Méthodes Avancées de Simulation pour l'Estimation de la VaR

Simulation Monte-Carlo et Modèles GARCH

Projet ML for Finance

Décembre 2025

Résumé

Ce document présente un état de l'art des méthodes avancées de simulation pour l'estimation de la VaR : la simulation Monte-Carlo et les modèles GARCH. La simulation Monte-Carlo génère des scénarios synthétiques à partir de modèles stochastiques (mouvement brownien géométrique, distributions Student), offrant une flexibilité pour capturer les dynamiques complexes. Les modèles GARCH capturent la dynamique temporelle de la volatilité conditionnelle et le clustering observé empiriquement.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Limitations des méthodes classiques

L'approche paramétrique suppose une distribution normale statique, la simulation historique se limite aux scénarios observés. Ces méthodes peinent à capturer :

- Dynamique temporelle de la volatilité (clustering)
- Événements de queue non observés
- Dépendances non-linéaires entre actifs
- Queues épaisses (*fat tails*)

1.2 Méthodes avancées

1. **Monte-Carlo** : Génère trajectoires synthétiques basées sur modèles stochastiques
2. **GARCH** : Capture dynamique de la volatilité conditionnelle

2 Simulation Monte-Carlo

2.1 Principe général

Définition 1 (VaR par Monte-Carlo). *1. Spécifier modèle stochastique pour rendements*

2. Simuler N trajectoires de T périodes

3. Calculer distribution des rendements simulés

4. Extraire quantile empirique : $VaR_\alpha = -q_{1-\alpha}$

2.2 Mouvement Brownien Géométrique (GBM)

2.2.1 Modèle univarié

Définition 2 (GBM). *Le prix d'un actif suit :*

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{1}$$

où μ est le drift, σ la volatilité, W_t un mouvement brownien standard.

Proposition 1 (Solution analytique).

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right] \tag{2}$$

Démonstration. Appliquer le lemme d'Itô à $f(S_t) = \ln(S_t)$:

$$\mathrm{d}(\ln S_t) = \frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \frac{1}{2S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 \tag{3}$$

$$= \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t - \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \tag{5}$$

Intégrer : $\ln(S_t/S_0) = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$. □

2.2.2 Discrétisation d'Euler-Maruyama

Pour simulation numérique sur $[0, T]$ avec N pas ($\Delta t = T/N$) :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z\right] \tag{6}$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2.3 Extension multivariée

Pour un portefeuille de d actifs :

2.3.1 Monte-Carlo avec Normale Multivariée (MVN)

Définition 3 (MC-MVN). *Rendements logarithmiques :*

$$\mathbf{r} = \left[\ln\frac{S_1(T)}{S_1(0)}, \ldots, \ln\frac{S_d(T)}{S_d(0)}\right]^\top \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{7}$$

Génération avec Cholesky

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{Z} \tag{8}$$

où $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ (décomposition de Cholesky) et $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_d)$.

2.3.2 Monte-Carlo avec Student Multivariée (MVT)

Pour capturer les queues épaisses :

Définition 4 (MC-MVT).

$$\mathbf{r} \sim t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{9}$$

où ν est le nombre de degrés de liberté.

Génération

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{L}\mathbf{Z}}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}} \tag{10}$$

où $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_d)$ et χ^2_ν est indépendant.

Remarque 1 (Choix de ν).
- $\nu = 6$ *: Queues épaisses modérées (notre implémentation)*
- $\nu \to \infty$ *: Converge vers MVN*
- $\nu = 3$ *: Queues très épaisses*

2.3.3 Monte-Carlo avec Copule-t

Définition 5 (Copule). *Fonction qui lie distributions marginales univariées à distribution jointe :*

$$F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \tag{11}$$

Copule de Student

$$C^t_\nu(u_1, \ldots, u_d) = T_\nu(T_\nu^{-1}(u_1), \ldots, T_\nu^{-1}(u_d); \mathbf{R}) \tag{12}$$

où T_ν est la CDF Student univariée, $\mathbf{R}$ la matrice de corrélation.

Avantage Capture dépendance de queue (*tail dependence*) : événements extrêmes tendent à se produire ensemble.

