La modélisation et la résolution de PL/PLNE avec le solveur GLPK

Ayoub Bouchama Ayoub Diouri Oussama ElGuerraoui

Contents

1 Introduction

Au cours des premières sessions de travaux dirigés et travaux pratiques, notre attention s'est concentrée sur la conceptualisation et la résolution de problèmes linéaires (PL) et de problèmes linéaires en nombres entiers (PLNE) en utilisant le solveur GLPK.

2 Assemblage

L'usine souhaite optimiser la production de vélos cargos et standards pour maximiser la marge totale, tout en respectant diverses contraintes telles que le temps de travail, l'espace de stationnement, et les limitations de ressources.

2.1 Modélissation du probléme

Dans une usine, une équipe d'ouvriers assemble des vélos cargos et des vélos standards : les vélos cargos (C), à raison de 100 modèles en 6 heures, et les vélos standards (S), à raison de 100 modèles en 5 heures.
— Chaque semaine, l'équipe fournit au maximum 60 heures de travail.
— Tous les véhicules sont ensuite garés sur un parking qui est vidé chaque week-end, et dont la surface fait 1500m2. Un vélo cargo C occupe 2.5m2, tandis qu'un vélo standard S occupe 1m2.
— De plus, il ne faut pas assembler plus de 700 vélos cargos C par semaine, car les ressources nécessaires aux batteries sont limitées. En revanche, les vélos standards S, ne sont pas limités par l'approvisionnement en ressources.
— Enfin, la marge (différence entre le prix de vente et le coût de production) vaut 700e pour un vélo cargo et 300e pour un vélo standard S

Le modèle de Programmation Linéaire (PL) est formulé comme suit :

Maximiser la marge totale :

$$\text{Maximiser } 700C + 300S$$

Sous les contraintes :

Sous la contrainte des heures de travail :	$6C + 5S \leq 60$
Sous la contrainte de l'espace de stationnement :	$2.5C + S \leq 1500$
Sous la contrainte de la limite de batteries :	$C \leq 700$
Avec	$C \geq 0, \quad S \geq 0$

2.2 Résolution

Nous avons opté pour le format PL en raison de sa pertinence pour une entreprise spécifique. Les données du problème ont été spécifiées et ne doivent pas être altérées. Les quantités C et S symbolisent, dans l'ordre, la production nécessaire de vélos cargo et standard pour résoudre cette optimisation de bénéfices. La fabrication de vélos standard présente un avantage financier supérieur, atteignant un bénéfice maximal de 623 000 euros. Cette optimisation est réalisée en produisant 924 vélos standards et 230 vélos cargos.

3 Affectation avec prise en compte des préférences

Pour élaborer le programme de travail de son équipe composée de N membres, une responsable doit répartir les N tâches à accomplir au cours de la journée. Chaque tâche doit être attribuée précisément une fois, et chaque membre de l'équipe doit exécuter exactement une tâche. Chacun des membres a exprimé ses préférences pour les différentes tâches à travers un score de préférence noté sur 10, comme indiqué dans la figure 1. Ainsi, c(i, j) représente le score de préférence de la personne Pi pour la tâche Tj. La responsable aspire à trouver l'affectation optimale pour maximiser la satisfaction de l'équipe.

3.1 Modélisation du probléme

Soit les ensembles suivants:

- N: Ensemble des personnes (membres de l'équipe).
- T: Ensemble des tâches.
- c_{ij}: Score de préférence de la personne i pour la tâche j.

Les variables de décision peuvent être définies comme suit:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: Variable binaire, où $x_{ij} = 1$ si la personne i est assignée à la tâche j, et $x_{ij} = 0$ sinon.

La fonction objectif est de maximiser la satisfaction globale de l'équipe:

$$\text{Maximiser} \sum_{i \in N} \sum_{j \in T} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Sous les contraintes suivantes:

Chaque personne est assignée à exactement une tâche:

$$\sum_{j \in T} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$$

Chaque tâche est effectuée par exactement une personne:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in T$$

3.2 Résolution

En raison de l'indétermination du nombre de personnes et de travaux pour ce problème, le format GMPL a été choisi. Les données incluent les individus, les tâches, et une matrice de coûts de formation, avec 6 personnes et 6 tâches.

	t1	**t2**	**t3**	**t4**	**t5**
p1	1	5	10	4	2
p2	1	1	9	4	6
p3	1	9	9	7	6
p4	3	1	2	5	8
p5	1	5	10	4	2

La valeur minimale du coût de formation est de 32, ce qui est en accord avec la sélection du tableau des coûts de formation.

