Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4$^{\text{ème}}$ Mathématiques

Série 22 : Primitives

Nom du prof : M. ZOGHBI Naoufel

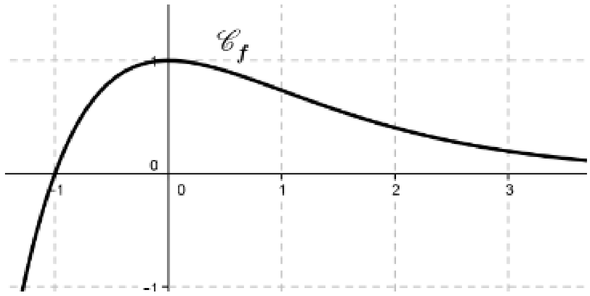
Primitives

DEFINITION

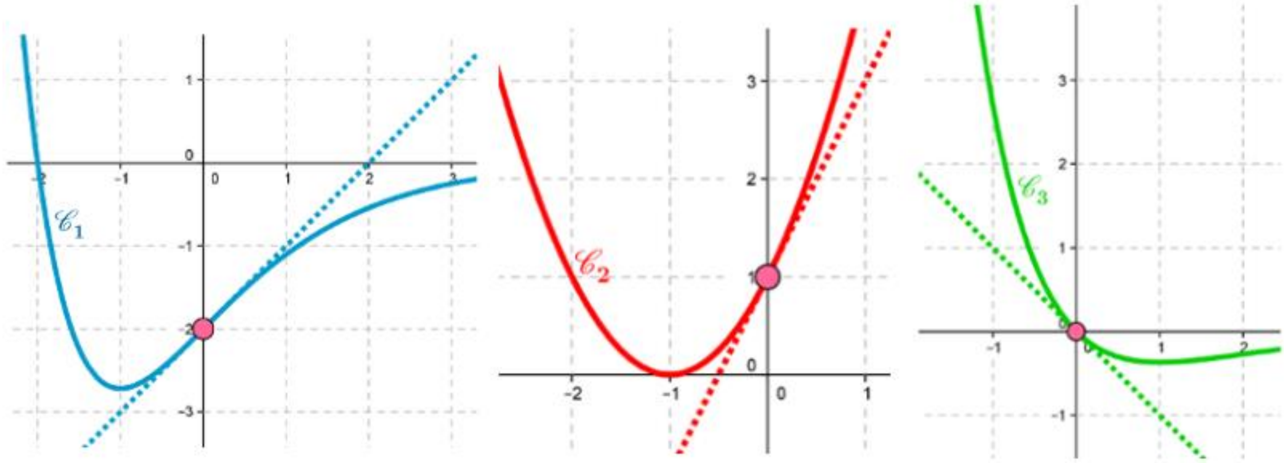
On dit qu'une fonction numérique F est une primitive de f sur un intervalle I, si et seulement si : F est dérivable et pour tout x appartenant à I on a : $F'(x) = f(x)$

Exercice 1 : 10 min 2 pts

On a représenté la courbe C_f d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.



On a représenté trois courbes et la tangente en pointillé à chacune de ces courbes au point d'abscisse 0.



Une de ces courbes représente une primitive de f . Laquelle ? Justifier.

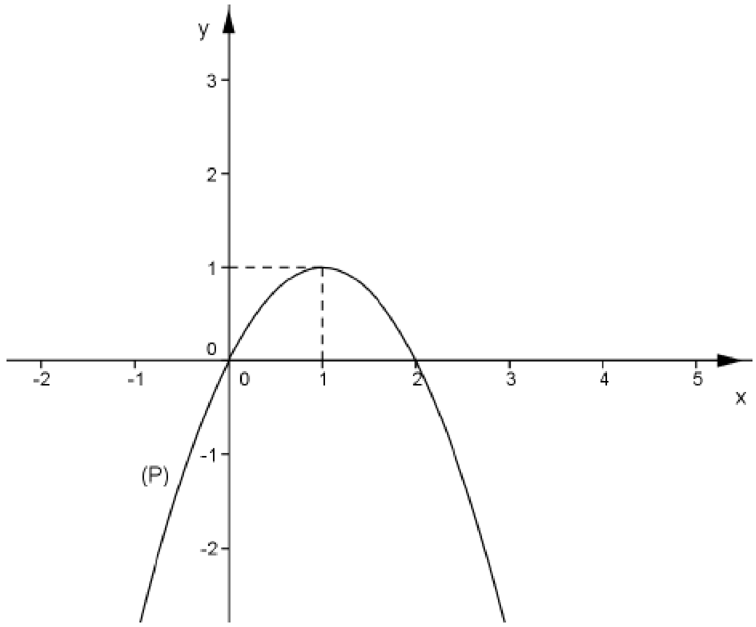
THEOREME (D'existence)