2.4 Algorithme Monte-Carlo complet

Algorithm 1 VaR par Monte-Carlo

Require: Données historiques, N simulations, α, V_0

// **Estimation des paramètres**
$\hat{\boldsymbol{\mu}} \leftarrow$ Moyenne empirique rendements
$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \leftarrow$ Matrice covariance empirique
$\hat{\nu} \leftarrow$ Estimer par MLE (si Student/Copule)
$\mathbf{L} \leftarrow$ Décomposition Cholesky de $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$

// **Simulation**
Initialiser : rendements_simulés $\leftarrow$ []
for $i = 1$ to N **do**
  if Modèle = MVN **then**
    $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_d)$
    $\mathbf{r}_i \leftarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{LZ}$
  else if Modèle = MVT **then**
    $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_d)$
    $\chi^2 \sim \chi^2_{\hat{\nu}}$
    $\mathbf{r}_i \leftarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{LZ}/\sqrt{\chi^2/\hat{\nu}}$
  else if Modèle = Copule-t **then**
    Générer via copule Student (voir algorithme spécifique)
  end if
  Rendement portefeuille : $r_{\text{port},i} \leftarrow \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_i$
  Ajouter à liste
end for

// **Calcul VaR**
Trier rendements simulés
$k \leftarrow \lceil (1-\alpha) \cdot N \rceil$
$\text{VaR}_\alpha \leftarrow -$rendements_simulés$[k] \cdot V_0$

return VaR_α

2.5 Nombre de simulations

Notre implémentation $N = 10,000$ simulations (standard industrie).

Table 1 – Recommandations nombre de simulations

Niveau VaR	**N minimum**	**N recommandé**
95% ($\alpha = 5\%$)	1,000	10,000
99% ($\alpha = 1\%$)	10,000	50,000
99.9% ($\alpha = 0.1\%$)	100,000	500,000

3 Modèles GARCH

3.1 Motivation

3.1.1 Faits stylisés

Les rendements financiers exhibent :

1. **Clustering de volatilité** : Périodes calmes vs turbulentes
2. **Queues épaisses** : Kurtosis > 3
3. **Effet de levier** : Baisse $\Rightarrow$ volatilité $\uparrow$ plus que hausse

[Clustering : grandes variations tendent à être suivies de grandes variations]

3.2 Modèle GARCH(1,1)

Définition 6 (GARCH(1,1))**.**

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \tag{13}$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim D(0,1) \tag{14}$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{15}$$

où D est une distribution (Normale ou Student-t).

Paramètres

- $\omega > 0$: Volatilité de base
- $\alpha \geq 0$: Réaction aux chocs récents (ARCH)
- $\beta \geq 0$: Persistance (GARCH)
- Stationnarité : $\alpha + \beta < 1$

3.3 GARCH avec innovations Student-t

Pour capturer queues épaisses :

$$z_t \sim t_\nu \quad \text{(Student à } \nu \text{ degrés de liberté)} \tag{16}$$

Remarque 2.
- *$\nu = \infty$: Équivalent à Normale*
- *ν petit (3-6) : Queues très épaisses*
- *Notre implémentation : GARCH(1,1)-t avec ν estimé par MLE*

3.4 Propriétés statistiques

3.4.1 Stationnarité

Théorème 1. *Si $\alpha + \beta < 1$, le processus est covariance-stationnaire avec :*

$$Var(r_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \tag{17}$$

Démonstration. En prenant variance inconditionnelle de $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ et en régime stationnaire ($\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$) :

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2 \tag{18}$$

$$\sigma^2(1 - \alpha - \beta) = \omega \tag{19}$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \tag{20}$$

□

3.4.2 Persistance

Définition 7 (Half-life)**.** *Temps pour que l'effet d'un choc diminue de moitié :*

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\alpha + \beta)} \tag{21}$$

Exemple 1. *Si $\alpha + \beta = 0.95$: $\tau_{1/2} \approx 13.5$ jours.*

3.5 Estimation par Maximum de Vraisemblance

3.5.1 Log-vraisemblance

Pour GARCH(1,1)-Normal :

$$\mathcal{L}(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma_t^2}\right] \tag{22}$$

