last;
};
struct LNode L;
List PtrL;
```

访问下标为  $i$  的元素:  $L.\text{Data}[i]$  或  $\text{PtrL} \rightarrow \text{Data}[i]$

线性表的长度:  $L.\text{Last}+1$  或  $\text{PtrL} \rightarrow \text{Last}+1$

## ❖ 主要操作的实现

### 1. 初始化（建立空的顺序表）

```
List MakeEmpty( )
{
    List PtrL;
    PtrL = (List )malloc( sizeof(struct LNode) );
    PtrL->Last = -1;
    return PtrL;
}
```

查找成功的平均比较次数为  
 $(n+1)/2$ ，平均时间性能为  
 $O(n)$ 。

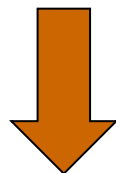
### 2. 查找

```
int Find( ElementType X, List PtrL )
{
    int i = 0;
    while( i <= PtrL->Last && PtrL->Data[i] != X )
        i++;
    if ( i > PtrL->Last ) return -1; /* 如果没找到，返回-1 */
    else return i;                  /* 找到后返回的是存储位置 */
}
```

### 3. 插入 (第 $i$ ( $1 \leq i \leq n+1$ ) 个位置上插入一个值为 $X$ 的新元素)

|           |       |       |       |       |           |       |       |       |                    |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|--------------------|
| 下标<br>$i$ | 0     | 1     | ..... | $i-1$ | $i$       | ..... | $n-1$ | ..... | $\text{MAXSIZE}-1$ |
| Data      | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $a_i$ | $a_{i+1}$ | ..... | $a_n$ | ..... | -                  |

↖  
Last



先移动，再插入

|           |       |       |       |       |       |           |       |       |       |                 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-----------------|
| 下标<br>$i$ | 0     | 1     | ..... | $i-1$ | $i$   | $i+1$     | ..... | $n$   | ..... | $\text{SIZE}-1$ |
| Data      | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $X$   | $a_i$ | $a_{i+1}$ | ..... | $a_n$ | ..... | -               |

↖  
Last

### 3. 插入操作实现

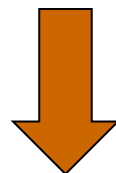
```
void Insert( ElementType X, int i, List PtrL )
{
    int j;
    if ( PtrL->Last == MAXSIZE-1 ){           /* 表空间已满，不能插入*/
        printf( " 表满 " );
        return;
    }
    if ( i < 1 || i > PtrL->Last+2 ) {
        printf( " 位置不合法 " );
        return;
    }
    for ( j = PtrL->Last; j >= i-1; j-- )
        PtrL->Data[j+1] = PtrL->Data[j]; /*将  $a_i \sim a_n$  倒序向后移动*/
    PtrL->Data[i-1] = X;                  /*新元素插入*/
    PtrL->Last++;                          /*Last仍指向最后元素*/
    return;
}
```

平均移动次数为  $n/2$ ,  
平均时间性能为  $O(n)$

#### 4. 删除 (删除表的第 $i$ ( $1 \leq i \leq n$ ) 个位置上的元素)

|           |       |       |       |       |           |       |       |       |           |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-----------|
| 下标<br>$i$ | 0     | 1     | ..... | $i-1$ | $i$       | ..... | $n-1$ | ..... | MAXSIZE-1 |
| Data      | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $a_i$ | $a_{i+1}$ | ..... | $a_n$ | ..... | -         |

↖  
Last



后面的元素依次前移

|           |       |       |       |           |       |       |       |       |           |
|-----------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| 下标<br>$i$ | 0     | 1     | ..... | $i-1$     | ..... | $n-2$ | $n-1$ | ..... | MAXSIZE-1 |
| Data      | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $a_{i+1}$ | ..... | $a_n$ | $a_n$ | ..... | -         |

↖  
Last

## 4. 删除操作实现

