Régression Quantile pour l'Estimation de la VaR

Approches Linéaires, Non-Paramétriques et Extensions

Projet ML for Finance

Décembre 2025

Résumé

Ce document présente un état de l'art de la **régression quantile** appliquée à l'estimation de la Value-at-Risk. La régression quantile permet l'estimation directe de quantiles conditionnels sans hypothèse distributionnelle via la minimisation d'une fonction de perte asymétrique (pinball loss). Nous couvrons les fondements théoriques, algorithmes d'optimisation, extensions non-paramétriques (arbres, random forests, gradient boosting machines), régularisation, et extensions dynamiques (CAViaR).

Table des matières

1 Introduction

1.1 Context et motivation

Les méthodes traditionnelles d'estimation de la VaR (Variance-Covariance, Simulation Historique, Monte-Carlo, GARCH) présentent des limitations importantes : hypothèses distributionnelles restrictives, estimation indirecte en deux étapes, difficulté à intégrer des facteurs de risque multiples.

La régression quantile, introduite par Koenker et Bassett (1978), révolutionne ce paradigme en permettant l'**estimation directe** du quantile conditionnel sans modéliser la distribution complète.

1.2 Avantages fondamentaux

- **Estimation directe** : Modélise $q_\tau(Y|X)$ directement
- **Sans hypothèse distributionnelle** : Aucune hypothèse sur $F(Y|X)$
- **Robustesse** : Propriété intrinsèque aux outliers
- **Flexibilité** : Extensions non-paramétriques naturelles
- **Interprétabilité** : Coefficients ont sens économique clair

2 Fondements Théoriques

2.1 Du paradigme classique au paradigme quantile

2.1.1 Régression classique

La régression linéaire OLS modélise l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \beta^\top x \tag{1}$$

Estimateur : $\hat{\beta}_{\text{OLS}} = \arg\min_\beta \sum_{i=1}^n (y_i - \beta^\top x_i)^2$

Limitation La VaR est un **quantile**, pas l'espérance. Modéliser $\mathbb{E}[Y|X]$ ne donne aucune information directe sur $q_\tau(Y|X)$.

2.1.2 Régression quantile

Définition 1. *Pour $\tau \in (0, 1)$, la régression quantile modélise le τ-quantile conditionnel :*

$$q_\tau(Y|X = x) = \beta_\tau^\top x \tag{2}$$

Exemple 1.
- $\tau = 0.05$ *: 5e percentile (VaR 95%)*
- $\tau = 0.50$ *: médiane*
- $\tau = 0.95$ *: 95e percentile*

2.2 Fonction de perte : Pinball Loss

Définition 2 (Pinball Loss)**.**

$$\rho_\tau(u) = u \cdot (\tau - \mathbb{1}_{u<0}) = \begin{cases} \tau \cdot u & si\ u \geq 0 \\ (\tau - 1) \cdot u & si\ u < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Pour VaR 95% ($\tau = 0.05$) :

— Si $u > 0$: pénalité $= 0.05 \times u$

— Si $u < 0$: pénalité $= 0.95 \times |u|$

La sous-estimation est pénalisée 19 fois plus, forçant l'estimateur vers le bon quantile.

Théorème 1. *Le τ-quantile minimise l'espérance de la pinball loss :*

$$q_\tau = \arg\min_{q \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho_\tau(Y - q)] \tag{4}$$

2.3 Problème d'optimisation empirique

Proposition 1. *Étant donné $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, l'estimateur est :*

$$\hat{\beta}_\tau = \arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - \beta^\top x_i) \tag{5}$$

3 Application à l'Estimation de la VaR

3.1 Formulation

Pour VaR 95% : $\text{VaR}_{0.05} = -q_{0.95}(r_{t+1}|\mathcal{F}_t)$

En pratique, on modélise directement les pertes ($L_t = -r_t$) :

$$q_\alpha(L_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \beta_0 + \beta_1 r_t + \cdots + \beta_p r_{t-p+1} + \gamma^\top z_t \tag{6}$$

3.2 Variables explicatives

TABLE 1 – Features pour régression quantile VaR

Catégorie	**Variables**
Rendements passés	$r_{t-1}, \ldots, r_{t-10}$
Volatilité réalisée	$\sigma_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{20} r_{t-i}^2}$
Volatilité proxy	$r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \ldots$
Volume	$\ln(\text{Vol}_t)$, $\Delta \ln(\text{Vol}_t)$
Macro	VIX, taux 10Y, spreads

3.3 Algorithme d'estimation

Algorithm 1 VaR par Régression Quantile

Require: Rendements $\{r_t\}$, α, V_0

1: Construire features : $X_t = (1, r_{t-1}, \ldots, r_{t-10}, \sigma_t)$

2: Split temporel : Train (70%), Test (30%)

3: Estimer : $\hat{\beta}_\tau \leftarrow \arg\min \sum \rho_\tau(y_i - \beta^\top x_i)$

4: Prédire : $\hat{q}_{\tau,t} \leftarrow \hat{\beta}^\top x_t$

5: VaR : $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,t} \leftarrow -\hat{q}_{\tau,t} \cdot V_0$

6: Backtesting : Tests Kupiec, Christoffersen

7: **return** VaR_α

4 Méthodes d'Estimation

4.1 Programmation Linéaire

Le problème peut être reformulé comme LP en introduisant variables d'écart $u^+, u^- \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tau \mathbf{1}^\top u^+ + (1-\tau)\mathbf{1}^\top u^- & (7) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + u^+ - u^- & (8) \\ & u^+, u^- \geq 0 & (9) \end{aligned}$$