Pour GARCH(1,1)-Student(ν) :

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T}\left[\ln\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\nu\pi\sigma_t^2) - \frac{\nu+1}{2}\ln\left(1 + \frac{(r_t - \mu)^2}{\nu\sigma_t^2}\right)\right] \tag{23}$$

3.5.2 Algorithme d'optimisation

Algorithm 2 Estimation MLE GARCH(1,1)-t

Require: Rendements $\{r_t\}_{t=1}^{T}$

// **Initialisation**
$\mu^{(0)} \leftarrow \bar{r}$
$\omega^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)} \leftarrow$ Valeurs initiales
$\nu^{(0)} \leftarrow 10$

// **Optimisation**
$\theta^* \leftarrow \arg\max_\theta \mathcal{L}(\theta)$ via :
  - BFGS avec gradient numérique
  - Ou L-BFGS-B avec contraintes
  Contraintes : $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$, $\nu > 2$

// **Volatilité conditionnelle**
$\sigma_1^2 \leftarrow \omega/(1 - \alpha - \beta)$ (initialisation)
for $t = 2$ to T **do**
  $\varepsilon_{t-1} \leftarrow r_{t-1} - \mu$
  $\sigma_t^2 \leftarrow \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
end for

return $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\nu})$, $\{\sigma_t^2\}_{t=1}^{T}$

3.6 Prévision de volatilité

3.6.1 Horizon 1 période

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon_T^2 + \hat{\beta}\sigma_T^2 \tag{24}$$

3.6.2 Horizon h périodes

Proposition 2.

$$\hat{\sigma}_{T+h}^2 = \bar{\sigma}^2 + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{h-1}(\sigma_{T+1}^2 - \bar{\sigma}^2) \tag{25}$$

où $\bar{\sigma}^2 = \hat{\omega}/(1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta})$ *est la variance inconditionnelle.*

Démonstration. Par récurrence :

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{T+2} &= \omega + (\alpha+\beta)\sigma^2_{T+1} && (26)\\
\sigma^2_{T+3} &= \omega + (\alpha+\beta)\sigma^2_{T+2} = \omega[1+(\alpha+\beta)] + (\alpha+\beta)^2\sigma^2_{T+1} && (27)\\
&\vdots && (28)\\
\sigma^2_{T+h} &= \omega\sum_{i=0}^{h-2}(\alpha+\beta)^i + (\alpha+\beta)^{h-1}\sigma^2_{T+1} && (29)\\
&= \omega\frac{1-(\alpha+\beta)^{h-1}}{1-(\alpha+\beta)} + (\alpha+\beta)^{h-1}\sigma^2_{T+1} && (30)\\
&= \bar{\sigma}^2[1-(\alpha+\beta)^{h-1}] + (\alpha+\beta)^{h-1}\sigma^2_{T+1} && (31)
\end{aligned}$$

□

Convergence Quand $h \to \infty$: $\hat{\sigma}^2_{T+h} \to \bar{\sigma}^2$ (variance inconditionnelle).

3.7 Application à la VaR

Algorithm 3 VaR avec GARCH(1,1)-t

Require: Rendements $\{r_t\}$, α, V_0

// **Estimation GARCH**
$\hat{\theta} \leftarrow$ Estimer GARCH(1,1)-t par MLE
Calculer $\{\sigma^2_t\}_{t=1}^T$

// **Prévision volatilité**
$\hat{\sigma}^2_{T+1} \leftarrow \hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon^2_T + \hat{\beta}\sigma^2_T$

// **VaR**
$q_\alpha \leftarrow$ Quantile Student-t : $t^{-1}_{\hat{\nu}}(\alpha)$
$\mathrm{VaR}_\alpha \leftarrow -(\hat{\mu} + q_\alpha \cdot \hat{\sigma}_{T+1}) \cdot V_0$

return VaR_α

Références

[1] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.

[2] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.

[3] Hull, J. C. (2012). *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley Finance.

[4] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

[5] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.

[6] Christoffersen, P. (2012). *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press.

[7] Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley.