Circuit RLC en régime sinusoïdal forcée

I- Réponses d'un circuit RLC à une excitation sinusoïdale

1. Oscillations forcées :

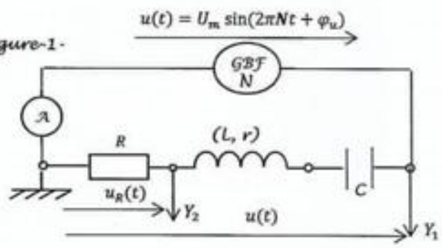
On réalise le circuit de la figure 1, comportant montés en série :

- ✓ une bobine d'inductance L et de résistance r,
- ✓ un condensateur de capacité C,
- ✓ un conducteur ohmique de résistance R ,
- ✓ un interrupteur K et un ampèremètre (A) de résistance négligeable.

L'ensemble est alimenté par un générateur de basses fréquences (GBF) délivrant une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\sin(2\pi Nt + \varphi_u)$, de tension efficace U constante et de fréquence N réglable.

A l'aide d'un oscilloscope bicourbe, on visualise simultanément la tension $u(t)$ et la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor R. on obtient les oscillogrammes de la figure 2.

Figure-1-



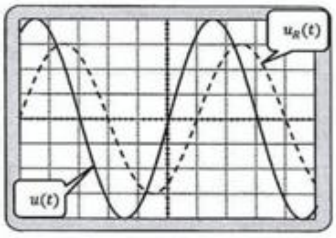


Figure -2-

- ✓ On visualise :
- ✓ Sur la voie Y_1 : $u(t)$, c'est la tension aux bornes du circuit (RLC).
- ✓ La voie Y_2 : permet d'observer les variations de $i(t)$; puisque $u_R(t) = Ri$; $i = \frac{u_R}{R}$ (Car $u_R(t)$ est proportionnel à $i(t)$ ou $u_R(t)$ et $i(t)$ sont en phase).
- ✓ L'intensité $i(t)$ du courant a la même fréquence N que la tension appliquée $u(t)$; ces deux grandeurs sont déphasées.
- ✓ Conclusion :

La tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant oscillent avec la même fréquence N imposé par le GBF. Ce résultat nous explique pourquoi les oscillations du circuit RLC sont dites **forcées**.

2. Impédance électrique du circuit RLC : Z

Le rapport $\frac{U}{I}$ reste sensiblement constant ; il caractérise le circuit RLC considéré (à la fréquence choisie). On lui donne le nom **d'impédance** du circuit et on le note Z.

$$U = ZI$$

L'impédance d'une portion de circuit soumis à un régime sinusoïdal est le rapport entre les valeurs efficaces (ou maximale) de la tension appliquée et de l'intensité du courant qui le parcourt. (Z s'exprime en Ω).

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$$

3. **Influence de la fréquence.**

- ✓ On maintient constante la valeur efficace U de la tension appliquée $u(t)$ et on fait varier la fréquence N de cette tension. On mesure les valeurs de l'intensité I : on obtient une courbe qui a l'allure de celle de la figure 3.
- ✓ Cette courbe traduit la réponse en intensité du circuit RLC en fonction de la fréquence N. On voit que I dépend de la fréquence ; il en est de même de l'impédance Z.
- ✓ On constate que I est maximal pour $N = N_0$; on est à la **résonance** d'intensité.
- ✓ Lorsque $N = N_0$, on constate que $u(t)$ et $u_R(t)$ sont en phases. (Figure 4)

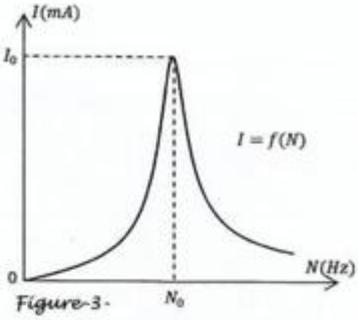


Figure-3-

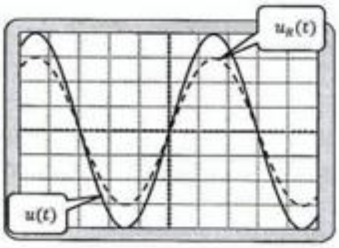


Figure -4-

- L'intensité efficace I dans un circuit et son impédance Z dépendent de la fréquence N de la tension appliquée.
- Lorsque $N = N_0$: phénomène de résonance d'intensité.

