Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Série n°1: Ln

Nom du prof : Aguir Imed

Exercice 1 : 30 min 3 pts

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = nx^2 - (n+1) + \ln x$

1) a) Montrer que f_n réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0,+\infty[$ et que $1<\alpha_n<2$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_{n+1}) = 1 - (\alpha_{n+1})^2$.

b) Etudier la monotonie de (α_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2-\alpha_n}{n(1+\alpha_n)} \le \alpha_n - 1 \le \dfrac{1}{n\alpha_n(1+\alpha_n)}$.

c) Déterminer en justifiant la réponse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n - 1)$

Exercice 2 : 40 min 5 pts

A) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f, en déduire le signe de f(x).

c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $\dfrac{1}{x+1} \le \ln(1+\dfrac{1}{x})$

d) Montrer que $\forall x \ge 1, \int_1^x \ln(1+\dfrac{1}{t}) - \dfrac{1}{1+t}\,dt = x\ln(1+\dfrac{1}{x}) - \ln 2$.

Déduire que $\forall x \ge 1, x\ln(1+\dfrac{1}{x}) \ge \ln 2$.

e) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) a) Vérifier que pour tout t de $[0,+\infty[$ on a : $0 \le 1 - \dfrac{1}{1+t} \le t$.

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a : $0 \le x - \ln(1+x) \le \dfrac{x^2}{2}$.

B) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = (1+\dfrac{1}{n})^n$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $(1+\dfrac{1}{n})^n \ge 2$

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $V_n \ge 2^{n-1}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le 1 + \ln(V_n) - \ln(V_{n+1}) \le \dfrac{1}{2n}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \le 1 + \ln(n)$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $n - \dfrac{1}{2}(1+\ln n) \le \ln(V_{n+1}) \le n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(V_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Exercice 3 : 80 min 7,5 pts

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = n - \left(n+\frac{1}{2}\right)Ln(n) + Ln(n!)$

A/ 1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = Ln\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Etudier les variations de φ . En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} Ln\left(\frac{x}{k}\right)dx \le 0$

b) Prouver alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} Ln(x)dx - Ln(n!) \le 0$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)Ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - Ln\sqrt{2} \ge 0$

2) Soient f et g deux fonctions définies sur $[1,2[$ par $g(x) = \frac{1}{x(2-x)}$ et $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt & si\ x \ne 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

. a) Etudier les variations de g .

b) Montrer que pour tout $x \in]1,2[$, $1 \le f(x) \le \frac{1}{x(2-x)}$.

c) Déduire que f est continue à droite en 1.

d) Vérifier que $\frac{1}{t(2-t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right)$. et en déduire que pour tout $x \in]1,2[$, $f(x) = \frac{1}{2(x-1)} Ln\frac{x}{2-x}$.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = 1 - f\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)$.

En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \ge Ln\sqrt{2}$.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

B/ Soit la suite (V_n) définie par : $V_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^n \sqrt{1-x}\, dx$

1) Calculer V_0 .

2) a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b) En déduire que $V_1 = \frac{\pi}{8}$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n > 0$.

b) Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

c) Déduire que (V_n) est convergente.

4) a) Prouver à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}V_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+2}{n+5} \le \frac{V_{n+1}}{V_n} \le 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1$.

5) a) Montrer , par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n.V_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, V_n = \sqrt{2\pi}$.

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{2n} = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2U_n - U_{2n} = Ln\left[\dfrac{(2n+1)(2n+3)}{2} V_{2n} \times \sqrt{\dfrac{2}{n}}\right]$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.