Electronique SN–EC

Systèmes linéaires et invariants dans le temps (1er ordre)

K. Boudjelaba

23/09/2021

1 Système linéaire et invariant dans le temps (LTI : : Linear Time Invariant)

1.1 Définitions

Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la proportionnalité et l'additivité.
$s(t) = H[e(t)]$

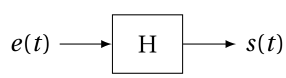


FIGURE 1: Système une entrée / une sortie

Propriétés :

Linéarité : Un système H est linéaire quand sa réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la même combinaison linéaire des réponses individuelles à chacun des signaux d'entrées.

- Lorsque l'entrée est égale à $\lambda e(t)$, la sortie est égale à $\lambda s(t)$.
- Lorsque l'entrée est égale à $e(t) = \alpha_1 * e_1(t) + \alpha_2 * e_2(t)$, la sortie du système est égale à $s(t) = \alpha_1 * s_1(t) + \alpha_2 * s_2(t)$.

Invariance dans le temps : Lorsque l'entrée est égale à $e(t-\tau)$, la sortie du système est égale à $s(t-\tau)$.

1.2 Représentation d'un système du premier ordre par les équations différentielles

La grandeur de sortie $s(t)$ est liée à la grandeur d'entrée $e(t)$ par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

$\frac{d..}{dt}$ représente la $1^{ère}$ dérivée par rapport au temps.

$a_i \ et \ b_i$ sont des coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}$.

L'ordre du système correspond à l'ordre du premier membre (en $s(t)$)

L'ordre du second membre doit être $\leq$ à l'ordre du premier pour que le système soit causal. (Principe de causalité : la cause précède l'effet).

1.2.1 Résolution d'équations différentielles :

La solution complète de l'équation différentielle s'exprime sous la forme :

$$s(t) = s_L(t) + s_P(t)$$

— régime transitoire $s_L(t)$: solution libre de l'équation sans second membre.

$$s_L(t) = \lambda_1 e^{p_1 t}$$

où $p_1 \in \mathbb{R}$ correspond à la racine de l'équation caractéristique $a_1 p + a_0 = 0$.

$$\lim_{t\to\infty} s_L(t) = 0 \ \forall p_1 \text{ système toujours stable}$$

— régime permanent $s_P(t)$: solution particulière de l'équation avec second membre

Régime transitoire (régime libre)

Un polynôme d'ordre 1 présente une racine forcément réelle. L'équation différentielle sans second membre d'ordre 1 presente donc toujours une solution de forme λe^{pt}. Un système électronique d'ordre 1 présente toujours une fonction de transfert dont le pôle est réel négatif. L'exponentielle est toujours décroissante, la solution libre s'écrit $s_L(t) = \lambda e^{\frac{-t}{\tau}}$. Elle tend à s'annuler, les circuits linéaires d'ordre 1 sont toujours stables.
Le coefficient λ depend de la condition initiale.

Régime permanent Les solutions particulières des équations différentielles régissant les systèmes linéaires correspondent aux regimes permanents de ces systèmes.

Entrée sinusoïdale $e(t) = E.\sin\left(\omega_e t + \varphi_e\right)$.
$s_p(t)$ sera un signal signal sinusoïdal de même pulsation (ω_e) que $e(t)$.
L'amplitude et la phase de $s_p(t)$ se déterminent en utilisant la fonction de transfert $\overline{T}$ $\big($Le module et l'argument$\big)$ liant $\overline{E}$ et $\overline{S}$.

$$s_p(t) = \left|\overline{T}(\omega = \omega_e)\right| \times E \times \sin\left(\omega_e t + \varphi_e + Arg[\overline{T}(\omega = \omega_e)]\right)$$

Entrée de type polynomiale $e(t) = E_o + E_1 \times t + \cdots + E_n \times t^n$.

$s_p(t)$ sera aussi de type polynomiale : $s_p(t) = S_o + S_1 \times t + \cdots + S_m \times t^n$ d'ordre $m \leq n$.

Cas particulier : signal d'entrée continu $e(t) = E_o$ (polynôme d'ordre 0)

$s_p(t)$ sera un signal continu $s_p(t) = S_o$.
$S_o = b_o \times E_o$ avec b_o coefficient d'ordre 0 du polynôme numérateur de la fonction de transfert.

1.2.2 Transformée de Laplace :

Soit $e(t)$ un signal temporel dont la transformée de Laplace est notée $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$.

