Travail collaboratif : Construction d'un outil permettant d'analyser et de synthétiser des filtres d'ordre 1

K. Boudjelaba

BTS SN-EC, 1ère année

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

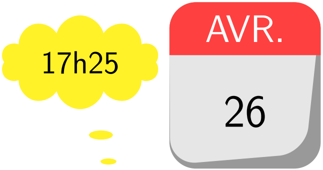
Table des matières

Cadrage du travail collaboratif

Objectifs

Construire de manière collaborative des fichiers Jupyter Notebook permettant de :

- retrouver de manière rapide les fonctions de transfert normalisées exprimées en fonction des composants du circuit;
- obtenir les paramètres du filtre étudié en fonction des valeurs de composants choisis;
- obtenir les valeurs de composants nécessaires pour répondre à un gabarit donné;
- date limite :



Cadrage du travail collaboratif

Organisation du dossier

Le dossier `SN1-filter-design-master` est constitué de plusieurs fichiers Jupyter Notebook disponibles dans le répertoire `src`:

- circuits RC (passifs);
- circuits RL (passifs);
- circuits RC (actifs).

A la racine, le fichier `index.ipynb` permet de naviguer rapidement dans l'arborescence du projet. Pour chaque circuit, 3 zones doivent être complétées :

- **Fonction de Transfert** : la fonction de transfert à rentrer dans une formule en respectant les indices des composants du schéma proposé. Cette fonction de transfert devra être présentée sous forme normalisée;
- **Fonction `compute_parameters`** : les paramètres du filtre (ω_c, T_{BF} ou T_{HF}) doivent être calculés par des instructions Python;

Cadrage du travail collaboratif

- **Fonction** `compute_component`: Vous devez choisir le nombre de composants à poser arbitrairement et lesquels. Les autres composants sont alors calculés par une formule prenant comme données d'entrée tout ou partie du cahier des charges et des composants fixés.

Travail demandé

- Chaque étudiant s'engage à contribuer sur au moins 2 filtres (un filtre passif et un filtre actif).
- Il est fortement conseillé de vérifier vos fonctions en utilisant LTSpice.

Plus la répartition des filtres étudiés sera bien faite, plus l'outil final du groupe (2 élèves max) sera intéressant. Les étudiants qui le souhaitent peuvent aussi prendre en charge la vérification d'une ou plusieurs contributions et le faire apparaitre dans les Notebooks.

Fonction de transfert : Rappel

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est définie par

$$T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0}$$

Analyse de la fonction de Transfert : Méthodologie

- Ordre du système $\rightarrow$ puissance la plus élevée de p au dénominateur.
- Réponse fréquentielle
  - On pose $p = j\omega$.
  - On représente ensuite $|T(j\omega)|$ et $\arg[T(j\omega)]$.

Fonction de transfert : Rappel

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Forme normalisée d'une fonction de transfert du 1er ordre

$$T(j\omega) = \frac{V_s(t)}{V_e(t)} = \frac{b_1.j\omega + b_o}{a_1.j\omega + a_o} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{1+\frac{b_1}{b_0}j\omega}{1+\frac{a_1}{a_0}j\omega} = \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\left(1+\frac{b_1}{b_0}j\omega\right)}{1+\frac{a_1}{a_0}j\omega}$$

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{T_0 + T_\infty\, j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}}$$ Forme normalisée de la fonction de transfert

Avec $\omega_c = \frac{a_0}{a_1}$, $T_0 = \frac{b_0}{a_0}$ et $T_\infty = \frac{b_1}{a_1}$

Filtre passe-bas $\longrightarrow$ $T(j\omega) = \frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ cas où $b_1 = 0$ ($T_\infty = 0$)

Filtre passe-haut $\longrightarrow$ $T(j\omega) = \frac{T_\infty\, j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ cas où $b_0 = 0$ ($T_0 = 0$)