4 Applications en optimisation pour l'e-commerce

Au sein du secteur du commerce électronique, diverses problématiques d'optimisation émergent, parmi lesquelles figure l'allocation des commandes des clients aux différents magasins. Ces affectations sont étroitement liées aux coûts financiers et/ou environnementaux associés à des aspects tels que la livraison des colis, la préparation des commandes, et la gestion des niveaux de stock. Notre attention se porte spécifiquement sur le défi de l'affectation des commandes et des itinéraires de véhicules pour plusieurs magasins d'une même enseigne ou franchise, visant à minimiser les coûts et l'impact environnemental.

4.1 Cas particulier 1.1

Les tableaux (1), (2) et (3) illustrent, à titre d'illustration, les demandes en fluide provenant de différentes commandes, ainsi que les coûts unitaires associés en fonction des magasins d'origine. Chaque magasin est assorti d'une capacité de stockage limitée. Nous proposons de modéliser et de résoudre ce problème à l'aide d'un programme linéaire dans le contexte de la livraison de fluides, ou d'un programme linéaire en nombres entiers dans le cas de la livraison de colis.

	F1	**F2**
D1	2	0
D2	1	3

Table 1: Fluides demandés par commande

	F1	**F2**
M1	1	1
M2	2	3
M3	3	2

Table 2: Stocks de fluides par magasin

	F1	**F2**
M1	2.5	1
M2	1	2
M3	2	1

Table 3: Coûts unitaires par magasin d'origine

4.1.1 Modélisation du probléme

Soit les ensembles suivants:

- M: Ensemble des magasins.
- C: Ensemble des commandes.
- F: Ensemble des fluides.

Soient les paramétres et les variables suivants :

D_{cf}	Demande en fluide de la commande i pour le fluide j.
S_{mf}	Stock initial du fluide k dans le magasin m.
C_{mf}	Coût unitaire pour livrer le fluide j du magasin m.
Q_{cmf}	la quantité de fluide f livrée par le magasin m au commande c.

L'objectif est de minimiser le coût total d'affectation des commandes aux magasins :

$$\text{Minimiser } Z = \sum_{d \in D} \sum_{m \in M} \sum_{f \in F} Q_{cmf} \cdot C_{mf}$$

Sous les contraintes suivantes:

Chaque commande doit être affectée exactement à un magasin :

$$\sum_{m \in M} Q_{cmf} = D_{cf}, \quad \forall d \in D \quad \forall c \in C$$

Les stocks ne doivent pas être dépassés après l'affectation des commandes:

$$\sum_{d \in D} Q_{cmf} \leq S_{mk}, \quad \forall m \in M \quad \forall c \in C$$

4.1.2 Résolution

Pour ce scénario initial, nous avons élaboré le modèle de résolution dans le fichier ECommerce-Cas11.mod.txt. Ce modèle a été appliqué sur les données des tableaux 1,2 et 3. Les résultats de cette optimisation mettent en évidence une minimisation du coût total, atteignant 9,5.

4.2 Cas particulier 1.2

Nous cherchons désormais à intégrer les coûts financiers et/ou environnementaux liés à l'expédition des colis depuis les magasins vers les clients. Chaque magasin expédie un seul colis contenant tous les produits fournis par ce magasin à un client donné. Le coût associé comprend une composante fixe, représentant par exemple les émissions polluantes du véhicule utilisé (même s'il était vide), ainsi qu'une composante variable dépendant de la quantité transportée, reflétant par exemple le surplus d'émissions attribuables à la charge transportée. Cette reformulation vise à modéliser le problème résultant, et nous chercherons à le résoudre en utilisant les données des tableaux (4) et (5) Donc ce scénario est semblable au cas précédent, avec l'ajout d'une variable supplémentaire chargée de gérer l'expédition.

	M1	**M2**	**M3**
D1	110	90	100
D2	110	90	100

Table 4: Coûts fixes d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande, magasin

	M1	**M2**	**M3**
D1	10	1	5
D2	2	20	10

Table 5: Coûts variables d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande, magasin

4.2.1 Modélisation du probléme

Soit les ensembles suivants:

- M: Ensemble des magasins.
- C: Ensemble des commandes.
- F: Ensemble des fluides.