```
void Delete( int i, List PtrL )
{
    int j;
    if( i < 1 || i > PtrL->Last+1 ) {
        printf ( “不存在第%d个元素”, i );
        return ;
    }
    for ( j = i; j <= PtrL->Last; j++ )
        PtrL->Data[j-1] = PtrL->Data[j];
    PtrL->Last--;
    return;
}
```

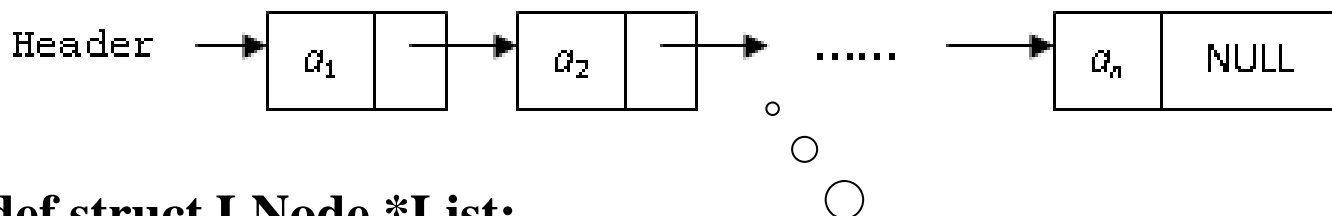
平均移动次数为  $(n-1)/2$ ,  
平均时间性能为  $O(n)$

/\*将  $a_{i+1} \sim a_n$  顺序向前移动\*/  
/\*Last仍指向最后元素\*/

# 线性表的链式存储实现

不要求逻辑上相邻的两个元素物理上也相邻；通过“链”建立起数据元素之间的逻辑关系。

- 插入、删除不需要移动数据元素，只需要修改“链”。



```
typedef struct LNode *List;
struct LNode{
    ElementType Data;
    List Next;
};
struct Lnode L;
List PtrL;
```

访问序号为  $i$  的元素?  
求线性表的长度?

## ❖ 主要操作的实现

### 1.求表长

```
int Length ( List PtrL )
{
    List p = PtrL;    /* p指向表的第一个结点*/
    int j = 0;
    while ( p ) {
        p = p->Next;
        j++;           /* 当前p指向的是第 j 个结点*/
    }
    return j;
}
```

时间性能为  $O(n)$ 。



## 2. 查找

(1) 按序号查找: FindKth;

```
List FindKth( int K, List PtrL )
{
    List p = PtrL;
    int i = 1;
    while (p != NULL && i < K ){
        p = p->Next;
        i++;
    }
    if ( i == K ) return p;
    /* 找到第K个, 返回指针 */
    else return NULL;
    /* 否则返回NULL */
}
```

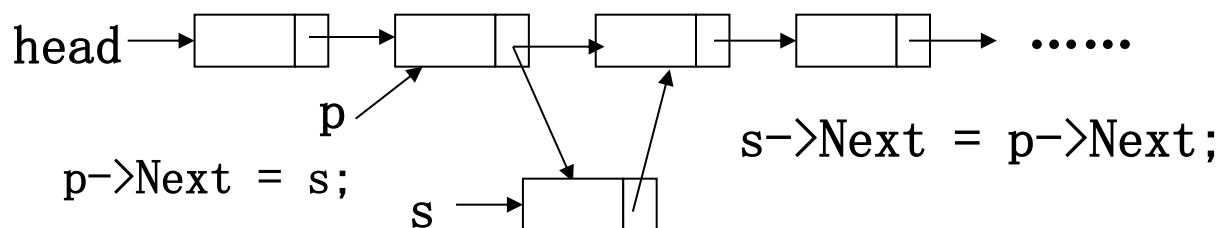
(2) 按值查找: Find

```
List Find( ElementType X, List PtrL )
{
    List p = PtrL;
    while ( p != NULL && p->Data != X )
        p = p->Next;
    return p;
}
```

平均时间性能为  $O(n)$

### 3. 插入 (在第 $i-1$ ( $1 \leq i \leq n+1$ ) 个结点后插入一个值为X的新结点)

- (1) 先构造一个新结点, 用s指向;
- (2) 再找到链表的第  $i-1$  个结点, 用p指向;
- (3) 然后修改指针, 插入结点 (p之后插入新结点是 s)



思考: 修改指针的两个步骤如果交换一下, 将会发生什么?

### 3. 插入操作实现

