

Méthodes Classiques d'Estimation de la VaR

Approches Paramétrique, Simulation Historique et EWMA

Projet ML for Finance

Décembre 2025

Résumé

Ce document présente un état de l'art des trois méthodes fondamentales d'estimation de la Value-at-Risk : l'approche paramétrique variance-covariance, la simulation historique, et EWMA (Exponentially Weighted Moving Average). L'approche paramétrique repose sur l'hypothèse de normalité et offre une solution analytique élégante. La simulation historique adopte une perspective non-paramétrique basée sur les quantiles empiriques. EWMA introduit une pondération exponentielle pour capturer la dynamique de la volatilité.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Contexte	3
1.2	Niveaux standards	3
2	Approche Paramétrique (Variance-Covariance)	3
2.1	Principe	3
2.1.1	Hypothèse fondamentale	3
2.2	Cas univarié	3
2.3	Cas multivarié (portefeuille)	3
2.3.1	Rendement de portefeuille	3
2.3.2	Volatilité de portefeuille	4
2.4	Estimation des paramètres	4
2.4.1	Moyenne empirique	4
2.4.2	Matrice de covariance empirique	4
2.5	Algorithme complet	4
2.6	Ajustement temporel	5
2.6.1	Règle de la racine carrée	5
2.7	Extensions	5
2.7.1	Distribution de Student	5
2.7.2	Cornish-Fisher	5
2.8	Avantages et limites	5

3 Simulation Historique	5
3.1 Principe	5
3.1.1 Approche non-paramétrique	5
3.2 Quantile empirique	6
3.3 Algorithme	6
3.4 Interpolation	6
3.5 Taille d'échantillon	6
3.6 Propriétés statistiques	7
3.6.1 Convergence	7
3.6.2 Variance asymptotique	7
3.7 Variantes	7
3.7.1 Weighted Historical Simulation	7
3.7.2 Filtered Historical Simulation (FHS)	7
3.7.3 Bootstrap	7
3.8 Avantages et limites	7
4 EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)	8
4.1 Motivation	8
4.2 Principe	8
4.2.1 Variance EWMA	8
4.2.2 Développement récursif	8
4.3 Half-life	8
4.4 Cas multivarié	8
4.4.1 Matrice de covariance EWMA	8
4.5 Algorithme	9
4.6 Avantages et limites	9

1 Introduction

1.1 Contexte

La Value-at-Risk (VaR) est la mesure de risque standard depuis les années 1990, popularisée par J.P. Morgan (RiskMetrics) et requise par Bâle III.

Définition 1 (VaR). *Pour un portefeuille de valeur V_0 et rendement R sur horizon h :*

$$\mathbb{P}(V_0 \cdot R \leq -VaR_\alpha) = 1 - \alpha \quad (1)$$

Équivalent : $VaR_\alpha = -q_{1-\alpha}(R) \cdot V_0$

1.2 Niveaux standards

- $\alpha = 95\%$: gestion quotidienne
- $\alpha = 99\%$: réglementaire (Bâle III)
- $\alpha = 99.9\%$: stress testing

2 Approche Paramétrique (Variance-Covariance)

2.1 Principe

2.1.1 Hypothèse fondamentale

$$R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2)$$

Alors : $VaR_\alpha = -(mu + z_{1-\alpha}\sigma) \cdot V_0$

où $z_{1-\alpha}$ est le quantile de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Valeurs courantes

- 95% : $z_{0.05} = -1.645$
- 99% : $z_{0.01} = -2.326$
- 99.9% : $z_{0.001} = -3.090$

2.2 Cas univarié

Pour un actif simple :

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot |z_{1-\alpha}| \cdot \sigma \quad (3)$$

Exemple 1. Portefeuille 1M\$, $\mu = 0$, $\sigma = 2\%$ annuelle, VaR 99% sur 1 jour :

$$VaR_{0.01} = 1,000,000 \times 2.326 \times \frac{0.02}{\sqrt{252}} = 2,927\$ \quad (4)$$

2.3 Cas multivarié (portefeuille)

2.3.1 Rendement de portefeuille

Pour d actifs avec poids $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top$:

$$R_p = \mathbf{w}^\top \mathbf{r} \quad (5)$$

où $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)^\top$ sont les rendements individuels.

2.3.2 Volatilité de portefeuille

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (6)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de covariance.

Proposition 1 (VaR paramétrique multivariée).

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot |z_{1-\alpha}| \cdot \sqrt{\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} \quad (7)$$

2.4 Estimation des paramètres

2.4.1 Moyenne empirique

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \quad (8)$$

Simplification En pratique, on pose souvent $\mu = 0$ (rendement espéré négligeable devant volatilité sur horizons courts).

