

# Méthodes Classiques d'Estimation de la VaR

Approches Paramétrique, Simulation Historique et EWMA

Projet ML for Finance

Décembre 2025

## Résumé

Ce document présente un état de l'art des trois méthodes fondamentales d'estimation de la Value-at-Risk : l'approche paramétrique variance-covariance, la simulation historique, et EWMA (Exponentially Weighted Moving Average). L'approche paramétrique repose sur l'hypothèse de normalité et offre une solution analytique élégante. La simulation historique adopte une perspective non-paramétrique basée sur les quantiles empiriques. EWMA introduit une pondération exponentielle pour capturer la dynamique de la volatilité.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Contexte . . . . .	3
1.2	Niveaux standards . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Approche Paramétrique (Variance-Covariance)</b>	<b>3</b>
2.1	Principe . . . . .	3
2.1.1	Hypothèse fondamentale . . . . .	3
2.2	Cas univarié . . . . .	3
2.3	Cas multivarié (portefeuille) . . . . .	3
2.3.1	Rendement de portefeuille . . . . .	3
2.3.2	Volatilité de portefeuille . . . . .	4
2.4	Estimation des paramètres . . . . .	4
2.4.1	Moyenne empirique . . . . .	4
2.4.2	Matrice de covariance empirique . . . . .	4
2.5	Algorithme complet . . . . .	4
2.6	Ajustement temporel . . . . .	5
2.6.1	Règle de la racine carrée . . . . .	5
2.7	Extensions . . . . .	5
2.7.1	Distribution de Student . . . . .	5
2.7.2	Cornish-Fisher . . . . .	5
2.8	Avantages et limites . . . . .	5

<b>3</b>	<b>Simulation Historique</b>	<b>5</b>
3.1	Principe . . . . .	5
3.1.1	Approche non-paramétrique . . . . .	5
3.2	Quantile empirique . . . . .	6
3.3	Algorithme . . . . .	6
3.4	Interpolation . . . . .	6
3.5	Taille d'échantillon . . . . .	6
3.6	Propriétés statistiques . . . . .	7
3.6.1	Convergence . . . . .	7
3.6.2	Variance asymptotique . . . . .	7
3.7	Variantes . . . . .	7
3.7.1	Weighted Historical Simulation . . . . .	7
3.7.2	Filtered Historical Simulation (FHS) . . . . .	7
3.7.3	Bootstrap . . . . .	7
3.8	Avantages et limites . . . . .	7
<b>4</b>	<b>EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)</b>	<b>8</b>
4.1	Motivation . . . . .	8
4.2	Principe . . . . .	8
4.2.1	Variance EWMA . . . . .	8
4.2.2	Développement récursif . . . . .	8
4.3	Half-life . . . . .	8
4.4	Cas multivarié . . . . .	8
4.4.1	Matrice de covariance EWMA . . . . .	8
4.5	Algorithme . . . . .	9
4.6	Avantages et limites . . . . .	9

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte

La Value-at-Risk (VaR) est la mesure de risque standard depuis les années 1990, popularisée par J.P. Morgan (RiskMetrics) et requise par Bâle III.

**Définition 1** (VaR). *Pour un portefeuille de valeur  $V_0$  et rendement  $R$  sur horizon  $h$  :*

$$\mathbb{P}(V_0 \cdot R \leq -VaR_\alpha) = 1 - \alpha \quad (1)$$

*Équivalent :*  $VaR_\alpha = -q_{1-\alpha}(R) \cdot V_0$

## 1.2 Niveaux standards

- $\alpha = 95\%$  : gestion quotidienne
- $\alpha = 99\%$  : réglementaire (Bâle III)
- $\alpha = 99.9\%$  : stress testing

# 2 Approche Paramétrique (Variance-Covariance)

## 2.1 Principe

### 2.1.1 Hypothèse fondamentale

$$R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2)$$

Alors :  $VaR_\alpha = -(mu + z_{1-\alpha}\sigma) \cdot V_0$   
où  $z_{1-\alpha}$  est le quantile de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### Valeurs courantes

- $95\%$  :  $z_{0.05} = -1.645$
- $99\%$  :  $z_{0.01} = -2.326$
- $99.9\%$  :  $z_{0.001} = -3.090$

## 2.2 Cas univarié

Pour un actif simple :

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot |z_{1-\alpha}| \cdot \sigma \quad (3)$$

**Exemple 1.** *Portefeuille 1M\$,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 2\%$  annuelle, VaR 99% sur 1 jour :*

$$VaR_{0.01} = 1,000,000 \times 2.326 \times \frac{0.02}{\sqrt{252}} = 2,927\$ \quad (4)$$

## 2.3 Cas multivarié (portefeuille)

### 2.3.1 Rendement de portefeuille

Pour  $d$  actifs avec poids  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top$  :

$$R_p = \mathbf{w}^\top \mathbf{r} \quad (5)$$

où  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)^\top$  sont les rendements individuels.

### 2.3.2 Volatilité de portefeuille

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \quad (6)$$

où  $\Sigma$  est la matrice de covariance.

