Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : $4^{ème}$ Mathématiques

Série n ° 21: Révision

Nom du prof : Fraj Zemni

Exercice 1 : 35 min 5 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit a un nombre complexe non nul différent de $(-i)$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2-(1+ia+\bar{a})z+\bar{a}+i|a|^2=0$

I) 1) Vérifier que $\bar{a}$ est une solution de (E) puis déetrminer l'autre solution.

Dans la suite de l'exercice on considère les points A, B et M d'affixes respectives $u=\bar{a}$, $v=1+ia$ et a.

2) On pose $a=e^{i\alpha}$ où $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

a) Ecrire le nombre complexe $\frac{v}{u}$ sous la forme exponentielle .

b) Déterminer le point M tel que le triangle OAB est rectangle en O .

II) On suppose que $a=m+\frac{1}{2}i$, $m\in\mathbb{R}$

1) Vérifier que $1+ia=i\bar{a}$

2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $\mathbf{z'=-iz+2i\bar{a}}$, on donne Ω le point d'affixe $(1+i)\bar{a}$

a) Montrer que f(A) = B.

b) Montrer que $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) a) Montrer que f est une isométrie .

b) Montrer que f est une rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) En déduire que O, A, B et Ω sont situés sur un même cercle.

Exercice 2 : 40 min 6 pts

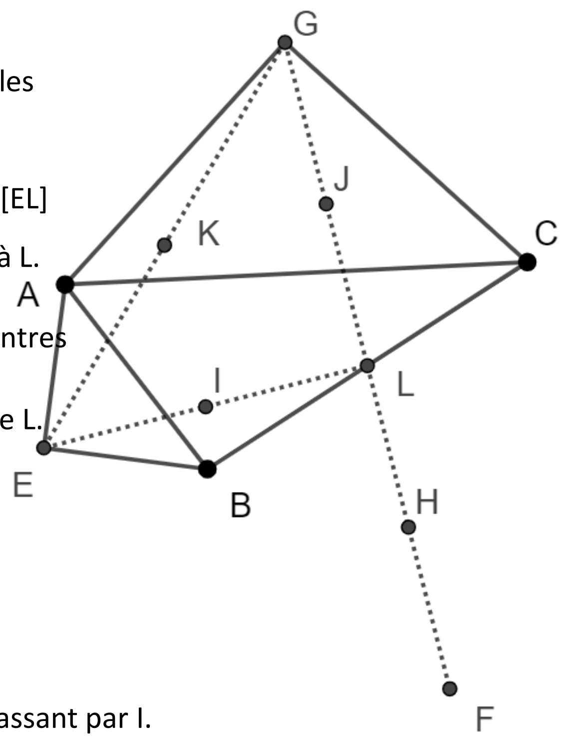
Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre,

ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement e G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des cotes [BC], [GE], [EL] et [GL], F et H sont les symétriques de G et J par rapport à L.

On note R_1 et R_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Déterminer $R_2 \circ S_L \circ R_1(A)$.

Caractériser $R_2 \circ S_L \circ R_1$.

b) En dédire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.

c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.

2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.

On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).

a) Montrer que $\Delta = (IH)$.

b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.

c) Prouver que g est une rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E.

a) Justifier que f est une symétrie glissante.

b) Donner les éléments caractéristiques de f.

4) Soit M un point du plan. On désigne par M′ et M″ les images de M respectivement par f et g.

a) Déterminer $(g \circ f^{-1})(I)$ et $(g \circ f^{-1})(E)$. Caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

b) En déduire que M′ et M″ sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 3 : 35 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(\pi x)$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser

b) Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 0$.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

2) On considère la fonction $g(x) = \begin{cases} \frac{f^{-1}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{\pi} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\frac{x}{\pi(1+x^2)} \leq f^{-1}(x) \leq \frac{x}{\pi}$

c) En déduire la dérivabilité de g à droite en 0.

3) Soit (U) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$: $\frac{k}{\pi(1+n^2)} \leq f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{\pi n^2}$

b) Déduire que pour tout $n \geq 1$: $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2\pi n}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.