**Exercice 2 : (4 points)** (Juin 2020)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure 1 de l'annexe, $(\Gamma)$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle $(\Gamma)$ d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a+\bar{a}$.

a) Vérifier que $R\in(O,\vec{u})$. Construire R.

b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a}+1)z+(ia-1)\bar{z}=i(a+\bar{a})$.

c) Montrer que $(AP)\perp(OM)\Leftrightarrow(i\bar{a}+1)z-(ia-1)\bar{z}=0$.

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par $Z_H$ l'affixe du point H.

Justifier que $Z_H=\dfrac{i(a+\bar{a})}{2(i\bar{a}+1)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N=\dfrac{(a+\bar{a})}{(i\bar{a}+1)}$.

a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

b) Construire le point N.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle $(\Gamma)$ privé des points B et C.

**Exercice 2 (3 points)** (Juin 2018)

Soit $\theta$ un réel non nul.

Dans la **figure 1** de **l'annexe** jointe,

- $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OE}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$ ;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, $-1$ et $1+\sqrt{2}$ ;
- $\Gamma$ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$ ;
- D est le point d'intersection de $\Gamma$ et l'axe $(O,\vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2=1+\sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A=i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A=OD\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2+\dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$.

a) Vérifier que $z_A$ est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe $z_B$, où $z_B$ est la deuxième solution de (E).

Déterminer $z_B$.

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD\, e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

**Exercice 2 (3 points)** (Juin 2016)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in ]0, \pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que ( $z_1 z_2$ est un réel strictement positif ) si et seulement si $\left(\theta = \dfrac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \dfrac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1 z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points $M_1$ et $M_2$, images des solutions $z_1$ et $z_2$ de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(0, \vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points $M_1$ et $M_2$ images des solutions $z_1$ et $z_2$ de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

**Exercice 1 (5 points)** (Juin 2015)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E ): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle ( $\Gamma$) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2 .

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in ]-\pi, \pi]$ et M le point du cercle ( $\Gamma$) d'affixe $2e^{i\theta}$ .

On désigne par N le point de ($\Gamma$) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) =K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.