DM 01 :   AiD Louiza (2ème année math)

Exercise 1 : $g(t) = (t^2 - 1, t^3 - 1)$.

(1) Determiner le support géometrique $\Gamma = g(\mathbb{R})$:

$x = t^2 - 1$, $y = t^3 - 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t(t^2-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = tx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = t^2 x^2 \\ \cancel{y^2 = x(x+1)} \end{cases}$ x^2

Si $x \neq 0$

$y^2/x^2 = t^2$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = t^2 = x+1$.

$y^2 = x(x+1)$ ... (1)

Si $x = 0$

$t^2 = 1 \longrightarrow t = \pm 1$.

$y = t(t^2-1) = 0$.

donc $(0,0)$ satisfait (1).

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -1, y^2 = x^2(x+1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -1, y = \mp |x|\sqrt{x+1}\}$.

(2) La régularité de l'arc :

$g'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 3t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{1/3} \end{cases}$

$g'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

alors : $g'(t)$ soit régulière $\Leftrightarrow g'(t) \neq (0,0) \ \forall t$.

(3) Les point remarquables :

Pour $y = 0$; $y = t(t^2-1) = 0$; $t \in \{-1, 0, 1\}$

$t = 0$: $(x,y) = (1,0)$, $t = \pm 1$ $(x,y) = (0,0)$

Les 2 points remarquables $(-1,0)$ et $(0,0)$.

Pour $x = 0$, $x = t^2 - 1 = 0$, $t^2 = 1$, $t = \pm 1$.

$\begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$. donc les point remarquables $(0,0)$.

(4) L'existance et les directions des tangents :

$g'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$, $g(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.

pour $t = 0$ le point $(-1,0)$; $g'(0) = (0,-1)$, $g(0) = (-1,0)$

pour $t = 1$; $g'(1) = (2,2)$; $g(1) = (0,0)$

$m = 1$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \longrightarrow y = x$.

Pour $t = -1$; $g'(-1) = (-2, 2)$; $m = \frac{-2}{2} = -1$.

$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$.

(5) Ecrire qualitativement la courbe.

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \geq -1 ,\ y^2 = x^2(x+1)\}$

$y^2 \geq 0 ;\ x^2(x+1) \geq 0$; or $x^2 \geq 0 \ \forall x$; $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

donc : $D_f : \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$.

Symetrique de la courbe :

on a : $y^2 = x^2(x+1)$.

Si $(x, y) \in E$ alors : $(x, -y)$ verifie aussi

alors la courbe est symétrique par rapport a l'axe (ox)

on remarque que : $x(-t) = x(t)$ (paire) $\forall t$.

$y(-t) = -y(t)$ (impaire) $\forall t$.

Exercise 2 :

$g(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$\tilde{g}(s) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s)) \quad s \in [0, 2\pi] \rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

(1) montrer que g et $\tilde{g}$ on le même support :

$\left.\begin{array}{l} g(t) \longrightarrow x^2 + y^2 = 1. \\ \tilde{g}(s) \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$ cercle unité ($\mathbb{R} = 1$).

(2) Existe t-il une fonction ϕ tq : $\tilde{g} = g \circ \phi$

$\tilde{g} = g \circ \phi$; $\tilde{g} = g(\phi(s)) = g(\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s))) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s))$

$\phi(s) = \pi - s$; $\tilde{g} = g \circ \phi$ sur $[0, 2\pi] \rightarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty$

Propriétés de ϕ : $\phi'(s) = -1 < 0$, ϕ est strictement décroissante.

(3) Comparer le sens de parcours

$g(t) = (\cos t, \sin t)$; Les paramétrisations $g(t)$ parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique et la paramétrisation $\tilde{g}(s)$ étant obtenue par une reparmetrisation décroissante, parcourt le cercle dans le sans inverse.

(4) Les deux-arcs sont équivalents s'il existe une reparametrisations strictement croissante ; $\phi(s) = -1 < 0$; $\Leftrightarrow$ fonction ϕ n'est pas croissante.

alors : Les deux arcs ne sont pas équivalentes au sens des arcs paramétrés.

(2)

Exercise 3 : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$g(t) = (t^3, t^2)$$

(1) Le Support géométrique de la courbe :

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \to x = t \cdot t^2 \to x = t\,y$$

Si $y \neq 0$ $t = \frac{x}{y}$; $\to t^2 = \frac{x^2}{y^2} \to t^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = y^3$.

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0 ; x^2 = y^3 \}.$$

(2) La régularité de l'arc et locoliser les points Singuliers :

$g'(t) = (3t^2, 2t)$; $g'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0.$

g est regulier sur $\mathbb{R} / \{0\}$.

$(0,0)$ est un point Singulier. ; g n'est pas regulier sur $\mathbb{R}$

(3) L'équation de la tangente au point $t = 1$:

$g(1) = (1,1)$; $g'(1) = (3,2)$; $\frac{y'}{x'} = \frac{2}{3}$.

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \longrightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$.