— Linéarité : Si $s(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, alors

$$S(p) = \alpha_1 E_1(p) + \alpha_2 E_2(p)$$

En introduisant l'opérateur de Laplace (de dérivation) : $p = \frac{d}{dt}$
— Dérivation : Si $s(t) = \frac{d^k e(t)}{dt^k}$, alors

$$S(p) = p^k E(p)$$

En utilisant ces propriétés dans l'équation différentielle, nous obtenons

$$a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_1 p S(p) + b_0 S(p)$$

où $p \in \mathbb{C}$ est l'opérateur de Laplace. En factorisant les deux membres respectivement par $S(p)$ et $E(p)$, nous obtenons la fonction de transfert.

1.3 Représentation par la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système est défini par

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

— Zéro : le zéro (z_1) correspond à la valeur de p annulant le numérateur de la fonction de transfert (racine du numérateur : $N(z_1) = 0$).

$$N(p) = b_1 p + b_0 = k(p - z_1)$$

— Pôle : le pôle (p_1) correspond à la valeur de p annulant le dénominateur de la fonction de transfert (racine du dénominateur : $D(p_1) = 0$).

$$D(p) = a_1 p + a_0 = \ell(p - p_1)$$

pôle = racine de l'équation caractéristique.

$$\Longrightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} = \frac{k(p - z_1)}{\ell(p - p_1)}$$

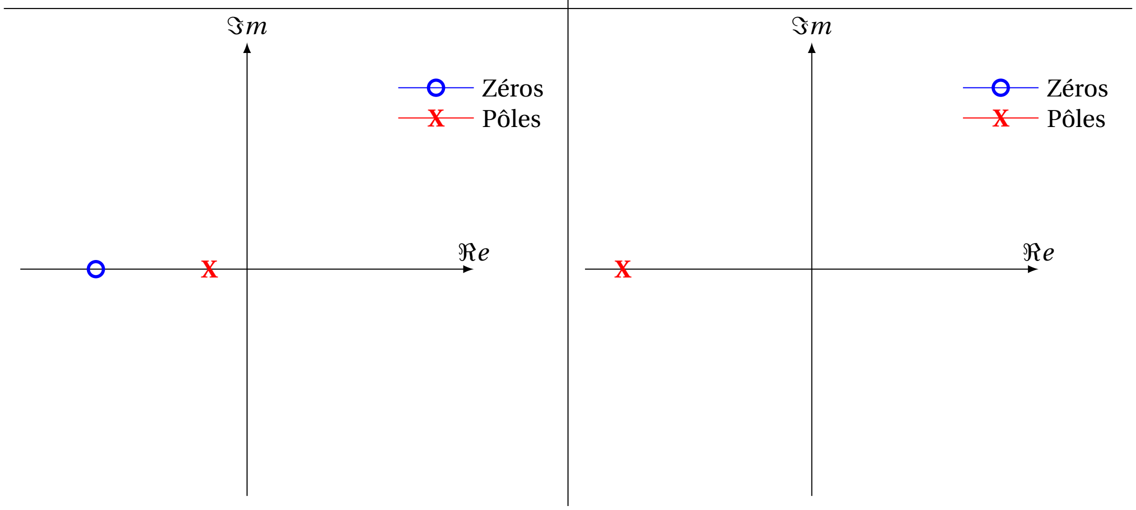
Principe : Représentation des pôles et des zéros de la fonction de transfert $H(p)$ dans le plan complexe.

— Le pôle p_1 est représenté avec une croix.
— Le zéro z_1 est représenté avec un cercle.

Remarques :
— Causalité : Nombre de Zéros ≤ Nombre de Pôles

Exemples :

$H_1(p) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{p}{2}\right)}{\left(0.5 + p\right)}$	$H_2(p) = \dfrac{-2}{10 + 4p}$
$z_1 = -2, \quad p_1 = -0.5$	$z_1 = \Phi, \quad p_1 = -2.5$



Ordre du système	Fonction de transfert	Équation différentielle	Équation caractéristique	pôles
	$\bar{T}_1=\frac{-R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+jR_2C\omega}$			
		$s(t)+2.10^{-6}\frac{ds(t)}{dt}=3 10^{-6}\cdot\frac{de}{dt}$		
	$T_3=\frac{1}{1+RCp+LCp^2}$			
		$s(t)+2\frac{m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}=K\frac{d^2e(t)}{dt^2}$		
	$T_5=\frac{(p+1).(p^2+4)}{(p+6)(p-1)(3p^2+5p+3)}$			
	$\bar{T}_6=\frac{G_1\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}{1+9\frac{(j\omega)^3}{\omega_1^3}}$			

1.4 Régime Harmonique - Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale en régime permanent :

Définition : Une sinusoïde est un signal réel défini mathématiquement par : e(t)=E sin($\omega t + \varphi_E$).