**Proposition 1** (VaR paramétrique multivariée).

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot |z_{1-\alpha}| \cdot \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}} \quad (7)$$

## 2.4 Estimation des paramètres

### 2.4.1 Moyenne empirique

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \quad (8)$$

**Simplification** En pratique, on pose souvent  $\mu = 0$  (rendement espéré négligeable devant volatilité sur horizons courts).

### 2.4.2 Matrice de covariance empirique

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \hat{\mu}_i)(r_{j,t} - \hat{\mu}_j) \quad (9)$$

## 2.5 Algorithme complet

---

**Algorithm 1** VaR Variance-Covariance

---

**Require:** Rendements historiques  $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$ , poids  $\mathbf{w}$ ,  $\alpha$ ,  $V_0$

---

```

1:
2: // Estimation paramètres
3:  $\hat{\boldsymbol{\mu}} \leftarrow \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{r}_t$ 
4:  $\hat{\Sigma} \leftarrow \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})^\top$ 
5:
6: // Volatilité portefeuille
7:  $\sigma_p \leftarrow \sqrt{\mathbf{w}^\top \hat{\Sigma} \mathbf{w}}$ 
8:
9: // Quantile normal
10:  $z \leftarrow \text{Quantile}_{1-\alpha} \text{ de } \mathcal{N}(0, 1)$ 
11:
12: // VaR
13:  $VaR_\alpha \leftarrow V_0 \cdot |z| \cdot \sigma_p$ 
14:
15: return  $VaR_\alpha$ 
```

---

## 2.6 Ajustement temporel

### 2.6.1 Règle de la racine carrée

Pour VaR sur  $h$  jours à partir de VaR 1-jour (sous i.i.d.) :

$$\text{VaR}_\alpha(h) = \sqrt{h} \cdot \text{VaR}_\alpha(1) \quad (10)$$

**Théorème 1** (Justification). Si  $r_1, \dots, r_h$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

$$r_{1:h} = \sum_{i=1}^h r_i \sim \mathcal{N}(h\mu, h\sigma^2) \quad (11)$$

Donc  $\sigma(r_{1:h}) = \sqrt{h}\sigma$ .

## 2.7 Extensions

### 2.7.1 Distribution de Student

Pour queues épaisses :

$$R \sim t_\nu(\mu, \sigma^2) \quad (12)$$

$$\text{VaR} : \text{VaR}_\alpha = V_0 \cdot |t_{\nu, 1-\alpha}| \cdot \sigma$$

### 2.7.2 Cornish-Fisher

Ajustement pour skewness ( $S$ ) et kurtosis ( $K$ ) :

$$z_\alpha^{\text{CF}} = z_\alpha + \frac{S}{6}(z_\alpha^2 - 1) + \frac{K - 3}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha) - \frac{S^2}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) \quad (13)$$

## 2.8 Avantages et limites

### Avantages

- Simplicité : calcul analytique rapide
- Interprétabilité : paramètres clairs
- Stabilité : estimation robuste avec peu de données

### Limites

- Hypothèse normalité restrictive
- Sous-estime queues épaisses
- Suppose rendements i.i.d. (ignore clustering)

## 3 Simulation Historique

### 3.1 Principe

#### 3.1.1 Approche non-paramétrique

Aucune hypothèse sur distribution : utilise directement données historiques.

**Définition 2** (HS). 1. Collecter  $T$  rendements historiques

2. Appliquer au portefeuille actuel

3. Calculer quantile empirique

### 3.2 Quantile empirique

Pour rendements triés  $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$  :

$$\hat{q}_{1-\alpha} = r_{(k)} \quad \text{où } k = \lceil (1 - \alpha) \cdot T \rceil \quad (14)$$

**Exemple 2.**  $T = 1000$ ,  $\alpha = 0.05$  :  $k = \lceil 0.05 \times 1000 \rceil = 50$

$\text{VaR}_{95\%} = -r_{(50)}$  (50ème pire rendement)

### 3.3 Algorithme

---

**Algorithm 2** VaR par Simulation Historique

---

**Require:** Rendements  $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$ , poids  $\mathbf{w}$ ,  $\alpha$ ,  $V_0$

---

```

1:
2: // Rendements portefeuille
3: for  $t = 1$  to  $T$  do
4:    $R_{p,t} \leftarrow \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t$ 
5: end for
6:
7: // Tri
8: Trier  $\{R_{p,t}\} : R_{p,(1)} \leq \dots \leq R_{p,(T)}$ 
9:
10: // Quantile
11:  $k \leftarrow \lceil (1 - \alpha) \cdot T \rceil$ 
12:  $\hat{q}_{1-\alpha} \leftarrow R_{p,(k)}$ 
13:
14: // VaR
15:  $\text{VaR}_\alpha \leftarrow -\hat{q}_{1-\alpha} \cdot V_0$ 
16:
17: return  $\text{VaR}_\alpha$ 

```

---

### 3.4 Interpolation

Si  $(1 - \alpha) \cdot T$  n'est pas entier :

**Interpolation linéaire**

$$\hat{q}_{1-\alpha} = (1 - \lambda)r_{(\lfloor k \rfloor)} + \lambda r_{(\lceil k \rceil)} \quad (15)$$

où  $\lambda = k - \lfloor k \rfloor$ .

