Primitives

Exercice 1 : 30 min 5 pts

① $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ est continue sur $]-1,+\infty[$.

$$f(x) = \frac{x+1-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \sqrt{x+1} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\int u'\sqrt{u} = \frac{2}{3}u\sqrt{u}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2 \times 2\sqrt{x+1} + c}$$

où $c \in \mathbb{R}$.

② $f : x \mapsto x^3 (x^2+1)^{2022}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = x(x^2+1-1)(x^2+1)^{2022}$$

$$= x(x^2+1)^{2023} - x(x^2+1)^{2022}$$

$$= \frac{1}{2}\, 2x\,(x^2+1)^{2023} - \frac{1}{2}\, 2x\,(x^2+1)^{2022}$$

$u' \times u^n$ $\qquad$ $u' \times u^n$

$$\boxed{\int u' \times u^n = \frac{1}{n+1}\, u^{n+1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2024}(x^2+1)^{2024} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2023}(x^2+1)^{2023} + C$$

ou $C \in \mathbb{R}$.

③ $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(x^2+1-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\, 2x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\, \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int u'\sqrt{u} = \frac{2}{3} u\sqrt{u} \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} + C$$

$C \in \mathbb{R}$.

(4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-\sin x}$ et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}}$$

$$\boxed{F(x) = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C} \; ; \; C \in \mathbb{R}.$$

(5) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

et $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$$\int \frac{uv' - u'v}{u^2} = \frac{v}{u}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{\sin x}{x} + c} \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

⑥ $f : x \longmapsto \dfrac{\tan^2(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$ est continue sur $]-1, 1[$.

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \left(1 + \tan^2(\sqrt{x+1}) - 1\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1 + \tan^2(\sqrt{x+1})\right) - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\boxed{\int u' \cdot (v' \circ u) = v \circ u}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

$$\boxed{F(x) = 2 \times \tan(\sqrt{x+1}) - 2\sqrt{x+1} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.}$$

⑦ $f : x \longmapsto x \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = x \sin x - \cos x + \cos x$$

$$\boxed{\int u v' + u' v = u \cdot v}$$

$$\boxed{F(x) = -x\cos x + \sin x + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}}$$

(8) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$f(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int u^n \times u' = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$$

$$\boxed{F(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.}$$

9) $f : x \mapsto \cos^2 x \sin^3 x$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \cos^2 x \sin^2 x \sin x$$
$$= \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x$$
$$= \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$$
$$= -(-\sin x)\cos^2 x + (-\sin x)\cos^4 x .$$

$$\int u' \times u^n = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.}$$

10) $f : x \mapsto \sin^5 x - \cos^4 x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$1^{\text{è}}$M :

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$$
$$= \frac{1}{32i}\left(e^{i5x} - e^{-i5x} + 5e^{-i3x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}\right)$$

Triagle de pascale :

$$\begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \boxed{1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1} \end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$= \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5x) - 5\times 2i\sin(3x) + 10\times 2i\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x\right)$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + e^{-i4x} + 4e^{i2x} + 4e^{-i2x} + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 4\times 2\cos(2x) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin x - \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{8}.$$

$$F(x) = \frac{-1}{16\times 5}\cos(5x) + \frac{5}{16\times 3}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos x$$

$$- \frac{1}{8\times 4}\sin(4x) - \frac{1}{2\times 2}\sin(2x) - \frac{3}{8}x + c$$

$c \in \mathbb{R}$:

2°M :

impair.

$\odot$ $\sin^{5} x = \sin x \,(\sin x)^4$

$$= \sin x \,(1-\cos^2 x)^2$$

$$= \sin x\,(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= \sin x - 2\sin x\cos^2 x + \sin x \cos^4 x$$

$\odot$ $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$

$$= \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

Ex 2 :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \; ; \; x \in \mathbb{R}.$$

1) $x \longmapsto x^2+1$ est une f^t polynômé dble sur $\mathbb{R}$ et strictement positive alors $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est dble sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto x$ est dble sur $\mathbb{R}$

d'où f est dble sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

RM : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2+1 > x^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

2eM :

$$= \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} > 0$$

car $\forall x \in \mathbb{R}$; $\quad x^2 + 1 > x^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R})$.

