* F est la primitive de f sur I

$\boxed{F'(x) = f(x)}$

* $\boxed{f \text{ est continue sur } I \text{ alors } f \text{ admet une primitive } F \text{ sur } I}$

* $\boxed{F \text{ et } G \text{ deux primitives de } f \text{ sur } I}$
$\boxed{\text{alors } F(x) = G(x) + C}$

* si f est continue sur I alors f admet une unique primitive F sur I telque
$\underline{F(x_0) = y_0}$

$f(x) = a \longrightarrow F(x) = ax + b$

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad F'(x) = \dfrac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}\, x^n$

$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$

$f(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow F(x) = \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$

$\longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\, x \cdot x^{\frac{1}{2}} + C$
$= \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow F(x) = 2\sqrt{x} + C$

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \sin x + C$ $\qquad$ avec $F(0) = 0 \iff F(0) = \sin 0 + C = C$ donc $\boxed{C = 0}$

$f(x) = \sin x \longrightarrow F(x) = -\cos x + C$

si $F(0) = 0 \iff -\cos 0 + C = 0 \iff -1 + C = 0 \iff C = 1$

$f(x) = \cos(\omega x + \varphi) \longrightarrow F(x) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + C$

$f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \longrightarrow F(x) = -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + C$

$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow F(x) = \tan x + C$

$u'(x) \cdot u^n(x) \longrightarrow \dfrac{1}{n+1}\, u^{n+1}(x) + C$

Exemple $f(x) = \overbrace{(2x+1)}^{u'(x)}\, \overbrace{(x^2 + x + 3)}^{u(x)}$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$

$F(x) = \dfrac{(x^2 + x + 3)^2}{2} + C$

si $F(1) = 3 \iff \dfrac{(1+1+3)^2}{2} + C = 3 \iff C = -\dfrac{19}{2}$

ainsi $F(x) = \dfrac{(x^2 + x + 3)^2}{2} - \dfrac{19}{2}$

$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \longrightarrow u(x) \cdot v(x) + C$

$\frac{u'(x)}{u^n(x)} = u'(x) \cdot u^{-n}(x) \longrightarrow \frac{u^{-n+1}(x)}{-n+1} + C$

$\frac{u'v - uv'}{u^2} \longrightarrow \frac{u(x)}{v(x)} + C$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u(x)} + C$

$u'\sqrt{u} \longrightarrow \frac{2}{3} u(x)\sqrt{u(x)} + C$

$u' \sqrt[n]{u^{1-n}} \longrightarrow n\sqrt[n]{u(x)} + C$

$u'(x) \times (w'[u(x)]) \longrightarrow w \circ u(x) + C$

$$(w \circ u(x))' = u'(x) \times w'[u(x)]$$

Série : Primitives

Ex 1

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$

$F(x) = \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} - \cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} + 2x + C$

$= x^3 - x^2 + 2x + C$

2) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^3}$

f est continue sur $]0, +\infty[$ donc admet une primitive F sur $]0, +\infty[$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2x^2} + C$

3) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$ $\quad$ f est une fonction rationnelle donc continue sur D_f en particulier sur $]0, +\infty[$

$= \frac{3x^2}{x^4} + \frac{4x}{x^4} - \frac{2}{x^4}$

$= \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

$F(x) = \frac{-3}{x} + \frac{4}{-2x^2} - \frac{2}{-3x^3} + C$

$= \frac{-3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + C$

4) $f(x) = \underbrace{-3}_{u'} \underbrace{(-3x-2)^2}_{u^2}$

$F(x) = \frac{(-3x-2)^3}{3} + C$

5) $f(x) = \underbrace{(2x-3)}_{u'} \underbrace{(x^2-3x+3)}_{u}$

$F(x) = \dfrac{(x^2-3x+3)^2}{2} + C$

6) $f(x) = \dfrac{3}{(3x+4)^3}$

$F(x) = \dfrac{-1}{2(3x+4)^2} + C$

7) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\overbrace{2x+2}^{u'(x)}}{(\underbrace{x^2+2x-3}_{u(x)})^2}$

$F(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{-1}{x^2+2x-3} + C = \dfrac{-1}{2(x^2+2x-3)^2} + C$

8) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}} \longrightarrow F(x) = 2\sqrt{2x-1} + C$

9) $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}} \longrightarrow F(x) = 2\sqrt{x^2-x} + C$

10) $f(x) = 3\cos 2x + 2\sin 3x$

$F(x) = \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\cos 3x + C$

11) $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

$F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + C$

12) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow F(x) = \tan x + C$

13) $f(x) = \tan^2 x = \underline{\tan^2 x + 1} - 1$

$F(x) = \tan x - x + C$

14) $f(x) = \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x\,(1-\cos^2 x)$

$= \sin x - \underbrace{\sin x}_{u'} \underbrace{\cos^2 x}_{u^2}$

$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

14') $f(x) = \cos^2 x$

$= \dfrac{\cos(2x)+1}{2} = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\cos(2x)+1}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}}$

15) $f(x) = \cos^4 x$

$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\cos^4 x = \dfrac{(e^{ix}+e^{-ix})^4}{16}$

1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

$(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

donc $\cos^4 x = e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}$

$$= \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{2\cos 4x + 4(2\cos 2x) + 6}{16}$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C}$$

16) $f(x) = \sin^4 x$

$$= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{2\cos 4x - 4(2\cos 2x) + 6}{16}$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C$$

17) $f(x) = \tan^3 x + \tan^5 x$

$$= \underbrace{\tan^3 x}_{u^3(x)}\,\underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{u'(x)}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$$

17') $f(x) = \tan^{n+2}(x) + \tan^n(x)$

$$= \underbrace{\tan^n(x)}_{u^n}\,(\underbrace{\tan^2 x + 1}_{u'})$$

$$F(x) = \frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

Ex2

1) $$\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3} = \frac{a(x-1) + b}{(x-1)^3} = \frac{ax - a + b}{(x-1)^3} = f(x)$$

par identification : $\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

ainsi $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}$

2) f est une fonction rationnelle donc continue sur D_f en particulier sur $]-\infty, 1[$ donc elle admet une primitive F sur $]-\infty, 1[$

$$F(x) = \frac{-2}{(x-1)} - \frac{5}{2(x-1)^2} + C$$

Ex3

1) $f(x) = x\sin x$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sin x + x\cos x$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

$2\cos x - f''(x) = \cancel{2\cos x} - 2\cos x + x\sin x = x\sin x = f(x)$

ainsi $f(x) = 2\cos x - f''(x)$

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ avec $F(\pi)=0$

$F(x) = 2\sin x - f'(x) + C$

$= 2\sin x - \sin x - x\cos x + C = \sin x - x\cos x + C$

$F(\pi) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin\pi}_{0} - \pi \underbrace{\cos\pi}_{-1} + C = 0 \Leftrightarrow \boxed{C = -\pi}$

ainsi $\boxed{F(x) = \sin x - x\cos x - \pi}$

Ex 4

1) $f(x) = x\sin x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sin x + x\cos x$

$g(x) = x\cos x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \cos x - x\sin x$

2) $h(x) = (2-3x)\sin x + (2x+3)\cos x$

$= \underline{2\sin x} - 3x\sin x + \underline{2x\cos x} + 3\cos x$

$= 2(\sin x + x\cos x) + 3(\cos x - x\sin x)$

$= 2f'(x) + 3g'(x)$

h est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive H sur $\mathbb{R}$

$H(x) = 2f(x) + 3g(x) + C = 2x\sin x + 3x\cos x + C$