Toute fonction f continue sur un intervalle $\mathfrak{I}$, admet sur $\mathfrak{I}$ une infinité de primitives. Deux primitives F et G de f sur $\mathfrak{I}$ diffèrent d'une constante réelle c.
Pour tout nombre x dans l'intervalle $\mathfrak{I}$: $F(x) = G(x) + c$

THEOREME (D'unicité)

Si f est continue sur un intervalle $\mathfrak{I}$, **alors** pour tout nombre x_0 appartenant à $\mathfrak{I}$ et pour tout nombre réel y_0, il existe une seule primitive F telle que : $F(x_0) = y_0$

Exercice 2 : 10 min 2 pts



La parabole (P) ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f.

1°) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et (C) la courbe représentative de F.
Etudier les variations de F.

2°) On donne F(1) = 0.
Donner une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3°) Exprimer f(x) puis F(x) en fonction de x. Tracer (c).

Exercice 3 : 15 min 3 pts

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

1°) Montrer que f possède, sur $\mathbb{R}$, une unique primitive F qui s'annule en 0.

2°) Montrer que F est paire.

3°)a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x)$

b) En déduire F.

PROPRIETES

1) <u>Si</u> f et g admettent respectivement comme primitives F et G sur un même intervalle $\mathfrak{I}$ **<u>alors</u>** $F+G$ est une primitive sur $\mathfrak{I}$ de la fonction $f+g$

2) <u>Si</u> F est une primitive de f sur un intervalle $\mathfrak{I}$ **<u>alors</u>** pour toute constante réelle α, la fonction αF est une primitive sur $\mathfrak{I}$ de la fonction αf

CONSEQUENCE

Si deux fonctions f et g admettent respectivement comme primitives F et G sur le même intervalle $\mathfrak{I}$, **<u>alors</u>** pour toutes constantes réelles α et β, la fonction $\alpha F+\beta G$ est une primitive sur $\mathfrak{I}$ de la fonction $\alpha f+\beta g$

PRIMITIVES USUELLES

Dans le tableau suivant, on donne la fonction f dont on cherche les primitives F sur un intervalle $\mathfrak{I}$ de son domaine de définition $\mathcal{D}$

Fonction $f(x)$	Primitives F	$\mathcal{D}$
0	λ (constante)	$\mathbb{R}$
a (constante)	$ax+\lambda$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+\lambda$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\lambda$	$\mathbb{R}_+$
$x^r \quad (r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$	$(\mathbb{R}_+ \text{ si } r\geq 0) \quad (\mathbb{R}_+^* \text{ si } r<0)$
$\cos(x)$	$\sin(x)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\text{cox}(ax+b) \quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b) \quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$-\frac{1}{a}\text{cox}(ax+b)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+\lambda$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}=1+\text{cotg}^2(x)$	$-\text{cotg}(x)+\lambda$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}\}$

OPERATIONS

Dans le tableau suivant la fonction f est définie par une opération usuelle sur deux fonctions U et V. F désigne une primitive quelconque de f sur un intervalle $\mathfrak{I}$

$f(x)$	$F(x)$	Conditions sur U ou V
$U'(x)\times U^n(x) \quad (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}(x)+\lambda$	U est dérivable
$U'(x)\times U^r(x)\ (r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}U^{r+1}(x)+\lambda$	U est dérivable $(U\geq 0 \text{ si } r\geq 0)$ $(U>0 \text{ si } r<0)$
$\frac{V'(x)}{V^2(x)}$	$-\frac{1}{V(x)}+\lambda$	V est dérivable et non nulle
$\frac{U'(x)V(x)-V'(x)U(x)}{V^2(x)}$	$\frac{U(x)}{V(x)}+\lambda$	U et V sont dérivables et V non nulle
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}+\lambda$	U est dérivable et strictement positive
$U'(x)\sqrt{U(x)}$	$\frac{2}{3}U(x)\sqrt{U(x)}+\lambda$	U est dérivable et positive ou nulle
$U'(x)\times(V'oU)(x)$	$(VoU)(x)$	U est dérivable sur $\mathfrak{I}$ et V est dérivable sur $U(\mathfrak{I})$

Exercice 4 : 20 min 4 pts

Soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]-1\,;1[$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Montrer que f et g possèdent des primitives sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

2) On note F et G les primitives respectives de f et g telles que $F(0)=G(0)=0$.