or f est continue sur $\mathbb{R}$, alors

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[= \left]0, +\infty\right[= I$$

car $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+1}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$$

2) $g(x) = x\, f^{-1}(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

a) f est bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dble sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}$ est dble sur $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{\boxed{\sqrt{x^2+1} + x}}{\boxed{x + \sqrt{x^2+1}} - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

⊙ g est dble sur $]0, +\infty[$ (produit de 2 fts dbles sur $]0, +\infty[$).

et $\forall x \in]0, +\infty[$ on a :

$$g'(x) = f^{-1}(x) + x \cdot (f^{-1})'(x)$$

$$= f^{-1}(x) + x \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= f^{-1}(x) + x \cdot \frac{f(f^{-1}(x)) - f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x))}$$

$$= f^{-1}(x) + \cancel{x} \cdot \frac{x - f^{-1}(x)}{\cancel{x}}$$

$$= f^{-1}(x) + x - f^{-1}(x)$$

$$= x$$

c) on a $g' : x \mapsto x$ est contu sur $]0,+\infty[$

alors $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$.

or $g(1) = 1 \times f^{-1}(1)$

$= 1 \times 0 = 0$ car $f(0) = 1$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

d'où $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

or $\forall x \in]0, +\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{g(x)}{x}$

$= \boxed{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}}$

Ex3 :

on pose $t^2 + t + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$.

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $t^2 + t + 3 > 0$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $f^2(x) + f(x) + 3 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$

sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2°/ $f'(x) = \dfrac{1}{\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} > 0$

b) ⊙ f est dble sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est contu sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f^{-1} est contu sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

⊙ f est strict ↗ sur $\mathbb{R}$, alors

f^{-1} est aussi strict ↗ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) ⊙ f est dble sur $\mathbb{R}$
⊙ $\forall y \in \mathbb{R}$; $f'(y) \neq 0$
alors f^{-1} est dble sur $\mathbb{R} = f(\mathbb{R})$

et $\forall x \in \mathbb{R}$; $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$= \left(f(f^{-1}(x))\right)^2 + f(f^{-1}(x)) + 3$

$= x^2 + x + 3$.

b) $x \mapsto x^2 + x + 3$ est contu sur $\mathbb{R}$

alors $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$

où $c \in \mathbb{R}$

or $f(0)=0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

d'où $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x.}$

c) f^{-1} est dble sur $\mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(x) = x^2 + x + 3$

et $x \mapsto x^2 + x + 3$ est dble sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $(f^{-1})''(x) = 2x + 1.$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

$(f^{-1})''$ s'annule en changeant de signe au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$, donc $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet un point d'inflexion I.

de cordonnés $\left(-\frac{1}{2}, f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

$\Rightarrow \boxed{I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{12}\right)}$.

d) le pt $I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{12}\right)$ est un pt d'inflexion de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétrique par rapport à la d^te Δ d'éq $y = x$, alors le point $J\left(-\frac{17}{12}, -\frac{1}{2}\right) = S_\Delta(I)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

2°M : f est dble sur $\mathbb{R}$

et $f^2(x) + f(x) + 3 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

alors f' est dble sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -\frac{2f'(x)f(x) + f'(x)}{\left(f^2(x) + f(x) + 3\right)^2}$$

$$= \frac{-\overset{\neq 0}{f'(x)}\left[2f(x)+1\right]}{\left(f^2(x)+f(x)+3\right)^2}$$

$f''(x)=0 \iff 2f(x)+1=0$

$\iff f(x) = -\frac{1}{2}$.

$\iff x = -\frac{17}{12}$

car $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{12}$.

⊙ si $x > -\frac{17}{12} \Rightarrow f(x) > f\left(-\frac{17}{12}\right)$ car $f \nearrow$

$\Rightarrow f(x) > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2f(x)+1 > 0$.

⊙ si $x < -\frac{17}{12} \Rightarrow 2f(x)+1 < 0$

d'où

x	$-\infty$		$-\frac{17}{12}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

et f'' s'annule et change de signe en $-\frac{17}{12}$ alors C_f admet un pt d'inflexion de coordonnées $\left(-\frac{17}{12}, -\frac{1}{2}\right)$.