Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : $4^{ème}$ Mathématiques

Série : Révision 1°T

Nom du prof : Masmoudi Radhouane

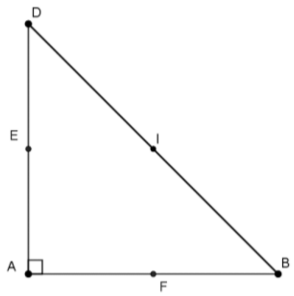
Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir Gabes / Djerba

Exercice 1 : 40 min 5 pts

Soit ABD un triangle rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I, E et F les milieux respectifs des segments [BD], [AD] et [AB] (voir la figure 1 de l'annexe).

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en B et D en A.
   b) Caractériser f.
2) Soit $C = f(B)$ et soit $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ f$ et $h = S_{(AB)} \circ f$.
   a) Caractériser g.
   b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite.
3) Soit Δ la parallèle à (BD) passant par A et J le point tel que ABIJ est un parallélogramme. On pose $\varphi = S_\Delta \circ S_{(AD)} \circ S_{(BD)}$.
   a) Déterminer $\varphi(C)$ et montrer que $\varphi(B) = D$.
   b) Déterminer $\varphi(I)$. Caractériser alors φ.
4) On note ζ le cercle circonscrit au triangle ADI et soit ψ un déplacement tel que : $\psi(A) = I$ et $\psi((AD)) = (DI)$.
   a) Montrer que ψ ne peut être qu'une rotation et que son centre Ω est un point de ζ.
   b) Déterminer les déplacements ψ vérifiant $\psi(A) = I$ et $\psi((AD)) = (DI)$.



Exercice 2 : 30 min 4 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la droite Δ d'équation : $y = 1$.

1) Soit M(z) tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta\ [2\pi]$ où $\theta \in]0, \pi[$.
   a) Montrer que $M \in \Delta$ si et seulement si $|z| = |z - 2i|$.
   b) Montrer que $M \in \Delta$ si et seulement si $z = \cot\text{an}\theta + i$.
2) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_n) : z^n = (z - 2i)^n$ où n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
   a) Montrer que si z est solution de (E_n) alors $M(z) \in \Delta$.

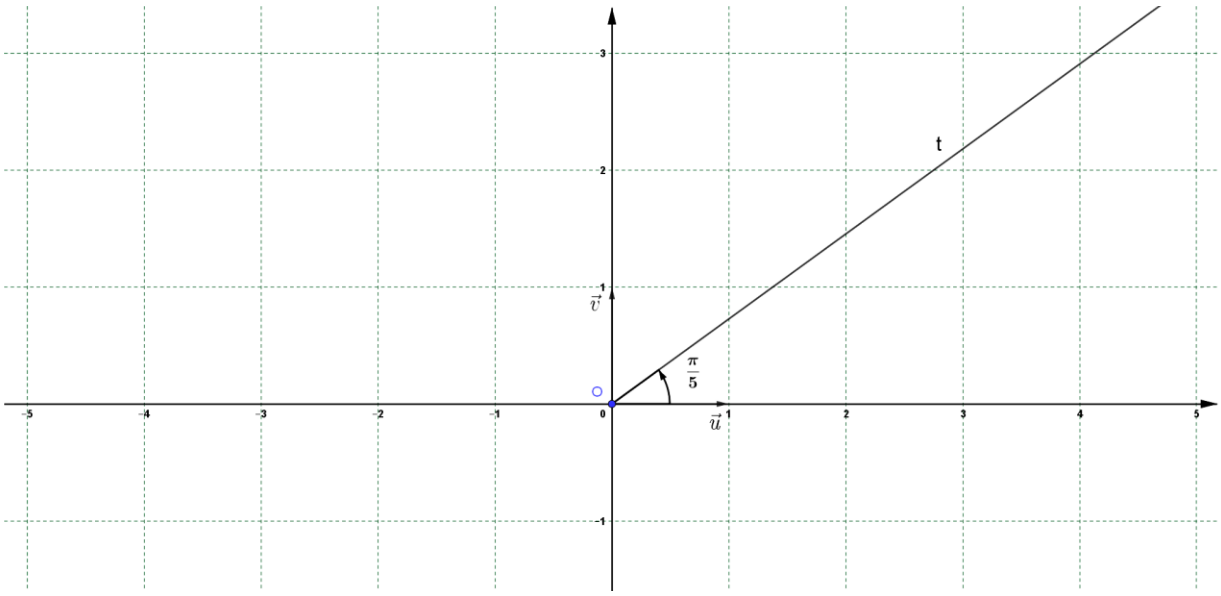
b) Soit $\alpha \in]0,2\pi[$. Montrer que $\dfrac{z}{z-2i} = e^{i\alpha}$ si et seulement si $z = \cot an\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + i$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n).

3) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la demi-droite $[0t)$ telle que $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \dfrac{\pi}{5}\,[2\pi]$. Construire les points images des solutions de (E_5).

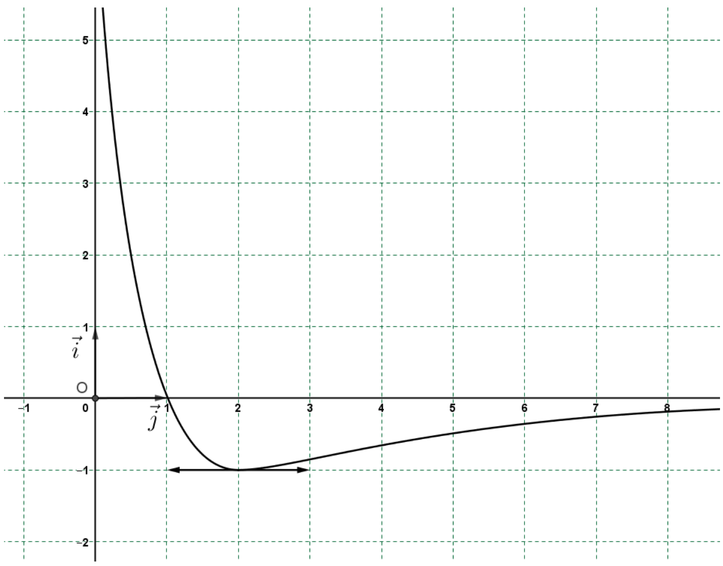
4) Soit M_k, $k \in \{1,2,...,n-1\}$ les points images des solutions de (E_n).

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{OM_k} = (n-1)\vec{v}$ (on distinguera deux cas : n paire et n impaire).



Exercice 3 : 50 min 6 pts

La figure ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction g dérivable sur $]0,+\infty[$. Les axes du repère sont des asymptotes à la courbe de g.



1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(2\cos x)+1}{\cos x - 1}$.

2) Soit f la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que :

pour tout $x > 0$, on a :

$f'(x) = g(x)$, $f(1) = 2$ et $f(2) = \dfrac{3}{2}$

.

a) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion que l'on précisera.
b) Sachant que les axes du repère sont des asymptotes à (C_f), dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α et que $0<\alpha<1$.
d) Tracer l'allure de (C_f) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 1 et 2.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x)=f(x+n)-f(x),\ x \in \left]0,+\infty\right[$.
a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a : $F_n(x)<0$.
b) Montrer que F_n est strictement décroissante sur $\left]0,1\right]$.
c) Montrer que l'équation $F_n(x)=0$ admet dans $\left]0,+\infty\right[$ une solution unique u_n et que $\alpha<u_n<1$.
d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n+n<u_{n+1}+n+1$.
e) En déduire que (u_n) est décroissante.
f) Montrer que la suite (u_n) converge vers α.

Exercice 4 : 60 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan x$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left[0,+\infty\right[$.
b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, il existe un seul réel $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(\alpha)=\sqrt{x}$.
c) Soit $g=f^{-1}$. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et calculer g'(x) pour $x \geq 0$.

2) Soit φ la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\varphi(x)=\frac{4}{\pi}g\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x)=1-\frac{2}{\pi}g\left(\sqrt{x}\right)$.
c) Prouver alors que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.
d) Montrer que φ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{x}(x+1)}$.
e) Montrer que pour tout réel $x>0$, il existe $c \in \left]0,x\right[$ tel que $\frac{2g\left(\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{1}{(c+1)\sqrt{c}}$.
En déduire que φ n'est pas dérivable à droite en 0.
f) Montrer que φ réalise une bijection de $\left[0,+\infty\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
g) Expliciter $\varphi^{-1}(x)$ pour $x \in K$.