Le 30/01/2023

Magazine 26 (Suite et fin)
Magazine 27

Exercice 3

$f(A)=C$; $f(B)=A$

1) $f = S_{(\Omega ; 2 ; \pi/2)}$

$A = E * F$ et $f(E) = F$

2) a) Soit k' le rapport de g.

$\left.\begin{array}{l} g(E)=\Omega \\ g(\Omega)=F \end{array}\right\} \Rightarrow k' = \frac{\Omega F}{\Omega E} = 2 \neq 1$ $\left(\begin{array}{l} f(E)=F \\ \Rightarrow \frac{\Omega F}{\Omega E} = 2 \end{array}\right)$

Soit K le Centre de g

b) on a $g \circ g(E) = g(\Omega) = F$

g est une similitude indirecte de rapport 2

$\Rightarrow g \circ g = h(K ; 4)$

Par suite $\overrightarrow{KF} = 4\overrightarrow{KE}$ d'où $K \in (EF)$

3) a) $g \circ f^{-1}(\Omega) = g(\Omega) = F$

$g \circ f^{-1}(F) = g(E) = \Omega$

f^{-1} : similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow g \circ f^{-1}$ est un antidéplacement

On a $\begin{cases} S_{(AC)}(\Omega) = gof^{-1}(\Omega) = F \\ S_{(AC)}(F) = gof^{-1}(F) = \Omega. \end{cases}$

$S_{(AC)}$ et gof^{-1} sont deux antidéplacements qui coïncident en 2 pts distincts

$\Longrightarrow$ $\boxed{gof^{-1} = S_{(AC)}}$

2e Methode

$$gof^{-1}(\Omega * F) = gof^{-1}(\Omega) * gof^{-1}(F)$$
$$= F * \Omega$$

$\Rightarrow$ gof^{-1} est un antidéplacement qui fixe le milieu de $[\Omega F]$

$\Rightarrow$ gof^{-1} est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de $[\Omega F]$

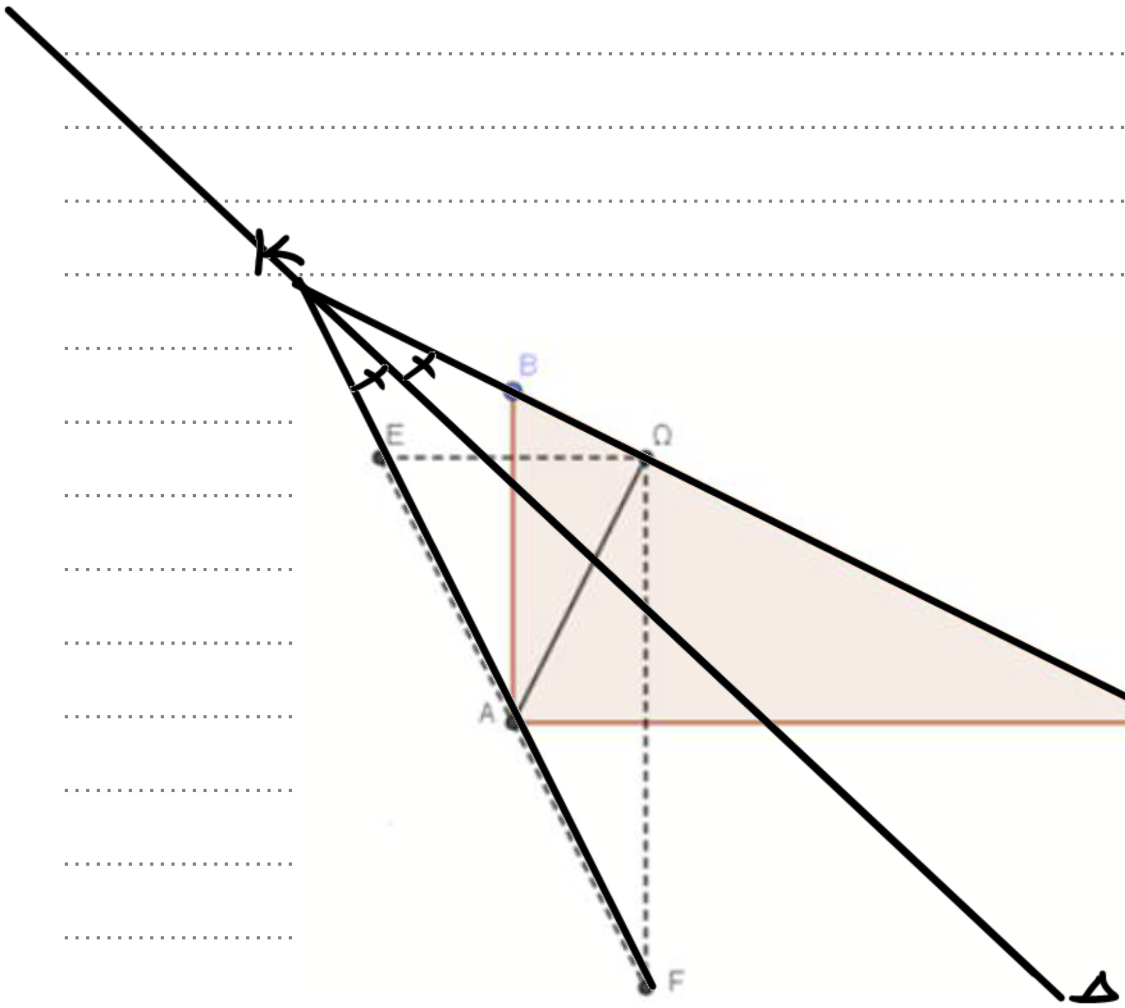
$\Longrightarrow$ $\boxed{gof^{-1} = S_{(AC)}}$

