Dm1:

Ex01:

1) Montrons que la courbe est définie et de classe C_1 sur $\mathbb{R}$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

* on a t et $\sin t$ défini sur $\mathbb{R}$ donc $t - \sin t$ est défini sur $\mathbb{R}$

et on a $\cos t$ défini sur $\mathbb{R}$ donc $1 - \cos t$ est défini sur $\mathbb{R}$

d'où $g(t)$ est défini ($g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$)

* on a t et $\sin t$ est de classe C_1 donc $t - \sin t$ est de classe C_1

et $\cos t$ est de classe C_1 donc $1 - \cos t$ est de classe C_1.

d'ou $g(t)$ est de classe C_1

2) calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$x'(t) = (t - \sin t)' = 1 - \cos t$$
$$y'(t) = (1 - \cos t)' = \sin t$$
$$g'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1 - \cos t, \sin t)$$
$$g'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \text{et} \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \text{ si } t = 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \text{et} \\ \sin t = 0 \text{ si } t = k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $g'(t) = (0,0)$ si $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où g est régulier sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

g n'est pas régulier en $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

alors g n'est pas régulier sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les points où la tangente est horizontale.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t) = 0 \\ \text{et} \\ x'(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \text{et} \\ 1 - \cos t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \text{ si } t = k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \text{et} \\ \cos t \neq 1 \text{ si } t \neq 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

donc $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$ si $t = (2k+1)\pi$

les points où la tangente est horizontale est $g((2k+1)\pi) = ((2k+1)\pi, 2)$

$$\cos((2k+1)\pi) = -1$$
$$1 - \cos((2k+1)\pi) = 2$$
$$\sin((2k+1)\pi) = 0$$
$$(2k+1)\pi - \sin((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi$$
$$g((2k+1)\pi) = ((2k+1)\pi, 2)$$

4) Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

$x(t) = t - \sin t$

$x'(t) = (t - \sin t)' = 1 - \cos t$

on a $-1 \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow 1 - \cos t \geq 0$

$1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, t = 2\pi$

donc $x'(t) \geq 0$

d'où $x(t)$ est croissante sur $[0, 2\pi]$

$y(t) = 1 - \cos t$

$y'(t) = \sin t$

x	0		π		2π
$\sin t$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$y(0) = 1 - \cos 0 = 0$

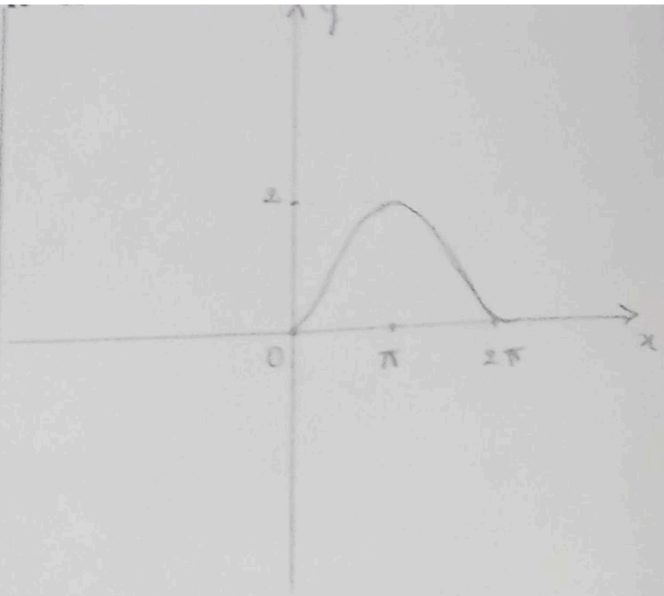
$y(\pi) = 1 - \cos\pi = 2$

$y(2\pi) = 1 - \cos 2\pi = 0$

on a $y'(t) \geq 0$ sur $[0, \pi]$ et $y'(t) \leq 0$ sur $[\pi, 2\pi]$

Donc y est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

5) Décrire l'allure de la Courbe et proposer un tracé qualitatif



EXO2 :

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$h(t) = (t^2, t^4)$

1) le support géométrique de la Courbe

$\begin{cases} x(t) = t^2 \geq 0 \\ y(t) = t^4 = (t^2)^2 = x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow y(t) = x^2$ et $x \geq 0$

2) Régularité et points singuliers

$h(t) = (t^2, t^4)$

$h'(t) = (x'(t), y'(t))$

$x'(t) = (t^2)' = 2t$

$y'(t) = (t^4)' = 4t^3$

$h'(t) = (2t, 4t^3)$

$h'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \text{et} \\ 4t^3 = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

g est régulier sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(0,0)$ est un point singulier

g n'est pas régulier sur $\mathbb{R}$.

