Filtrage numérique

K. Boudjelaba

SN – 2

Filtre proposé

Équation aux différences

Soit un système (filtre) défini par l'équation aux aux différences :

$$s[n] = 0.5e[n] + 0.5e[n-1]$$

Calcul de la $\mathscr{TZ}$ du filtre

$$S(z) = 0.5E(z) + 0.5z^{-1}E(z)$$
$$\Rightarrow S(z) = (0.5 + 0.5z^{-1})E(z)$$
$$\text{On a : } F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$
$$\Rightarrow F(z) = 0.5 + 0.5z^{-1}$$

Signal d'entrée ($f_e = 1$ kHz)

Le signal $e[n]$

$e(t)$ est un signal carré de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude 1 V.
Le signal $e(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1$ kHz $\Rightarrow T_e = 1$ ms.
Sur une période ($T = \dfrac{1}{f} = 20$ ms) du signal d'entrée, le signal échantillonné contient 20 valeurs.

$$\begin{cases} 1000 \text{ échant.} & \longrightarrow 1\ s \\ \alpha \text{ échant.} & \longrightarrow 20\ ms \end{cases} \Rightarrow \alpha = 20 \text{ échantillons par période}$$

$nT_e(ms)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e[n]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

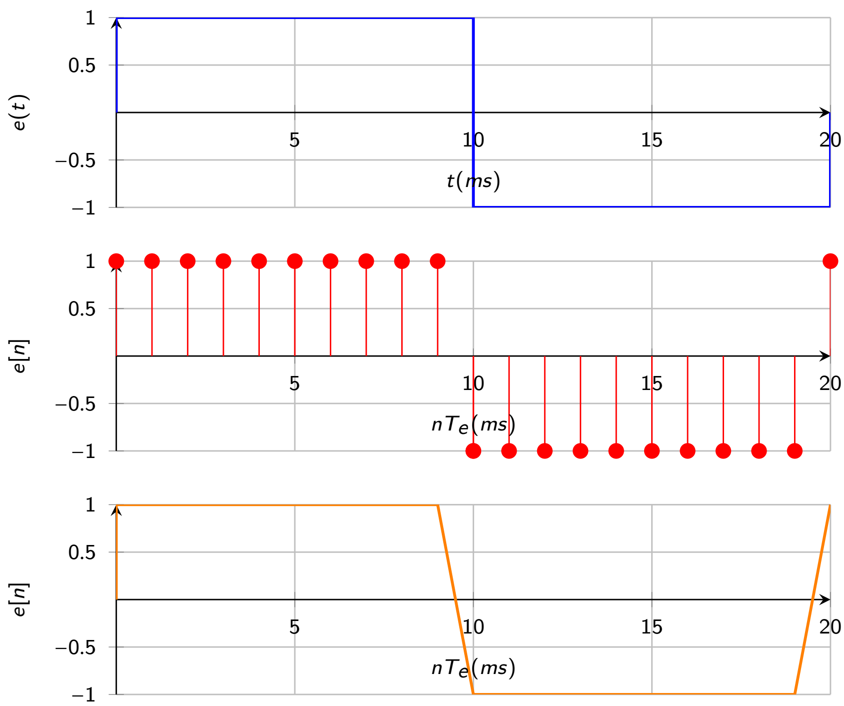
$nT_e(ms)$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$e[n]$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Signal d'entrée ($f_e = 1$ kHz)

$e(t)$ — Signal analogique

$e[n]$ — Signal numérique

$e[n]$ — Signal numérique avec plot



Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant l'équation aux différences ($f_e = 1$ kHz)

$s[n] = 0.5e[n] + 0.5e[n-1]$ et

n	$0 \cdots 9$	$10 \cdots 19$
$e[n]$	1	-1

Formule	$s[n]$
$s[0] =$ ············	···
$s[1] =$ ············	···
$s[2] =$ ············	···
$s[3] =$ ············	···
$s[4] =$ ············	···
$s[5] =$ ············	···
$s[6] =$ ············	···
$s[7] =$ ············	···
$s[8] =$ ············	···
$s[9] =$ ············	···

Formule	$s[n]$
$s[10] =$ ············	···
$s[11] =$ ············	···
$s[12] =$ ············	···
$s[13] =$ ············	···
$s[14] =$ ············	···
$s[15] =$ ············	···
$s[16] =$ ············	···
$s[17] =$ ············	···
$s[18] =$ ············	···
$s[19] =$ ············	···

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant l'équation aux différences ($f_e = 1$ kHz)

