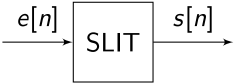
Filtres numériques : RIF & RII

K. Boudjelaba

SN – 2

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE
ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Introduction - Systèmes numériques



La sortie du système correspond à la convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle $h[n]$: $\quad s[n] = e[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{n} e[k]h[n-k]$

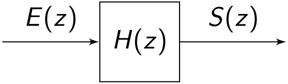
- $h[n]$: réponse du système à une entrée de type impulsion $\delta[n]$

Fonction de Transfert

En appliquant la transformée en $\mathscr{Z}$ dans l'équation précédente, nous obtenons $S(z) = H(z)E(z)$. La fonction de transfert du système est alors définie par

$$H(z) \triangleq \frac{S(z)}{E(z)}$$

- fonction de transfert $=$ transformée en $\mathscr{Z}$ de $h[n]$



- $S(z) = H(z)E(z)$.

Introduction - Systèmes numériques

Exemple

- Soit un système dont la réponse impulsionnelle est donnée par $h[n] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$. Déterminons la sortie $s[n]$ lorsque $e[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3]$

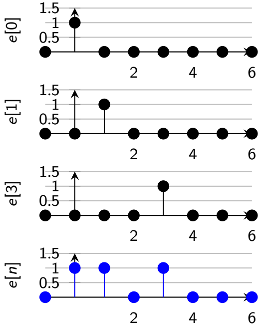


Figure 1: Entrée du système

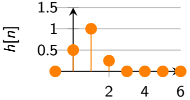


Figure 2: Réponse impulsionnelle

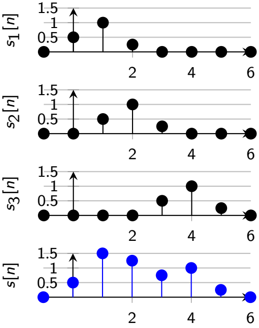


Figure 3: Sortie du système

Introduction - Stabilité

FT Continue

Un système LTI continu est stable si et seulement si tous les pôles de sa FT, notés p_k^c, possèdent une partie réelle négative.

Mathématiquement, cette condition impose que

$$\Re e(p_k^c) < 0$$

FT discrète

Une FT discrète est stable si la FT continue correspondante est stable.

En utilisant la substitution $z = e^{pT_e}$, nous obtenons la propriété suivante:

Une FT discrète est stable si et seulement si tous ses pôles p_k sont situés à l'intérieur d'un cercle unité centré sur l'origine.

Introduction - Stabilité

FT Continue

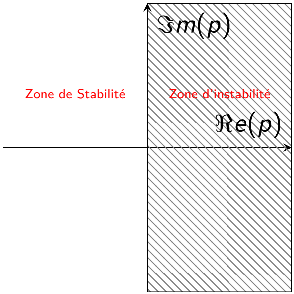


Figure 4: Zone d'instabilité pour une FT continue

FT discrète

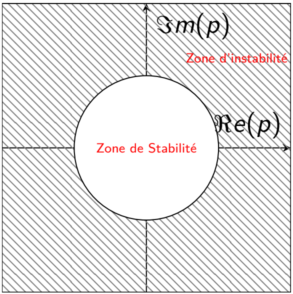


Figure 5: Zone d'instabilité pour une FT discrète

Introduction - Analyse temporelle

Réponse indicielle d'un 1er ordre

Considérons le système de premier ordre défini par: $H(z) = \dfrac{S(z)}{E(z)} = \dfrac{b_0}{z - a_0}$

Équation de récurrence : $zS(z) - a_0 S(z) = b_0 E(z)$

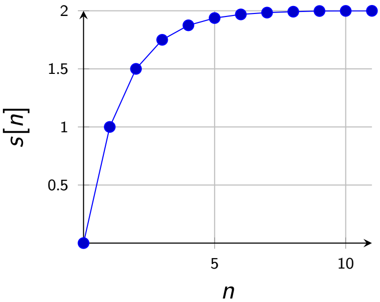
$$S(z) = b_0 z^{-1} E(z) + a_0 z^{-1} S(z)$$

$$s[n] = b_0 e[n-1] + a_0 s[n-1]$$

Cas où $b_0 = 1$ et $a_0 = 0.5$

Caractéristiques

- temps de réponse: $tr(5\%) \approx 5T_e$,
- dépassement relatif: $D(\%) = 0$ $(m > 1)$,
- valeur finale: $s(\infty) = 2$ (gain statique: 2)



Introduction - Analyse fréquentielle

Problématique

Déterminer le signal $s[n]$ à la sortie de la FT $H(z)$ lorsque le signal d'entrée $e[n] = A\sin(\Omega n + \phi_e)$ où $\Omega = \omega T_e$ correspond à la pulsation réduite.

$$E(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow S(s)$$

- Le signal de sortie est une sinusoïde de même pulsation

$$s[n] = A\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| \sin\left(\Omega n + \phi_e + \arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right]\right)$$

  - $\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|$: rapport entre l'amplitude de la sortie et de l'entrée ,
  - $\arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right]$: déphasage entre la sortie et l'entrée.