— E correspond à l'amplitude (crête), $2E$ correspond à l'amplitude crête à crête,
— ω correspond à la pulsation (rad/s),
— φ_E correspond au déphasage (rad ou deg), $\varphi_E = -\Delta t \times \omega$

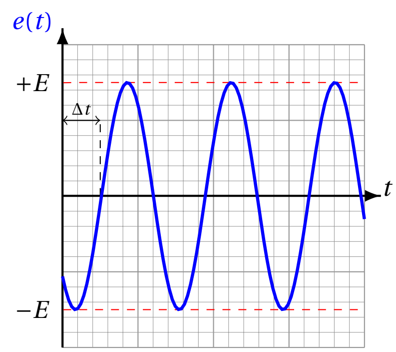


FIGURE 2: Signal sinusoïdal

Lorsque $e(t) = E\sin(\omega t + \varphi_E)$, la sortie en régime permanent s'exprime sous la forme $s(t) = S\sin(\omega t + \varphi_S)$

En utilisant la décomposition de la sinusoïde et le théorème de la superposition, nous obtenons

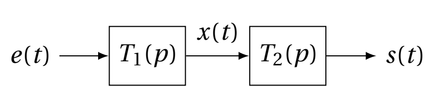
— Un gain entre l'entrée et la sortie égal à $\frac{S}{E} = \left|T(j\omega)\right|$
— Un déphasage entre l'entrée et la sortie égal à : $\varphi_S - \varphi_E = \arg\left[T(j\omega)\right]$

Généralement, un système va appliquer un gain et un déphasage différent suivant la pulsation → filtrage (du contenu fréquentiel).

Diagramme de Bode : Représentation de la fonction complexe $T(j\omega)$ via 2 graphiques
— Abscisse : pulsation ω (rad/s) en échelle log
— Ordonnée :
    — Gain $|T(j\omega)|$ en échelle log.
    — Phase $\arg[T(j\omega)]$ (deg) en échelle linéaire

1.5 Boucle ouverte et fermée

Système en cascade :



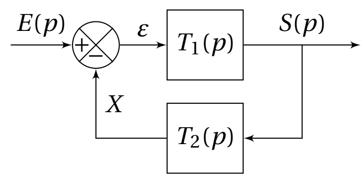
La fonction de transfert globale est donnée par :

$$T(p) = \frac{S(p)}{X(p)} \times \frac{X(p)}{E(p)} = T_2(p)T_1(p)$$

Nous obtenons alors
— Gain : $\log(|T(j\omega)|) = \log(|T_1(j\omega)|) + \log(|T_2(j\omega)|)$
— Phase : $\arg[T(j\omega)] = \arg[T_1(j\omega)] + \arg[T_2(j\omega)]$

Les diagrammes de Bode de $T(j\omega)$ s'obtiennent par addition des diagrammes de Bode de $T_1(j\omega)$ et $T_2(j\omega)$

Systèmes en boucle fermée :



On a : $X = T_2(p) \times S(p)$ et $\varepsilon = E(p) - X = E(p) - T_2(p) \times S(p)$

$\Rightarrow S(p) = T_1(p) \times \varepsilon = T_1(p) \times \left[E(p) - T_2(p) \times S(p)\right]$

$\Rightarrow S(p) = T_1(p) \times E(p) - T_1(p) \times T_2(p) \times S(p)$

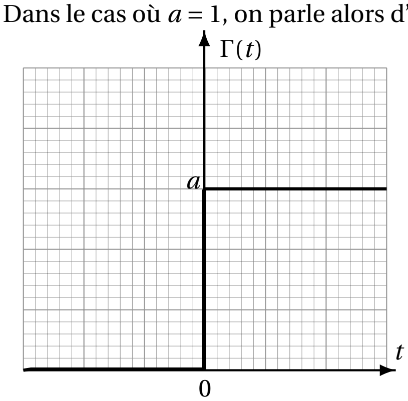
2 Signaux usuels

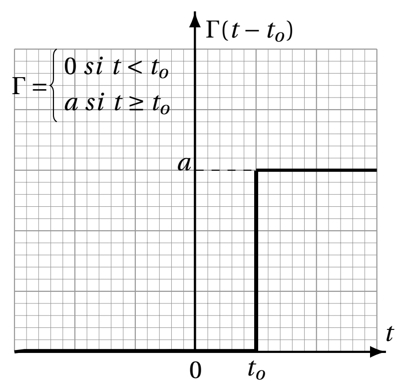
2.1 Echelon (fonction de Heaviside) : $H(t), \Gamma(t), \mathfrak{U}(t)$

La fonction échelon permet de soumettre le système à une entrée constante depuis $t = 0$ ou t_o
Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires.
La réponse des systemes linéaires à ce signal est appelée la réponse indicielle.

