❉ Chapitre 1 ❉

Récurrence et limites de suites

Objectifs du cours :

- Raisonner par réccurence pour établir une propriété d'une suite.
- Connaître et utiliser la définition de la limite de suite.
- Étudier la convergence d'une suite.
- Déterminer la limite d'une suite lorsqu'elle existe.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par des suites.

I - Principe de récurrence

Exemple 1 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, puis pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$.

Il y a ici une **infinité** de relation algébrique, il s'agit de montrer la relation $u_n \geqslant 0$ **pour tout** $n \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 10$, $n = 112$, ...

Pour démontrer cette infinité de relation, on peut déjà commencer par le **vérifier** au début, pour les premiers termes :

— pour $n = 0$, $u_0 = 2$, et donc la propriété est bien vraie, $u_0 \geqslant 0$.
— pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7} \geqslant 0$, et la propriété est toute aussi vraie
— pour $n = 2$, $u_2 = \sqrt{u_1 + 5} \geqslant 0$, car $u_1 \geqslant -5$
— ...

Pour traiter le problème d'une manière plus générale, on peut remarquer que, **tant que** que le terme $u_n \geqslant -5$, alors le terme suivant u_{n+1} est bien défini, et étant une racine carrée, il est positif ou nul.

Or, étant positif ou nul, il est aussi supérieur à -5, donc son successeur est bien défini, et donc positif, donc son successeur ...

Cette propriété est une propriété d'**hérédité** :

Si on suppose qu'à un rang n, on a $u_n \geqslant 0$, alors, **au rang suivant**, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \geqslant \sqrt{0+5} = \sqrt{5} \geqslant 0$.
En d'autres termes, $\boxed{\text{si la propriété est vraie à un rang } n\text{, elle est aussi vraie au rang } n+1 \text{ suivant.}}$ Or, nous avons vu que cette propriété est vraie **initialement** au rang $n = 0$ (car $u_0 = 2 \geqslant 0$), et donc, d'après cette hérédité, elle est aussi vraie au rang $n+1 = 1$, puis aussi au suivant, $n+1 = 2$, puis au suivant, puis ..., puis ...

On a ainsi démontré que la relation $u_n \geqslant 0$ est vraie à tous les rangs n.

Ce raisonnement s'appelle un **raisonnement par récurrence**.

Principe du raisonnement par récurrence : Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n.
Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de :

1. **Initialisation :** vérifier que pour le premier entier n_0, $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité de la propriété :** montrer que, si on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier n (**hypothèse de récurrence**), alors $P(n+1)$ est encore vraie.
3. **Conclusion :** On conclut alors que, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geqslant n_0$.

Exercice 1 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

Montrer que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 2 Montrer que $2^n \geq 100n$ pour tout $n \geq 10$.

Exercice 3 Soit la suite v définie par $v_0 = 2$, puis pour tout entier n, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

Exercice 4 *(Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.)*

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 5

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
2. On prend un cube et on place en dessous de lui trois cubes ; on place ensuite cinq cubes en dessous de ces trois cubes, etc.

   Combien utilise-t-on de cubes si l'on a dressé 100 rangées de cubes ?

Exercice 6 Soit u la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2(u_n - 1)$.

Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de u_n.

Démontrer alors cette conjecture.

Exercice 7 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.

Démontrer que cette suite est monotone.

Exercice 8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 4$.

Exercice 9 Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n \geqslant 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Exercice 10 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 11 Démontrer par récurrence pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

(a) $1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \cdots + (n \times n!) = (n+1)! - 1$
(b) $n! \geqslant 2^{n-1}$.

Exercice 12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout entier n par $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 < u_n \leq 1$.

