COMPLEXITÉ

Master 1 IL
Groupe 2
2018

Rapport de TP N°3 COMPLEXITÉ : Complexité polynomiale

BOUDOUR Mehdi / 201500008386/ TP: Complexité polynomiale

[ALGORITHMIQUE AVANCÉE ET COMPLEXITÉ]

E-mail : geronimotoutcourt@gmail.com

Ce document présent les solutions en 5 étapes : (1) les algorithmes écris en pseudo-code. (2) le calcul de la complexité au pire des cas. (3) Implémentation de l'algorithme en langage C. (4) capture de l'exécution de l'algorithme. (5) représentation graphique de l'évolution du temps d'exécution en fonction de N. Le programme C complet contenant les détails (affichage, calcul du temps d'exécution,…) d'implémentation est présenté à la fin du document.

I. Algorithme *ProduitMatriciel* :

Ecrire le programme C qui permet de calculer le produit de 2 matrices A et B :

Algorithme :

```
FONCTION PRODUITMATRICIEL(E/ A:TABLEAU[1..N][1..M] D'ENTIER;
                          E/ B:TABLEAU[1..M][1..P] D'ENTIER ;
                          E/ N, M,P:ENTIER) :
TABLEAU[1..N][1..P] D' ENTIER
    I,J,K : ENTIER;
    C : TABLEAU[1..N][1..P] D' ENTIER
DEBUT
    POUR I=1 JUSQU'A N FAIRE
        POUR J=0 JUSQU'A P FAIRE
            C[I][J]=0;
            POUR(K=0 JUSQU'A M FAIRE
                C[I][J]= C[I][J] +
                        A[I][K]*B[K][J];
            FIN POUR ;
        FIN POUR;
    FIN POUR;
    RETOURNER C;                                   1
FIN;
```

3 Boucles Imbriquées

Complexité :

Il y'a **3 boucles** à nombres d'itérations explicites.

Il n'est pas difficile de constater que la complexité de l'algorithme donné est déterminée par celle de la boucle externe (sur i).

Le corps de la **boucle interne (sur k)** est en **O(1)** car ne contenant qu'un nombre constant d'instructions élémentaires. Comme cette boucle est itérée ***M*** fois, sa complexité sera donc en **O(p).** La boucle du milieu **(sur j)** est répétée ***P*** fois. Sa complexité est donc en **O(m*p)**.

La complexité de **la boucle externe (sur i)** est ***N*** fois celle de son corps ; c'est à dire en **O(N*P*M)**. Par conséquent, la complexité de tout le l'algorithme est en **O(N*P*M).**

$$T(N,P,M)= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} \sum_{k=1}^{M} 1 \ +1 = N*P*M +1 =\sim O(N*P*M)$$

Implémentation : **En langage C**

```c
long **ProduitMatriciel(long **A,long **B,long n,long m,long p)
{
    long i,j,k;
    long **C =(long **)malloc(n*sizeof(long *));

    for(i=0;i<n;i++)
    {   *(C+i)=(long *)malloc(p*sizeof(long));
        for(j=0;j<p;j++)
            {
                C[i][j]=0;
                for(k=0;k<m;k++)
                 {C[i][j]= C[i][j] + A[i][k]*B[k][j];}

            }

    }
    return C;
}
```

Exécution :

