Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

## Classe : 4ème Mathématiques

## Magazine : N°23
## Intégrales

Nom du prof : BenMbarek Mahmoud

Taki Academy
www.takiacademy.com

## Exercice 1

15 min | 2 pts

Soit $(a_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = (n+1)^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n$ définie par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. Calculer, en fonction de $n$, $\int_0^1 P_n(x)\, dx$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(x)\, dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 P_n(x)\, dx$.

## Exercice 2

25 min | 4 pts

On donne le tableau de variation d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

1. Déterminer le sens de variation $F$.
2. Montrer que $1 \leqslant F(2) \leqslant 4$.
3. a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \geqslant x - 1$.

   b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$.

   a) Dresser le tableau de variation de $g$.

   b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe de $g$.

## Exercice 3

25 min | 4 pts

Soit $(U_n)$ et $(V_n)$ les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{n}}$.

a) 1. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a : $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.

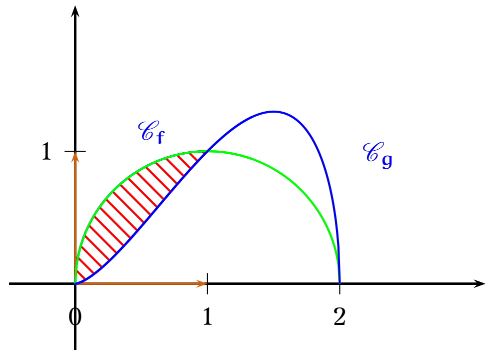
2. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, on a : $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.

3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $-2 + 2\sqrt{n+1} \leqslant U_n \leqslant -1 + 2\sqrt{n}$.

**b** Déterminer les limites éventuelles des suites $(U_n)$ et $(V_n)$.

## Exercice 4 — 35 min — 5.5 pts

Dans le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur $[0;2]$ par $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ et $g(x) = x\sqrt{2x - x^2}$




1. Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ .
2. Calculer, en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachrée sur le graphique.
3. Soit $F$ la primitive de $f$ sur $[0;2]$ qui s'annule en $0$ et $G$ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = F(1 + \sin x)$.
   - **a** Montrer que $G$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ puis calculer $G'(x)$.
   - **b** Calculer $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$.
   - **c** Déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.
   - **d** Evaluer $\int_0^1 g(x)\,dx$.
4. Soit $U$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 x^n\sqrt{2x - x^2}\,dx$.
   - **a** Etudier la monotonie de la suite $U$.
   - **b** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   - **c** Déduire que la suite $U$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

## Exercice 5 — 25 min — 4.5 pts

On considères les réels suivants : $A = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$, $B = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$ et $C = \int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$.

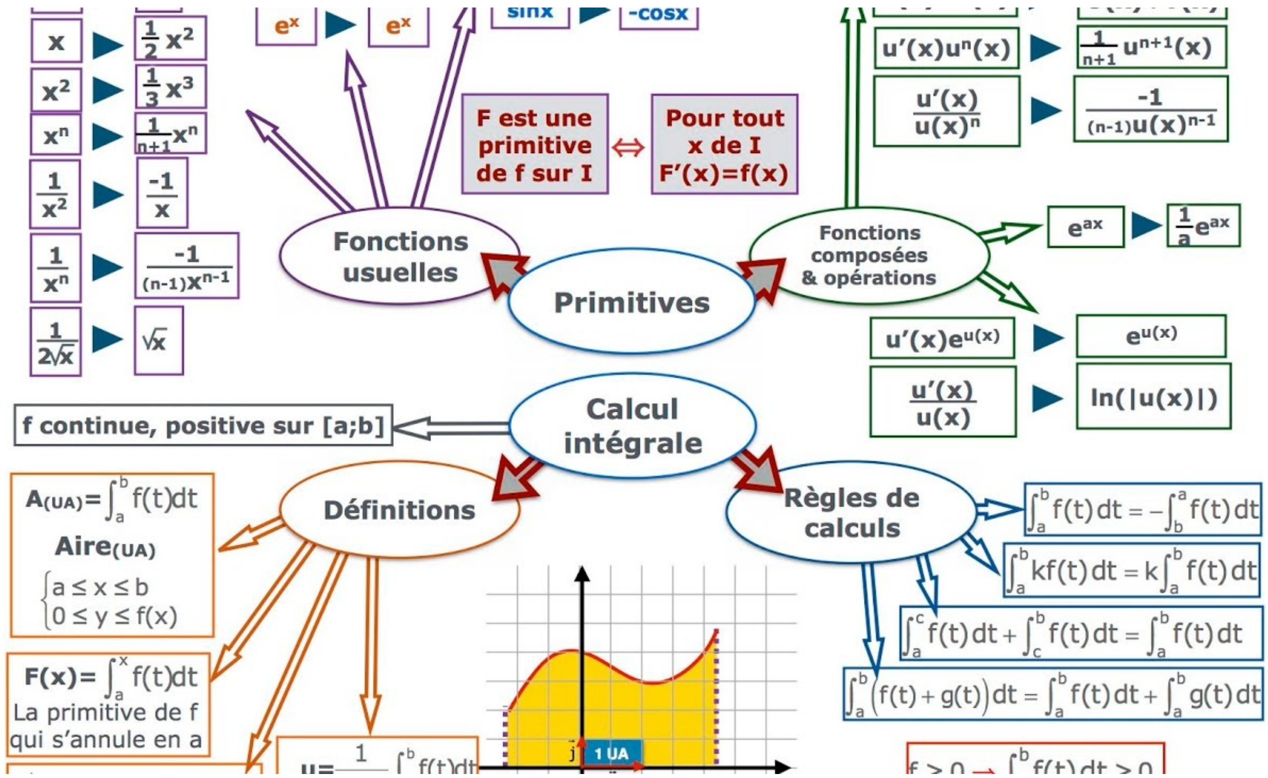
1. Montrer que $B = \frac{1}{3}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $C = \frac{1}{4} \times A$.