3) tangente en $t=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4t^3}{2t}=2t^2$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2t^2=0 \Rightarrow t=0$$

et on a $\lim_{t\to 0} 2t^2=0$

la limite existe, donc la tangente esciste

l'équation est $y=0$

4) comportement au voisinage de l'origine

$x=t^2\geq 0$, $y=t^4\geq 0 \Rightarrow y=x^2$

la courbe reste au-dessus de l'axe Ox

elle touche la tangente

et $h(t)=h(-t)$

5) Type de singularité

au point $t=0$:

la dérivé est nul

. la tangente esciste

don est point stationnaire à tangente horizontale.

EXO3:

$g(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t), t\in\mathbb{R}$

1) Montrons que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

$g'(t)=(x'(t),y'(t))$

$x'(t)=(e^t\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t$

$y'(t)=(e^t\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t$

$g'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t)$

$=e^t(\cos t-\sin t, \sin t+\cos t)$

on a $e^t>0$

$$g'(t)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases}\cos t-\sin t=0\\ \text{et}\\ \sin t+\cos t=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos t=\sin t\\ \text{et}\\ \sin t=-\cos t\end{cases}$$

on a $\sin t=\cos t \Rightarrow \cos t=-\cos t \Rightarrow \cos t=0$
$\Rightarrow \sin t=0$

donc $g'(t)\neq(0,0)$ $\forall t\in\mathbb{R}$

d'où g est régulière sur $\mathbb{R}$.

2) le support géométrique:

$r=\sqrt{x^2+y^2}=$

$r=\sqrt{e^{2t}\cos^2t+e^{2t}\sin^2t}$

$=\sqrt{e^{2t}(\cos^2t+\sin^2t)}$

$=e^t$

$$\boxed{r=e^t}$$

3) Montrer que la courbe est une spirale plane $g(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

par comparaison

on a $r=e^t$ et $\theta=t$

donc

$r=e^\theta$

d'ou la courbe est une spirale plane.

4)

on a $\theta=t$

en remplace dons g

$g(\theta)=(e^\theta\cos\theta, e^\theta\sin\theta)$

5)

$\|g'(t)\| = \|(e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t)\|$

$= \sqrt{e^t\cos t - e^t\sin^2 t + e^t\sin t + e^t\cos t}$

$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\sin t\cos t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t)}$

$= \sqrt{e^{2t}\cdot 2(\sin^2 t + \cos^2 t)}$ $\quad 1''$

$= \sqrt{2}\, e^t$

$\|g'(\theta)\| = \sqrt{2}\, e^\theta$ et on a $\theta=t$

donc $\|g'(t)\| = \|g'(\theta)\|$

EX04:

$g_1(t)=(t,t^2)$, $g_2(t)=(t^2,t)$

1) vérifier que les arcs sont réguliers sur $[0,1]$

$g_1'(t)=(x_1'(t), y_1'(t))$ $\quad x_1'(t)=1$, $y_1'(t)=2t$

$g_1'(t)=(1,2t)$

donc $g_1'(t)\neq(0,0)$ $\forall t\in[0,1]$

$g_2'(t)=(x_2'(t), y_2'(t))$ $\quad x_2'(t)=2t$, $y_2'(t)=1$

$g_2'(t)=(2t,1)$

donc $g_2'(t)\neq(0,0)$ $\forall t\in[0,1]$

d'ou g_1 et g_2 sont réguliers sur $[0,1]$

2) Calculer les longueurs L_1 et L_2

$L_1=\int_0^1 \|g_1'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|(1,2t)\|\,dt$

$= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt$, on pose $w=2t$

$\Rightarrow dw = 2dt \Rightarrow dt = \frac{dw}{2}$ $\quad t\to0$ $t\to1$, $w\to0$ $w\to2$

$\int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{1+w^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(w\sqrt{1+w^2} + \ln(w+\sqrt{1+w^2})\right)\right]_0^2$

$L_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$

$L_2=\int_0^1 \|g_1'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|(2t,1)\|\,dt$

$= \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\,dt$

$L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$

3) comparer L_1 et L_1

on a $L_1=L_2$

4) une interprétation géométrique de résultat

on a les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

. une symétrie conserve les longueurs donc $L_1=L_2$.