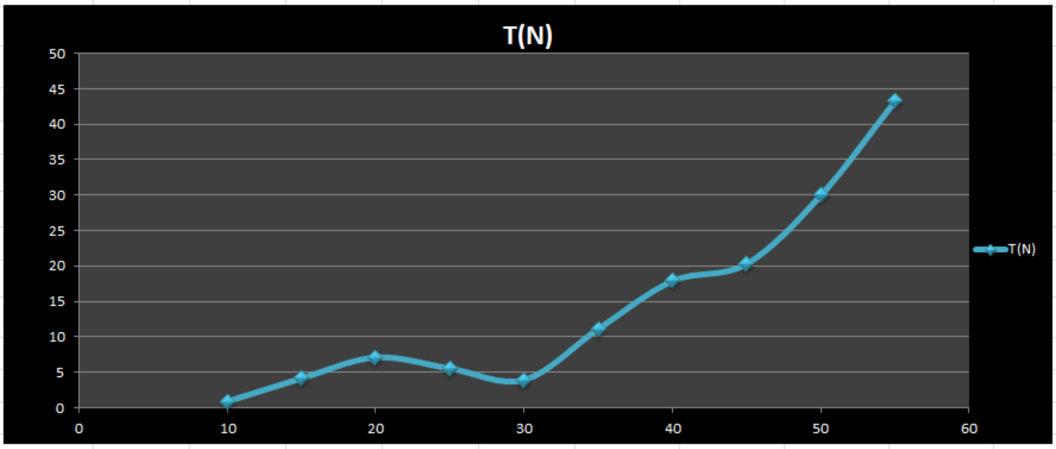
Affichage du temps d'exécution de l'algorithme pour chaque valeur de N (T = le temps d'exécution calculé pour chaque exécution de la fonction ***ProduitMatriciel****).*

```
--------------------------------
N = 10.000000     T= 0.877000
N = 15.000000     T= 4.136000
N = 20.000000     T= 7.087000
N = 25.000000     T= 5.531000
N = 30.000000     T= 3.925000
N = 35.000000     T= 11.110000
N = 40.000000     T= 17.876000
N = 45.000000     T= 20.292000
N = 50.000000     T= 29.959000
N = 55.000000     T= 43.241000
```

Représentation Graphique :

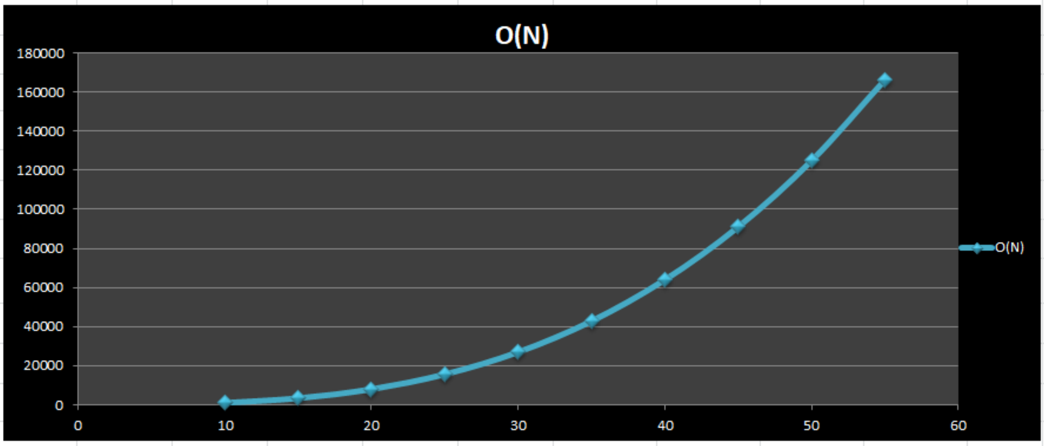
Graphe du temps d'exécution en fonction de N.

ProduitMatriciel	
N=P=M	T(N)
10	0,877
15	4,136
20	7,087
25	5,531
30	3,925
35	11,11
40	17,876
45	20,292
50	29,959
55	43,241



Graphe de la complexité théorique en fonction de N.

ProduitMatriciel	
N=P=M	O(N)
10	1000
15	3375
20	8000
25	15625
30	27000
35	42875
40	64000
45	91125
50	125000
55	166375



II. Algorithme *sousMat1*:

Soit (n, m), (n', m') deux tableaux à deux dimensions tel que $n' < n$ et $m' < m$. Il s'agit de rechercher le tableau B dans le tableau A. En supposant que les éléments de A et B ne sont pas triés, écrire une fonction sousMat1 qui retrouve B dans A.