**3** Soit $F$ la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

**a** Montrer que $F$ est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $F'(x)=\cos^2 x$.

**b** Expliciter alors $F(x)$.

**c** En déduire la valeur de $A$ et celle de $C$.


Primitives
Fonctions usuelles
$x$ ▶ $\frac{1}{2}x^2$
$x^2$ ▶ $\frac{1}{3}x^3$
$x^n$ ▶ $\frac{1}{n+1}x^n$
$\frac{1}{x^2}$ ▶ $\frac{-1}{x}$
$\frac{1}{x^n}$ ▶ $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ▶ $\sqrt{x}$
$e^x$ ▶ $e^x$
sinx ▶ -cosx
F est une primitive de f sur I ⇔ Pour tout x de I F'(x)=f(x)
Fonctions composées & opérations
$u'(x)u^n(x)$ ▶ $\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)^n}$ ▶ $\frac{-1}{(n-1)u(x)^{n-1}}$
$e^{ax}$ ▶ $\frac{1}{a}e^{ax}$
$u'(x)e^{u(x)}$ ▶ $e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$ ▶ $\ln(|u(x)|)$
Calcul intégrale
f continue, positive sur [a;b]
Définitions
$A_{(UA)}=\int_a^b f(t)dt$
$Aire_{(UA)}$
$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$
La primitive de f qui s'annule en a
$\mu=\frac{1}{...}\int^b f(t)dt$
1 UA
Règles de calculs
$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
$\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$
$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$
$\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
$f \ge 0 \rightarrow \int^b f(t)\,dt \ge 0$

# Carte mentale

## Calcul intégral

### Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur $I$ et soient $a$ et $b$ deux réels appartenant à $I$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

### Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soient $f$ une fonction continue sur $I$ et $a$ et $b$ deux réels appartenant à $I$ :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.

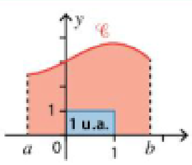
### Calculer une intégrale à l'aide de propriétés

Soient $f$ une fonction continue sur $I$ ; $a$, $b$ et $c$ trois réels appartenant à $I$ et $\lambda$ un réel.

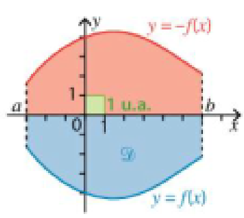
- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :**
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Linéarité :**
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Positivité :**
si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Ordre :**
si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si $f$ est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si $f$ est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

### Calculer des aires

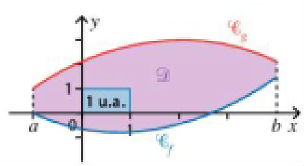
- **$f$ continue et positive sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.




- **$f$ continue et négative $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.



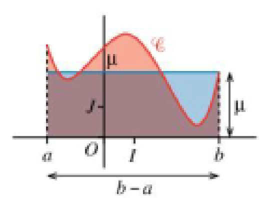

- **$g \geqslant f$ sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$




### Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ $(a < b)$.
On appelle **valeur moyenne** de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$




Si $f \geqslant 0$, l'aire du rectangle bleu est égale à $\mu\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.