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ a & si\ t \geq 0. \end{cases} \quad \text{Avec } a \in \mathbb{R}^*$$

Dans le cas où $a = 1$, on parle alors d'Echelon unité.



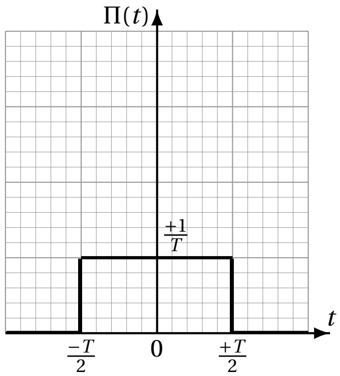


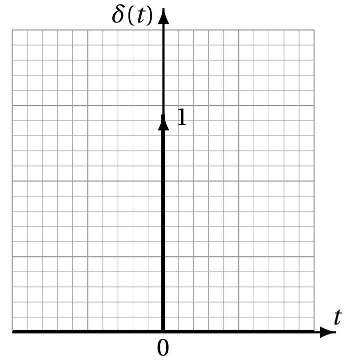
2.2 Impulsion de Dirac "$\delta(t)$"

La réponse des systemes linéaires à ce signal est appelée la réponse impulsionnelle.
Cette fonction est impossible à réaliser matériellement. Elle permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (choc, impulsion).

Une impulsion de Dirac est un signal qui prend une "valeur infinie" en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

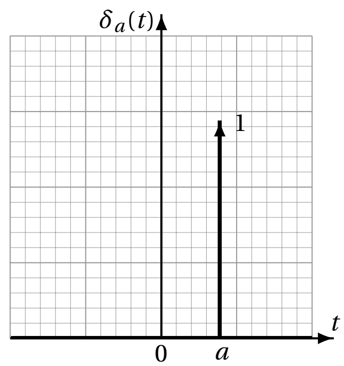
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \neq 0 \\ +\infty & si\ t = 0. \end{cases} \quad \text{Avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$





On peut modéliser l'impulsion de Dirac par la limite de la fonction porte quand $T \to 0$.
δ est donc de largeur nulle (on parle aussi de support nul), de hauteur infinie et d'intégrale 1.
Le graphe de δ sera représenté par convention par une flèche vers le haut, de hauteur 1, centrée en $t = 0$.

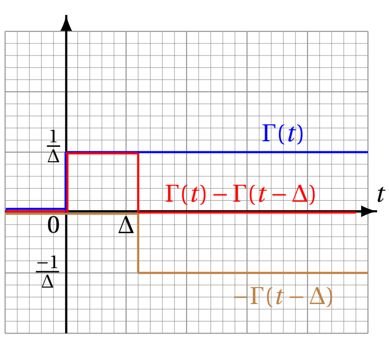
Changement d'origine : $\delta_a(t) = \delta(t-a)$

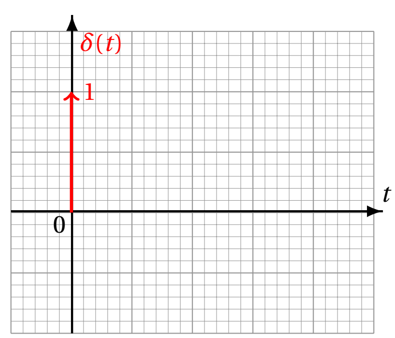


$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \neq a \\ +\infty & si\ t = a. \end{cases}$$

Impulsion de Dirac "$\delta(t)$" : Deuxième définition

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & si\ t \geq 0 \end{cases} \qquad \Gamma(t-\Delta) = \begin{cases} 0 & si\ t < \Delta \\ \frac{1}{\Delta} & si\ t \geq 0 \end{cases} \qquad \Gamma(t) - \Gamma(t-\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & si\ 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$





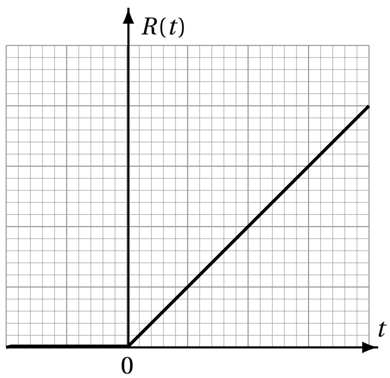
$$\lim_{\Delta \to 0} \Big(\Gamma(t) - \Gamma(t-\Delta) \Big) = \delta(t)$$

