Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

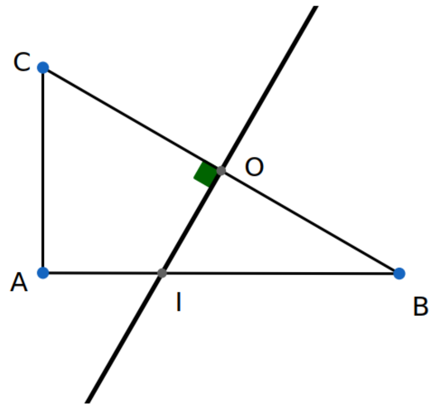
Série : Révision-2- 1°T

Nom du prof : Masmoudi Radhouane

Exercice 1 : 40 min 5 pts

Le plan est orienté. ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,
et O le milieu du segment $[BC]$.
La médiatrice du segment $[BC]$ coupe (AB) en I. (Voir figure 1 de l'annexe).

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B) = C$ et $f(O) = A$.
   b) Justifier que f est la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   c) Construire le point C' image de C par f.
2. Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer $f \circ r(A)$. Caractériser alors $f \circ r$.
   b) En déduire que le point A est le milieu du segment $[CC']$.
   c) Montrer que I est l'orthocentre du triangle BCC'.
3. On considère l'antidéplacement g qui envoie B sur C et O sur A.
   a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   b) Montrer que $g(C) = C'$
   c) Construire le point $A' = g(A)$.
   Montrer que le quadrilatère $C'OCA'$ est un parallélogramme.
4. Soit M un point du plan. On pose $f(M) = M_1$ et $g(M) = M_2$.
   Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.



Exercice 2 : 30 min 4 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1[$; $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

c Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

d Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

2 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. par $g(x) = f(\sin 2x)$

a Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$;$g(x) = \tan(2x)$.

b Montrer que la fonction g est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

c Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$:
$(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$.

3 Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ h(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

a Montrer que h est continue à droite en 0.

b Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $h'(x) = -(g^{-1})'(x)$

c En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, en déduire que la courbe de h est l'image de la courbe de g par une isométrie que l'on précisera.

d Montrer alors que h est dérivable à droite en 0 et préciser $h'_d(0)$.

4 On considère les suites (S_n) et $\left(S'_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$S_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{p=n}^{2n} g^{-1}(p)$ et $S'_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{p=n}^{2n} g^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$

a Montrer que : $g^{-1}(n) \leq S_n \leq g^{-1}(2n)$.
En déduire que (S_n) converge vers une limite que l'on précisera.

b Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$.

5 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = g^{-1}\left(\dfrac{2}{n}\right) - g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

a Montrer qu'il existe un réel $c_n \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right[$ tel que $nU_n = \dfrac{1}{2\left(1+c_n^2\right)}$

b Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$.