Solveurs Simplex (MATLAB, R `quantreg`), Interior-point, Python `statsmodels`

4.2 Descente de Gradient

Le sous-gradient de ρ_τ est :

$$\partial \rho_\tau(u) = \tau - \nVdash_{u<0} \tag{10}$$

Algorithm 2 SGD pour Régression Quantile

Initialiser $\beta^{(0)}$
for $k = 1$ to K **do**
  for $i = 1$ to n **do**
    $u_i \leftarrow y_i - {\beta^{(k)}}^\top x_i$
    $g_i \leftarrow -x_i \cdot (\tau - \nVdash_{u_i<0})$
    $\beta^{(k)} \leftarrow \beta^{(k)} - \eta_k g_i$
  end for
end for
return $\beta^{(K)}$

5 Extensions Non-Paramétriques

5.1 Motivation

Le modèle linéaire suppose effets linéaires et additifs. Les marchés présentent :

- Non-linéarités complexes
- Interactions entre variables
- Seuils et régimes

5.2 Arbres de Régression Quantile

Un arbre partitionne $\mathcal{X}$ en régions. Chaque feuille prédit le quantile empirique.

Définition 3.

$$\hat{q}_\tau(x) = \sum_{m=1}^{M} c_m \nVdash_{x \in R_m} \tag{11}$$

où $c_m = \mathit{Quantile}_\tau(\{y_i : x_i \in R_m\})$

5.3 Random Forests Quantile

Combiner B arbres bootstrap :

$$\hat{q}_\tau(x) = \text{Quantile}_\tau\{\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_B(x)\} \tag{12}$$

5.4 Gradient Boosting Machines (GBM)

Construction séquentielle : chaque arbre corrige les erreurs du précédent.

$$\hat{f}_M(x) = \sum_{m=0}^{M} \nu \cdot h_m(x) \tag{13}$$

Algorithm 3 GBM Quantile

$\hat{f}_0(x) \leftarrow \text{Quantile}_\tau(\{y_1, \ldots, y_n\})$
for $m = 1$ to M **do**
    Calculer pseudo-résidus : $r_i \leftarrow \tau - \mathbb{1}_{y_i < \hat{f}_{m-1}(x_i)}$
    Ajuster arbre : $h_m \leftarrow \text{FitTree}(\{(x_i, r_i)\})$
    $\hat{f}_m(x) \leftarrow \hat{f}_{m-1}(x) + \nu \cdot h_m(x)$
end for
return $\hat{f}_M$

Hyperparamètres typiques

- Profondeur : 3-8
- Learning rate : 0.01-0.1
- N estimators : 500-1000 avec early stopping

6 Régularisation

6.1 LASSO Quantile

Pénalité L^1 pour sélection de variables :

$$\hat{\beta}_\tau^{\text{LASSO}} = \arg\min_\beta \left[\sum \rho_\tau(y_i - \beta^\top x_i) + \lambda \|\beta\|_1\right] \tag{14}$$

Certains β_j deviennent exactement zéro (sparsité).

6.2 Ridge Quantile

Pénalité L^2 pour stabilité :

$$\hat{\beta}_\tau^{\text{Ridge}} = \arg\min_\beta \left[\sum \rho_\tau(y_i - \beta^\top x_i) + \lambda \|\beta\|_2^2\right] \tag{15}$$

6.3 Elastic Net

Combinaison :

$$\lambda_1 \|\beta\|_1 + \lambda_2 \|\beta\|_2^2 \tag{16}$$

7 Extensions Dynamiques : CAViaR

7.1 Modèle CAViaR

Conditional Autoregressive VaR (Engle & Manganelli, 2004) :

$$\mathrm{VaR}_t = f(\mathrm{VaR}_{t-1}, \mathcal{F}_t; \beta) \tag{17}$$

7.2 Variantes

7.2.1 Symmetric Absolute Value

$$\mathrm{VaR}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1} + \beta_2 |r_{t-1}| \tag{18}$$

7.2.2 Asymmetric Slope

$$\mathrm{VaR}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{VaR}_{t-1} + \beta_2 r_{t-1}^{+} + \beta_3 r_{t-1}^{-} \tag{19}$$

7.2.3 Adaptive

$$\mathrm{VaR}_t = \mathrm{VaR}_{t-1} + \beta[\mathbb{1}_{r_{t-1} < \mathrm{VaR}_{t-1}} - \alpha] \tag{20}$$

7.3 Estimation

Minimiser :

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{t=1}^{T} \rho_\alpha(r_t - \mathrm{VaR}_t(\beta)) \tag{21}$$

Optimisation non-convexe : Nelder-Mead, algorithmes génétiques.

Références

[1] Koenker, R., & Bassett Jr, G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46(1), 33-50.

[2] Engle, R. F., & Manganelli, S. (2004). CAViaR : Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(4), 367-381.

[3] Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45(1), 5-32.

[4] Friedman, J. H. (2001). Greedy function approximation : A gradient boosting machine. *Annals of Statistics*, 29(5), 1189-1232.

[5] Chen, T., & Guestrin, C. (2016). XGBoost : A scalable tree boosting system. *KDD 2016*.

[6] Taylor, J. W. (2019). Forecasting value at risk and expected shortfall. *Journal of Business & Economic Statistics*, 37(1), 121-133.

[7] Koenker, R. (2005). *Quantile Regression*. Cambridge University Press.

[8] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning*. Springer.