Algorithme :

```
FONCTION SOUSMAT1(E/ A:TABLEAU[1..NA][1..MA] D' ENTIER;
                  E/ B:TABLEAU[1..NB][1..MB] D' ENTIER ;
                  E/ NA,MA,NB,MB:ENTIER): BOOLEEN
     I,J,K,L:ENTIER;
DEBUT
    POUR I=0 JUSQU'A NA -(NB-1) FAIRE
        POUR J=0 JUSQU'A MA -(MB-1) FAIRE
            SI (B[0][0] = A[I][J]) ALORS
                POUR K=0 JUSQU'A NB FAIR
                    POUR L=0 JUSQU'A MB FAIRE
                        SI (B[K][L]<>A[I+K][J+L]) ALORS
                            /*SORTIE DES 2 BOUCLES*/
                            K=NB+1; L=MB+1;
                        SINON
                            SI(K== NB ET L== MB ) ALORS
                                RETOURNER VRAI;
                            FIN SI;
                        FIN SI;
                    FIN POUR;
                FIN POUR;
            FIN SI;
        FIN POUR;
    FIN POUR;
    RETOURNER FAUX;                                      1
FIN;
```

4 Boucles Imbriquées

Complexité :

Au pire cas : la matrice B est à chaque parcours de ligne sous-matrice de A au dernière élément près ainsi il y a double parcours tous les éléments de la matrice A à quelque élément près (nombre = E = cste) .

$$T(NA, MA, NB, MB) = \sum_{i=1}^{NA-(NB-1)} \sum_{j=1}^{MA-(MB-1)} \sum_{k=1}^{NB} \sum_{l=1}^{MB} 1 \ +1 =$$

$$(NA - (NB-1))(MA - (MB-1)) \, NB * MB \sim O(NA * MA * NB * MB)$$

Implémentation : En langage C

```
long sousMat1(long **A,long na,long ma,long **B,long nb,long mb)
{
    long i,j,k,l;
    for(i=0;i+(nb-1)<na;i++)
    {
        for(j=0;j+(mb-1)<ma;j++)
        {
            if(B[0][0] == A[i][j])
            {
                for(k=0;k<nb;k++)
                    for(l=0;l<mb;l++)
                    {
                        if(B[k][l]!=A[i+k][j+l])
                        {
                            /*sortie des 2 boucles*/k=nb; break;
                        }
                        else if(k== nb-1 && l== mb-1 ) return 1;
                    }
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

Exécution :

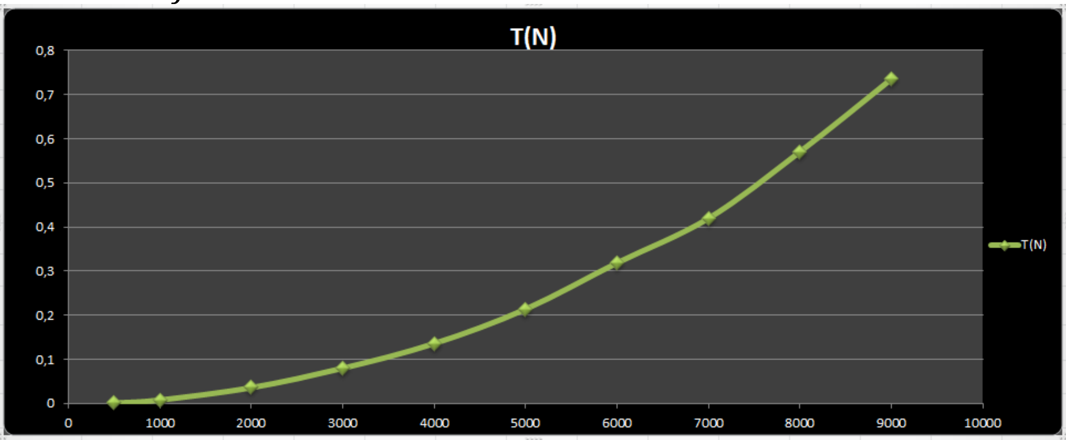
*Affichage du temps d'exécution de l'algorithme pour chaque valeur de N (T = le temps d'exécution calculé pour chaque exécution de la fonction **sousMat1**).*
Les Matrices choisis sont tel que B est de dimensions (1,1) et en dernière position de A càd : A[n][m]=B[0][0].