II - Limite d'une suite

1) Définitions

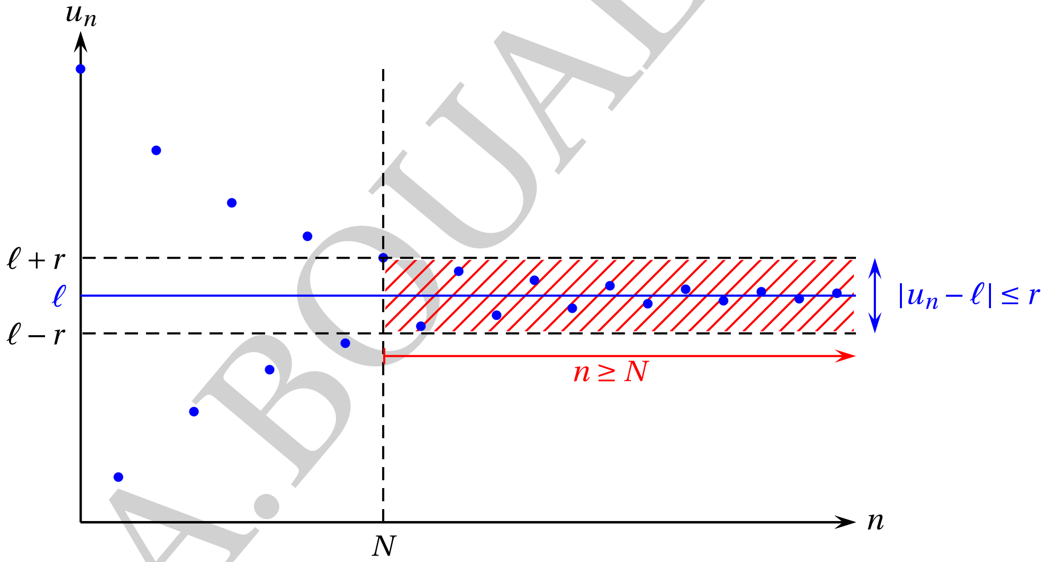
Définition 1:

La suite numérique (u_n) converge vers le réel l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On dit alors que (u_n) est convergente et converge vers l.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou encore $\lim u_n = l$.

Remarques :

- Cette condition : "tout intervalle ouvert" est très forte car elle permet, entre autre, que l'intervalle puisse être arbitrairement petit.
- Cette définition revient à dire que la suite (u_n) converge vers l lorsque pour tout $r > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a : $|u_n - l| < r$.
- Cette définition revient à dire que la suite (u_n) converge vers l lorsque pour tout $r > 0$, l'intervalle ouvert $I =]l - r\ ;\ l + r[$, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.



Exercice 13 Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ en utilisant la définition de la limite.

Exercice 14 python

On considère la suite (u_n) definie par $u_0 = 0.1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. On admet que (u_n) converge vers 0.5.

1. Compléter l'algorithme suivant :

```
from math import*
def lim(p) :
    u = 0.1
    n=0
    while abs ( u-0.5) >=10**(-p ) :
        u=............
        n=............
    return n
```

2. Déterminer à l'aide de l'algorithme precédent, l'entier n à partir duquel (u_n) est dans l'intervalle centré en 0.5 et de rayon 10^{-3}.

Propriété 1 :

La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration:

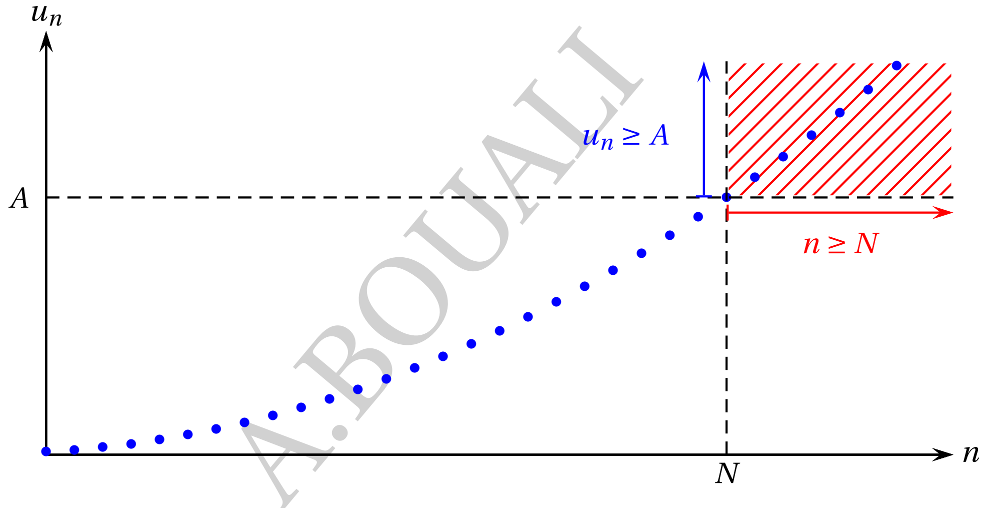
□

Définition 2:

- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.
- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que (u_n) diverge vers $+\infty$.

