Logarithme népérien

Exercice 3 : 80 min 7,5 pts

$u_n = n - (n+\frac{1}{2})\ln n + \ln(n!)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A) 1) $\varphi(x) = \ln(\frac{x}{k}) - \frac{x}{k} + 1$; $k \in \mathbb{N}^*$
$x \in \mathbb{R}^*_+$

a) $x \mapsto \frac{x}{k}$ est dble sur $]0,+\infty[$ et

$\forall x \in]0,+\infty[$ on a $\frac{x}{k} \in]0,+\infty[$

alors $x \mapsto \ln(\frac{x}{k})$ est dble sur $]0,+\infty[$

et $x \mapsto -\frac{x}{k} + 1$ est dble sur $]0,+\infty[$

alors φ est la somme de 2 fct dble sur

$\mathbb{R}^*_+$ $\Rightarrow$ φ est dble sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{x}{k}} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{k}$$

$$= \frac{k-x}{xk}.$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff x = k$$

$$\begin{array}{c|lcccr}
x & 0 & & k & & +\infty \\
\hline
\varphi'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
\varphi & -\infty & \nearrow & \boxed{0} & \searrow & -\infty
\end{array}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} + 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x}{k}}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{x}{k}}}_{0} - 1 + \underbrace{\frac{k}{x}}_{0}\right]$$

$$= -\infty$$

(+) $\left.\begin{array}{l}\forall\ x \geq k \\ \varphi \text{ est } \searrow \text{ sur } [k, +\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(k)$

$\Rightarrow \varphi(x) \leq 0$

(−) $\left.\begin{array}{l}\forall\ x \leq k \\ \varphi \text{ est } \nearrow \text{ sur }]0, k]\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(k)$

$\varphi(x) \leq 0$

<u>Ainsi</u> $\forall x \in]0, +\infty[\,;\ \varphi(x) \leq 0.$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{x}{k} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$x \mapsto \ln\left(\frac{x}{k}\right)$ et $x \mapsto \frac{x}{k} - 1$ sont continues sur $\left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

alors $$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq \left[\frac{1}{2k}x^2 - x\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq \frac{1}{2k}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\cancel{k} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2k}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{k} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq \frac{1}{2k}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right] - 1$$

$$\leq \left(\frac{1}{\cancel{2k}} \times \cancel{2k}\right) - 1 = 0$$

d'où $$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0.$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. on a

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$$

alors $$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x - \ln(k)\, dx \leq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x\, dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(k)\, dx \leq 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\boxed{\frac{3}{2}}} \ln x\, dx + \int_{\boxed{\frac{3}{2}}}^{\frac{5}{2}} \ln x\, dx + \dots + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\, dx - \sum_{k=1}^{n} (\ln k)\left(\cancel{k} + \frac{1}{2} - \cancel{k} + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\, dx - (\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\, dx - \ln(n!) < 0}$$

c) $\left[x\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \ln(n!) \leq 0$

$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - (n+\cancel{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) + \cancel{\frac{1}{2}} - \ln(n!) \leq 0$

$\Rightarrow -\ln(n!) + (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\ln(2) - n \leq 0$

$\Rightarrow \boxed{\ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - \ln(\sqrt{2}) + n \geq 0.}$

2) a) $g(x) = \dfrac{1}{x(2-x)}$; $x \in [1,2[$

$x \mapsto \dfrac{1}{x(2-x)}$ est une f^t rationnelle, dérivable sur $[1,2[$ et $\forall x \in [1,2[$ on a :

$$g'(x) = -\frac{2-2x}{x^2(2-x)^2} = \frac{2(x-1)}{x^2(2-x)^2} \geq 0 \text{ car } x \geq 1$$

alors g est croissante sur $[1,2[$.

b) $\forall x \in]1,2[$ et $\forall t \in [1,x]$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq t \leq x < 2 \\ g \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1,2[\quad \text{et } x \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$g(1) \leq g(t) \leq g(x).$$

$t \mapsto g(1)$; $t \mapsto g(x)$ et $t \mapsto g(t)$ sont continues sur $[1,x]$, alors :

ne dépend pas de t.

$$\int_1^x g(1)\,dt \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \int_1^x g(x)\,dt$$

$$1\,(x-1) \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq g(x)\,(x-1)$$

et comme $x-1>0$ $\forall x \in]1,2[$; alors :

$$\boxed{1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x(2-x)}} \quad \forall x \in]1,2[.$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x(2-x)} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1 \\ 1 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x(2-x)} \quad \forall x \in]1,2[\end{array}\right\} \text{alors}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$$

d'où f est continue à droite en 1.

d) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2} - \cancel{t} + \cancel{t}}{t(2-t)}\right) = \frac{1}{t(2-t)}$$

$\forall x \in]1, 2[$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2(x-1)}\Big[\ln|t| - \ln|2-t|\Big]_1^x$$

$$= \frac{1}{2(x-1)}\left(\ln x - \ln(2-x) - \ln 1 + \ln 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(x-1)}\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)}.$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = (\cancel{n}+1) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + \ln((n+1)!)$$
$$- \cancel{n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - \ln(n!)$$

$$= 1 + \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)$$
$$+ \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n .$$

$$= 1 + \ln(n+1) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)$$
$$+ \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n$$

$$= 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

D'autre part on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = \frac{1}{2\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)} \ln\left(\frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{2 - \frac{2n+2}{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2 \times \frac{1}{2n+1}} \cdot \ln\left(\frac{2n+2}{2n}\right)$$

$$= \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

d'où $u_{n+1} - u_n = 1 - f\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

et on a d'après 2) b) $\forall x \in]1,2[; f(x) \geq 1$

or $\frac{2n+2}{2n+1} \in]1,2[\Rightarrow f\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \geq 1$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < n \leq n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ln(n) \leq \ln(n + \frac{1}{2})$

$\Rightarrow -(n+\frac{1}{2}) \ln(n) \geq -(n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \underbrace{n + \ln(n!) - (n+\frac{1}{2}) \ln(n)} \geq n + \ln(n!) - (n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2})$

$\Rightarrow u_n \geq n + \ln(n!) - (n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2})$

et d'après 1) 1) c) on a :

$\ln(n!) + n - (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) \geq \ln(\sqrt{2})$

alors $\boxed{U_n \geq \ln(\sqrt{2})}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) one (U_n) est décroissante et minorée par $\ln(\sqrt{2})$, alors (U_n) est cvgte.

(B) $V_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

$V_n = \int_0^1 (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x}\,dx \;;\; n \in \mathbb{N}^*$.

(1) $V_0 = -\int_0^1 -\sqrt{1-x}\,dx$

$= \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= 0 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

(2) a) Soit $\Gamma = \{M(x,y) \text{ tq } y^2 - x(1-x) = 0\}$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow y^2 - x(1-x) = 0$

$$\iff y^2 - x + x^2 = 0$$

$$\iff y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff \boxed{M \in \mathcal{C}_{\left(I\left(\frac{1}{2},0\right),\, \frac{1}{2}\right)}}.$$

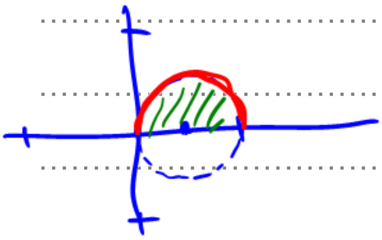
$\underline{Cl}$: $\Gamma = \mathcal{C}_{\left(I\left(\frac{1}{2},0\right);\, \frac{1}{2}\right)}$.

b) $V_1 = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx$.

Soit $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $\forall x \in [0,1]$.

$$M \in \mathcal{C}_\varphi \iff \begin{cases} x \in [0,1] \\ y = \sqrt{x(1-x)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in [0,1] \text{ et } y \geq 0 \\ y^2 = x(1-x). \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} x \in [0,1] \text{ et } y \geq 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\iff M \in \overset{\frown}{AO} \text{ du } \mathcal{C}_{\left(I, \frac{1}{2}\right)} \ \& \ A(1,0).$$

$x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est continue et positive sur $[0,1]$, alors

V_1 = l'aire de la partie limitée par $\mathcal{C}_\varphi$; l'axe des abscisses et les dts d'éq $x=0$ et $x=1$

= l'aire d'un demi-disque de rayon $R=\frac{1}{2}$

$$= \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{\pi \times (\frac{1}{2})^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

3) a) ⊙ Pour $n=0$; $V_0 = \frac{2}{3} > 0$ (vraie).

