1 Application des lois des nœuds et des mailles

1.1 Rappel

Loi des nœuds : La somme des intensités des courants qui entrent par un noeud est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui en sortent.

Exemple :

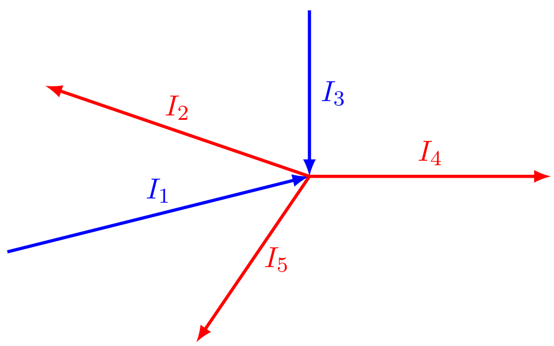


Figure 1: Application de la loi des mailles.

$$\mathbf{I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5}$$

Loi des mailles : dans une maille d'un réseau électrique, la somme algébrique des tensions le long de cette maille est toujours nulle.
Pour appliquer la loi des mailles, il faut respecter les règles suivantes :

- On choisit un sens de parcours arbitraire de la maille et un point de départ.
- On affecte du signe " $+$ " les tensions dont la flèche indique le même sens.
- On affecte du signe " $-$ " les tensions dont la flèche indique le sens contraire.

Exemple :

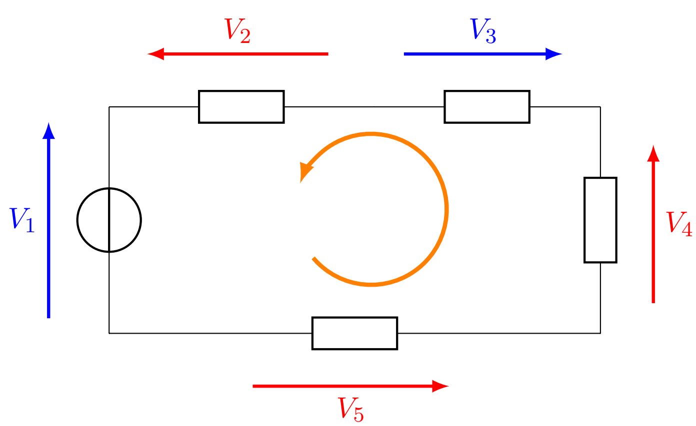


Figure 2: Application de la loi des mailles.

$$\mathbf{-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 + V_5 = 0}$$

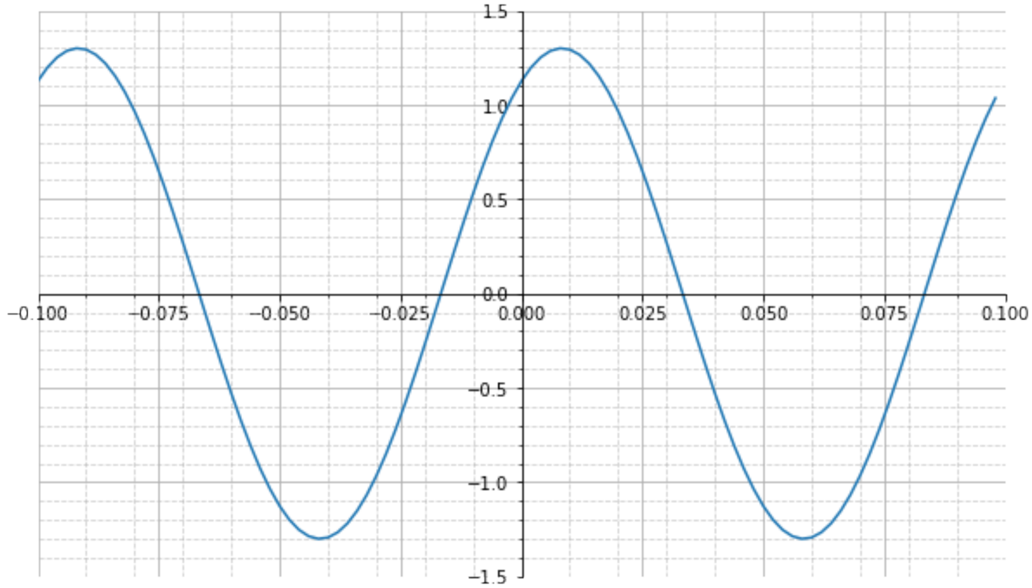


Figure 4: Signal sinusoïdal.

3 Les dipôles passifs en régime sinusoïdal - représentation complexe

3.1 Objectifs

– Connaître les relations instantanées entre tension et courant pour les 3 dipôles passifs parfaits (R, C et L).

– Connaître les comportements de ces 3 dipôles en Basses Fréquences et en Hautes Fréquences.

– Utiliser la notation complexe pour représenter l'impédance complexe d'un dipôle passif.

3.2 Rappel sur les nombres complexes

Remarque : En électronique, les parties imaginaires sont repérées par la lettre j et non i, afin d'éviter la confusion avec le courant électrique alternatif symbolisé par la lettre i.

