Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Nombres complexes

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Rappel

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Produits remarquables

a et b deux nombres complexes

$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$

$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

$(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)(1-i) = 2$

Retenons

1. Soit z un nombre complexe
   $M(z) \Leftrightarrow M(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
3. $I = A * B \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Retenons

Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ un point

- $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Si θ est un argument de z alors :

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

Retenons

1. a et b deux réels ,
   $\overline{a+ib} = a - ib$ et $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.
2. Soit z un nombre complexe.
   - $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
   - $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
   - $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
   - $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
3. $z = a + ib, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Retenons

1. a et b des réels, $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$
2. z at z' des nombres complexes.

   ♣ $\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right|$ $\qquad z \neq 0, \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

   ♣ $z \neq 0, \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{\left|z'\right|}{|z|}$ $\qquad \left|z^n\right| = |z|^n$

   ♣ $|\overline{z}| = |z|,$ $\qquad |z|^2 = z\overline{z}$

   ♣ $|z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,
   $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   ♠ $OM = |z|$, M d' affixe z

   ♠ $AB = |z_B - z_A|$

Arguments (1)

✓ $\arg\left(zz'\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(z'\right)[2\pi]$

✓ $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg\left(z'\right) - \arg(z)[2\pi]$

✓ $\arg\left(z^n\right) \equiv n \cdot \arg(z)[2\pi], n \in \mathbb{Z}$

✓ $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

✓ $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$

✓ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

✓ $z \in i\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

✓ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Arguments (2)

. $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

. $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)[2\pi]$

. $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

. Soit w et w' deux vecteurs non nuls.

- $\left(\widehat{\vec{w}, \vec{w'}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\vec{w'}}}{z_{\vec{w}}}\right)[2\pi]$
- $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w'}}} \in i\mathbb{R}$
- $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w'}}} \in \mathbb{R}$

Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

$$r=\sqrt{a^2+b^2};\quad \cos\theta=\frac{a}{r}\quad \text{et}\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

Forme algébrique $z=a+ib,(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\Longleftrightarrow$ Forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta), r>0$

$$a=r\cos\theta\quad \text{et}\quad b=r\sin\theta$$

Forme exponentielle

Définition

Pour tout réel α , on pose $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ et on lit exponentielle $i\alpha$

Propriétés

- ✓ $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \left|e^{i\theta}\right|=1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right)\equiv\theta[2\pi]$
- ✓ $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta},\qquad -e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)},\qquad ie^{i\theta}=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$
- ✓ $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \forall k\in\mathbb{Z}:\qquad e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$
- ✓ $\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{Z}$, on a : $e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta};\quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')};\quad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

Exemples

$e^{i0}=1; e^{i\frac{\pi}{2}}=i; e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

$e^{i\pi}=-1;\qquad e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Définition

Soit z un nombre complexe de moduler $(r>0)$ et d'argument θ . On écrit $z=r.e^{i\theta}$, Cette écriture s'appelle forme exponentielle de z.

Formules d'EULER

$\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad : \cos\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Formules utiles

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad 1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\quad \text{et}\quad 1-e^{i\theta}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\quad \text{et}\quad e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Equation : $z^n=a,\quad n\geq 1,\quad a\in\mathbb{C}^*$

Théorème et Définition

♣ Pour tout entier naturel non nul n, l'équation: $z^n=1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par : $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$

♣ Les solutions de l'équation: $z^n=1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquences

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Lorsque $n\geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème et Définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul, l'équation: $z^n=a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par :
$z_k=\sqrt[n]{|a|}e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\quad k\in\{0,1,2,\ldots.n-1\}$.
Les solutions de l'équation: $z^n=a$ sont appelées les racines nièmes de a.

Conséquences

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Lorsque $n\geq 3$, les points images des racines nièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$

Equation : $az^2+bz+c=0, \quad a\in\mathbb{C}^*$

Racine carrée

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées
- Soit Δ un nombre complexe non nul.
  1. $z=x+iy$ où x et des réels est une racine carré de Δ si et seulement si $\begin{cases} x^2-y^2=2\,\mathrm{Re}(\Delta) \\ x^2+y^2=|\Delta| \\ 2xy=\mathrm{Im}(\Delta)\end{cases}$
  2. Les racines carrées de Δ sont $\pm\sqrt{|\Delta|e^{i\left(\frac{\arg(\Delta)}{2}\right)}}$.

Théorème et Définition

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a\neq 0$.
L'équation $az^2+bz+c=0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions définies par: $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_i=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $\Delta=b^2-4ac$

ATTENTION
Si $\Delta\notin\mathbb{R}_+$ éviter d'écrire $\delta=\sqrt{\Delta}$

Conséquences

✓ Soit Δ un nombre complexe non nul et δ une racine carrée de Δ.

✓ Si $\Delta=-2$ Alors $\delta=\pm i\sqrt{2}$.

✓ Si $\Delta=b, b\in IR-$ Alors $\delta=\pm i\sqrt{|b|}$

✓ Si $\Delta=2i$ Alors $\delta=\pm(1+i)$.

✓ Si $\Delta=-2i$ Alors $\delta=\pm(1-i)$

✓ Si $\Delta=5i=\dfrac{5}{2}(2i)$ Alors $\delta=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}(1+i)$

✓ $Si\Delta=-5i=\dfrac{5}{2}(-2i)$ Alors $\delta=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}(1-i)$

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0, a\neq 0$
Alors $\quad az^2+bz+c=a(z-z_i)(z-z_z)$

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad z_1z_2=\frac{c}{a}$$

Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Théorème

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n=0$ et $n\geq 2$.
Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n\text{-}1}z^{n-1}+\ldots+a_1z_1+a_0$
Si z_0 est un zéro de $P(z)$ alors $P(z)=(z-z_0)\,g(z)$ où $g(z)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Nombres complexes et transformations

Symétrie orthogonale d'axe $\left(O, \vec{u}\right)$

L'application du plan dans lui qui $\hat{a}$ tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\overline{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\left(O, \vec{u}\right)$.

Translation de vecteur $\vec{w}$

$\vec{w}$ est un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{w}}$ qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est $z'=z+b$.

Homothétie

Soit Ω un point d'affixe z_0 et k un réel. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, qui transforme $M(z)$ en rapport k, qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est : $z'=k(z-z_0)+z_0$

Symétrie centrale de centre O

L'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre O.

Rotation

Soit Ω un point d'affixe z_0 et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ ,qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est :
$z'=e^{i\theta}(z-z_0)+z_0$.

Théorème

Soit f l'application: $M(z)\mapsto M'\left(z'=az+b\right)$ oi a et b sont des nombres complexes:
1. Si $a=1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{w}$ in d'affixe b .
2. Si $|a|=1$ et $a\neq 1$ alors f est la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$.


Q
Magazines