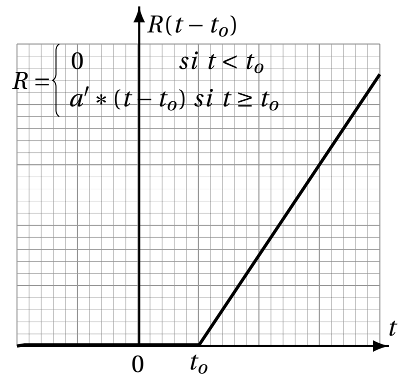
2.3 Rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite.

$$R(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ a * t & si\ t \geq 0. \end{cases} \quad \text{Avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

Dans le cas où $a = 1$, on parle alors de rampe-unité.





3 Rappels

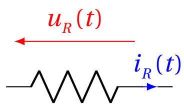
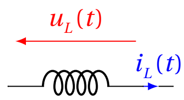
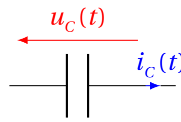
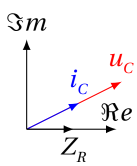
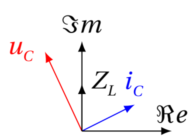
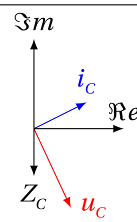
3.1 Impédance complexe des dipôles de base

Loi d'Ohm en régime alternatif : $\overline{U} = \overline{Z} * \overline{I}$

Si $\overline{U} = U_o.e^{\,j(\omega t+\varphi_v)}$ et $\overline{I} = I_o.e^{\,j(\omega t+\varphi_i)}$

Alors $\overline{Z} = \dfrac{U_o.e^{\,j(\omega t+\varphi_v)}}{I_o.e^{\,j(\omega t+\varphi_i)}} = \dfrac{U_o}{I_o} e^{\,j(\omega t+\varphi_v-\varphi_i)}$

Le module de l'impédance est donc égal au rapport des modules de la tension et de l'intensité du courant. Son argument (phase) est égal à la différence des arguments de la tension et du courant.

Dipôle			
Relation tension/courant	$v_R(t) = R.i_R(t)$ $i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$	$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ $i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\,\mathrm{d}t$	$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$ $v_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t$
$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$	R	jLω	$\frac{1}{jC\omega}$
$\lvert\overline{Z}\rvert$	R	$L\omega$	$\frac{1}{C\omega}$
Arg$[\overline{Z}]$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$
Diagramme de Fresnel			

3.2 Systèmes du 1er ordre

Un sytème du 1er ordre est défini par :

$$b_1 * \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_o * s(t) = a_1 * \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_o * e(t)$$

ou :

$$T(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{a_1(j\omega) + a_o}{b_1(j\omega) + b_o} = k\frac{1+\tau_1(j\omega)}{1+\tau_2(j\omega)} \text{ si } a_o \neq 0 \; et \; a_1 \neq 0$$

$$\text{Avec } \tau_1 = \frac{a_1}{a_o} \text{ , } \tau_2 = \frac{b_1}{b_o} \; et \; k = \frac{a_o}{b_o} \iff T(j\omega) = \frac{T_o + T_\infty\, j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

<u>Etude asymptotique :</u>

$$\log\left(|T_1|\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + (\tau_1\omega)^2\right) \; et \; Arg[T_1(j\omega)] = tan^{-1}(\tau_1\omega)$$

$$\begin{cases} \omega << \frac{1}{\tau_1} & T_1 \to 0 & Arg[T_1] \to 0 \\ \\ \omega >> \frac{1}{\tau_1} & T_1 \to \log\left(\tau_1 \omega\right) & Arg[T_1] \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\log\left(|T_2|\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+(\tau_2\omega)^2\right)$ *et* $Arg[T_1(j\omega)] = -tan^{-1}(\tau_2\omega)$

$$\begin{cases} \omega << \frac{1}{\tau_2} & T_2 \to 0 & Arg[T_2] \to 0 \\ \\ \omega >> \frac{1}{\tau_2} & T_2 \to -\log\left(\tau_2 \omega\right) & Arg[T_2] \to \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