Soient les paramétres et les variables suivants :

D_{cf}	Demande en fluide de la commande i pour le fluide j.
S_{mf}	Stock initial du fluide k dans le magasin m.
CU_{mf}	Coût unitaire pour livrer le fluide j du magasin m.
CV_{mf}	Coûts variable d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande d, magasin m
CF_{mf}	Coûts fixes d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande d, magasin m
Q_{cmf}	la quantité de fluide f livrée par le magasin m au commande c.
E_{dm}	Variable binaire, prend la valeur 1 si le magasin m livre le colis au client d, 0 sinon.

L'objectif est de minimiser le coût total d'expédition: :

$$\text{Minimiser } Z = \sum_{d\in D} \sum_{m\in M} \sum_{f\in F} Q_{cmf} \cdot C_{mf} + \sum_{d\in D} \sum_{m\in M} (CF_{mf} + CV_{mf}) \cdot E_{dm}$$

Sous les contraintes suivantes:

Chaque commande doit être affectée exactement à un magasin :

$$\sum_{m\in M} Q_{cmf} = D_{cf}, \quad \forall d \in D \quad \forall c \in C$$

Les stocks ne doivent pas être dépassés après l'affectation des commandes:

$$\sum_{d\in D} Q_{cmf} \leq S_{mk}, \quad \forall m \in M \quad \forall c \in C$$

Chaque client est livré par exactement un magasin:

$$\sum_{m\in M} x_{md} = 1, \quad \forall d \in D$$

4.2.2 Résolution

Dans ce second scénario, nous avons formulé le modèle de résolution dans le fichier ECommerce-Cas12.mod.txt. Ce modèle a été appliqué aux données des tableaux 1, 2, 3, 4 et 5. Les résultats de cette optimisation révèlent une minimisation du coût total, s'élevant à 210,5. Cette valeur est notablement supérieure à la première minimisation de 9,5, ce qui s'explique par l'introduction de nouvelles contraintes et de nouveaux paramètres, tels que les coûts fixes et variables associés à l'expédition.

4.3 Cas particulier 2

Une décision stratégique de la part du magasin ALPHA consiste à engager un livreur afin de prendre en charge l'intégralité de ses livraisons aux clients. Cette approche implique que le livreur partira du magasin avec tous les colis pour les distribuer aux différents destinataires.

	ALPHA	C1	C2	C3	C4	c5
ALPHA	0	1	1	10	12	12
C1	1	0	1	8	10	11
C2	1	1	0	8	11	10
C3	10	8	8	0	1	1
C4	12	10	11	1	0	1
C5	12	11	10	1	1	0

Coûts fixes d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande, magasin

4.3.1 Modélisation du pobléme

Pour formuler le problème en tant que Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE), nous avons introduit des variables binaires x_{ij}, qui signalent si le livreur se déplace du client i au client j. De plus, une variable auxiliaire u_i a été ajoutée pour éliminer les sous-tournées, utilisant la méthode des "contraintes de sous-tournée" ou "contraintes de Miller-Tucker-Zemlin". Cette approche garantit l'absence de cycles ou de sous-tournées dans la solution. Les ensembles des clients et des magasins sont respectivement notés C et M

La fonction objectif à minimiser est la somme pondérée des distances :

$$\text{Minimiser } Z = \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot x_{ij}$$

où :

d_{ij} est la distance entre le client i et le client j (représenté par la matrice des distances),

x_{ij} est une variable binaire qui prend la valeur 1 si le livreur va du client i au client j, et 0 sinon.

Les contraintes du modèle sont les suivantes :

Chaque client est visité exactement une fois :

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C$$

Le livreur quitte chaque client exactement une fois :

$$\sum_{i \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C$$

Respecter le départ du livreur :

$$\sum_{i \in C} x_{ii} = 0$$

Éliminer les sous-tournées :

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in C, \quad n = card(C \cup M)$$

Respecter le point du départ :

$$u_{alpha} = 1$$

Respecter le nombre du tours :

$$1 \leq u_i \leq card(C \cup M) \quad \forall i \in C$$

4.3.2 Résolution

Nous avons élaboré le modèle de résolution dans le fichier ECommerceCas2.mod.txt, et nous l'avons appliqué aux données du tableau 6. Les résultats de cette optimisation indiquent une réduction significative de la distance totale, atteignant 22. Cette valeur est en accord avec les distances entre les divers clients répertoriées dans le tableau des données.