```
Execution de sousMat1 :
N = 500.000000   T= 0.001000     , B est sous-Matrice de A
N = 1000.000000          T= 0.008000     , B est sous-Matrice de A
N = 2000.000000          T= 0.036000     , B est sous-Matrice de A
N = 3000.000000          T= 0.080000     , B est sous-Matrice de A
N = 4000.000000          T= 0.136000     , B est sous-Matrice de A
N = 5000.000000          T= 0.214000     , B est sous-Matrice de A
N = 6000.000000          T= 0.319000     , B est sous-Matrice de A
N = 7000.000000          T= 0.420000     , B est sous-Matrice de A
N = 8000.000000          T= 0.571000     , B est sous-Matrice de A
N = 9000.000000          T= 0.736000     , B est sous-Matrice de A
```

Représentation Graphique :

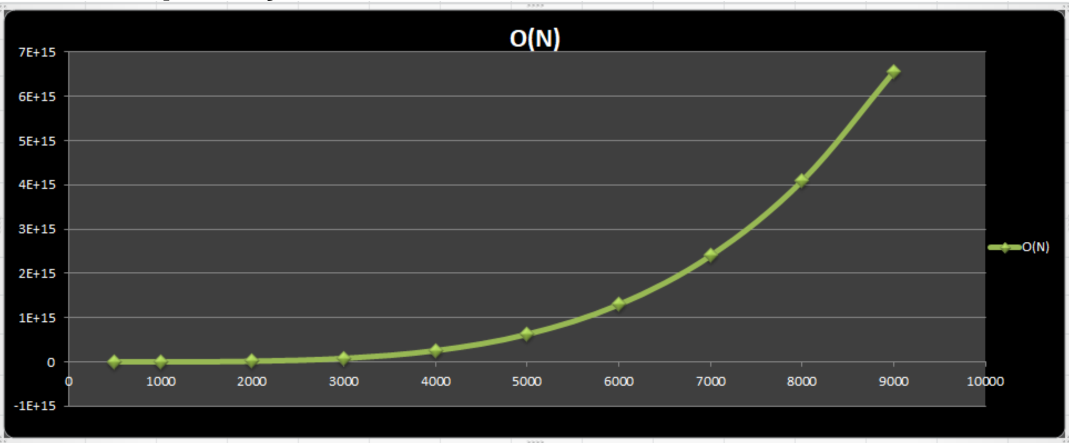
Graphe du temps d'exécution en fonction de N.

sousMat1	
na=ma=nb=mb	*T(N)*
500	0,001
1000	0,008
2000	0,036
3000	0,08
4000	0,136
5000	0,214
6000	0,319
7000	0,42
8000	0,571
9000	0,736



Graphe de la complexité théorique en fonction de N.

sousMat1	
na=ma=nb=mb	*O(N)*
500	6,25E+10
1000	1E+12
2000	1,6E+13
3000	8,1E+13
4000	2,56E+14
5000	6,25E+14
6000	1,296E+15
7000	2,401E+15
8000	4,096E+15
9000	6,561E+15



III. Algorithme *sousMat2*:

En supposant que chacune des lignes de *A* et *B* est triée par ordre croissant (voir figure), écrire une fonction sousMat2 non naïve de complexité minimale pour trouver *B* dans *A*.

Algorithme :