II- Etude théorique du circuit RLC série

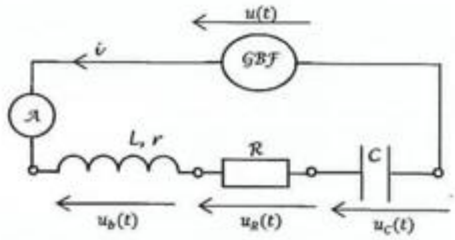
1. **Equation différentielle du circuit.**

Q : Etablir l'équation différentielle du circuit relative à l'intensité du courant $i(t)$.

$$u_b(t) + u_R(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri + \frac{q}{C} = u(t) \qquad i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i\,dt$$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + (r+R)i + \frac{1}{C}\int i dt = u(t)}$$



- Cette équation différentielle admet comme solution particulière $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

2. Résolution de l'équation différentielle par la méthode de Fresnel

- On pose :

✓ $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ avec $\omega = 2\pi N$.

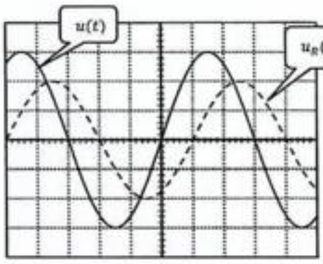
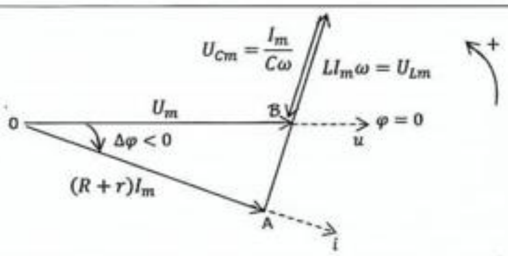
✓ Déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$: $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u = \varphi_i$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} \; + \; (r+R)\,i \; + \; \frac{1}{C}\int i dt \; = \; u(t)}$$

$$LI_m\omega \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) + (R+r)\,I_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t)$$

$$\vec{V}_2\left(LI_m\omega \,;\, \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \; + \; \vec{V}_1\left((r+R)I_m \,;\, \varphi_i\right) \; + \; \vec{V}_3\left(\frac{I_m}{C\omega} \,;\, \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) \; = \; \vec{V}\,(U_m \,;\, 0)$$

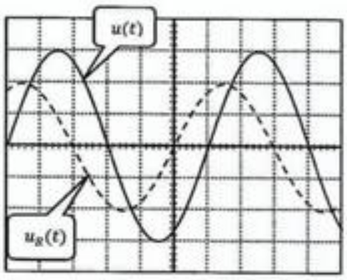
- Les vecteurs de Fresnel $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ étant de sens contraires, il en résulte trois constructions possibles :

Nature du circuit	Construction de Fresnel
$L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow LC\omega^2 > 1 \Rightarrow \omega^2 > \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ $\omega > \omega_0$; $N > N_0$  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u < 0$ $i(t)$ est en retard de phase par rapport à $u(t)$: Circuit inductif	 $OB^2 = OA^2 + AB^2 \Rightarrow U_m^2 = (R+r)^2 I_m^2 + I_m^2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ $U_m^2 = I_m^2[(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2]^2$ $Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ $\Delta\varphi < 0$, $tg\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R+r}$ $-\frac{\pi}{2} rad < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2} rad$

<table>
<tr><th>Nature du circuit</th><th>Construction de Fresnel</th></tr>
<tr><td>

$$L\omega < \frac{1}{C\omega}$$

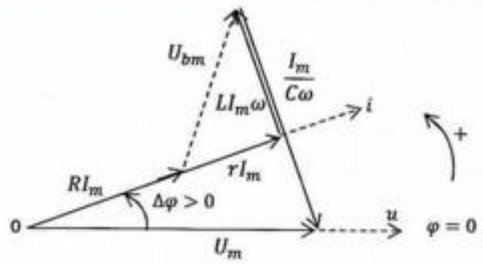
$$\omega < \omega_0 \,; \quad N < N_0$$



$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u > 0$$

$i(t)$ est en avance de phase par rapport à $u(t)$: Circuit capacitif

</td><td>



$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Delta\varphi > 0\,, \quad tg\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R+r}$$