2.4.2 Matrice de covariance empirique

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \hat{\mu}_i)(r_{j,t} - \hat{\mu}_j) \quad (9)$$

2.5 Algorithme complet

Algorithm 1 VaR Variance-Covariance

Require: Rendements historiques $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$, poids \mathbf{w} , α , V_0

```

1:
2: // Estimation paramètres
3:  $\hat{\mu} \leftarrow \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{r}_t$ 
4:  $\hat{\Sigma} \leftarrow \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \hat{\mu})(\mathbf{r}_t - \hat{\mu})^\top$ 
5:
6: // Volatilité portefeuille
7:  $\sigma_p \leftarrow \sqrt{\mathbf{w}^\top \hat{\Sigma} \mathbf{w}}$ 
8:
9: // Quantile normal
10:  $z \leftarrow \text{Quantile}_{1-\alpha}$  de  $\mathcal{N}(0, 1)$ 
11:
12: // VaR
13:  $VaR_\alpha \leftarrow V_0 \cdot |z| \cdot \sigma_p$ 
14:
15: return  $VaR_\alpha$ 
```

2.6 Ajustement temporel

2.6.1 Règle de la racine carrée

Pour VaR sur h jours à partir de VaR 1-jour (sous i.i.d.) :

$$\text{VaR}_\alpha(h) = \sqrt{h} \cdot \text{VaR}_\alpha(1) \quad (10)$$

Théorème 1 (Justification). Si r_1, \dots, r_h i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$r_{1:h} = \sum_{i=1}^h r_i \sim \mathcal{N}(h\mu, h\sigma^2) \quad (11)$$

Donc $\sigma(r_{1:h}) = \sqrt{h}\sigma$.

2.7 Extensions

2.7.1 Distribution de Student

Pour queues épaisses :

$$R \sim t_\nu(\mu, \sigma^2) \quad (12)$$

VaR : $\text{VaR}_\alpha = V_0 \cdot |t_{\nu,1-\alpha}| \cdot \sigma$

2.7.2 Cornish-Fisher

Ajustement pour skewness (S) et kurtosis (K) :

$$z_\alpha^{\text{CF}} = z_\alpha + \frac{S}{6}(z_\alpha^2 - 1) + \frac{K-3}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha) - \frac{S^2}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) \quad (13)$$

2.8 Avantages et limites

Avantages

- Simplicité : calcul analytique rapide
- Interprétabilité : paramètres clairs
- Stabilité : estimation robuste avec peu de données

Limites

- Hypothèse normalité restrictive
- Sous-estime queues épaisses
- Suppose rendements i.i.d. (ignore clustering)

3 Simulation Historique

3.1 Principe

3.1.1 Approche non-paramétrique

Aucune hypothèse sur distribution : utilise directement données historiques.

Définition 2 (HS). 1. Collecter T rendements historiques

2. Appliquer au portefeuille actuel
3. Calculer quantile empirique

3.2 Quantile empirique

Pour rendements triés $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$:

$$\hat{q}_{1-\alpha} = r_{(k)} \quad \text{où } k = \lceil (1 - \alpha) \cdot T \rceil \quad (14)$$

Exemple 2. $T = 1000$, $\alpha = 0.05$: $k = \lceil 0.05 \times 1000 \rceil = 50$

$$VaR_{95\%} = -r_{(50)} \quad (50\text{ème pire rendement})$$

3.3 Algorithme

Algorithm 2 VaR par Simulation Historique

Require: Rendements $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$, poids \mathbf{w} , α , V_0

```

1:
2: // Rendements portefeuille
3: for  $t = 1$  to  $T$  do
4:    $R_{p,t} \leftarrow \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t$ 
5: end for
6:
7: // Tri
8: Trier  $\{R_{p,t}\}$  :  $R_{p,(1)} \leq \dots \leq R_{p,(T)}$ 
9:
10: // Quantile
11:  $k \leftarrow \lceil (1 - \alpha) \cdot T \rceil$ 
12:  $\hat{q}_{1-\alpha} \leftarrow R_{p,(k)}$ 
13:
14: // VaR
15:  $VaR_\alpha \leftarrow -\hat{q}_{1-\alpha} \cdot V_0$ 
16:
17: return  $VaR_\alpha$ 

```

3.4 Interpolation

Si $(1 - \alpha) \cdot T$ n'est pas entier :

Interpolation linéaire

$$\hat{q}_{1-\alpha} = (1 - \lambda)r_{(\lfloor k \rfloor)} + \lambda r_{(\lceil k \rceil)} \quad (15)$$

où $\lambda = k - \lfloor k \rfloor$.