b) On a : $gof^{-1} = S_{(AC)} \Leftrightarrow g = S_{(AC)} o f$

$\Rightarrow \begin{cases} g(A) = S_{(AC)} o f(A) = S_{(AC)}(C) = C \\ g(B) = S_{(AC)} o f(B) = S_{(AC)}(A) = A \end{cases}$

Ainsi $g \circ f(B) = g(A) = C$
et $g \circ f = h(K ; 4) \Rightarrow \overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{KB}$
$\Rightarrow \boxed{K \in (BC)}$

$g(A) = C \Rightarrow \Delta$ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{AKC}$.



4°) a) $z_A = 0$; $\overrightarrow{AB} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = 2\vec{J} \Rightarrow z_B = 2i$

$\overrightarrow{AC} = 4\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = 4\vec{I} \Rightarrow z_C = 4$.

b) L'écriture complexe de f est de la forme : $z' = az + b$

$\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_C \\ az_B + b = z_A \end{cases} \Leftrightarrow \dots$

2ème méthode : $z' = az + b$ où $|a| = 2$, $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow a = 2i$

et $f(A) = C \Rightarrow z_C = 2i \times 0 + b = 4$

d'où $\boxed{z' = 2iz + 4}$

c) $g = S_{(AC)} \circ f$

Soit $M(z)$, $M_1(z_1) = f(M)$ et $M'(z') = S_{(AC)}(M_1)$

$\Rightarrow g(M) = M'$

$\Leftrightarrow z_1 = 2iz + 4$

$\Leftrightarrow z' = \overline{z_1} = \overline{2iz + 4} = -2i\bar{z} + 4$

d) $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4}{1-2i} = \frac{4(1+2i)}{5} = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$

$z_K = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ ou $g(K) = K \Leftrightarrow$

$-2i\overline{z_K} + 4 = z_K$

et $\boxed{2iz_K + 4 = \overline{z_K}}$

$\Leftrightarrow -2i(2i z_k+4)+4 = z_k$

$\Leftrightarrow 4z_k - 8i + 4 = z_k$

$\Leftrightarrow 3z_k = -4+8i \Leftrightarrow \boxed{z_k = -\frac{4}{3}+\frac{8}{3}i}$

$\Delta = \{ M(z) \in \mathcal{P} ; g(M) = M' \text{ et } \overrightarrow{KM'} = 2\overrightarrow{KM} \}$

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{KM'} = 2\overrightarrow{KM}$ où $M' = g(M)$

$\Leftrightarrow z' - z_k = 2(z - z_k)$

$\Leftrightarrow \ldots \ldots \Leftrightarrow .$

$$\boxed{\Delta : x + y - \frac{4}{3} = 0}$$

Magazine 27 (fct : ln)

Exercice 1

$a, b \in]0,+\infty[\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x\ln(x+1)}_{\to 0} - \underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} = 0$