```
FONCTION SOUSMAT2(E/ A:TABLEAU[1..NA][1..MA] D' ENTIER;
                 E/ B:TABLEAU[1..NB][1..MB] D' ENTIER ;
                 E/ NA,MA,NB,MB:ENTIER): ENTIER
     I,J,K,L:ENTIER;
DEBUT;
  POUR I=0 JUSQU'A NA -(NB-1) FAIRE
    SI(B[0][0]>=A[I][0] ET B[0][MB-1]<=A[I][MA-1]) ALORS
       J = RECHELETS_DICHO(A[I],MA,B[0][0]);   O(log(MA)
       SI (J>=0) ALORS
          POUR K=0 JUSQU'A NB FAIR
              POUR L=0 JUSQU'A MB FAIRE
                  SI (B[K][L]<>A[I+K][J+L]) ALORS
                     /*SORTIE DES 2 BOUCLES*/
                     K=NB+1; L=MB+1;
                  SINON
                    SI (K== NB-1 ET L== MB-1 ) ALORS
                       RETOURNER J;
                    FIN SI;
                  FIN SI;
              FIN POUR;
          FIN POUR;
       FIN SI;
    FIN SI;
  FIN POUR;
  RETOURNER 0;
FIN;
```

3 Boucles Imbriquées

Complexité :

Au pire cas : la matrice B est à chaque parcours de ligne sous-matrice de A au dernière élément près ainsi il y a double parcours tous les éléments de la matrice A à quelque élément près (nombre = E = cste) .

$$T(\mathrm{NA},\mathrm{MA},\mathrm{NB},\mathrm{MB}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{NA}-(\mathrm{NB}-1)} \left(log(MA) + \sum_{k=1}^{\mathrm{NB}} \sum_{l=1}^{\mathrm{MB}} 1\right) + 1 =$$

$$(\mathrm{NA} - (\mathrm{NB}-1))\left(log(MA) + \mathrm{NB} * \mathrm{MB}\right)$$

$$\sim O(\mathrm{NA} * log(\mathrm{MA}) + \mathrm{NA} * \mathrm{NB} * \mathrm{MB})$$

Implémentation : En langage C

```c
long sousMat2(long **A,long na,long ma,long **B,long nb,long mb)
{
    long i,j,k,l;
    for(i=0;i+(nb-1)<na;i++)
    {
        if(B[0][0]>=A[i][0] && B[0][mb-1]<=A[i][ma-1])
        {
            j = rechElets_Dicho(*(A+i),ma,B[0][0]);
            if(j>=0)
            {
                for(k=0;k<nb;k++)
                    for(l=0;l<mb;l++)
                    {
                        if(B[k][l]!=A[i+k][j+l])
                        {
                            /*sortie des 2 boucles*/k=nb; break;
                        }
                        else if(k== nb-1 && l== mb-1 ) return j;
                    }
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

Exécution :

