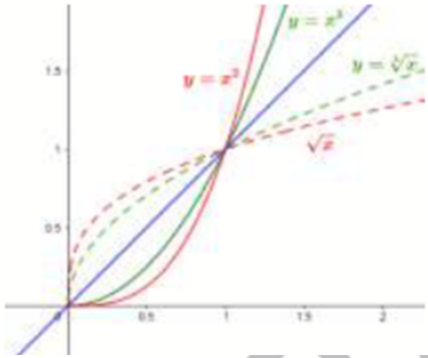
Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Théorème et définition



Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
Elle admet une fonction réciproque **strictement croissante** de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$,appelée fonction **racine n^{ème}**

Conséquences :

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $h: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$

De plus, $h'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$, pour tout $x > 0$

4) Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$, $n \geq 2$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.

la fonction $g: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$

De plus, $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Vérifier que f est une fonction paire

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

4) a) On désigne par Δ la droite d'équation $y = x$

Etudier la position relative de la courbe C_f et la droite Δ sur $[1, +\infty[$

b) Tracer la courbe C_f

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J

c) Tracer la courbe C' de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 2

A) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{|x^2 - 4|}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement les résultats trouvés

2) a) Justifier que f est dérivable sur $[0, +\infty[\setminus\{2\}$

b) Dresser le tableau de variation de f puis construire la courbe de f

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à préciser.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

B) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

2) Montrer que U est une suite décroissante

3) En déduire que la suite U est convergente vers un réel qu'on note par l

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{1}{8}U_n^3 \leq U_n - U_{n+1}$

b) En déduire la valeur de l