⊙ $\forall n \geq 1$; $V_n = \int_0^1 (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x}\,dx$

$\forall x \in [0,1]$ on a $\left.\begin{array}{l}(\sqrt{x})^n \geq 0 \\ \sqrt{1-x} \geq 0\end{array}\right\}$ alors

$(\sqrt{x})^n \sqrt{1-x} \geq 0$

$x \mapsto (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x}$ est contin sur $[0,1]$

et la fonction $x \mapsto (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x}$

s'annule seulement en 0 et 1 (nbre fini de réels) alors $V_n > 0$.

b) ⊙ Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_{n+1} - V_n = \int_0^1 (\sqrt{x})^{n+1} \sqrt{1-x}\, dx - \int_0^1 (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x} (\sqrt{x} - 1)\, dx.$$

$\forall x \in [0,1]$ on a $\left.\begin{array}{l}(\sqrt{x})^n \sqrt{1-x} \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \leq 0\end{array}\right\}$ alors

$(\sqrt{x})^n \sqrt{1-x} (\sqrt{x} - 1) \leq 0$ et

$x \mapsto (\sqrt{x})^n \sqrt{1-x} (\sqrt{x} - 1)$ est continue sur $[0,1]$

alors $V_{n+1} - V_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

et $V_1 - V_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{3} \leq 0$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} - V_n \leq 0$.

d'où (V_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c) (V_n) est une suite décroissante et minorée par 0, alors (V_n) est convergente.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_{n+2} = \int_0^1 (\sqrt{x})^{n+2} \sqrt{1-x}\, dx$$

On pose $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x}^{\,n+2} & \text{dble sur }]0,1] \text{ ??} \\ v'(x) = \sqrt{1-x} & \text{conti sur } [0,1] \end{cases}$

Mq u est dble à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}^{\,n+2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}\,\sqrt{x}^{\,n}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}^{\,n} = 0 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ u est dble à dte en 0 et $\boxed{u'_d(0) = 0}$.

Mq u est dble sur $]0,1]$ et calculer $u'(x)$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dble sur $]0,1] \Rightarrow u$ est dble sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$.

$$u'(x) = \frac{(n+2)\, x^{n+1}}{2\sqrt{x^{n+2}}}$$

$$= \frac{(n+2)\sqrt{x^{2n+2}}}{2\sqrt{x^{n+2}}} = \frac{(n+2)}{2}\sqrt{x}^{\,n}$$

or $u'_d(0) = 0 = \frac{(n+2)}{2}\sqrt{0}^{\,n}$.

cl : u est dble sur $[0,1]$ et

$\forall x \in [0,1]$ on a $u'(x) = \frac{n+2}{2}\sqrt{x}^{\,n}$.

on pose $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x}^{\,n+2} & \text{dble sur } [0,1] \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{n+2}{2}\sqrt{x}^{\,n} \\ v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$V_{n+2} = \underbrace{\left[\sqrt{x}^{\,n+2} \times -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1}_{=0} + \frac{n+2}{3}\int_0^1 (1-\underset{\downarrow\ \sqrt{x}^{\,2}}{x})\sqrt{1-x} \times \sqrt{x}^{\,n}\,dx$$

$$V_{n+2} = \frac{n+2}{3}\int_0^1 (\sqrt{x})^n\sqrt{1-x} - (\sqrt{x})^{n+2}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$V_{n+2} = \frac{n+2}{3}\left(V_n - V_{n+2}\right).$$

$\Rightarrow \ 3(V_{n+2}) = (n+2)V_n - (n+2)V_{n+2}$

$\Rightarrow \ (n+2+3)\,V_{n+2} = (n+2)\,V_n .$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}\,V_n .} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

⊙ Pour $n=0$; Mq $V_2 = \frac{2}{5}V_0$

$V_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$V_2 = \underbrace{\left[-\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1}_{=0} + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$

$V_2 = \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x} - x\sqrt{1-x}\,dx$

$V_2 = \frac{2}{3}(V_0 - V_2)$

$3V_2 = 2V_0 - 2V_2$

$$\boxed{V_2 = \frac{2}{5}V_0}$$

d : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{V_{n+2} = \frac{n+2}{n+5} V_n .}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a (V_n) est $\downarrow$

alors $V_{n+2} \le V_{n+1} \le V_n$

or $V_n > 0$ d'après 3) a)

$$\frac{V_{n+2}}{V_n} \le \frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{V_n}{V_n} .$$

4) a)

$$\boxed{\frac{n+2}{n+5} \le \frac{V_{n+1}}{V_n} \le 1 .}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+5/n)} = \boxed{1} .$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 .$$

5) a) ⊙ Pour $n=0$:

$$V_0 \cdot V_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{24} = \frac{2\pi}{2\times 3\times 4}$$

vraie

⊙ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que

$$V_n \cdot V_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

et mq $V_{n+1} \cdot V_{n+2} = \dfrac{2\pi}{(n+3)(n+4)(n+5)}$.