$$Cos\Delta\varphi = (R+r)\frac{I_m}{U_m} = \frac{(R+r)}{Z}$$

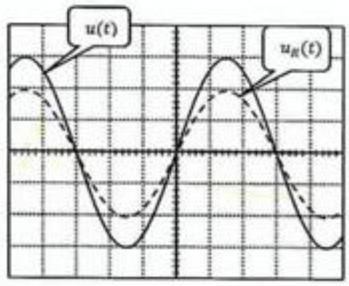
$$-\frac{\pi}{2} rad < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2} rad$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Nature du circuit</th><th>Construction de Fresnel</th></tr>
<tr><td>

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

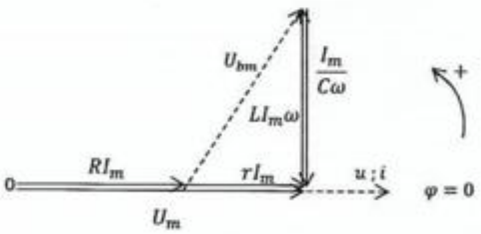
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \,; \quad N = N_0$$



$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u = 0$$

$i(t)$ et $u(t)$ sont en phase :
Circuit résistif

</td><td>



$$Z = R + r$$

L'impédance Z est minimale. Par conséquent, l'intensité maximale prend sa valeur la plus élevée $I_{m0} = \frac{U_m}{(R+r)}$:

C'est la résonance d'intensité

</td></tr>
</table>

3. Phénomène de résonance d'intensité

❖ Influence de la résistance

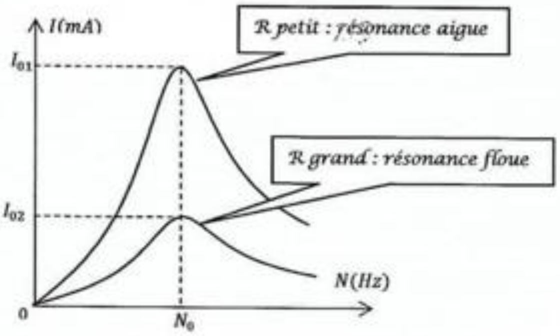


Figure -5-

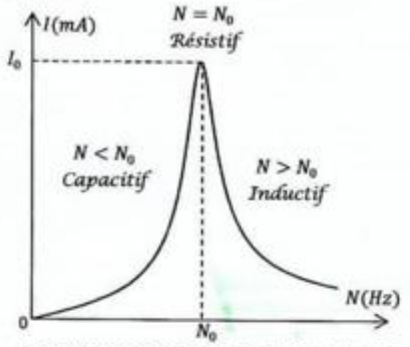
- ✓ La résonance d'intensité du courant d'un oscillateur RLC série est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.
- ✓ La fréquence de résonance $N = N_0$, quel que soit la valeur de R.
- ✓ L'appellation d'un oscillateur en régime forcé comme étant un résonateur revient au phénomène de résonance.

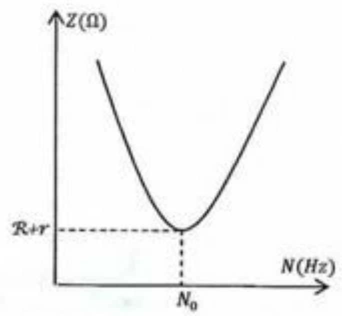
❖ A la résonance d'intensité :

- ✓ $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $N = N_0$; $LC\omega^2 = 1$
- ✓ L'impédance du circuit est minimale $Z = R + r$ (puisque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$). On en déduit la valeur maximale I_0 de l'intensité efficace I :

  $I_0 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R+r}$: I_0 est donc fonction décroissante de R ; c'est un résultat trouvé à partir des courbes de la figure 5.
- ✓ L'effet de l'inductance compense exactement celui de la capacité. Tout se passe comme si le circuit s'identifiait à la résistance (R+r).
- ✓ L'intensité $i(t)$ est en phase avec la tension appliquée $u(t)$: $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u = 0$

En résumé :





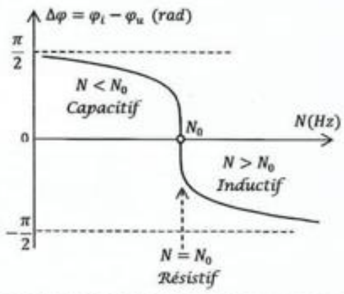
$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}}$$