Pour obtenir la réponse fréquentielle, nous poserons $z = e^{j\Omega}$.

Introduction - Analyse fréquentielle

Réponse fréquentielle d'un 1er ordre

Considérons le système de premier ordre défini par:

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0}{z - a_0}$$

- Réponse Fréquentielle ($z = e^{j\Omega}$):

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{b_0}{\cos(\Omega) + j\sin(\Omega) - a_0}$$

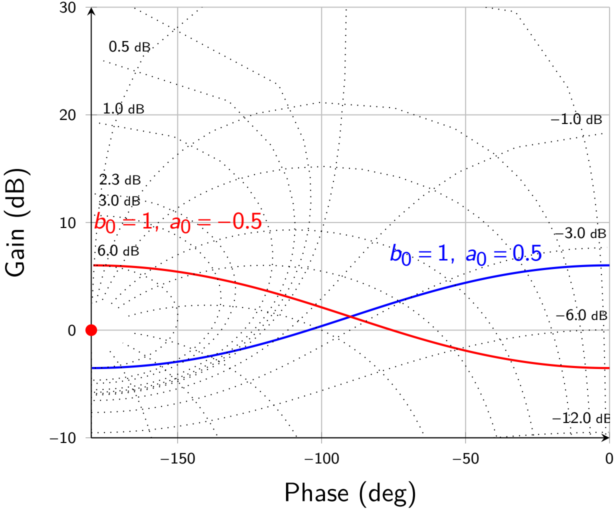
  - Module / Argument:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|_{dB} = 20\log_{10}(|b_0|) - 10\log_{10}\left((\cos(\Omega) - a_0)^2 + \sin^2(\Omega)\right)$$

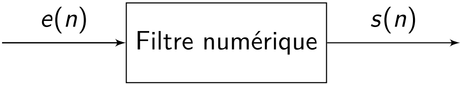
$$\arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right] = -\arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{\cos(\Omega) - a_0}\right)$$

Introduction - Analyse fréquentielle

Réponse fréquentielle d'un 1er ordre



Synthèse des filtres numériques



Les filtres numériques peuvent être caractérisés à partir de leur :

Réponse impulsionnelle $h[n]$

$$s[n] = h[n] \otimes e[n] \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e[n-m]$$

Remarque : $h[n]$ est la réponse impulsionnelle du filtre (système) et peut être infinie

Équation aux différences

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r]$$

Fonction de transfert en z

$$\begin{array}{ccccc} s[n] & = & h[n] & \otimes & e[n] \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ S(z) & = & H(z) & \times & E(z) \end{array} \qquad ou \qquad \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k s[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r] \\ \updownarrow \\ H(z) = \dfrac{b_M z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0} \end{array}$$

Synthèse des filtres numériques

Gabarit du filtre passe-bas

Remarques

- $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est la fréquence de coupure (cutoff frequency) et fixe la bande passante du filtre. Dans la bande passante, on accepte que l'amplification descende au pire à la valeur T_c.
- $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ fixe le début de la bande atténuée (stop band) pour laquelle, le filtre atténue au moins à la valeur T_s.

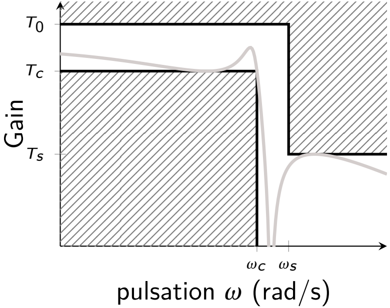


Figure 6: Gabarit d'un filtre

Synthèse des filtres numériques

Temps de propagation de groupe (group delay)

La phase est rarement linéaire sur l'ensemble des fréquences. On caractérise le filtre par son temps de propagation de groupe (group delay) qui est défini par

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\arg[T(j\omega)]}{\mathrm{d}\omega}$$

- Cette mesure donne le retard (en s) apporté pour chaque pulsation par le filtre.
  - phase linéaire $\Rightarrow$ τ constant.

Synthèse des filtres numériques

Problématique

Á partir du gabarit, comment déterminer les coefficients de $h[n]$ (la réponse impulsionnelle) ou $H(z)$?

- Avec les contraintes suivantes sur $h[n]$:

  La causalité du filtre : Le filtre est causal si la réponse impulsionnelle est causale $h[n] = 0 \ \forall \ n < 0$

  La stabilité du filtre : Le filtre est stable si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

- Pour $H(z)$, les contraintes sont :

  La stabilité du filtre : Un filtre numérique linéaire et causal est stable si tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité

Types de filtres

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Ces filtres sont appelés aussi filtres non récursifs

Équation de récurrence : $s[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r]$

Fonction de transfert : $H(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Ces filtres sont appelés aussi filtres récursifs

Équation de récurrence : $s[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k s[n-k] + \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r]$

Fonction de transfert : $H(z) = \dfrac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Propriétés

Stabilité inconditionnelle : Les filtres RIF sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles (Le dénominateur de la FT est égal à 1)