Diagramme de Gain $\boldsymbol{\tau_1 > \tau_2}$ **:**

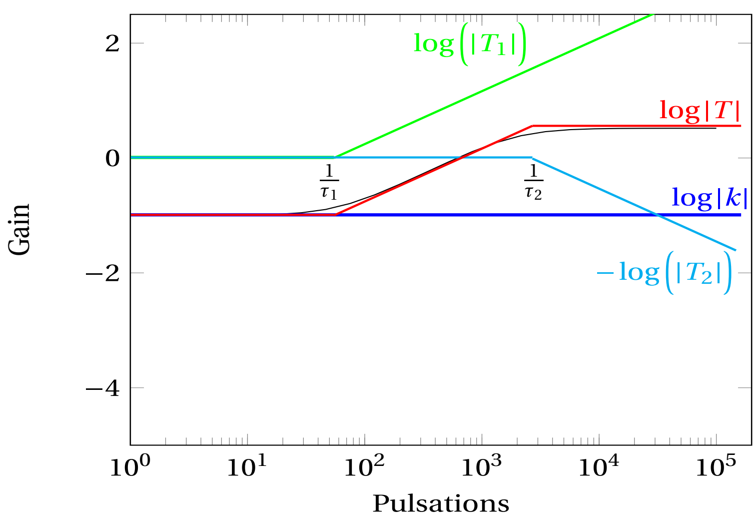


Diagramme de Phase $\boldsymbol{\tau_1 > \tau_2}$ ***et k* > 0:**

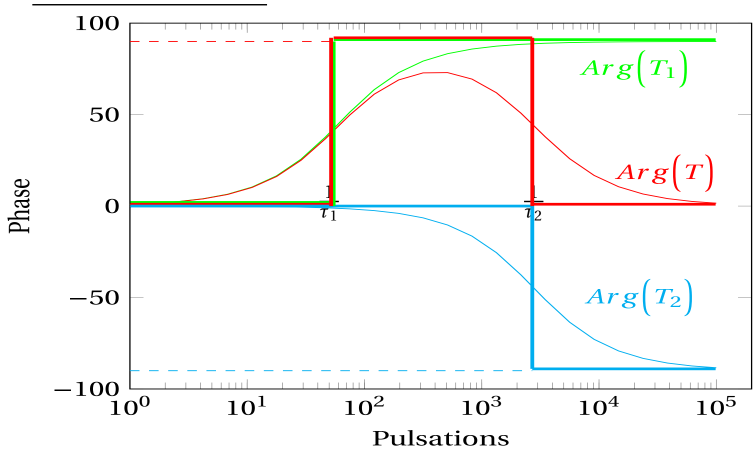


Diagramme de Gain $\boldsymbol{\tau_1 < \tau_2}$:

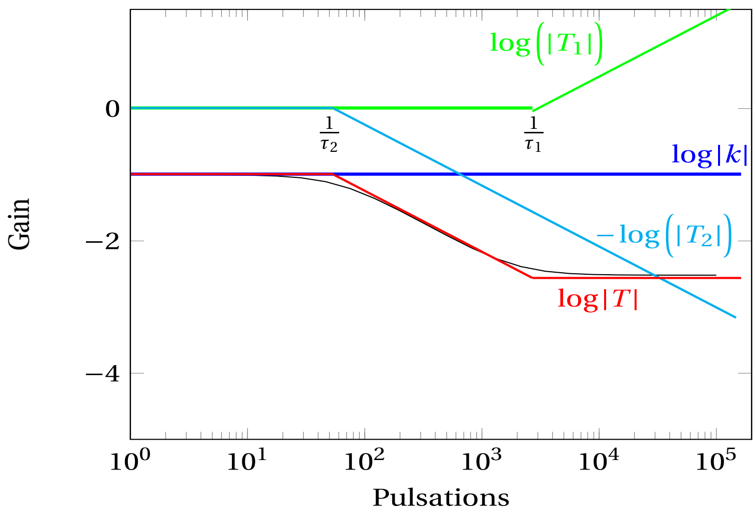
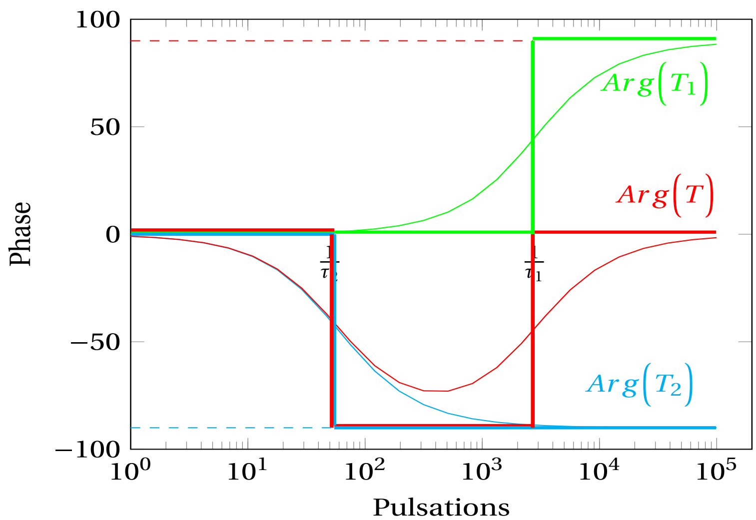