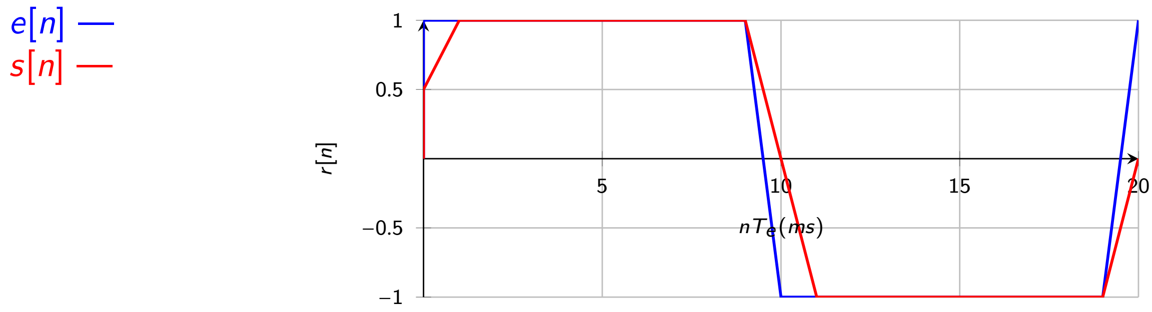
$s[n] = 0.5e[n] + 0.5e[n-1]$ et

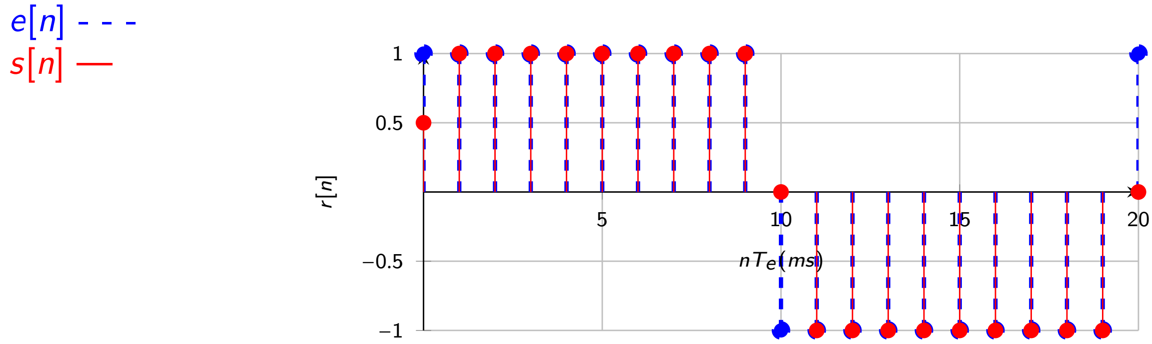
n	$0 \cdots 9$	$10 \cdots 19$
$e[n]$	1	-1

Formule	$s[n]$
$s[0] = 0.5e[0]$	0.5
$s[1] = 0.5e[1] + 0.5e[0]$	1
$s[2] = 0.5e[2] + 0.5e[1]$	1
$s[3] = 0.5e[3] + 0.5e[2]$	1
$s[4] = 0.5e[4] + 0.5e[3]$	1
$s[5] = 0.5e[5] + 0.5e[4]$	1
$s[6] = 0.5e[6] + 0.5e[5]$	1
$s[7] = 0.5e[7] + 0.5e[6]$	1
$s[8] = 0.5e[8] + 0.5e[7]$	1
$s[9] = 0.5e[9] + 0.5e[8]$	1

Formule	$s[n]$
$s[10] = 0.5e[10] + 0.5e[9]$	0
$s[11] = 0.5e[11] + 0.5e[10]$	-1
$s[12] = 0.5e[12] + 0.5e[11]$	-1
$s[13] = 0.5e[13] + 0.5e[12]$	-1
$s[14] = 0.5e[14] + 0.5e[13]$	-1
$s[15] = 0.5e[15] + 0.5e[14]$	-1
$s[16] = 0.5e[16] + 0.5e[15]$	-1
$s[17] = 0.5e[17] + 0.5e[16]$	-1
$s[18] = 0.5e[18] + 0.5e[17]$	-1
$s[19] = 0.5e[19] + 0.5e[18]$	-1

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant l'équation aux différences ($f_e = 1$ kHz)





Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant le produit de convolution ($f_e = 1$ kHz)

Produit de convolution discret

Soient $g[n]$ et $h[n]$ deux signaux discrets. Le produit de convolution discret entre ces deux signaux est donné par :

$$f[n] = g[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n-k] \cdot h[n]$$

Calcul de la sortie $s[n]$

$$s[n] = e[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n-k] \cdot h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot h[n-k]$$

Avec $h[n]$ représente la réponse impulsionnelle du filtre (dans notre cas, $h[n] = [0.5, 0.5]$ ou $h[0] = 0.5$ et $h[1] = 0.5$)