Phase linéaire : Les filtres RIF peuvent avoir une phase linéaire
Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme : $H(f) = \Re e(f)e^{-j\varphi(f)}$ avec $\varphi(f) = \varphi_0 + 2\pi f \tau$
τ est constant

Remarque : Un filtre RIF est à phase linéaire si ses coefficients sont symétriques : $h[n] = h[N-1-n]$ avec $0 \leq n \leq \dfrac{N-1}{2}$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

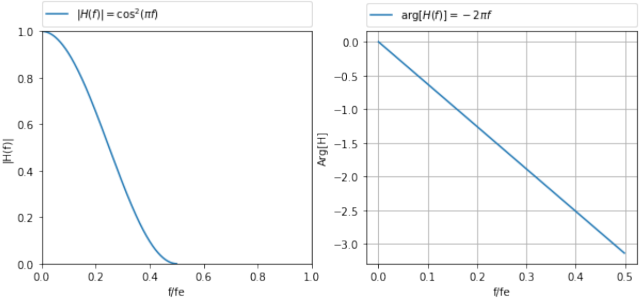
Exemple

Soit le filtre RIF défini par l'équation aux différences :

$$s[n] = \frac{1}{4}\left(e[n] + 2e[n-1) + e[n-2]\right)$$

Réponse impulsionnelle : $h[n] = \frac{1}{4}\left(\delta[n] + 2\delta[n-1) + \delta[n-2]\right)$

Réponse fréquentielle : $H(f) = e^{-\mathrm{j}2\pi f}\cos^2(\pi f)$



Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Méthodes de synthèse des filtres RIF

- Méthode de la fenêtre
- Optimisation par les moindres carrés
- Approximation de Chebyshev
- Méthodes d'optimisation
- ...

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Synthèse par la méthode des fenêtres

Dans le domaine temporelle : Limiter la séquence des coefficients du filtre revient à multiplier $h[n]$ par une fenêtre (d'où le nom de la méthode) rectangulaire de durée finie.

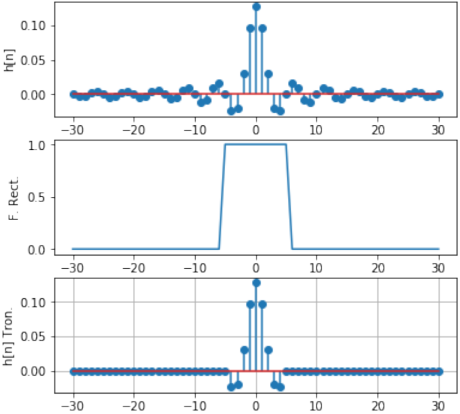
Dans le domaine fréquentielle : Limiter la séquence des coefficients du filtre revient à effectuer la convolution de $H(\omega)$ par la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire

Calcul des coefficients du filtre tronqué :

$$h_T[n] = h[n].W[n] \qquad \begin{array}{ll} -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} & \text{Pour } N \text{ impair} \\ -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} & \text{Pour } N \text{ pair} \end{array}$$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Synthèse par la méthode des fenêtres

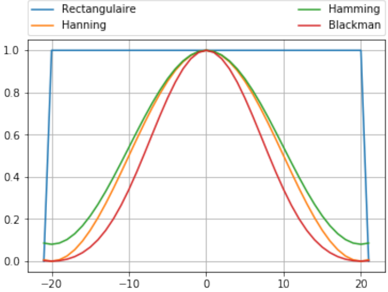


Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Synthèse par la méthode des fenêtres

Types de fenêtres : $(-M \leq n \leq M)$

- Rectangulaire : $w[n] = 1$
- Hanning : $w[n] = 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$
- Hamming : $w[n] = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$
- Blackman : $w[n] = 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)$
- Bartlett, Kaiser ...



Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Résumé

- Équation de récurrence : $s[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r]$
- Fonction de transfert en $\mathscr{Z}$: $H(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$
- Réponse fréquentielle $\left(z = e^{\mathrm{j}\omega}\right)$: $H(\omega) = b_r e^{-\mathrm{j}n\omega}$
- Filtres inconditionnellement stables.
- Possibilité d'avoir une phase linéaire.

Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

CHARLES CARNUS
LYCÉE TECHNIQUE PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Propriétés

Équation de récurrence : $s[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k s[n-k] + \sum_{r=0}^{M} b_r e[n-r]$

Fonction de transfert : $H(z) = \dfrac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

Stabilité : Le filtre RII est stable, si les pôles de $H(z)$ sont situés à l'intérieur du cercle unité

Exemple

$s[n] = \frac{1}{2} e[n] + \frac{1}{2} s[n-1] \Rightarrow H(z) = \dfrac{1}{2 - z^{-1}} \xrightarrow{\mathscr{T}\mathcal{Z}^{-1}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Il s'agit d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie et le système est stable car quand $n \to \infty$, $h[n] \to 0$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Méthodes de synthèse des filtres RII

Les méthodes de synthèse des filtres RII s'appuient généralement sur un filtre analogique pris comme modèle.

- Le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : invariance impulsionnelle et invariance indicielle
- Le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : transformation bilinéaire