4.4 Minimisation des émissions polluantes

L'objectif de cette modélisation est de résoudre un problème de minimisation des émissions polluantes liées aux itinéraires de livraison des commandes effectuées par les livreurs des magasins. Dans cette démarche, nous simplifierons en considérant uniquement les coûts associés à un unique objectif, mettant de côté d'autres coûts potentiels. Le Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) que nous proposons doit être alimenté par diverses données, notamment les détails des commandes à exécuter (quantités et types de produits), les niveaux de stocks disponibles dans les différents magasins, les temps de trajet entre les sites, ainsi que les caractéristiques des véhicules. À partir de ces informations, le modèle doit être en mesure de déterminer la répartition des commandes entre les magasins et de planifier les tournées de livraison spécifiques pour les livreurs de chaque magasin.

4.4.1 Modélisation du probléme

- D : Ensemble des commandes (équivalent à un ensemble clients car 1 client = 1 commande)
- P : Ensemble des produits
- M : Ensemble des magasins
- $N = M \cup D$: Ensemble des nœuds (représentant les différents sites)

- $V = \{v_(i,j) \mid i,j \in N^2\}$: Ensemble des arcs entre les nœuds.
- R : Ensemble des $r_{ij} \in R$: Valeur de l'arc allant de i vers j représentant la distance à parcourir de trajet entre les sites i et j
- Q : Ensemble des $q_{dp} \in N$: Quantité de produit $p \in P$ dans la commande $d \in D$.
- S : Ensemble des $s_{mp} \in N$: Stock de produit $p \in P$ dans le magasin $m \in M$.

De plus, connaissant les caractéristiques des véhicules de transport choisis et les vitesses de circulation, nous pouvons exprimer à l'aide de l'équation (1) la quantité d'émissions polluantes d'un véhicule transportant une quantité totale de produits q sur une distance r.

$$EP(q,r) = Aqr + Br + C \quad \text{avec } A = 1,18 \times 10^{-5},\ B = 2,14 \times 10^{-1},\ C = 0$$

Objectif

L'objectif est de minimiser le total des émissions polluantes. Minimiser

$$\sum_{m \in M} \sum_{d \in D} \sum_{p \in P} EP\left(quant_{mdp}, r_{dm}\right)$$

Les variables

r_{ij} est la distance entre le client i et le client j (représenté par la matrice des distances),
$livraison_{ij}$ est une variable binaire qui prend la valeur 1 si le magasin i livre le commande j et 0 sinon.
$expe_i$ est une variale binaire qui prend 1 si le magasin i expedie une commande.
$quant_{mdp}$ est la quantité du produit p livrée par le magasin m au demande d.

Contraintes

1. Chaque commande doit être satisfaite en totalité.

$$\sum_{m \in M} quant_{mdp} \leq q_{dp} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D$$

2. Aucun magasin ne peut faire livrer plus de produits qu'il n'en possède en stock.

$$quant_{mdp} \leq s_{mp} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D \quad \forall m \in M$$

3. Pour chaque magasin qui expédie au moins 1 produit, son livreur/camion débute sa tournée au magasin, visite une seule fois chacun des clients qu'il doit servir, et retourne au magasin en fin de tournée.

$$\sum_{d \in D} livraison_{md} = expe_m \quad \forall m \in M$$

4. Chaque magasin dispose de son propre livreur/camion qui sera en charge de livrer en une seule tournée tous les produits qui proviennent de son magasi

$$\sum_{d\in D} quant_{mdp} = \sum_{d\in D} livraison_{md} \cdot q_{pd} p \in P \quad \forall m \in M$$

5. LChaque commande peut être satisfaite par un unique magasin qui livre tous les produits qui la composent, ou alors par plusieurs magasins, qui fournissent chacun une partie des produits :.

$$quant_{mdp} \leq livraison_{md} \cdot q_{pd} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D \quad \forall m \in M$$

6. Pour chaque magasin qui expédie au moins 1 produit, sa variable $expe_m$ est activée.

$$expe_m \leq sum_{d\in D} livraison_{md} \quad \forall m \in M$$

4.4.2 résolution

Le modèle d'optimisation est spécifié dans le fichier "EmissionPolluantes.mod.txt". Ce modèle prend en compte des données telles que le stock initial, la quantité, et la distance. Lors de l'application du modèle à ces données, l'optimisation résultante donne un résultat de 20.544.

5 Conclusion

Ce projet nous a offert l'opportunité de concrètement élaborer et évaluer des problèmes d'optimisation, résolus avec succès grâce à l'utilisation d'un solveur GLPK qui s'est avéré performant. La transformation de problèmes formulés en français en problèmes linéaires a constitué une expérience fascinante, tout comme la découverte de méthodes pour convertir des implications d'égalités en inégalités, même si cette tâche s'est avérée exigeante.