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant le produit de convolution ($f_e = 1$ kHz)

n	$0 \cdots 9$	$10 \cdots 19$
$e[n]$	1	-1

n	0	1
$h[n]$	0.5	0.5

$$s[n] = e[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n-k] \cdot h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot h[n-k]$$

Avec $h[n]$ représente la réponse impulsionnelle du filtre (dans notre cas, $h[0] = 0.5$ et $h[1] = 0.5$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e[n]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
$h[n]$	0.5	0.5									
$h[0]e[n-0]$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	-0.5
$h[1]e[n-1]$		0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$s[n]$	0.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$e[n]$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
$h[n]$										
$h[0]e[n-0]$	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0.5
$h[1]e[n-1]$	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
$s[n]$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0

Signal d'entrée ($fe = 200$ Hz)

Le signal $e[n]$

$e(t)$ est un signal carré de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude 1 V.

Le signal $e(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 200$ Hz $\Rightarrow T_e = 5$ ms.

Sur une période ($T = 20$ ms) du signal d'entrée, le signal échantillonné contient 4 valeurs.

$$\begin{cases} 200 \text{ échant.} & \longrightarrow 1\ s \\ \alpha \text{ échant.} & \longrightarrow 20\ ms \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4 \text{ échantillons par période}$$

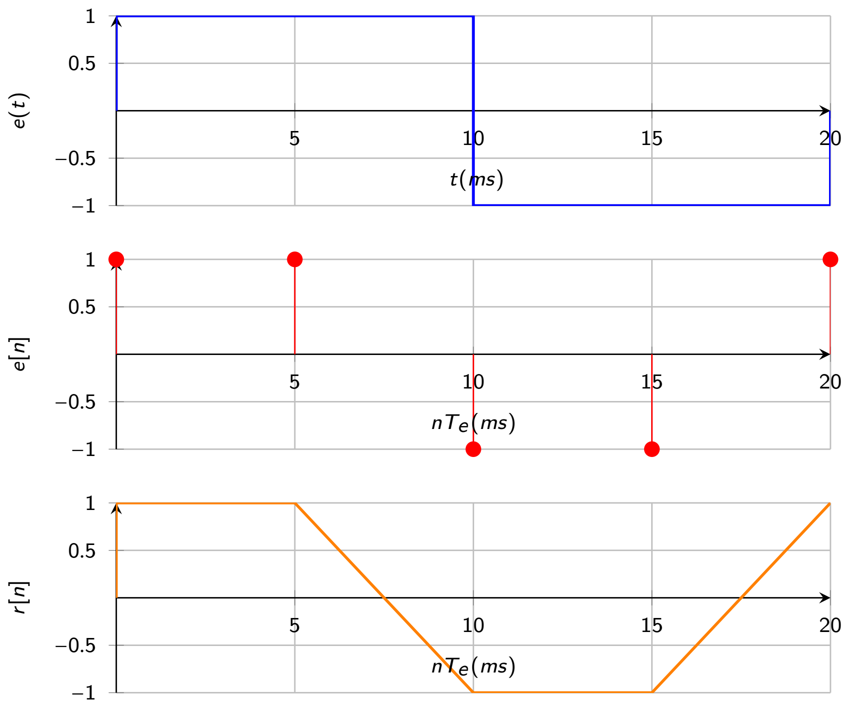
$nT_e(ms)$	0	5	10	15
n	0	1	2	3
$e[n]$	1	1	-1	-1

Signal d'entrée ($fe = 200$ Hz)

$e(t)$ — Signal analogique

$e[n]$ — Signal numérique

$e[n]$ — Signal numérique avec plot



Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant l'équation aux différences ($fe = 200$ Hz)