```
List Insert( ElementType X, int i, List PtrL )
```

```
{   List p, s;
    if ( i == 1 ) {                               /* 新结点插入在表头 */
        s = (List)malloc(sizeof(struct LNode));    /* 申请、填装结点 */
        s->Data = X;
        s->Next = PtrL;
        return s;
    }
    p = FindKth( i-1, PtrL );
    if ( p == NULL ) {
        printf( " 参数i错 " );
        return NULL;
    } else {
        s = (List)malloc(sizeof(struct LNode));    /* 申请、填装结点 */
        s->Data = X;
        s->Next = p->Next;                          /* 新结点插入在第i-1个结点的后面 */
        p->Next = s;
        return PtrL;
    }
}
```

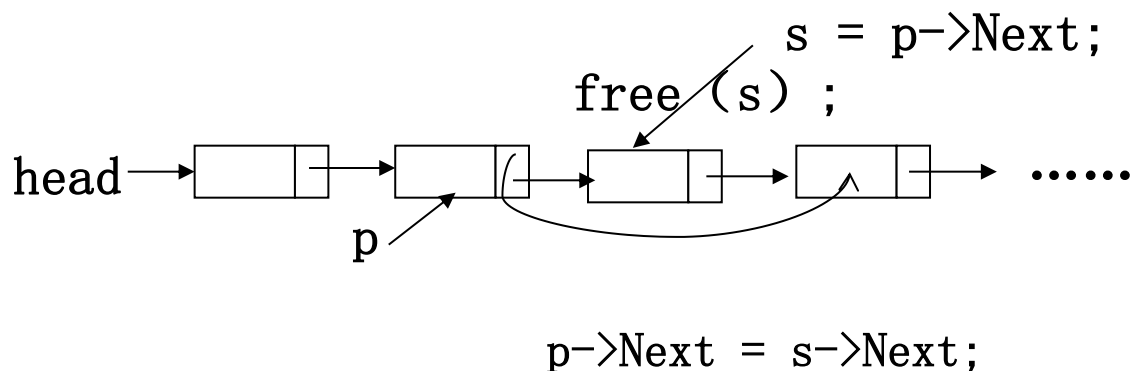
平均查找次数为  $n/2$ ，平均  
时间性能为  $O(n)$

/\* 查找第i-1个结点 \*/

/\* 第i-1个不存在，不能插入 \*/

## 4. 删除 (删除链表的第 $i$ ( $1 \leq i \leq n$ ) 个位置上的结点)

- (1) 先找到链表的第  $i-1$  个结点, 用  $p$  指向;
- (2) 再用指针  $s$  指向要被删除的结点 ( $p$  的下一个结点);
- (3) 然后修改指针, 删除  $s$  所指结点;
- (4) 最后释放  $s$  所指结点的空间。



思考: 操作指针的几个步骤如果随意改变, 将会发生什么?

## 4. 删除操作实现