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

(4) Le comportement de la courbe au voisinage de $t = 0$:

$x^2 = y^3$; $y \geq 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$.

Alors : La tangente géometrique est verticale (axe oy) et le courbe forme un soment anguleux en $(0,0)$.

(5) Interpréter géometriquement le type de singularité obtenu :

le point $(0,0)$ est un point Singulier et un point de rebroussement, avec une tangente verticale.

Exercise 4 : $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

$g(t) = (t, t^2)$.

(1). l'arc est régulier sur $[0;1]$.

$g'(t) = (1, 2t) \neq (0,0) \ \forall t \in \mathbb{R}$.

donc g est régulier dans $\mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

(2) calculer la longueur de l'arc entre $t=0$, $t=1$:

$L = \| g'(t) \| = \sqrt{1+(2t)^2} = \sqrt{1+4t^2} > 0$; $t \in [0,1]$.

$L = \int_0^1 \| g'(t) \| dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$.

on pose, $s = 2t$: $ds = 2dt \to dt = \frac{ds}{2}$ $\quad t \to 0 \quad t \to 1$

$\quad w \to 0 \quad w \to 2$.

$\int_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{1+s^2}\, dt = \left[\frac{1}{2} (s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arcsinh}(s) \right]_0^2$

$= \left[\frac{1}{2} \left(s\sqrt{1+s^2} + \ln(s + \sqrt{1+s^2}) \right) \right]_0^2$.

$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})$.

(3) L'abscisse curviligne $s(t)$ associée avec $s(0) = 0$.

$s(t) = \int_0^t \| g'(u) \| du = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\, du$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2t} \sqrt{1+w^2}\, dw = \frac{1}{2} \left[w\sqrt{1+w^2} + \operatorname{arcsinh}(w) \right]_0^{2t}$

$s(t) = \frac{1}{2} \left(2 + \sqrt{1+4t^2} + \operatorname{arcsinh}(2t) \right)$.

(4) L'expression de $s(t)$ n'est pas inversible explicitement

- la fonction contient un logarithme et une racine.

Exercise 5 : $g(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $\quad g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

(1) le support est un quart de cercle :

$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 \\ y^2 = 1-t^2 \end{cases}$ $\quad x^2 + y^2 = \cancel{t^2} + 1 - \cancel{t^2}$

$x^2 + y^2 = 1$ cercle unité

$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / x \in [0,1] \quad y \geq 0 \quad x^2 + y^2 = 1 \}$.

(4)

(2) la regularité de l'arc sur $[0,1]$.

$g'(t) = \left(1 ; \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$

$g'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = 0 ; \; t = 0$. $\quad g'(t) = (1,0) \neq (0,0)$

l'arc est regulier sur $[0,1]$ et n'est pas regulier en $t = 1$.

(3) Longueur de l'arc :

$\|g'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$

$L = \int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\, dt = \lim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim \arcsin(b) = \frac{\pi}{2}$

(4) interpréter le résultat obtenu :

- la courbe représente un quart du cercle unité, la longueur du cercle unité est 2π et la longueur de son quart $= \frac{\pi}{2}$.

Exercise 68 $\quad g(t) = (t - \sin t ; 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

(1) $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe :

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\quad g'(t) = (1 - \cos t ; \sin t)$.

$g'(0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \to \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases}$

sur $[0, 2\pi]$; $t = 0$; $t = 2\pi$.

g est regulier sur $]0, 2\pi[$ et non régulier aux extremmites $(t = 0, t = 2\pi)$

(2) Les points ou la tangente est horizontale :

Pour $t \in]0, 2\pi[\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$; $1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin t/2 \cos t/2}{2 \sin^2(t/2)} = \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$

alors : $\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow \cot g(t/2) = 0 \to \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} \to t = \pi$.

donc : $t = \pi$; $g(\pi) = (\pi - \sin \pi ; 1 - \cos \pi) = (\pi, 2)$

(3) calculer la longeur de la Cycloide sur $[0, 2\pi]$:

$\|g'(t)\| = \sqrt{1 - \cos t^2 + \sin t^2} = \sqrt{2 - 2\cos t} \longrightarrow 2 - 2\cos t = 2(1 - 1\cos t)$.

$= 4 \sin^2(t/2)$.

$\|g'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2(t/2)} = 2 \sin(t/2)$.

(5)

Soit $t \in]0, 2\pi[$: $\sin t/2 \geqslant 0$.

$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt \quad \text{on pose : } u = \frac{t}{2} \to du = \frac{1}{2}\,dt.$$
$$\to dt = 2\,du.$$

$t \to 0 \quad t \to 2\pi.$

$u \to 0 \quad u \to \pi.$

$$\int_0^{\pi} 2\sin u\, 2\,du = 4\int_0^{\pi} \sin u\,du. = 4\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = 8.$$

$L = 8.$

(4) interprétation géométrique :

La cycloïde est la trajectoire d'un point du bord d'un cercle roulant sans glisser sur droite, Deux points de rebroussement tangente horizontale au sommet, longueur d'un arc : $L = 8$.