Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4$^{\text{ème}}$ Mathématiques

Série n°1: Primitives

Nom du prof : Aguir Imed

Exercice 1 : 30 min 5 pts

Déterminer une primitive F de f sur I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$; $I=]-1,+\infty[$

2) $f(x) = x^3(x^2+1)^{2022}$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$; $I=\mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

5) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$; $I=]0,+\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\tan^2(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$; $I=]-1,1[$

7) $f(x) = x\sin x$; $I=\mathbb{R}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$; $I=[0,\dfrac{\pi}{2}[$

9) $f(x) = \cos^2 x\sin^3 x$; $I=\mathbb{R}$

10) $f(x) = \sin^5 x - \cos^4 x$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 2 : 20 min 3 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.

2) On considère la fonction g définie pour tout $x\in I$ par $g(x)=xf^{-1}(x)$.

a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur I.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$.

En déduire que, pour tout $x\in I$, $g'(x)=x$.

c) Déterminer alors $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Exercice 3 : 20 min 3 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$f(0)=0$; $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)+3}$.

1)a) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) En déduire la continuité et les variations de f^{-1} vers $\mathbb{R}$.

2)a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

b) En déduire que $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

c) Montrer que $\left(C_{f^{-1}}\right)$ admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

d) Montrer que le point $J\left(-\frac{17}{12}; -\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative $\left(C_f\right)$ de f.