  On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que (u_n) diverge vers $-\infty$.

  On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$



Remarque : Certaines suites divergent et n'ont pas de limite, par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$. (à vérifier!!)

Exercice 15 python Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1$.
On admet que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
Vérifier que pour $p = 3$, $n = 25$.

```
def lim(p) :
    u=-2
    n=0
    while u<=10**p :
        u=4/3*u+1
        n=n+1
    return n
```

Exercice 16 python La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{5n+2}$.

1. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?
2. Coder l'algorithme dans le langage de la calculatrice, puis l'exécuter en saisissant en entrée $A = 20$, puis $A = 50$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (u_n) ?
4. Démontrer, à l'aide de la définition, cette conjecture.

```
from math import *
A=eval(input('Saisir la valeur de A'))
N=0
U=sqrt(2)
while U<=A:
    U=sqrt(5*N+2)
    N=N+1
print(N)
```

2) Limites usuelles

Propriété 2 :

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Démonstration:

□

3) Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels. Il est assez intuitif de penser que la limite de la somme, du produit ou du quotient est la somme, le produit ou le quotient des limites. Seuls 4 cas représentent des formes indéterminées et donc ne peuvent se résoudre par opération. Il faudra alors soit essayer de changer la forme de la suite, soit utiliser les théorèmes de comparaison ou des gendarmes, soit le théorème sur les suites monotones (voir plus loin) pour pouvoir conclure.

Dans la suite, le point d'interrogation **?** correspond à une forme indéterminée, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

Théorème 1 :

(a) **(Limite de la somme $u_n + v_n$)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

(b) **(Limite du produit $u_n \times v_n$)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**?**

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + 2n - \dfrac{1}{n^3}$.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3 \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0 \end{array}\right\} \text{Par somme de limites } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exemple 4 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)(1 + n^2)$.

Par sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + n^2) = +\infty$, puis par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2 :

(a) **(Limite de l'inverse $\dfrac{1}{u_n}$)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$L \neq 0$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

(b) **(Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$+\infty$ ou $-\infty$	$L \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**?**	**?**

Exemple 5 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$. Par limite de somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

<u>**Méthode en cas de forme indéterminée :**</u> On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)

<u>**Exemple 6 :**</u> soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 4$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$, donc on a une forme indéterminée pour la limite de la somme.

Néanmoins, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{2n}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right) = 1$, d'où, par produit des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Remarque :</u> n^2 est le terme dominant en $+\infty$ dans l'expression de u_n. C'est lui qui impose son comportement en $+\infty$, ce qui apparaît clairement quand on le factorise.

Exercice 17 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ j) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

4) Autres théorèmes de convergence

a) Théorèmes de comparaison

Théorème 3 :

<u>*Théorème des gendarmes pour les suites*</u>

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n,\quad v_n \le u_n \le w_n\,.$$

Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On en déduit :

Corollaire 1:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n, $u_n \ge v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 18 python Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier n, par $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + n - 2$.

1. (a) Quelle est la valeur retournée lors de l'appel *fonction(3)* de la fonction python ci-contre ?

   (b) Qu'affiche l'instruction suivante ?
   for i in range(10): print(fonction(i))

```python
def fonction(n) :
    a = 1
    for p in range(n):
        a=1/3*a+p-2
    return a
```

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 7$, on a $a_n \geqslant n - 3$.
3. En déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 19 Exercices 23 et 25 p.62

b) Suites minorées, majorées et bornées

Théorème 4 :

Une suite (u_n) est dite :

- **minorée** lorsque qu'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- **majorée** lorsque qu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- **bornée** lorsqu'elle est à la fois minorée et majoréé, c'est-à-dire lorsqu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier n, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Exemple 7 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(n) + n$.

Alors, pour tout entier n, comme $\sin(n) \geqslant -1$, $u_n = \sin(n) + n \geqslant -1 + n \geqslant -1 + 0 = -1$.

Ainsi, cette suite (u_n) est minorée par $m = -1$.

De plus, pour tout entier n, $u_n = \sin(n) + n \geqslant -1 + n$, ce qui montre que la suite (u_n) n'est pas majorée, et donc n'est pas bornée non plus.