```
List Delete( int i, List PtrL )
{
    List p, s;
    if ( i == 1 ) {
        s = PtrL;
        if (PtrL!=NULL) PtrL = PtrL->Next;
        else return NULL;
        free(s);
        return PtrL;
    }
    p = FindKth( i-1, PtrL );
    if ( p == NULL ) {
        printf("第%d个结点不存在", i-1); return NULL;
    } else if ( p->Next == NULL ) {
        printf("第%d个结点不存在", i); return NULL;
    } else {
        s = p->Next;
        p->Next = s->Next;
        free(s);
        return PtrL;
    }
}
```

*/\* 若要删除的是表的第一个结点 \*/*  
*/\*s指向第1个结点\*/*  
*/\*从链表中删除\*/*

平均查找次数为  $n/2$ ,  
平均时间性能为  $O(n)$

*/\*查找第i-1个结点\*/*

*/\*s指向第i个结点\*/*  
*/\*从链表中删除\*/*  
*/\*释放被删除结点 \*/*

# 广义表

**【例】** 我们知道了一元多项式的表示，那么二元多项式又该如何表示？

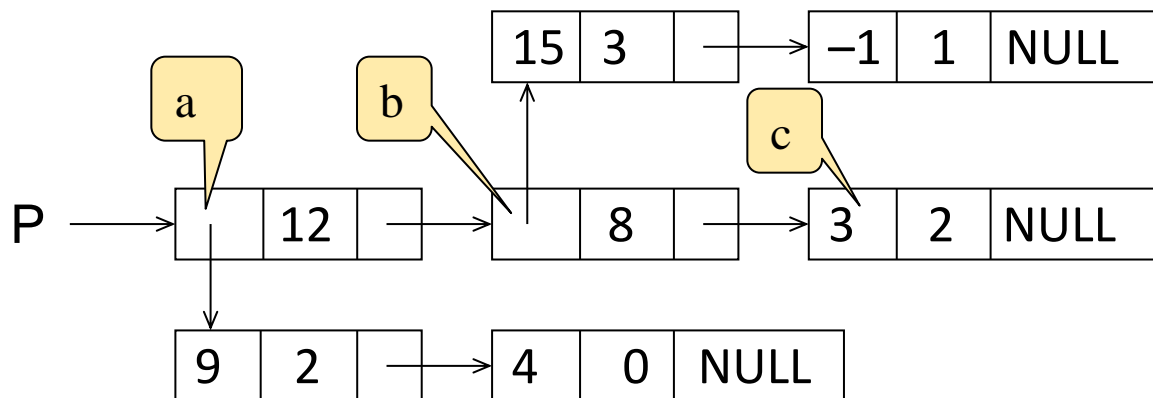
比如，给定二元多项式： $P(x, y) = 9x^{12}y^2 + 4x^{12} + 15x^8y^3 - x^8y + 3x^2$

**【分析】** 可以将上述二元多项式看成关于 $x$ 的一元多项式

$$P(x, y) = (9y^2 + 4)x^{12} + (15y^3 - y)x^8 + 3x^2$$

$$ax^{12} + bx^8 + cx^2$$

所以，上述二元多项式可以用“复杂”链表表示为：



## 广义表(Generalized List)

- 广义表是线性表的推广
- 对于线性表而言， $n$ 个元素都是基本的单元素；
- 广义表中，这些元素不仅可以是单元素也可以是另一个广义表。