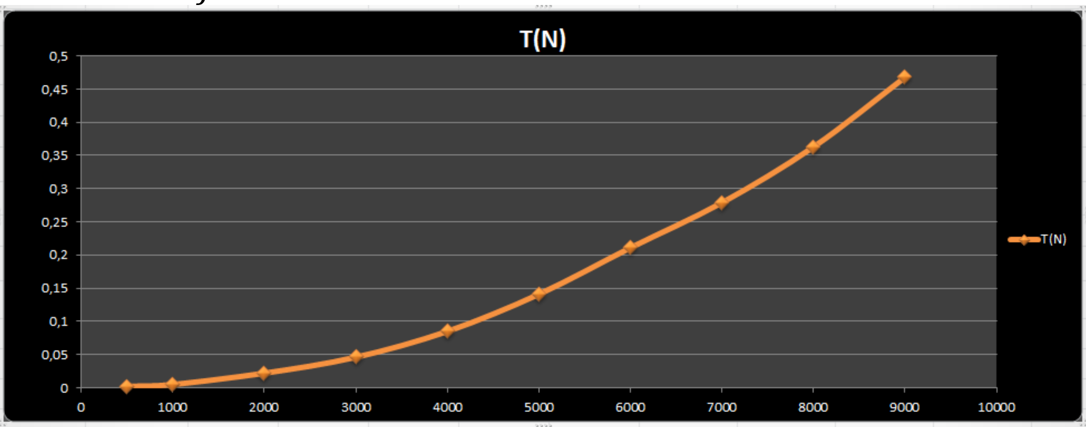
*Affichage du temps d'exécution de l'algorithme pour chaque valeur de N (T = le temps d'exécution calculé pour chaque exécution de la fonction **sousMat2**).*
Les Matrices choisis sont tel que B est de dimensions (1,1) et en dernière position de A càd : A[n][m]=B[0][0].

```
Execution de sousMat2 :
N = 500.000000   T= 0.002000     , B est sous-Matrice de A
N = 1000.000000          T= 0.005000     , B est sous-Matrice de A
N = 2000.000000          T= 0.022000     , B est sous-Matrice de A
N = 3000.000000          T= 0.046000     , B est sous-Matrice de A
N = 4000.000000          T= 0.085000     , B est sous-Matrice de A
N = 5000.000000          T= 0.141000     , B est sous-Matrice de A
N = 6000.000000          T= 0.211000     , B est sous-Matrice de A
N = 7000.000000          T= 0.279000     , B est sous-Matrice de A
N = 8000.000000          T= 0.363000     , B est sous-Matrice de A
N = 9000.000000          T= 0.468000     , B est sous-Matrice de A
```

Représentation Graphique :

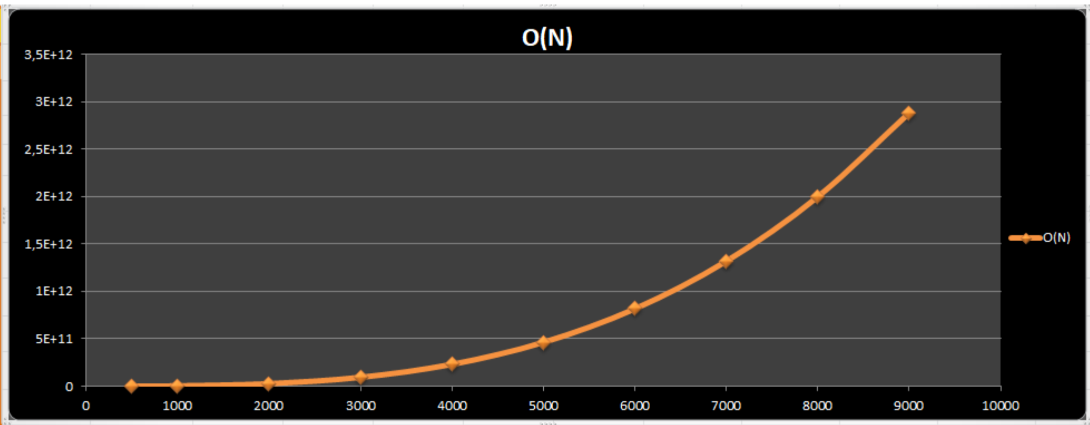
Graphe du temps d'exécution en fonction de N.

sousMat2	
a=ma=nb=m	T(N)
500	0,002
1000	0,005
2000	0,022
3000	0,046
4000	0,085
5000	0,141
6000	0,211
7000	0,279
8000	0,363
9000	0,468



Graphe de la complexité théorique en fonction de N.

sousMat2	
a=ma=nb=m	O(N)
500	337371251
1000	3E+09
2000	2,641E+10
3000	9,388E+10
4000	2,305E+11
5000	4,624E+11
6000	8,161E+11
7000	1,319E+12
8000	1,998E+12
9000	2,883E+12