Remarque : Tout nombre inférieur à m est aussi un minorant.

En effet, pour tout entier n on a aussi par exemple, n, $u_n \geqslant -10 \geqslant -210 \geqslant \dots$

Exemple 8 : • La suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 3\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + 2$, est bornée : $\forall n \geq 1,\ -1 \leq u_n \leq 5$.

• (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3}{2+n}$ est bornée, car, $\forall n \geq 0,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{3}{2}$.

Exercice 20

1. Montrer que la suite de terme général :

   (a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant

   (b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant

   (c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant

   (d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8

   (e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$

2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

Exercice 21 *D'après BAC*

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a. Etudier le sens de variation de (u_n).
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (n+1)^2$.
c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n \geqslant n^2$.
d. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? Justifier.
e. Donner la limite de (u_n).

Théorème 5 :

(Théorème de convergence monotone) Toute suite monotone et bornée est convergente :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge, mais ne fournit aucun moyen pour déterminer cette limite.

Exercice 22 Let (u_n) be the sequence defined by : $u_0 = 5$ and $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

1. Prove, by using the Principle of Mathematical Induction for all $n \in \mathbb{N}$, that : $u_n > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.
2. Prove that the sequence (u_n) is decreasing.
3. Prove that the sequence (u_n) is bounded below.
4. Deduce that the sequence (u_n) is convergent.

5) Suites arithmétiques et géométriques

Propriété 3 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$ et

- si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 23 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 24 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \quad \text{et} \quad u_0 = 3.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 2$
2. Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

3. (a) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ $\quad(\forall n \in \mathbb{N})$
   (b) Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$
   (c) Calculer v_n en fonction de n et montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \dfrac{3 + \frac{2}{3}n}{1 + \frac{1}{3}n}$
   (d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 25

1. Soit a un réel strictement positif.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $\quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$. **(Inégalité de Bernoulli)**
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 1$.

   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

En utilisant cette inégalité de Bernoulli, on va montrer le théorème suivant :

Théorème 6 :

Soit q un réel, alors
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 1$ pour tout entier n, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

Démonstration:

□

Exercice 26 python On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer les limites des suites (v_n) et (u_n).
4. En utilisant le language Python, calculer les termes u_{10}, u_{19} et u_{35}.

Exercice 27 Exercice 62 p.33

Exercice 28 python Exercice 82 p.37

Exercice 29 Exercice 84 p.37

Exercice 30 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

Montrez que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice 31 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1ère méthode a) vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n + 3}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$.

c) Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$, et en déduire le sens de variation de (u_n).

d) Démontrer que (u_n) est convergente.

2ème méthode On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Prouver que v est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer pour tout n, v_n puis u_n en fontion de n.

c) En déduire la convergence de u et sa limite.

Exercice 32 **(La récurrence double)**

Soient $\lambda > 0$ et (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$.

1. Étudiez le signe des termes puis le sens de variation de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est divergente.

Exercice 33 **(Suites et Probabilités)** Exercice 83 p.37

III - Croyable mais faux!

Ici, **une interview exclusive** pour combattre les idées reçues sur les suites :

Q$_1$: Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

R$_1$: On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX!

Considérez par exemple la suite de terme général $u_n = 32 - 1/n$.

Q$_2$: Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang?

R$_2$: On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX!

Considérez par exemple la suite de terme général $u_n = n + (-1)^{n+1} + 1$.

Q$_3$: Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel?

R$_3$: On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX!

Considérez par exemple les suites de termes généraux $u_n = (-323)^n$ et $v_n = \sin n$.

Q$_4$: Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément?

R$_4$: On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX!

Je vous laisse trouver le **contre-exemple**.

Devoir maison

Exercice 34

$(u_n)_n$ une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4n - u_n. \end{cases}$

1. Calculer $u_1; u_2; u_3$ et u_4
2. Soit $(w_n)_n$ la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $w_n = u_{2n}$. Montrer que (w_n) est arithmétique
3. Déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 1 - 2n$.
   (a) Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $2 < u_n < 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
7. Retrouver la valeur de la limite de (u_n). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
8. Exprimer S_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 36 On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \dfrac{1 + 3w_n}{3 + w_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.
2. Montrer que la suite (w_n) est convergente.

..ooOO **FIN** OOoo..