Ex5 (série primitives)

1) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

f est conti sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $x \mapsto \cos x$ est conti et $\neq 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$)

alors f admet une unique primitive F sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que : $F(0) = 0$

2) $H(x) = F(x) + F(-x)$ $\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

H est déri sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car F est déri sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$u : x \mapsto -x$ est dér sur $\mathbb{R}$ en parti sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$u\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

alors $x \mapsto F(-x)$ est dé sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

ainsi $H'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\cos(-x)}$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\cos x} = 0$

donc $H(x) = c$ $\quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$H(0) = F(0) + F(-0) = 0 \iff c = 0$

ainsi $H(x) = 0 \iff F(-x) = -F(x)$

et on a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; $(-x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc F est impaire

3) F est déri sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\cos x} > 0$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$F'(x)$			$+$		
$F(x)$		↗	0	↗	

ainsi

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$F(x)$		$-$	0	$+$	

Ex6

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $F(0) = 0$

1) a) $\Phi(x) = -F(-x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$u : x \mapsto -x$ est dériv sur $\mathbb{R}$
F est déri sur $\mathbb{R} \supset u(\mathbb{R})$

alors $x \mapsto F(-x)$ est déri sur $\mathbb{R}$

d'où Φ est dériv sur $\mathbb{R}$

$\Phi'(x) = -(-F'(-x)) = F'(-x) = f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$

d'où Φ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) Φ et F deux primitives de f sur $\mathbb{R}$ donc

$\underbrace{-F(-x)}_{\Phi(x)} = F(x)$

$\Phi(x) = F(x) + c$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

or $F(0) = 0$

$\Phi(0) = -F(-0) = 0$

$\Rightarrow c = 0$

d'où $\Phi(x) = F(x) \iff \boxed{-F(-x) = F(x) \ \forall x \in \mathbb{R}}$

d'où on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; (-x) \in \mathbb{R}}$ alors $\boxed{F \text{ est impaire}}$

2) $g(x) = F\left(\frac{-1}{x}\right)$; $x \in]0,+\infty[$

a) $u : x \to \frac{-1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$
et F est dérivable sur $\mathbb{R} \supset u(]0,+\infty[)$ $\Rightarrow$ $g = F\circ u$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{-1}{x}\right)^2+1} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

d'où g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

b) F et g sont 2 primitives sur $]0,+\infty[$ alors

$g(x) = F(x) + C$ $\forall x \in]0,+\infty[$

donc $g(1) = F(1) + C \Leftrightarrow F(-1) = F(1) + C$

$\Leftrightarrow -F(1) = F(1) + C$

$\Leftrightarrow \boxed{C = -2F(1)}$

$g(x) = F(x) + C \Leftrightarrow F\left(\frac{-1}{x}\right) = F(x) - 2F(1)$

$\Leftrightarrow -F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x) - 2F(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\forall x \in]0,+\infty[$

c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)} = \lim_{x\to+\infty} 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{2F(1) = \ell}$

car : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3) a) $h(x) = F(\tan x)$; $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\begin{cases} u : x \to \tan x \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{et } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \supset u\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $h = F\circ u$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $h'(x) = (1+\tan^2 x)\, F'(\tan x) = (1+\tan^2 x)\, f(\tan x) = 1+\tan^2 x \times \frac{1}{\tan^2 x+1}$

$= 1$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) On a $h'(x) = 1$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow h(x) = x + C$ " "

$\Leftrightarrow F(\tan x) = x + C$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $F(\tan 0) = 0 + C \Leftrightarrow F(0) = C \Leftrightarrow 0 = C$

ainsi $h(x) = x$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

or $\ell = 2F(1) \Leftrightarrow \boxed{\ell = \frac{\pi}{2}}$

$I \longmapsto J$

$x \longrightarrow f(x) = y$

f conti et strictement monotone
donc elle réalise une bije de I sur $f(I) = J$

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\quad n \geq 2$

$x \longmapsto x^n$

$f'(x) = n x^{n-1} \geq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\left.\right\}$ f est stri ↗ sur $\mathbb{R}_+$, cont

x	0	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

f réalise une bije de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

$f(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$f(x) = x^2$

$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$

$f(y) = x \Leftrightarrow y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

$f(x) = x^n$

$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

$f(y) = x \Leftrightarrow y^n = x$

$y = \sqrt[n]{x}$

$y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

* $\sqrt[n]{a^n} = a \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \qquad \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$

$h(x) = \sqrt[n]{x}$ conti sur $[0, +\infty[$ déri sur $]0, +\infty[$

$h'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

$h(x) = \sqrt[n]{u(x)}$

u déri et > 0 sur I $\Longrightarrow$ h est dériv sur I

$h'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

Ex1 (serie racine nième)

1) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$ il faut que : $x^2-1 \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty;-1] \cup [1,+\infty[$

$\forall x \in D_f \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1 \Leftrightarrow$
$-x \geq 1$ ou $-x \leq -1 \Leftrightarrow$
$-x \in D_f$

$f(-x) = \sqrt[4]{(-x)^2-1} = \sqrt[4]{x^2-1} = f(x)$

d'où f est paire

2) a) $x \geq 1$: $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1} = \sqrt[4]{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$

$= \sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty}\underbrace{\sqrt[4]{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}_{\to 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[4]{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty}} = 0$

(C_f admet une B.P de direction $(O,\vec{i})$ au $V(+\infty)$)

3) a) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^4}}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt[4]{\frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{(x-1)^3}_{\to 0^+}}} = +\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 1 (C_f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en 1)

b) $x \mapsto x^2-1$ est dériv et >0 sur $]1,+\infty[$
alors f est dériv sur $]1,+\infty[$
et $f'(x) = \frac{2x}{4\left(\sqrt[4]{x^2-1}\right)^3} = \frac{x}{2\left(\sqrt[4]{x^2-1}\right)^3}$

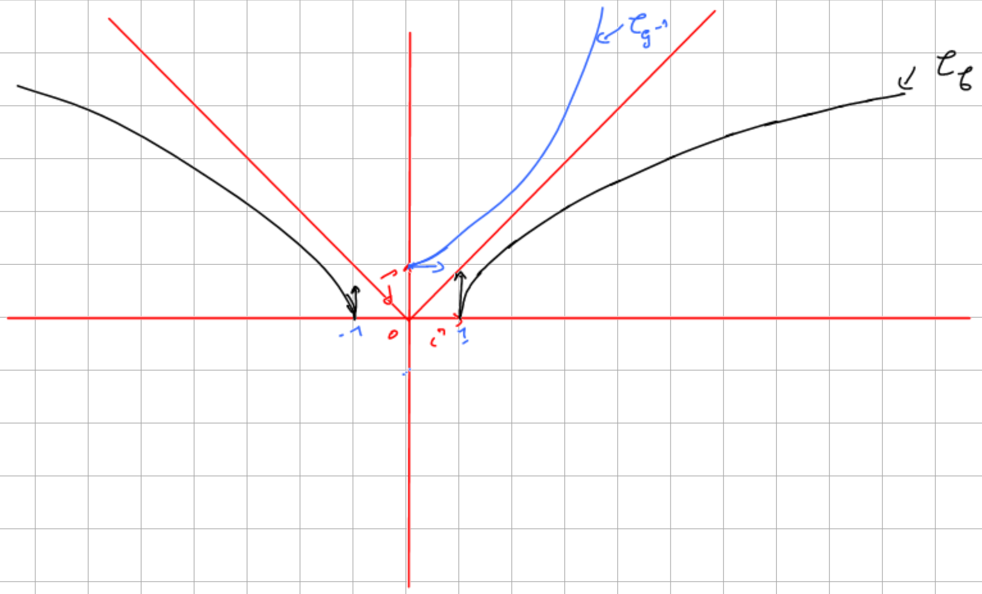
c) on a : $\forall x \in]1,+\infty[$; $f'(x) = \frac{x}{2\left(\sqrt[4]{x^2-1}\right)^3} > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $f(x) - x = \sqrt[4]{x^2-1} - \sqrt[4]{x^4}$

on a : $x \geq 1 \Leftrightarrow x^4 \geq x^2 > x^2-1$
$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4} > \sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2-1} - \sqrt[4]{x^4} < 0$
$\Leftrightarrow f(x) - x < 0 \Leftrightarrow f(x) < x$

donc C_f est strictement au dessous de Δ $\forall x \in [1,+\infty[$



5) a) g est conti et strict ↗ sur $[1,+\infty[$

Alors g réalise une bijec de $[1,+\infty[$ sur $\overbrace{g([1,+\infty[) = [0,+\infty[}^{J}$

b) g est dér sur $]1,+\infty[$
$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]1,+\infty[$ $\Big\} \Rightarrow$ $\boxed{g^{-1} \text{ est déri sur } g(]1,+\infty[) =]0,+\infty[}$

on a : $\mathcal{C}_g$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en 1

alors $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ admet une demi-tangente horizontale à droite en 0

donc $\boxed{g^{-1} \text{ est dériv à droite en } 0 \text{ et } (g^{-1})'_d(0) = 0}$

ainsi g^{-1} est déri sur $[0,+\infty[= J$