Fonction de transfert : Rappel

Filtre passe-bas

On a $T(j\omega) = \dfrac{T_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\sqrt{T_0^2}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{|T_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \log(|T(j\omega)|) = \log\left(\frac{|T_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = \log[(|T_0|) - \tfrac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \arg[T(j\omega)] = \arg\left[\frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right] = arg\,[T_0] - arg\left[1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right]$$

$$\Rightarrow \arg[T(j\omega)] = \arg[T_0] - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{Avec } \arg[T_0] = \begin{cases} 0 & \text{si } T_0 > 0 \\ \pm\pi & \text{si } T_0 < 0 \end{cases}$$

CHARLES CARNUS LYCÉE TECHNIQUE PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Filtre passe-haut

On a $T(j\omega) = \dfrac{T_\infty \, j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\sqrt{T_\infty^2 \, \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{|T_\infty| \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \log\left(|T(j\omega)|\right) = \log\left(\frac{|T_\infty| \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = \log\left(|T_\infty| \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \arg[T(j\omega)] = \arg\left[\frac{T_\infty \, j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right] = arg\left[T_\infty \, j\frac{\omega}{\omega_c}\right] - arg\left[1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right]$$

$$\Rightarrow \arg[T(j\omega)] = arg\left[T_\infty \, j\frac{\omega}{\omega_c}\right] - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Avec $\arg\left[T_\infty \, j\frac{\omega}{\omega_c}\right] = \begin{cases} \frac{+\pi}{2} & \text{si } T_\infty > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } T_\infty < 0 \end{cases}$

Exemple d'application sur un circuit actif

On considère le filtre représenté dans la figure ci-dessous.

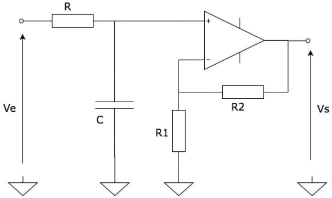


Figure 1: Circuit RC actif

Calcul de la fonction de transfert

En utilisant le pont diviseur de tension, nous obtenons l'expression de $\underline{V_s}$ en fonction de $\underline{V_e}$

$$\overline{V_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\overline{V^-}$$

$$\overline{V^+} = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}\overline{V_e}$$

$$\overline{V^+} = \overline{V^-}$$

$$\Longrightarrow \overline{V_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}\overline{V_e}$$

Exemple d'application sur un circuit actif

La forme normalisée s'obtient en imposant un terme d'ordre 0 unitaire au dénominateur. Mathématiquement, cette forme s'obtient alors en multipliant le numérateur et le dénominateur par Cp. Nous obtenons finalement :

$$T(p) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + RCp} \tag{1}$$

Identification des paramètres (fonction compute_parameters)

Nous observons que la fonction de transfert $T(p)$ correspond à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1. Rappelons que la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 1 s'exprime sous la forme

$$T(p) = \frac{T_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \tag{2}$$

où T_0 correspond au gain en basses fréquences (gain statique) et ω_c correspond à la pulsation de cassure (en rad/s). En identifiant (1) et (2), nous obtenons :

$$\frac{1}{w_c} = RC \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$T_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow T_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Exemple d'application sur un circuit actif

Application Numérique

En prenant $R_1 = 10k\Omega$; $R_2 = 20k\Omega$; $C = 10nF$ et $R = 5k\Omega$, nous trouvons $\omega_c = 20000 rad/s$, $f_c = 3183Hz$ et $T_0 = 3$.
Nous disposons de 2 équations avec 4 composants à déterminer. Nous choisissons arbitrairement de fixer R_1 et C. Nous cherchons alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} w_c = \dfrac{1}{RC} \\ T_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} R = \dfrac{1}{C\omega_c} \\ R_2 = (T_0 - 1)R_1 \end{cases}$$

Application Numérique

Fixons arbitrairement $R_1 = 5k\Omega$ et $C = 2nF$. Pour obtenir un filtre présentant un $T_0 = 5$ et une fréquence de cassure $f_c = 10$ kHz, nous devons alors fixer $R = 7957\ \Omega$ et $R_2 = 20\ k\Omega$

Exemple d'application sur un circuit passif

On considère le filtre représenté dans la figure ci-dessous.