$= f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

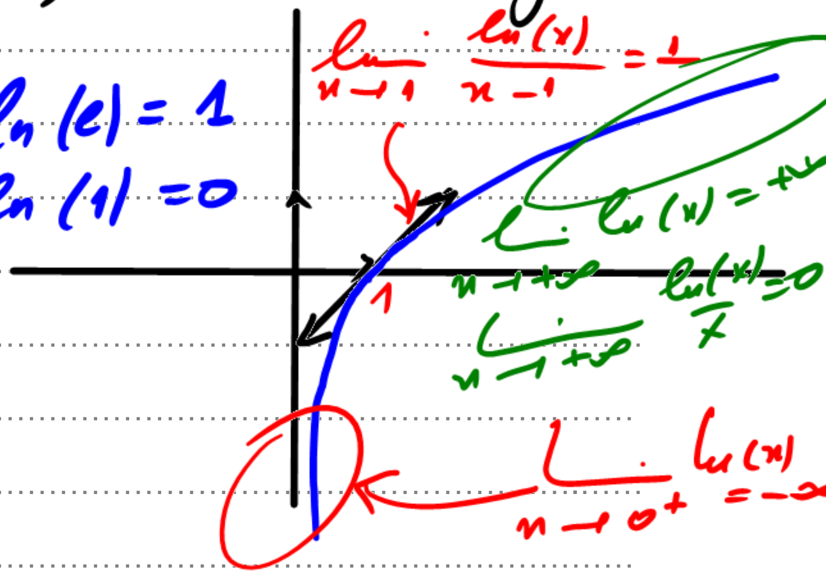
car i) $\lim\limits_{x \to 0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet à droite au pt $(0,0)$ une demi-tangente verticale

$$\boxed{\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \forall x\in\,]0;+\infty[}$$

$$\begin{cases}\ln(e)=1\\ \ln(1)=0\end{cases}$$



$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad \forall x>0$$

$$\begin{cases}\forall m,n\in\mathbb{N}^*\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n(x)}{x^m}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}x^m\ln^n(x)=0\end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\boxed{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\boxed{\frac{1}{x}}\right)}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=u'_d(0)=\frac{1}{1+0}=1$

En effet $u: x\longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$, en particulier en 0

$\forall x>-1,\quad u'(x)=\frac{1}{1+x}$

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$.

2) a) Soit $a \in]0;+\infty[$

La fct ln est continue sur $[a;a+1]$
" " dérivable sur $]a;a+1[$

TAF $\Longrightarrow$ il existe $\boxed{c \in]a, a+1[}$ tq $\ln(a+1)-\ln(a) = (a+1-a)\cdot\frac{1}{c}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{1}{c}$ or $a<c<a+1 \Rightarrow \frac{1}{a+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) > \frac{1}{a+1}}$

2ème Méthode : Soit $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{t}$ $\forall t>0$

thm : f continue sur $[a,b]$; $a<b$

$\Rightarrow$ il existe $c \in [a,b]$ tq $\bar{f} = f(c)$

φ est continue sur $[a,a+1]$ $\forall a>0$

$\Rightarrow$ il existe $\boxed{c \in [a,a+1]}$ tq

$\frac{1}{(a+1)-a}\int_a^{a+1}\frac{dt}{t} = \frac{1}{c} \Rightarrow \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{1}{c}$

b) $x \longmapsto \frac{x+1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$ $\Longrightarrow$ $x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ dérivable sur $]0;+\infty[$

$\Longrightarrow$ f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x \cdot \frac{-1/x^{\cancel{2}}}{\frac{x+1}{\cancel{x}}}$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $+$	
f	0 $\nearrow$	1

3) a) f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ $\Longrightarrow$ f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f([0;+\infty[) = \underbrace{[0;1[}_{J}$

b) $\boxed{f \text{ étant strictement croissante sur } [0;+\infty[}$

si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ se coupent en un point $M(x,y)$ alors $M \in \Delta : y = x$, en effet :

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_{f^{-1}} \iff \begin{cases} x \in [0,1[,\ y \in [0,1[\\ y = f(x) = f^{-1}(x) \end{cases}$$

Supp : $x < y \Rightarrow x < f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f(x) < f(f^{-1}(x)) = x$

$\Rightarrow y < x$ Absurde

de même pour $x > y$

$\begin{cases} f(x) = x \\ x \in [0,1[\end{cases} \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x$

$\Leftrightarrow x\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1\right] = 0$

