Exercice 1 15 min 2 pts

1) $\int_0^1 P_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k \boxed{\int_0^1 x^k\,dx}\right)$

or $\int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{k+1}}$

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Alors : $\int_0^1 P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k \cdot \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\cancel{(k+1)}^2 \frac{1}{\cancel{k+1}}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{\left(1+(n+1)\right)(n+1)}{2}$

$$\boxed{\int_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

$\sum_{k=\dots}^{\dots}(\alpha k+\beta)$ = Somme Suite arithmétique de raison α

$\sum_{k=\dots}^{\dots}\alpha^k$ = Somme Suite géo de raison α

② * $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} = +\infty$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\cancel{n^2}}\,\frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2} = \frac{1}{2}$

Exercice 2 | 25 min | 4 pts

① F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en effet

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$
donc F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$
qui s'annule en 0

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ($x \in I$)

!

Si f est continue sur I
et $a \in I$ alors
F est dérivable sur I et $\forall x \in I$
$F'(x) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $F'(x) = f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	

F est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) on a : $F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt$

pour $0\le t\le 1$ on a : $0\le f(t)\le 2$

$\Rightarrow 0\le\int_0^1 f(t)dt\le 2$ ①

pour $1\le t\le 2$ on a : $1\le f(t)\le 2$

$\Rightarrow 1\le\int_1^2 f(t)dt\le 2$ ②

$(1)+(2)\Rightarrow 1\le\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt\le 4$

$\Rightarrow$ $\boxed{1\le F(2)\le 4}$

AUTREMENT

F est continue dérivable sur $[1;2]$

$\forall x\in[1,2]$ $1\le F'(x)=f(x)\le 2$

d'après le T.I.A.F

$(2-1).1\le F(2)-F(1)\le 2(2-1)$

$\Rightarrow 1\le F(2)-F(1)\le 2$

$\Rightarrow 1+F(1)\le F(2)\le 2+F(1)$

Comme $F(1)>F(0)$ donc $F(1)>0$

Taki Academy
www.takiacademy.com

$\Rightarrow \quad 1+F(1) \leq F(2) \leq 2+F(1)$

$\Rightarrow \quad 1 \leq F(2) \leq 2+F(1) \leq 2+2=4$

Car $F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$

$0 \leq t \leq 1$ on a $0 \leq f(t) \leq 2$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 2$

3) a) $n \geq 1$ on a $1 \leq f(t)$

$\Rightarrow \int_1^n dt \leq \int_1^n f(t)\,dt$ Les fonctions sont continues sur $[1;n]$

$\Rightarrow \quad n-1 \leq \int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^n f(t)\,dt$

$\Rightarrow \quad n-1 \leq -\int_0^1 f(t)\,dt + F(n)$

$\Rightarrow \quad n-1+F(1) \leq F(x)$

$\Rightarrow \quad \boxed{n-1 \leq F(n)}$ car $F(1) \geq F(0)=0$

b) On a : $n \geq 1$ $\quad F(n) \geq n-1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n-1=+\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} F(n)=+\infty}$

④ a)

$x \overset{u}{\longmapsto} x^2$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

$u([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

f est continue sur $[0,+\infty[$

et $0 \in u([0,+\infty[)$

donc g est dérivable sur $[0,+\infty[$

$\forall x \geq 0 \quad g'(x) = 2x \cdot f(x^2) \geq 0$

$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ $\quad (x \in I)$

si u est dérivable sur I

et f continue sur $u(I)$

$a \in u(I)$

alors F est dérivable sur I

$\forall x \in I; \quad F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$g(x) = F(x^2) = F \circ u(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ⓑ $\forall x > 1 \qquad t \in [1, x]$

on a: $1 \leq f(t) \leq 2$ Les fonctions sont continues sur $[1, x^2]$

donc $\int_1^{x^2} dt \leq \int_1^{x^2} f(t)\,dt \leq \int_1^{x^2} 2\,dt$

$$\Rightarrow \quad x^2-1 \leq \int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^{x^2} f(t)\,dt \leq 2(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2-1 \leq -\int_0^1 f(t)\,dt + g(x) \leq 2(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2-1+F(1) \leq g(x) \leq 2(x^2-1)+F(1)$$

$\forall x>1$

$$\Rightarrow \quad x-\frac{1}{x}+\frac{F(1)}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq 2\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{F(1)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x}+\frac{F(1)}{x} = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = +\infty$ donc $\mathscr{C}_g$ admet

une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

au voisinage de $(+\infty)$

Exercice 3 25 min 4 pts

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \qquad\qquad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

① ⓐ $p \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [p\,;p+1]$ on a : $\sqrt{p} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{p+1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}}$$ Les fonctions sont continue sur $[p\,;p+1]$

donc $$\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{p}}}$$

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a)$$

② p un entier tel que $p \geq 2$

$\forall x \in [p-1\,;p]$ on a : $\sqrt{x} \leq \sqrt{p}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Les deux fonctions sont continues sur $[p-1;p]$

Alors $\displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \geq \int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{p}}\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \geq \frac{1}{\sqrt{p}}}$$

3 pour tout $p \in \{1,2,3,\dots;n\}$

$$\int_{p}^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \left(\int_{p}^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \dots + \int_{n}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq U_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{1}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq U_n} \quad (1)$$

Pour tout $p \in \{2;3;\dots,n\}$

$$\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=2}^{n} \left(\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) \geq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \dots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} - 1$$

$$\Rightarrow \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq U_n - 1 \quad (1)$$

Comme $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2$

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2$$

d'après (1) et (2) on obtient :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

2) On a : $\forall\, n \geq 1$; $U_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

on a : $\forall\, n \geq 1$

$$-2 + 2\sqrt{n+1} \leq U_n \leq -1 + 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq -\frac{1}{\sqrt{n}} + 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} + 2 = 2$$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 2}$