Diagramme de Phase $\boldsymbol{\tau_1 < \tau_2\ et\ k > 0}$:



Etude temporelle

$$b_1 * \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_o * s(t) = a_1 * \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_o * e(t) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Avec $\tau_1 = \dfrac{a_1}{a_o}$, $\tau_2 = \dfrac{b_1}{b_o}$ et $k = \dfrac{a_o}{b_o}$

Régime transitoire (Solution de l'équation homogène) : $b_1 * \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_o * s(t) = 0 \implies s_{_T}(t) = \lambda e^{\left(-\frac{b_o t}{b_1}\right)}$

Régime permanent (Solution particulière) : $e(t) = \begin{cases} E & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$

$$(1) \Longrightarrow b_1 * \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_o * s(t) = a_o * E \quad \Longrightarrow s_L(t) = S_p = \frac{a_o}{b_o} * E$$

$$\Longrightarrow \boxed{s(t) = s_T(t) + s_L(t) = \lambda e^{\left(-\frac{b_o t}{b_1}\right)} + \frac{a_o}{b_o} * E}$$

1er cas : $s(0) = 0$ (Conditions initiales)

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{a_o}{b_o} * E$$

$$\Longrightarrow s(t) = -\frac{a_o}{b_o} * E * e^{\left(-\frac{b_o t}{b_1}\right)} + \frac{a_o}{b_o} * E = \frac{a_o}{b_o} * E\left(1 - e^{\left(-\frac{b_o t}{b_1}\right)}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{s(t) = k * E\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)}\right)}$$

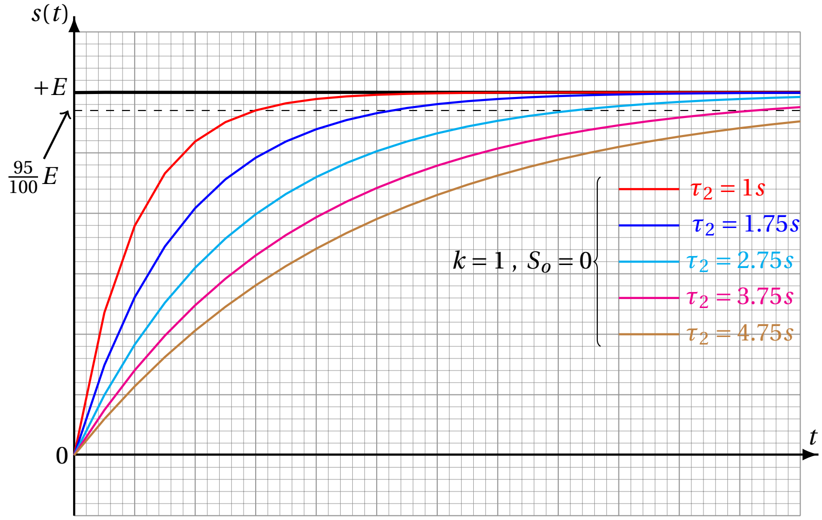
2ème cas : $s(0) = S_o$ (Conditions initiales)

$$\Rightarrow \lambda = S_o - \frac{a_o}{b_o} * E$$

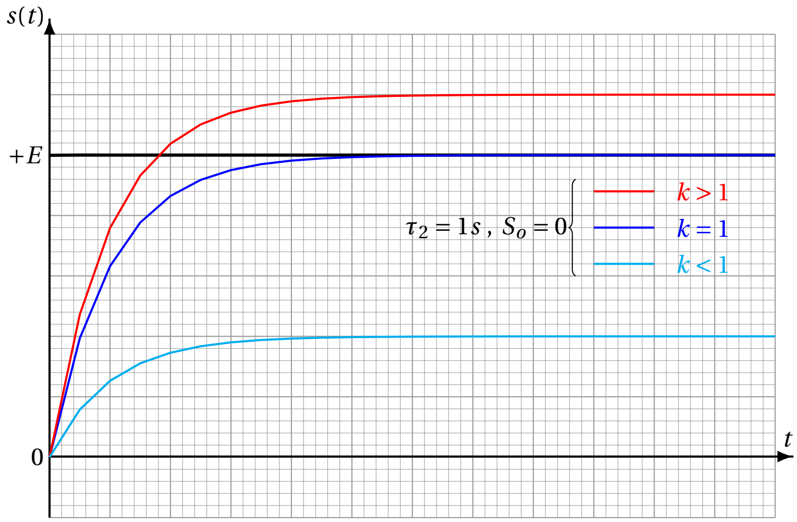
$$\Longrightarrow s(t) = \left(S_o - \frac{a_o}{b_o} * E\right) e^{\left(-\frac{b_o t}{b_1}\right)} + \frac{a_o}{b_o} * E$$

$$\Longrightarrow \boxed{s(t) = (S_o - k * E)\, e^{\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)} + k * E}$$