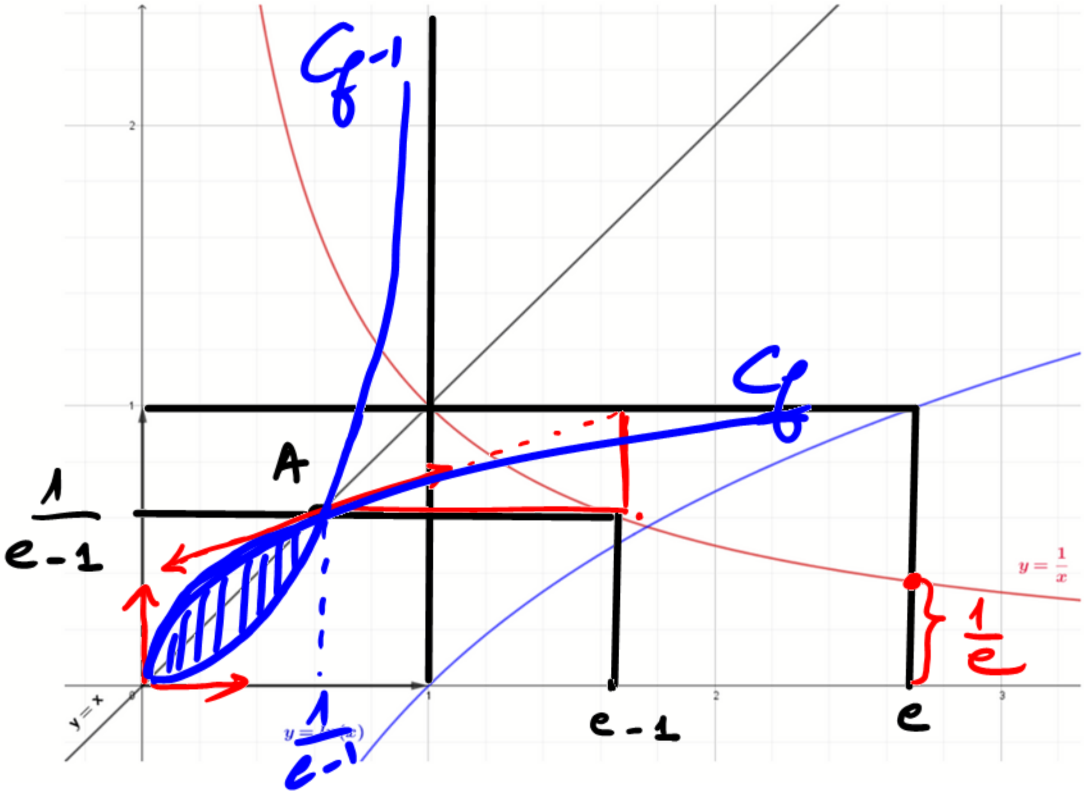
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $1 + \frac{1}{x} = e$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{e-1}$

d'où $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_{f^{-1}} = \left\{ O(0,0) ; A\left(\frac{1}{e-1} ; \frac{1}{e-1}\right) \right\}$

4')



$$f'\left(\frac{1}{e-1}\right) = \ln(1+e-1) - \frac{1}{\frac{1}{e-1}+1}$$

$$= 1 - \frac{e-1}{e} = \frac{1}{e}$$

c) Soit $t \in \left]0, \frac{1}{e-1}\right]$

et on note $A(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = \frac{1}{e-1}$.

$$A(t) = \int_t^{\frac{1}{e-1}} |f(x) - f^{-1}(x)|\, dx \quad u.a$$

Pour des raisons de symétrie :

$$A(t) = 2\int_t^{\frac{1}{e-1}} (f(x) - x)\, dx$$

$$= 2\int_t^{\frac{1}{e-1}} x\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1\right) dx$$

On pose :

$$u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 \longrightarrow u'(x) = \frac{-1/x^2}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$v'(x) = x \longrightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Par suite

$$A(t) = \left[x^2\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1\right)\right]_t^{\frac{1}{e-1}} + \int_t^{\frac{1}{e-1}} \frac{x+1-1}{x+1}\, dx$$

$$= -t^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - 1\right) + \left[x - \ln|x+1|\right]_t^{\frac{1}{e-1}}$$

$$= -t^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - 1\right) + \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - t + \ln(1+t)$$

$$A = \lim_{t \to 0^+} A(t) =$$

$$A(t) = -t^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-1\right) + \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - t + \ln(1+t)$$

$$= \underbrace{t^2}_{\to 0} - \underbrace{t^2\ln(1+t)}_{\to 0} + \underbrace{t^2\ln t}_{\to 0} + \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - \underbrace{t}_{\to 0} + \underbrace{\ln(1+t)}_{\to 0}$$

Ainsi $\lim\limits_{t \to 0^+} A(t) = \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$

Par suite $\boxed{A = \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) \text{ u.a}}$