4)a)

$$V_{n+1} \cdot V_{n+2} = V_{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+5} V_n$$

$$= \frac{n+2}{n+5} V_n \cdot V_{n+1}$$

$$= \frac{\cancel{n+2}}{n+5} \cdot \frac{2\pi}{(\cancel{n+2})(n+3)(n+4)} = \boxed{\frac{2\pi}{(n+3)(n+4)(n+5)}}$$

b) $$V_n \cdot V_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

et $V_n > 0 \Rightarrow$ $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{V_n^2}$$

et d'après 4) b) :

$$\frac{n+2}{n+5} \leq \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)} \times \frac{1}{V_n^2} \leq 1$$

$$\frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+5/n)} \leq \frac{2\pi}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})(1+\frac{4}{n})n^3 V_n^2} \leq 1$$

$$\frac{2\pi}{(\ )(\ )(\ )} \leq n^3 V_n^2 \leq \frac{(1+\frac{5}{n})}{(1+\frac{2}{n})} \times \frac{2\pi}{(\ )(\ )(\ )}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(\ )(\ )(\ )}} \leq n\sqrt{n}V_n \leq \sqrt{\frac{(\ )}{(\ )}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(\ )(\ )(\ )}}$$

$\sqrt{2\pi}$ $\sqrt{2\pi}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}V_n = \sqrt{2\pi}}$

2°M : $$V_n V_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

et $V_n^2 \neq 0 \Rightarrow$ $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\pi}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})(1+\frac{4}{n})n^3 V_n^2}$$

$$\Rightarrow n^3 V_n^2 = \frac{2\pi}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})(1+\frac{4}{n})} \times \frac{1}{\frac{V_{n+1}}{V_n}}$$

$$\rightarrow \quad n\sqrt{n}\,V_n = \sqrt{\frac{2\pi}{\underbrace{(\ )}_{\to 1}\underbrace{(\ )}_{\to 1}\underbrace{(\ )}_{\to 1}}} \times \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{V_{n+1}}{V_n}}_{\to 1}}}$$

alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\,V_n = \sqrt{2\pi}}$.

6) a) • $\underline{n=0}$: $\frac{2}{1\times 3}\times\frac{(2^0\times 0!)^2}{0!} = \frac{2}{3}$; $V_0 = \frac{2}{3}$ } vraie

• Soit $n\in\mathbb{N}$; supp que $V_{2n} = ---$

et mq $V_{2n+2} = \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}$

d'après 4) a on a :

$$V_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+5}\,V_{2n}$$

$$= \frac{2n+2}{\boxed{2n+5}} \times \frac{\boxed{2} \times (2^n\times n!)^2 \times (2n+2)}{\boxed{(2n+1)}\boxed{(2n+3)}\boxed{(2n)!}\times\boxed{(2n+2)}}$$

$$= \frac{2}{(2n+3)(2n+5)} \times \frac{\left(2(n+1)\right)^2\times(2^n\times n!)^2}{\boxed{(2n+2)!}}$$

$$= \frac{2}{(2n+3)(2n+5)} \times \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}.$$

$\mathcal{P}$: $\forall n \in \mathbb{N}$; - - - - -

b) $2U_n - U_{2n} = \cancel{2n} - 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + 2\ln(n!)$

$$- \cancel{2n} + \left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n) - \ln((2n)!)$$

$$= \left(2n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(2n) - \ln n\right) - \frac{1}{2}\ln n + \ln(n!)^2 - \ln((2n)!)$$

$$= \left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n}{n}\right) - \ln(\sqrt{n}) + \ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right).$$

$$= 2n\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

$$= \ln\left(2^{2n}\right) + \ln(\sqrt{2}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

$$= \ln\left(2^{2n} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2n+1)(2n+3)}{2} V_{2n} \times \sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

c) on a (U_n) et cgte ; on pose

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2U_n - U_{2n} = 2\ell - \ell = \boxed{\ell}$$

D'autre part:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, V_n = \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2n\sqrt{2n}\, V_{2n} = \sqrt{2\pi}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)\times \boxed{2n}}{2}\boxed{V_{2n}}\times\sqrt{\frac{2}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln \left[\frac{\cancel{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right) \times 2n\sqrt{2n}\sqrt{2\pi}}{\cancel{2} \times \sqrt{\cancel{2n}}} \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{n}}} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \ln \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1+\frac{3}{2n}\right)}_{\to 1} \times \underbrace{2n\sqrt{2n}\sqrt{2\pi}}_{\to \sqrt{2\pi}} \right]$$

$$= \ln\left(\sqrt{2\pi}\right).$$

cl : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)}$