Montrer que pour tout $x\in]-1\,;1[$, on a : $F(x)=G(x)+\sqrt{1-x^2}-1$.

3) On note H et K les fonctions définies sur $]0\,;\pi[$ par $H(x)=F(\cos(x))$ et $K(x)=G(\cos(x))$.

Montrer que $H(x)=K(x)+\sin(x)-1$

4) a) Montrer que K est dérivable sur $]0\,;\pi[$ puis calculer $K'(x)$ en fonction de x.

b) En déduire $K(x)$ et $H(x)$ en fonction de x.

Exercice 5 : 30 min 4 pts

Sur l'intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$; $I_1=]0;+\infty[$

$f_2(x)=(x+2)^2(x-1)$; $I_2=\mathbb{R}$

$f_3(x)=x^2(x-1)^{2022}$; $I_3=\mathbb{R}$

$f_4(x)=x^3(x^2+1)^{2022}$; $I_4=\mathbb{R}$

$f_5(x)=tg^2(3x)+tg^4(3x)$; $I_5=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[$

$f_6(x)=\tan^4(x)$; $I_6=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$f_7(x)=\frac{tg^2(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$; $I_7=]-1;1[$

$f_8(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$; $I_8=]-1;+\infty[$

$f_9(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$; $I_9=\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_{10}(x)=\dfrac{1}{1+\cos(x)}$; $I_{10}=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

$f_{11}(x)=\cos^2(x)\sin^3(x)$; $I_{11}=\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_{12}(x)=\dfrac{1}{\cos^4(x)}$; $I_{12}=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 6 : 20 min 4 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1°)a) Dresser le tableau de f puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.

c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur I puis dresser son tableau de variation.

d) Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2°) On considère la fonction g définie pour tout $x\in I$ par $g(x)=xf^{-1}(x)$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$.

b) En déduire que, pour tout $x\in I$, $g'(x)=x$.

c) Déterminer alors $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

Exercice 7 : 15 min 3 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$f(0)=0$; $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)+3}$ pout tout réel x .

1°)a) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b) En déduire les variations de f^{-1} .

2°)a) Montrer que f^{-1}est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x)$.

b) En déduire $f^{-1}(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8 : 30 min 4 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$..

1°)a) Montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C_f).

b) Dresser le tableau de variations de f puis tracer (C_f).

2°) On désigne par F la primitive de f telle que F(0)=0 et par (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne $F(1)=\sqrt{3}$

a) Montrer que, pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, on a $F(x) < x$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

c) Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$ on a : $F(x) <-\frac{1}{2}x^2$.

d) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x}$.

3°)a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_F).

b) Donner une équation de la tangente à (C_F) au point I.

c) Dresser le tableau de variations de F puis tracer (C_F) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 9 : 30 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\left[1;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

1°)a) Justifier que f admet une unique primitive F qui s'annule en 1.

b) Montrer que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, on a $0 < F(x) < (x-1)f(x)$.

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1.

2°)a) Soit G la fonction définie sur $\left[1;+\infty\right[$ par $G(x)= F(x) -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-1)^5}$.

Montrer que G est strictement croissante sur $\left[1;+\infty\right[$.

b) En déduire que pour tout $x\in\left[1;+\infty\right[$, on a $F(x)\geq\frac{3}{5}(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

d) Dresser le tableau de variations de F puis tracer la courbe représentative (C_F) de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 10 : 30 min 5 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1) Montrer que f possède, sur $\mathbb{R}$, une unique primitive F qui s'annule en 0.

2) on pose $g(x)=F(-x)+F(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ en fonction de x

b) Calculer $g(0)$ puis montrer que F est impaire

3) Soit la fonction h définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan(x)$

a) Montrer que h est bijective puis tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

b) Montrer que F est la réciproque de h puis tracer la courbe $\mathscr{C}_F$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a **:** $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $h\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{h(x)}$ **.**

b) Montrer alors que, pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$**.**

c) En déduire que **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$

5) Montrer que pour tout pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ on a : $\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et $h\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{h(x)}$.

En déduire que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$, $F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

En déduire que **:** $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\frac{\pi}{2}$.