Exercice n°3

1) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - \ln(x) = +\infty$

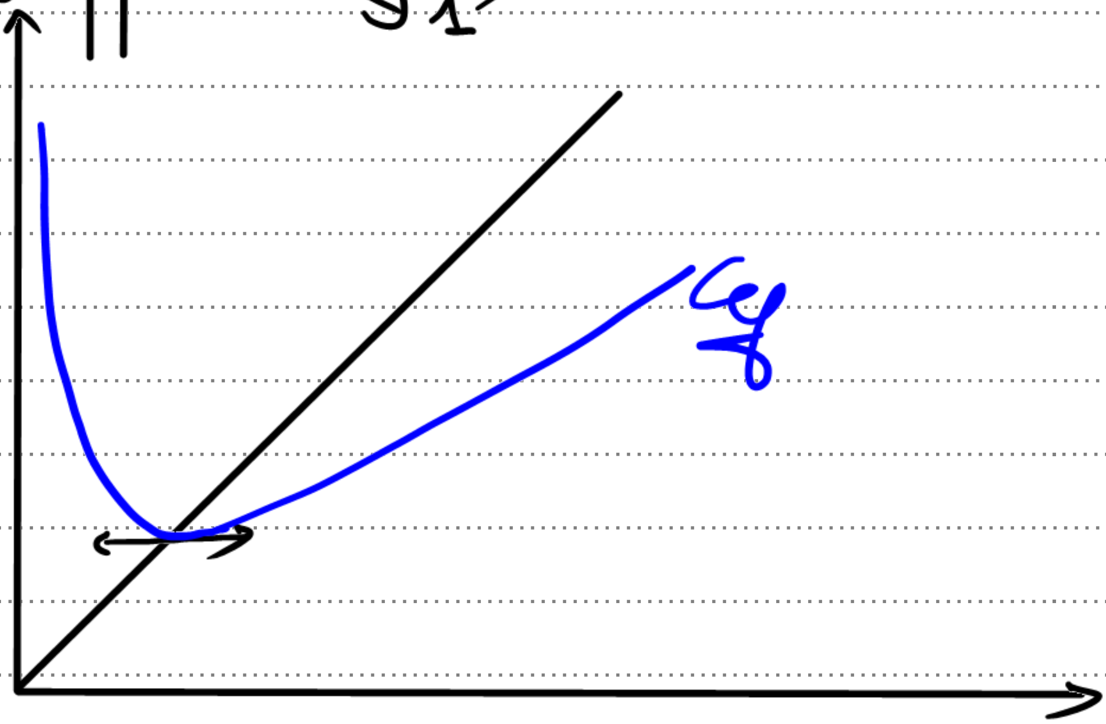
$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x) = -\infty$

La droite d'éq $y = x$ est une direction asymptotique à $\mathscr{C}_f$ au $V(+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



2) a) $a_0 > 1$ vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp. que $a_n > 1$ et Mq $a_{n+1} > 1$

On $a_n > 1$ et f est $\nearrow$ sur $[1; +\infty[$

$\Rightarrow f(a_n) > f(1) \Rightarrow a_{n+1} > 1$

$\boxed{\text{cl}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n > 1}$

x	0		1	
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$

b) $a_{n+1} - a_n = -\ln(a_n) < 0$ car $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_n)$ est décroissante

de plus (a_n) est minorée par 1
$\Longrightarrow (a_n)$ est convergente

i) $a_{n+1} = f(a_n)$ où
$f : x \longmapsto x - \ln(x)$

ii) (a_n) est cv vers un réel $l \geq 1$

iii) f est continue sur $]0; +\infty[$
$\Longrightarrow f$ est continue en l

$\Longrightarrow f(l) = l$
$\Longrightarrow l - \ln(l) = l$
$\Longrightarrow \ln(l) = 0$
$\Longrightarrow l = 1$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1}$

c) $b_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(t)\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$

i) On a $a_{n+1} \leq t \leq a_n$ et f est $\nearrow$ sur $[1; +\infty[$

$\Longrightarrow \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(a_{n+1})\,dt \leq \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(t)\,dt \leq \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(a_n)\,dt$

$\Longrightarrow f(a_{n+1})(a_n - a_{n+1}) \leq b_n \leq f(a_n)(a_n - a_{n+1})$

$\Longrightarrow \boxed{a_{n+2} \cdot \ln(a_n) \leq b_n \leq a_{n+1} \cdot \ln(a_n)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$
le fait $\ln$ est continue en 1

$\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(a_n) = \ln(1) = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} \leq \dfrac{b_n}{\ln(a_n)} \leq a_{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+2} = 1$

$\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n}{\ln(a_n)} = 1}$