```
typedef struct GNode *GList;
struct GNode{
    int Tag;           /*标志域：0表示结点是单元素，1表示结点是广义表*/
    union {            /*子表指针域Sublist与单元素数据域Data复用，即共用存储空间*/
        ElementType Data;
        GList SubList;
    } URegion;
    GList Next;        /* 指向后继结点 */
};
```

|     |         |      |
|-----|---------|------|
| Tag | Data    | Next |
|     | SubList |      |

# 多重链表

**多重链表：**链表中的节点可能同时隶属于多个链

- 多重链表中结点的**指针域会有多个**，如前面例子包含了Next和SubList两个指针域；
- 但包含两个指针域的链表并不一定是多重链表，比如在**双向链表不是多重链表**。

□ 多重链表有广泛的用途：  
基本上如**树、图**这样相对复杂的数据结构都**可以采用多重链表**方式实现存储。



**[例]** 矩阵可以用二维数组表示，但二维数组表示有两个缺陷：

- 一是数组的**大小需要事先确定**，
- 对于“**稀疏矩阵**”，将造成大量的**存储空间浪费**。

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 23 & -1 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 10 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**【分析】** 采用一种典型的多重链表——**十字链表**来存储稀疏矩阵

❑ 只存储矩阵非0元素项

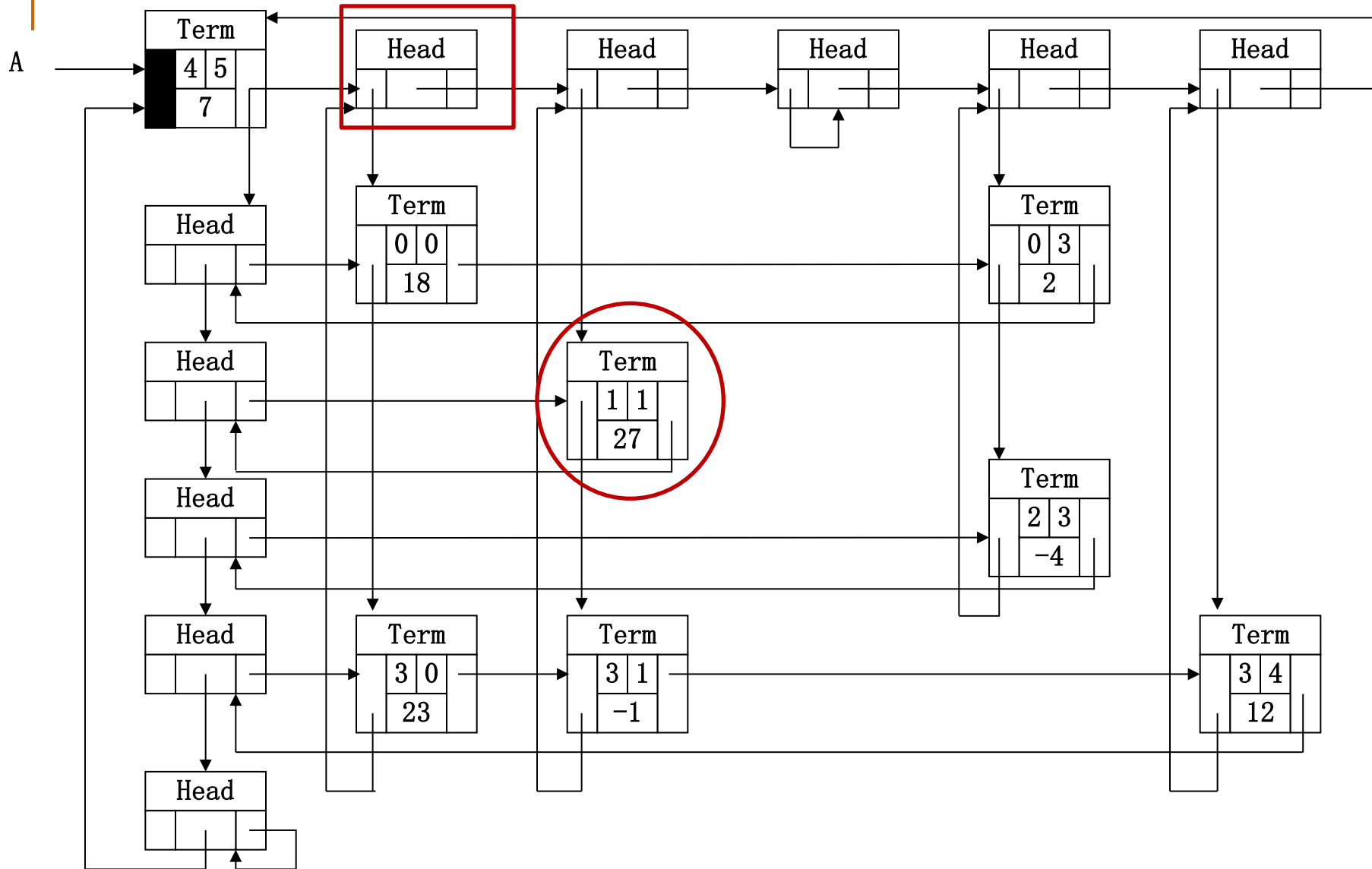
结点的**数据域**：行坐标Row、列坐标Col、数值Value

❑ 每个结点通过**两个指针域**，把同行、同列串起来；

➤ 行指针(或称为向右指针)**Right**

➤ 列指针（或称为向下指针）**Down**

## ❖ 矩阵A的多重链表图



□ 用一个标识域Tag来区分头结点和非0元素结点:

□ 头节点的标识值为“Head”，矩阵非0元素结点的标识值为“Term”。

| Tag  |                |       |
|------|----------------|-------|
| Down | <i>URegion</i> | Right |

(a) 结点的总体结构

| Term |       |     |       |
|------|-------|-----|-------|
| Down | Row   | Col | Right |
|      | Value |     |       |

(b) 矩阵非0元素结点

| Head |      |       |
|------|------|-------|
| Down | Next | Right |

(c) 头结点