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}$$

$$tg\,\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{2\pi NC} - 2\pi NL}{R+r}$$

$$Cos\Delta\varphi = \frac{(R+r)}{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2}rad < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}rad$$



Remarques importantes :

- ✓ $u_R(t)$ peut-être soit en **avance** soit en **retard** de phase par rapport à $u(t)$ mais on a toujours $U_m > U_{Rm}$, car $Z > R$.
- ✓ $u_C(t)$ est toujours en **retard** de phase par rapport à $i(t)$.
- ✓ $u_b(t)$ est toujours en **avance** de phase par rapport à $i(t)$.

4. **Phénomène de surtension**

A la résonance d'intensité d'un circuit RLC série, il peut surgir aux bornes du condensateur une surtension caractérisée par le facteur de surtension Q :

$$Q = \frac{U_{Cm}}{U_m} = \frac{U_C}{U} \quad (sans\ unité)$$

- ✓ Le facteur de surtension Q est d'autant plus grand que la résonance est plus aiguë.
- ✓ Une surtension élevée peut entrainer des conséquences néfastes (claquage du condensateur,.....).
- ✓ Ce facteur est déterminer où le circuit est en état de résonance d'intensité $(Q > 1)$.

A la résonance d'intensité :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad U = ZI_0 = (R+r)I_0 \qquad U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} \qquad L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{(R+r)} = \frac{1}{(R+r)C\omega_0} = \frac{1}{(R+r)}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

III. Puissance moyenne :

La puissance moyenne reçue par un circuit RLC est :

$$P = U\,I\,\cos\Delta\varphi = \frac{1}{2}U_m I_m\ \cos\Delta\varphi$$

- ✓ Le terme **cosΔφ** qui dépend du dipôle considéré par ses caractéristiques R, L, C est le **facteur de puissance** de la portion du circuit.
- ✓ P s'exprime en Watts (W).

- $P = U\,I\cos\Delta\varphi$: Avec $U = ZI$ $\cos\Delta\varphi = \dfrac{R+r}{Z}$

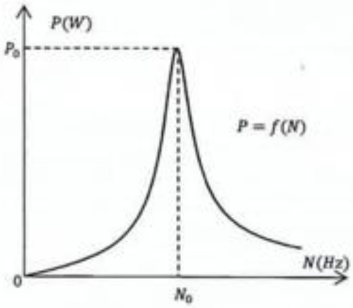
$$\boxed{P = (R+r)\,I^2}$$

La puissance moyenne reçue par un circuit RLC apparait sous forme thermique dans la résistance totale du circuit.

- Résonance de puissance :

A la résonance d'intensité $(\cos\Delta\varphi = 1)$, P est maximale : $P_0 = U\,I_0$

A la résonance d'intensité, correspond une résonance de puissance.



IV- Résonance de charge

$$Q_m = \frac{I_m}{\omega} \quad . \text{ Or } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ , d'où } \quad Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2\omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2}}}$$

- Q : Montrer à la résonance de charge : $N_r = \sqrt{N_0^2 - \dfrac{(R+r)^2}{8\pi^2L^2}}$

$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{g(\omega)}} \quad \text{Avec} \quad g(\omega) = (R+r)^2\omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2$$

La valeur Q_m de la charge q du condensateur est à sa valeur la plus élevée si $g(\omega)$ est minimale $\Rightarrow g'(\omega) = 0$

$$g'(\omega) = 2\omega(R+r)^2 + 2\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)(-2L\omega) = 0 \quad \Rightarrow 2\omega\left[(R+r)^2 + 2L^2\omega^2 - \frac{2L}{C}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[(R+r)^2 + 2L^2\omega^2 - \frac{2L}{C}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R+r)^2}{2L^2} = \omega_r^2$$

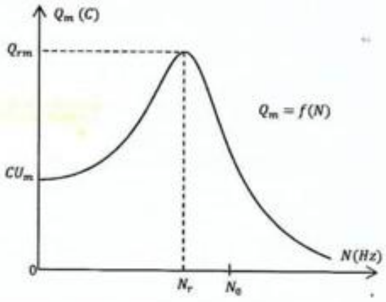
or $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi N_0$; $\omega_r = 2\pi N_r$

$$\boxed{\Rightarrow N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{(R+r)^2}{8\pi^2L^2}}}$$