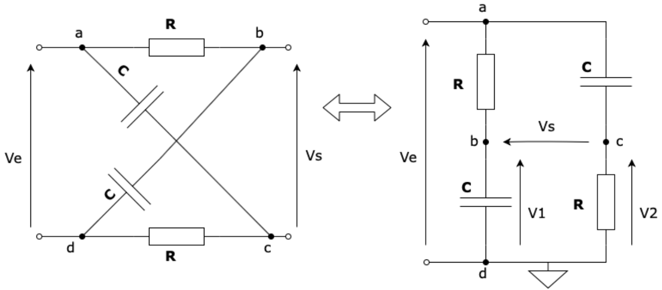


Figure 2: Circuit RC

Calcul de la fonction de transfert

En utilisant le pont diviseur de tension, nous obtenons l'expression de $\underline{V_s}$ en fonction de $\underline{V_e}$

$$\overline{V_s} = \overline{V_1} - \overline{V_2} = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}\overline{V_e} - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}\overline{V_e} = \frac{-R + \frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}\overline{V_e}$$

Exemple d'application sur un circuit passif

$$\Rightarrow T(p) = \frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}} = \frac{-R + \frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}}$$

La forme normalisée s'obtient en imposant un terme d'ordre 0 unitaire au dénominateur. Mathématiquement, cette forme s'obtient alors en multipliant numérateur et le dénominateur par Cp. Nous obtenons finalement:

$$T(p) = \frac{1 - RCp}{1 + RCp} \tag{3}$$

Nous observons que la fonction de transfert $T(p)$ correspond à la fonction de transfert d'un filtre d'ordre 1.

Exemple d'application sur un circuit passif

Questions

- Calculer le module et l'argument de cette fonction de transfert. Commenter les résultats.
- En utilisant LTspice et Python, tracer le module et l'argument de la fonction de transfert.
- Sous LTspice :
  - appliquer une tension $V_e(t) = 2\sin(3200\pi t)$ et visualiser $V_s(t)$ et $V_e(t)$
  - appliquer une tension $V_e(t) = 2\sin(2 \times 10^5 \pi t)$ et visualiser $V_s(t)$ et $V_e(t)$

Exemple d'application sur un circuit passif

$$T(p) = \frac{1 - RCp}{1 + RCp}$$

Question

- Calculer le module et l'argument de cette fonction de transfert. Commenter les résultats.

Réponse

On remplace p par $j\omega \rightarrow p = j\omega$

$$T(j\omega) = \frac{1 - RCj\omega}{1 + RCj\omega}$$

$$\Longrightarrow \ |T(j\omega)| = \left| \frac{1 - RCj\omega}{1 + RCj\omega} \right| = \frac{|1 - RCj\omega|}{|1 + RCj\omega|} = \frac{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} = 1$$

$$\Longrightarrow \arg[T(j\omega)] = \arg\left[\frac{1 - RCj\omega}{1 + RCj\omega}\right] = \arg[1 - RCj\omega] - \arg[1 + RCj\omega]$$

$$\Longrightarrow \arg[T(j\omega)] = \arctan(-RC\omega) - \arctan(RC\omega) = -2\arctan(RC\omega)$$

Solution (Filtres passifs) : Calcul de $\frac{V_s}{V_e}$

Loi des mailles :

$$V_e = Z_1 * i + Z_2 * i = (Z_1 + Z_2) * i$$

$$V_s = Z_2 * i$$

$$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2 * i}{(Z_1 + Z_2) * i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

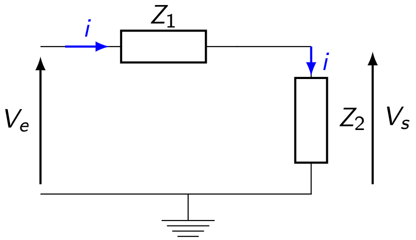


Figure 3: Filtre passif.

