Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Série 27 : Fonction ln

Nom du prof : M. ZOGHBI Naoufel

Exercice 1 : 30 min 4 pts

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x \succ 0 \\ f(0)=0. \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
   b) Etudier la dérivabilité à droite de f en 0. Interpréter graphiquement.
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2)a) Montrer que pour tout $a>0$, on a : $\ln\left(\dfrac{a+1}{a}\right) > \dfrac{1}{a+1}$. (on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle [a ;a+1]).
   b) Etudier alors les variations de f sur $[0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

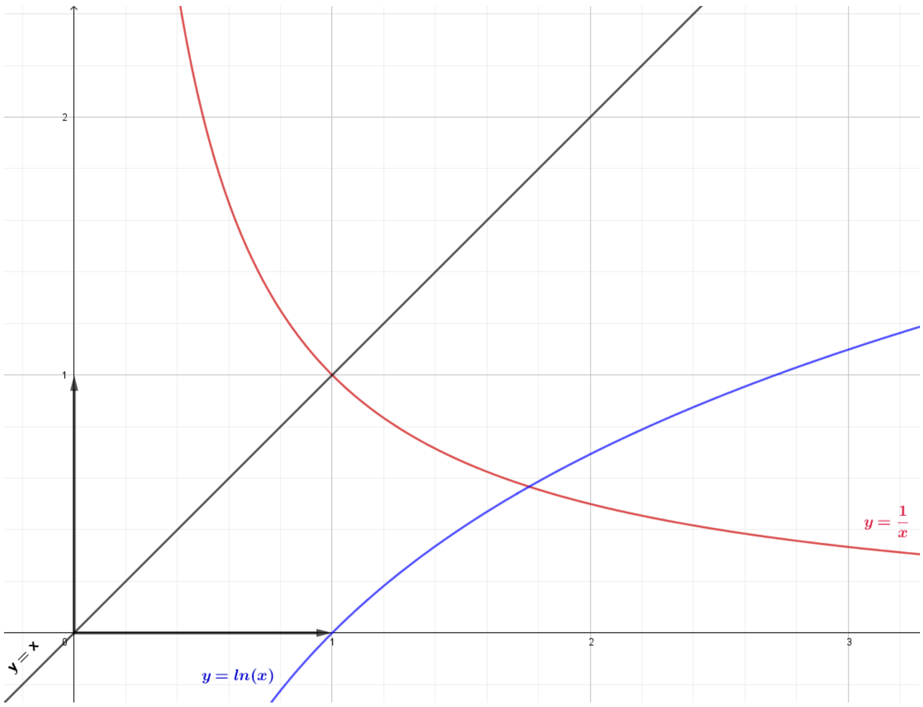
3)a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Montrer que les courbes représentatives (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ se coupent au point O et en un second point A dont on déterminera les coordonnées.

4) On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (Γ) et (Γ').
d'équations respectives y = ln(x) et $y=\dfrac{1}{x}$ ainsi que la droite Δ d'équation y = x.

a) Construire le point A ainsi la tangente (T) à (C_f) en A.

b) Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations respectives x=0 et $x=\dfrac{1}{e-1}$.



Exercice 2 : 25 min 4 pts

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2°) Soit $x \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ et φ la fonction définie sur]0,+ [par :

$$\varphi(t) = \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t\ln t - 1 + t$$

a) Calculer $\varphi(x)$ et $\varphi(1)$.

Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1et x tel que $\varphi'(c) = 0$

b) En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

c) Donner l'équation da la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

3°)a) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = $1 - x^2 + 2x\ln x$

Dresser le tableau de variation de g' puis celui de g et en déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4°) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C) .

Exercice 3 : 30 min 5 pts

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par f(x)=x - ln(x).

1) Dresser le tableau de variations de f puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) On désigne par (a_n) la suite définie par $a_0 > 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

a. Montrer que $a_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

b. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

c. On pose $b_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(t)dt$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

i/ Montrer que $a_{n+2}\ln(a_n) \leq b_n \leq a_{n+1}\ln(a_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ii/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{\ln(a_n)}$.

3) Soit $\lambda \in]0;1[$, on pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(x)dx$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\})$

a. Calculer $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda\to0^+} I(\lambda)$.

b. Montrer que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour $1 \leq k \leq n-1$.

c. En déduire que: $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ puis que: $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

4) On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

a. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. .

b. En déduire que $S_n = \frac{n+1}{2n} - \ln(u_n)$.

c. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}$.

Exercice 4 : 40 min 6 pts

Soit f la fonction définie sur [0;+∞[par $\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. interpréter graphiquement.

b. Dresser le tableau de variations de f .

2) On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives y = x et y = - x.

a. Construire les points A et B d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b. Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c. Tracer la courbe (C_f).

d. Soit S la partie du plan limitée par (C_f) et les droites Δ et Δ'.

Montrer que l'aire de S $= \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$.

3)a. Montrer que l'équation (E_n) : f(x)=n ($\forall n \geq 1$) possède, sur [1;+∞[, une unique solution qu'on notera α_n .

b. Quelle est la monotonie de la suite (α_n) ?

c. Montrer que $\forall n \geq 3, \alpha_n \leq n$.

d. En déduire que $\forall n \geq 3, \alpha_n \geq \frac{n}{\ln n}$ puis $\alpha_n \leq \frac{n}{\ln n - \ln(\ln n)}$.

e. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)\alpha_n}{n}$.

4) On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

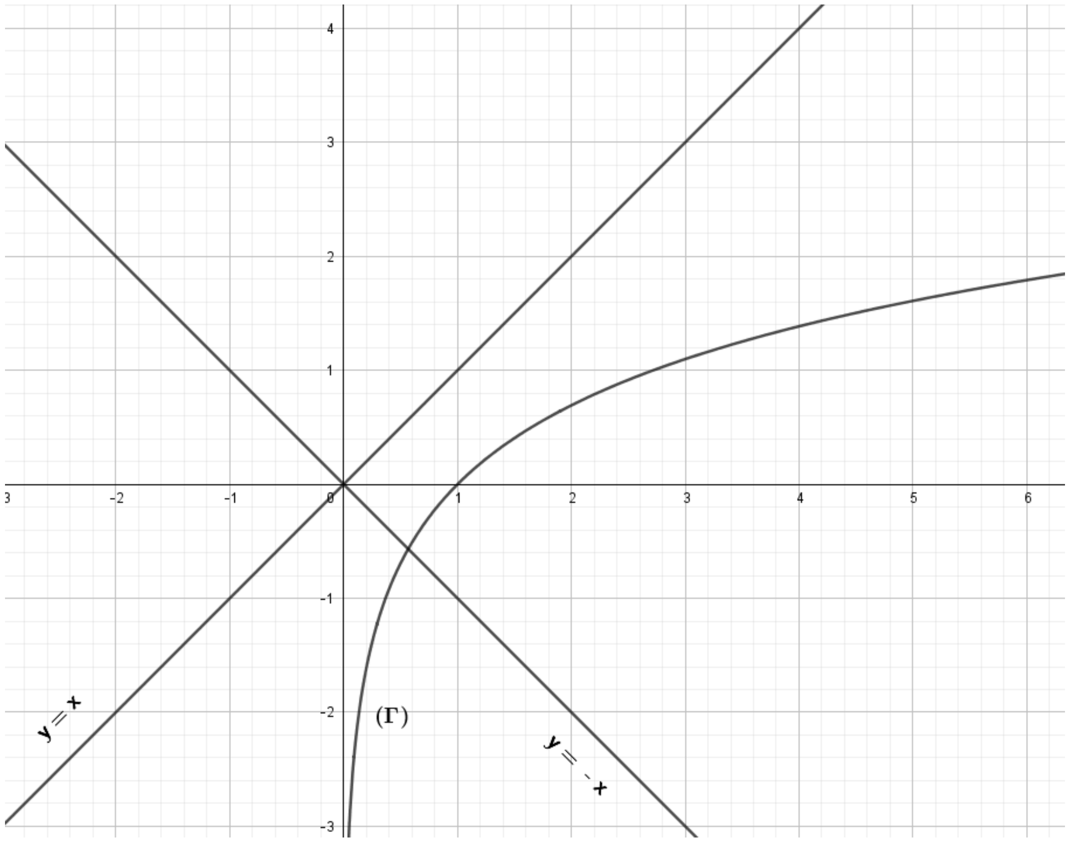
a. Calculer I_0 et I_1.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. En déduire I_2 .

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} \leq I_n$.

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$.

e. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n}$.



Exercice 5 : 35 min 6 pts

On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(1+x)$. On désigne par ($C_g$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$.

A/1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer g'(x) pour tout réel x > -1. Dresser le tableau de variations de g.

c) Montrer que l'équation g(x)=0 admet dans $]-1;+\infty[$ deux solutions 0 et $\propto$ tel que $\propto>1$.

En déduire le signe de g(x) pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

d) Tracer (C_g).

2) Soit n un entier naturel $\ge$ 4.

a) Montrer que l'équation $g(x)=\frac{1}{n}$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $]0;1[$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)= $\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

a) Vérifier que f est impaire.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
c) Montrer que pout tout réel non nul x, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} g(x^2)$
d) Montrer que $f(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$ puis dresser le tableau de variations de f.

B/ On considère la fonction F définie $\mathbb{R}$ sur par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) Etudier la parité de F.
2)a) Calculer pour tout $x \geq 1$, $I = \int_1^x \left(\dfrac{2\ln t}{t}\right)dt$.
b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \dfrac{1}{t}\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt$.
c) Montrer que pout tout réel $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \int_1^x \dfrac{1}{t}\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt \leq \dfrac{1}{2}$.
d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

3)a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
b) Tracer une allure de la courbe représentative (C_F) de F dans un repère orthonormé.