### 3.5 Taille d'échantillon

**Règle** Au moins  $1/(1 - \alpha)$  observations pour avoir données dans queue.

TABLE 1 – Taille minimale recommandée

Niveau VaR	$T$ minimum
95%	200
99%	1,000
99.9%	10,000

### 3.6 Propriétés statistiques

#### 3.6.1 Convergence

**Théorème 2.** *Le quantile empirique converge vers le vrai quantile :*

$$\hat{q}_{1-\alpha} \xrightarrow{p} q_{1-\alpha} \quad (16)$$

#### 3.6.2 Variance asymptotique

$$\text{Var}(\hat{q}_{1-\alpha}) \approx \frac{(1-\alpha)\alpha}{T \cdot f(q_{1-\alpha})^2} \quad (17)$$

où  $f$  est la densité au quantile.

### 3.7 Variantes

#### 3.7.1 Weighted Historical Simulation

Pondération exponentielle :

$$w_t = \frac{(1-\lambda)\lambda^{T-t}}{1-\lambda^T} \quad (18)$$

Observations récentes ont plus de poids.

#### 3.7.2 Filtered Historical Simulation (FHS)

1. Estimer GARCH pour volatilité  $\sigma_t$
2. Normaliser :  $z_t = r_t / \sigma_t$
3. Rééchantillonner  $\{z_t\}$
4. Rescaler :  $\tilde{r}_{t+1} = z_{\text{sample}} \cdot \hat{\sigma}_{t+1}$

#### 3.7.3 Bootstrap

Rééchantillonnage avec remplacement pour intervalles de confiance.

### 3.8 Avantages et limites

#### Avantages

- Aucune hypothèse distributionnelle
- Capture queues épaisses, asymétrie naturellement
- Simple à implémenter
- Transparent

## Limites

- Limité aux scénarios observés
- Suppose stationnarité
- Sensible à taille échantillon
- Pas de scaling simple pour horizon  $h$

# 4 EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

## 4.1 Motivation

Variance-covariance standard suppose volatilité constante. EWMA introduit pondération exponentielle pour capturer dynamique.

## 4.2 Principe

### 4.2.1 Variance EWMA

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (19)$$

où  $\lambda \in (0, 1)$  est le facteur de décroissance.

**Valeur RiskMetrics**  $\lambda = 0.94$  (standard industrie).

### 4.2.2 Développement récursif

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-1-i}^2 \quad (20)$$

Observations récentes : poids  $(1 - \lambda)$

Observations anciennes : poids décroît exponentiellement.

## 4.3 Half-life

**Définition 3.** *Temps pour que poids diminue de moitié :*

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\lambda)} \quad (21)$$

**Exemple 3.**  $\lambda = 0.94$  :  $\tau_{1/2} \approx 11$  jours

## 4.4 Cas multivarié

### 4.4.1 Matrice de covariance EWMA

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \mathbf{r}_{t-1} \mathbf{r}_{t-1}^\top \quad (22)$$

## 4.5 Algorithme

---

**Algorithm 3** VaR avec EWMA

---

**Require:** Rendements  $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\alpha$ ,  $V_0$ ,  $\lambda = 0.94$

```
1:
2: // Initialisation
3:  $\Sigma_0 \leftarrow$  Covariance empirique sur premiers 100 jours
4:
5: // Mise à jour EWMA
6: for  $t = 1$  to  $T$  do
7:    $\Sigma_t \leftarrow \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \mathbf{r}_{t-1} \mathbf{r}_{t-1}^\top$ 
8: end for
9:
10: // Volatilité actuelle
11:  $\sigma_p \leftarrow \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma_T \mathbf{w}}$ 
12:
13: // VaR (hypothèse normalité)
14:  $z \leftarrow$  Quantile $_{1-\alpha}$  de  $\mathcal{N}(0, 1)$ 
15:  $\text{VaR}_\alpha \leftarrow V_0 \cdot |z| \cdot \sigma_p$ 
16:
17: return  $\text{VaR}_\alpha$ 
```

---

## 4.6 Avantages et limites

### Avantages

- Adaptatif : réagit rapidement aux chocs
- Simple : un seul paramètre  $\lambda$
- Efficient : mise à jour récursive
- Standard industrie (RiskMetrics)

### Limites

- Toujours hypothèse normalité
- Choix de  $\lambda$  arbitraire
- Pas de test statistique formel

## Références

- [1] J.P. Morgan. (1996). *RiskMetrics Technical Document*. Fourth Edition.
- [2] Jorion, P. (2007). *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- [3] Dowd, K. (2005). *Measuring Market Risk*. Wiley Finance.
- [4] Christoffersen, P. (2012). *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press.
- [5] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- [6] Hull, J. C. (2012). *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley Finance.