R.D.T :

$$\frac{V_s}{Z_2} = \frac{V_e}{Z_1 + Z_2} \Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Il suffit de remplacer les impédances Z_1 et Z_2 par leurs impédances correspondantes pour trouver le rapport $\frac{V_s}{V_e}$:

- Résistance : $Z_R = R$
- Bobine (inductance) : $Z_L = \mathrm{j}L\omega$
- Condensateur : $Z_L = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$

Solution (Filtres actifs) : Calcul de $\frac{V_s}{V_e}$

On a : $V^+ = 0 \Longrightarrow V^- = 0$

Loi des mailles :

$V_e = Z_{11} * i + Z_{12} * i + V^-$

$\Longrightarrow V_e = (Z_{11} + Z_{12}) * i$

$V_s = Z_2 * (-i)$

$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-Z_2 * i}{(Z_{11} + Z_{12}) * i}$

$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-Z_2}{Z_{11} + Z_{12}}$

R.D.T :

$\frac{V_e}{Z_{11} + Z_{12}} = \frac{-V_s}{Z_2}$

$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-Z_2}{Z_{11} + Z_{12}}$

La fonction de transfert $T(j\omega)$ vaut : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{-Z_2}{Z_{11} + Z_{12}}$.

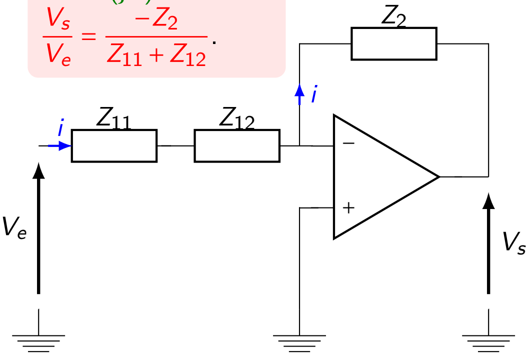


Figure 4: Filtre actif 1

On a : $V^+ = 0 \Longrightarrow V^- = 0$

Loi des mailles :

$V_e = Z_1 * i + V^-$

$\Longrightarrow V_e = Z_1 * i$

$V_s = (Z_{21}//Z_{22}) * (-i)$

$$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{(Z_{21}//Z_{22}) * (-i)}{Z_1 * i}$$

$$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-(Z_{21}//Z_{22})}{Z_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-\frac{Z_{21}*Z_{22}}{Z_{21}+Z_{22}}}{Z_1}$$

R.D.T :

$$\frac{V_e}{Z_1} = \frac{-V_s}{Z_{21}//Z_{22}}$$

$$\Longrightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-\frac{Z_{21}*Z_{22}}{Z_{21}+Z_{22}}}{Z_1}$$

La fonction de transfert $T(j\omega)$ vaut :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-\frac{Z_{21} * Z_{22}}{Z_{21} + Z_{22}}}{Z_1}.$$

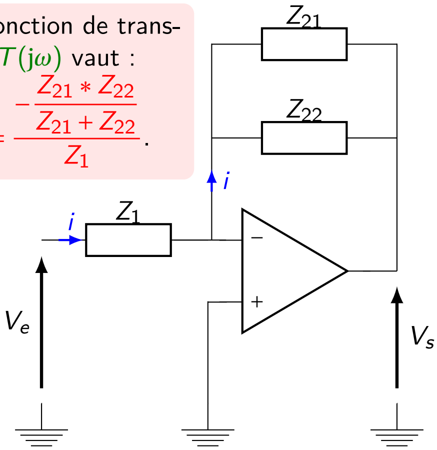


Figure 5: Filtre actif 2

Résumé :

Impédances :

Résistance : $Z_R = R$

Bobine : $Z_L = \mathrm{j}L\omega$

$\omega = 2\pi f$

Condensateur : $Z_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$

Fonction de transfert normalisée :

Filtre passe-bas : $\dfrac{V_s}{V_e} = \dfrac{T_{BF}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

Filtre passe-haut : $\dfrac{V_s}{V_e} = \dfrac{T_{HF}\ j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$