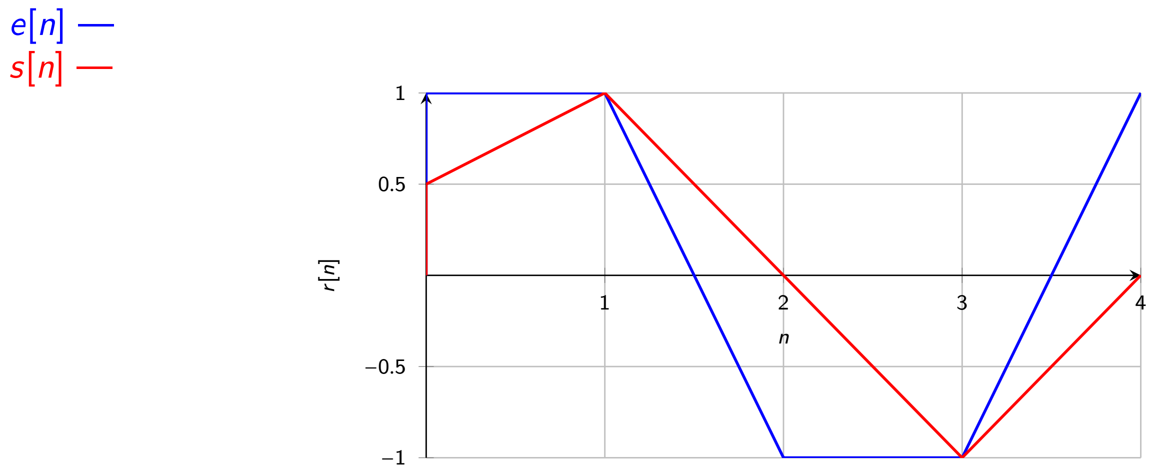
$s[n] = 0.5e[n] + 0.5e[n-1]$ et

n	0	1	2	3
$e[n]$	1	1	-1	-1

Formule		$s[n]$
$s[0] = 0.5 * e[0]$	$= 0.5 * 1$	0.5
$s[1] = 0.5 * e[1] + 0.5 * e[0]$	$= 0.5 * 1 + 0.5 * 1$	1
$s[2] = 0.5 * e[2] + 0.5 * e[1]$	$= 0.5 * (-1) + 0.5 * 1$	0
$s[3] = 0.5 * e[3] + 0.5 * e[2]$	$= 0.5 * (-1) + 0.5 * (-1)$	-1

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant l'équation aux différences ($fe = 200$ Hz)

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR



Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant le produit de convolution ($fe = 200$ Hz)

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Produit de convolution discret

Soient $g[n]$ et $h[n]$ deux signaux discrets. Le produit de convolution discret entre ces deux signaux est donné par :

$$f[n] = g[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n-k] \cdot h[n]$$

Calcul de la sortie $s[n]$

$$s[n] = e[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n-k] \cdot h[n]$$

Avec $h[n]$ représente la réponse impulsionnelle du filtre (dans notre cas, $h[n] = [0.5, 0.5]$ ou $h[0] = 0.5$ et $h[1] = 0.5$)

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant le produit de convolution ($fe = 200$ Hz)

n	0	1	2	3
$e[n]$	1	1	-1	-1

n	0	1
$h[n]$	0.5	0.5

$$s[n] = e[n] \otimes h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e[n-k] \cdot h[n]$$

Avec $h[n]$ représente la réponse impulsionnelle du filtre (dans notre cas, $h[0] = 0.5$ et $h[1] = 0.5$)

n	0	1	2	3	4
$e[n]$	1	1	-1	-1	1
$h[n]$	0.5	0.5			
$h[0] * e[n-0]$	0.5	0.5	-0.5	-0.5	0.5
$h[1] * e[n-1]$		0.5	0.5	-0.5	-0.5
$s[n]$	0.5	1	0	-1	0

Calcul de la sortie $s[n]$ en utilisant la $\mathscr{TZ}$ ($fe = 200$ Hz)

$$H(z) = 0.5 + 0.5z^{-1}$$
$$E(z) = 1 + 1z^{-1} - 1z^{-2} - 1z^{-3} + 1z^{-4} \cdots$$

$$S(z) = H(z)E(z) = (0.5 + 0.5z^{-1})(1 + 1z^{-1} - 1z^{-2} - 1z^{-3} + 1z^{-4} \cdots)$$

$$\begin{aligned} S(z) =& 0.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} - 0.5z^{-3} + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-4} + 0.5z^{-2} - 0.5z^{-3} \\ & - 0.5z^{-4} + 0.5z^{-5} \cdots \end{aligned}$$

$$S(z) = 0.5 + 1z^{-1} + 0z^{-2} - 1z^{-3} + 0z^{-4} \boxed{+0.5z^{-5} \cdots}$$

$$s[n] = [\ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0.5},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{0},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{-1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{0},\ \underset{\substack{\uparrow\cdots \\ 5\cdots}}{\cdots}\ ]$$

Exercice :

Calculer $S(z) = H(z).E(z)$ et en déduire $s[n]$.

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$
$$E(z) = 2 - 1z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$S(z) = H(z)E(z) = (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3})(2 - 1z^{-1} + 3z^{-2})$$

$$S(z) =$$
$$2 - 1z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-1} - 2z^{-2} + 6z^{-3} + 4z^{-2} - 2z^{-3} + 6z^{-4} + 6z^{-3} - 3z^{-4} + 9z^{-5}$$

$$S(z) = 2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 10z^{-3} + 3z^{-4} + 9z^{-5}$$

$$s[n] = [\ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{2},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{3},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{5},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{10},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{3},\ \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{9}\ ]$$

Exemple de produit de convolution