3.5 Taille d'échantillon

Règle Au moins $1/(1 - \alpha)$ observations pour avoir données dans queue.

TABLE 1 – Taille minimale recommandée

Niveau VaR	T minimum
95%	200
99%	1,000
99.9%	10,000

3.6 Propriétés statistiques

3.6.1 Convergence

Théorème 2. *Le quantile empirique converge vers le vrai quantile :*

$$\hat{q}_{1-\alpha} \xrightarrow{P} q_{1-\alpha} \quad (16)$$

3.6.2 Variance asymptotique

$$\text{Var}(\hat{q}_{1-\alpha}) \approx \frac{(1-\alpha)\alpha}{T \cdot f(q_{1-\alpha})^2} \quad (17)$$

où f est la densité au quantile.

3.7 Variantes

3.7.1 Weighted Historical Simulation

Pondération exponentielle :

$$w_t = \frac{(1-\lambda)\lambda^{T-t}}{1-\lambda^T} \quad (18)$$

Observations récentes ont plus de poids.

3.7.2 Filtered Historical Simulation (FHS)

1. Estimer GARCH pour volatilité σ_t
2. Normaliser : $z_t = r_t/\sigma_t$
3. Rééchantillonner $\{z_t\}$
4. Rescaler : $\tilde{r}_{t+1} = z_{\text{sample}} \cdot \hat{\sigma}_{t+1}$

3.7.3 Bootstrap

Rééchantillonnage avec remplacement pour intervalles de confiance.

3.8 Avantages et limites

Avantages

- Aucune hypothèse distributionnelle
- Capture queues épaisses, asymétrie naturellement
- Simple à implémenter
- Transparent

Limites

- Limité aux scénarios observés
- Suppose stationnarité
- Sensible à taille échantillon
- Pas de scaling simple pour horizon h

4 EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

4.1 Motivation

Variance-covariance standard suppose volatilité constante. EWMA introduit pondération exponentielle pour capturer dynamique.

4.2 Principe

4.2.1 Variance EWMA

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (19)$$

où $\lambda \in (0, 1)$ est le facteur de décroissance.

Valeur RiskMetrics $\lambda = 0.94$ (standard industrie).

4.2.2 Développement récursif

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-1-i}^2 \quad (20)$$

Observations récentes : poids $(1 - \lambda)$

Observations anciennes : poids décroît exponentiellement.

4.3 Half-life

Définition 3. Temps pour que poids diminue de moitié :

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\lambda)} \quad (21)$$

Exemple 3. $\lambda = 0.94 : \tau_{1/2} \approx 11$ jours

4.4 Cas multivarié

4.4.1 Matrice de covariance EWMA

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \mathbf{r}_{t-1} \mathbf{r}_{t-1}^\top \quad (22)$$

4.5 Algorithme

Algorithm 3 VaR avec EWMA

Require: Rendements $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$, \mathbf{w} , α , V_0 , $\lambda = 0.94$

```
1:  
2: // Initialisation  
3:  $\Sigma_0 \leftarrow$  Covariance empirique sur premiers 100 jours  
4:  
5: // Mise à jour EWMA  
6: for  $t = 1$  to  $T$  do  
7:    $\Sigma_t \leftarrow \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \mathbf{r}_{t-1} \mathbf{r}_{t-1}^\top$   
8: end for  
9:  
10: // Volatilité actuelle  
11:  $\sigma_p \leftarrow \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma_T \mathbf{w}}$   
12:  
13: // VaR (hypothèse normalité)  
14:  $z \leftarrow$  Quantile $_{1-\alpha}$  de  $\mathcal{N}(0, 1)$   
15:  $\text{VaR}_\alpha \leftarrow V_0 \cdot |z| \cdot \sigma_p$   
16:  
17: return  $\text{VaR}_\alpha$ 
```

4.6 Avantages et limites

Avantages

- Adaptatif : réagit rapidement aux chocs
- Simple : un seul paramètre λ
- Efficient : mise à jour récursive
- Standard industrie (RiskMetrics)

Limites

- Toujours hypothèse normalité
- Choix de λ arbitraire
- Pas de test statistique formel

Références

- [1] J.P. Morgan. (1996). *RiskMetrics Technical Document*. Fourth Edition.
- [2] Jorion, P. (2007). *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- [3] Dowd, K. (2005). *Measuring Market Risk*. Wiley Finance.
- [4] Christoffersen, P. (2012). *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press.
- [5] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- [6] Hull, J. C. (2012). *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley Finance.