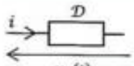
Un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de fréquence N entre en résonance à la fréquence :

$$N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{(R+r)^2}{8\pi^2 L^2}}$$

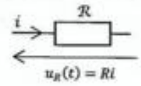
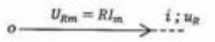
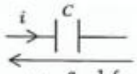
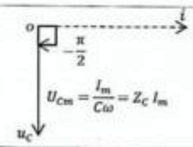
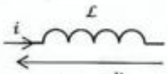
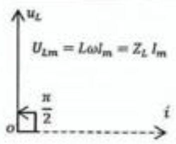
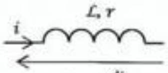
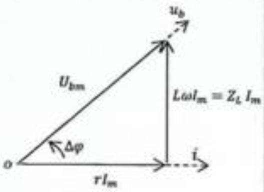
$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{4\pi^2N^2(R+r)^2 + \left(4\pi^2N^2L - \frac{1}{C}\right)^2}}$$



V- Impédance d'un dipôle (D)

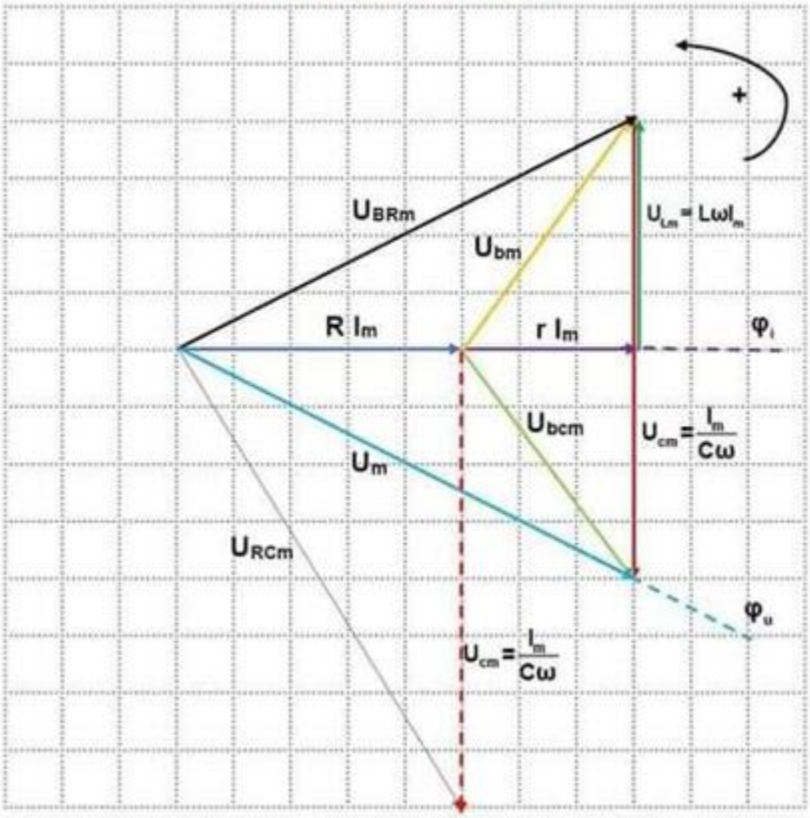


$$Z_D = \frac{U_{Dm}}{I_m}$$

Dipôle	Construction de Fresnel	Impédance
 $u_R(t) = Ri$		$Z_R = R$ $\varphi_{u_R} - \varphi_i = 0$ *i(t) et u(t) sont en phase*
 $u_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$		$Z_C = \frac{1}{C\omega}$ $\varphi_{u_C} - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$ rad *$u_C(t)$ est en quadrature retard sur i(t)*
 $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$		$Z_L = L\omega$ $\varphi_{u_L} - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ rad *$u_L(t)$ est en quadrature avance sur i(t)*
 $u_b(t) = L\frac{di}{dt} + ri$		$Z_b = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$ $\Delta\varphi = \varphi_{u_b} - \varphi_i > 0$ *$u_b(t)$ est en avance de phase sur i(t)* $tg\Delta\varphi = \frac{L\omega}{r}$

Construction de Fresnel

Cas d'un circuit capacitif



Cas d'un circuit inductif