3.2.1. Forme algébrique

La forme algébrique d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est donnée par : $z = a + \mathrm{j}b$

- Le nombre réel a est la partie réelle ($\Re e$) du nombre complexe z
- Le nombre réel b est la partie imaginaire ($\Im m$) du nombre complexe z
  $\Rightarrow z = \Re e(z) + \mathrm{j}\Im m(z)$
- Si la partie imaginaire de z est nulle ($z = a$), on dit que z est un nombre réel
- Si la partie réelle de z est nulle ($z = \mathrm{j}b$), on dit que z est un nombre complexe imaginaire pur

- Conjugué : Le conjugué de z est $\overline{z} = a - \mathrm{j}b$
ou $\overline{z} = \Re e(z) - \mathrm{j}\Im m(z)$

- Module : Le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
ou $|z| = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

- **Argument :** L'argument de z est
  $\arg[z] = \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\Im m(z)}{\Re e(z)}\right)$
  Cet argument est défini modulo 2π

Soient $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2 \in \mathbb{C}$.

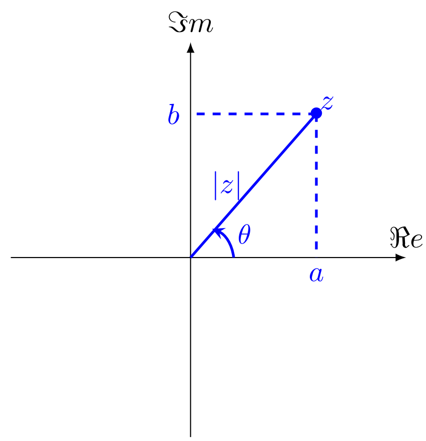
- **Addition :** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2)$

- **Soustraction :** $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}(b_1 - b_2)$

- **Multiplication :** $z_1 * z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$
  $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$
  $\arg[z_1 * z_2] = \arg[z_1] + \arg[z_2]]$

- **Division :** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
  $\arg\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \arg[z_1] - \arg[z_2]$

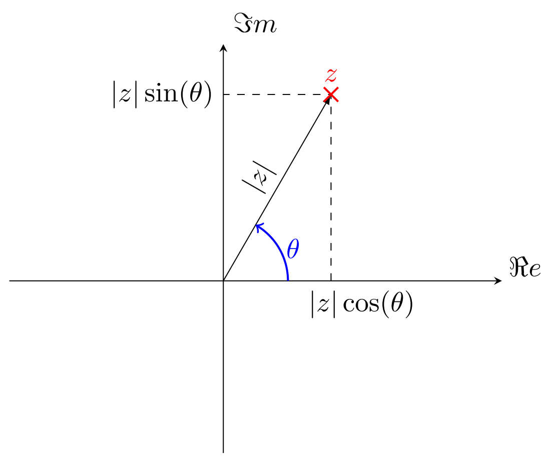
- **Plan complexe :** Un nombre complexe est formé de deux nombres réels (partie réelle et imaginaire). Ainsi, si le plan est muni d'un repère orthonormé où l'axe des abscisses représente la partie réelle et l'axe des ordonnées représente la partie imaginaire, on peut repérer tout point par un nombre complexe.



3.2.2. Forme trigonométrique

$z = |z|\Big(\cos(\theta) + \mathrm{j}\sin(\theta)\Big)$

Avec : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$



3.2.3. Forme exponentielle

$z = a + \mathrm{j}b = |z|\Big(\cos(\theta) + \mathrm{j}\sin(\theta)\Big) = |z|e^{\mathrm{j}\theta}$

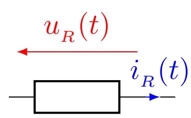
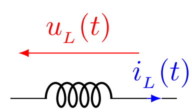
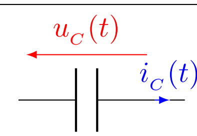
- Multiplication : $z_1 * z_2 = |z_1|e^{\mathrm{j}\theta_1} * |z_2|e^{\mathrm{j}\theta_2} = |z_1| * |z_2|e^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$

- Division : $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|e^{\mathrm{j}\theta_1}}{|z_2|e^{\mathrm{j}\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}$

- Exponentielle d'un nombre complexe :

$e^z = e^{\Re e(z)+\mathrm{j}\Im m(z)} = e^{\Re e(z)}.e^{\mathrm{j}\Im m(z)}$
$\Rightarrow |e^z| = e^{\Re e(z)}$ et $\arg(e^z) = \Im m(z)\ [2\pi]$

3.3 Impédance complexe des dipôles de base

Dipôle			
Relation tension/courant	$v_R(t) = R.i_R(t)$ $i_R(t) = \dfrac{v_R(t)}{R}$	$v_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ $i_L(t) = \dfrac{1}{L}\int v_L(t)\,\mathrm{d}t$	$i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$ $v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t$
$z = \dfrac{u}{i}$	R	$\mathrm{jL}\omega$	$\dfrac{1}{jC\omega}$
$\lvert z\rvert$	R	$L\omega$	$\dfrac{1}{C\omega}$
$\mathrm{Arg}[z]$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{-\pi}{2}$
Diagramme de Fresnel