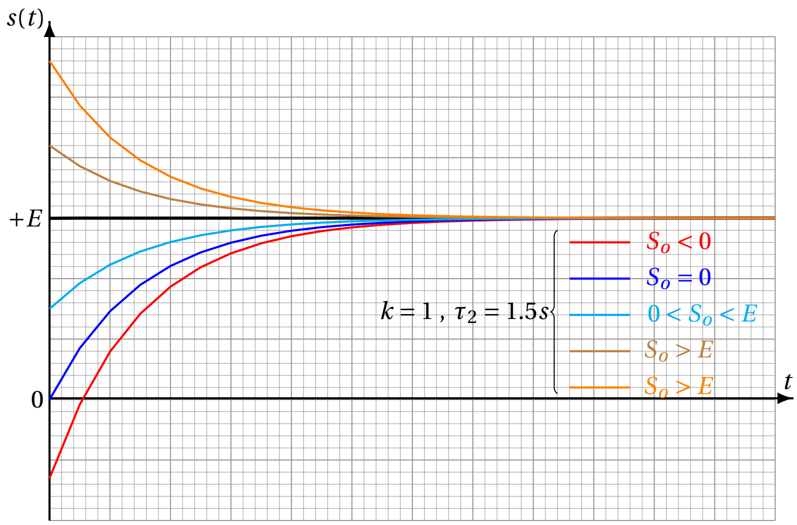
Influence de la constante du temps τ_2



Influence du gain (statique) k



Influence des conditions initiales S_o



Etude temporelle : Exemple

$$\tau * \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = k * e(t) \quad \text{Conditions initiales : } s(0) = 0$$

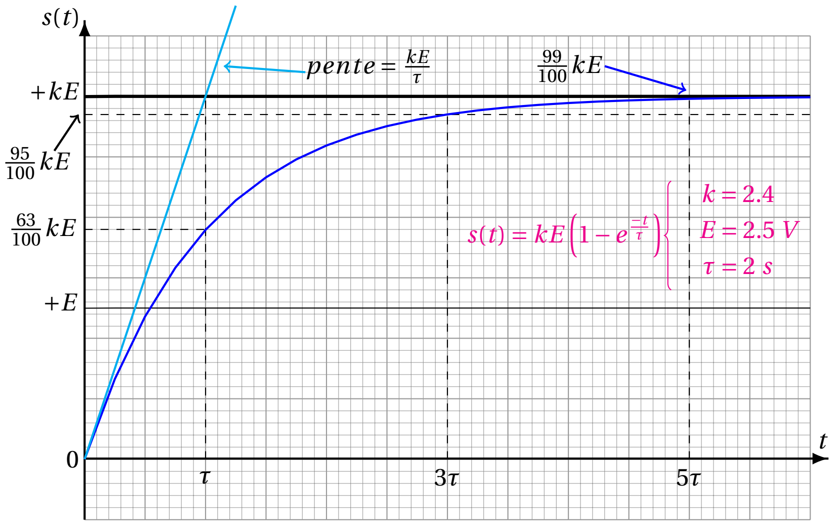
Régime transitoire (Solution de l'équation homogène) : $\tau * \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = 0 \implies s_L(t) = \lambda e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Régime permanent (Solution particulière) : $e(t) = \begin{cases} E & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$

$$\tau * \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = k * E \implies s_p(t) = k * E \implies \boxed{s(t) = s_T(t) + s_p(t) = \lambda e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + k * E}$$

On a $s(0) = 0$ (Conditions initiales) $\Rightarrow \lambda = -k * E \implies s(t) = -k * E * e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + k * E$

$$\implies \boxed{s(t) = k * E\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$



$s(t)$
$+kE$
$\frac{95}{100}kE$
$\frac{63}{100}kE$
$+E$
0
t
τ
3τ
5τ
$pente = \frac{kE}{\tau}$
$\frac{99}{100}kE$
$s(t) = kE\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$
$k = 2.4$
$E = 2.5\ V$
$\tau = 2\ s$