DM n°1 — Courbes paramétrées

Consignes importantes :

— Le DM est à rendre **rédigé proprement** et peut se faire à deux.

— Toute réponse doit être **justifiée**.

— Les calculs intermédiaires doivent apparaître.

— Une attention particulière sera portée à la **qualité des raisonnements**.

Exercice 1 (Support géométrique et régularité). *On considère l'arc paramétré $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par*

$$g(t) = (t^2 - 1,\ t^3 - t).$$

1) Déterminer le support géométrique $\Gamma = g(\mathbb{R})$ en éliminant le paramètre t.

2) Étudier la régularité de l'arc.

3) Déterminer les points remarquables (points d'intersection avec les axes, points multiples éventuels).

4) Étudier l'existence et les directions des tangentes aux points remarquables.

5) Décrire qualitativement la courbe (symétries, allure générale).

Exercice 2 (Équivalence de paramétrisations et orientation). *On considère les deux paramétrisations du cercle unité :*

$$g(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\tilde{g}(s) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s)), \quad s \in [0, 2\pi].$$

1) Montrer que g et $\tilde{g}$ ont le même support.

2) Existe-t-il une fonction ϕ telle que $\tilde{g} = g \circ \phi$? Préciser les propriétés de ϕ.

3) Comparer le sens de parcours des deux paramétrisations.

4) Les deux arcs sont-ils équivalents au sens des arcs paramétrés ?

Exercice 3 (Tangente et point singulier). *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$g(t) = (t^3,\ t^2).$$

1) Déterminer le support géométrique de la courbe.

2) Étudier la régularité de l'arc et localiser les points singuliers.

3) Déterminer l'équation de la tangente au point correspondant à $t = 1$.

4) Étudier le comportement de la courbe au voisinage de $t = 0$.

5) Interpréter géométriquement le type de singularité obtenu.

Exercice 4 (Longueur et abscisse curviligne). *On considère l'arc paramétré $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ défini par*

$$g(t) = (t,\ t^2).$$

1) Vérifier que l'arc est régulier sur $[0, 1]$.

2) Calculer la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = 1$.

3) Déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$ associée, avec $s(0) = 0$.

4) L'expression de $s(t)$ est-elle inversible explicitement ?

Exercice 5 (Arc de cercle et intégrale impropre)**.** *On considère la courbe $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$g(t) = (t, \sqrt{1-t^2}).$$

1) Montrer que le support est un quart de cercle.

2) Étudier la régularité de l'arc sur $[0,1]$.

3) Calculer la longueur de l'arc.

4) Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6 (Exercice de synthèse — Cycloïde)**.** *On considère la cycloïde définie par*

$$g(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

1) Calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe.

2) Déterminer les points où la tangente est horizontale.

3) Calculer la longueur de la cycloïde sur $[0, 2\pi]$.

4) Donner une interprétation géométrique de cette courbe.