(*)Code Source du Programme complet :

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
```

```
long rechElets_Dicho(long *T,long N , long x)
{
    if(T[0]==x) return 0;
    else if(T[N-1]==x) return N-1;
        else if(x<T[0] || x>T[N-1]) return -1;

    long d=1,f=N-1,m;

    for(;d<f;m=(d+f)/2)
    {
        if(T[m]==x) return m;
        else
            if(x<T[m]) f=m;
            else d=m;
    }
    return -1;
}

long **ProduitMatriciel(long **A,long **B,long n,long m,long p)
{
    long i,j,k;
    long **C =(long **)malloc(n*sizeof(long *));

    for(i=0;i<n;i++)
    {   *(C+i)=(long *)malloc(p*sizeof(long));
        for(j=0;j<p;j++)
            {
                C[i][j]=0;
                for(k=0;k<m;k++){C[i][j]= C[i][j] +
A[i][k]*B[k][j];
                }

            }

    }
    return C;
}
//T(N) = O(n*p*m) / O(n^3)
//S(n,m,p) = Mem(A)+Mem(B)+Mem(C)+Mem(i)+Mem(j)+Mem(k)

long sousMat1(long **A,long na,long ma,long **B,long nb,long mb)
{
    long i,j,k,l;
    for(i=0;i+(nb-1)<na;i++)
```

```
    {
        for(j=0;j+(mb-1)<ma;j++)
        {
            if(B[0][0] == A[i][j])
            {
                for(k=0;k<nb;k++)
                    for(l=0;l<mb;l++)
                    {
                        if(B[k][l]!=A[i+k][j+l])
                        {
                            /*sortie des 2 boucles*/k=nb; break;
                        }
                        else if(k== nb-1 && l== mb-1 ) return 1;
                    }
            }
        }
    }
    return 0;
}

long sousMat2(long **A,long na,long ma,long **B,long nb,long mb)
{
    long i,j,k,l;
    for(i=0;i+(nb-1)<na;i++)
    {
        if(B[0][0]>=A[i][0] && B[0][mb-1]<=A[i][ma-1])
        {
            j = rechElets_Dicho(*(A+i),ma,B[0][0]);
            if(j>=0)
            {
                for(k=0;k<nb;k++)
                    for(l=0;l<mb;l++)
                    {
                        if(B[k][l]!=A[i+k][j+l])
                        {
                            /*sortie des 2 boucles*/k=nb; break;
                        }
                        else if(k== nb-1 && l== mb-1 ) return j;
                    }
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

```
void AfficherMatrice(long **M,long n,long m)
{
    long i,j;
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        for(j=0;j<m;j++)
            printf("%d\t",M[i][j]);
        printf("\n");
    }
}

long **MatrixToPolonger(long *M,long rows ,long cols)
{
    long i,j,**R=(long **)malloc(rows*sizeof(long *));
    for (i = 0; i < rows; i++) {
        *(R+i)=(long *)malloc(cols*sizeof(long ));
        for (j = 0; j < cols; j++) {
            R[i][j]= *(M + i * cols + j);
    }
    }
    return R;
}


//Matrice Trii¿½ Ordre dï¿½croissant
long **PireCas(long n)
{
    long num=n*n;
    long i,j,**T=(long **)malloc(n*sizeof(long *));
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        T[i] = (long *)malloc(n*sizeof(long ));
        for(j=0;j<n;j++)
        {T[i][j]=num; num =num-1;}
    }
    return T;
}


//Matrice Trii¿½ Ordre Croissant
long **MeilleurCas(long n)
{
    long num=1;
    long i,j,**T=(long **)malloc(n*sizeof(long *));
    for(i=0;i<n;i++)
    {
```

```
        T[i] = (long *)malloc(n*sizeof(long ));
        for(j=0;j<n;j++)
        {T[i][j]=num; num++;}
    }
    return T;
}

double **Calcul_des_Temps(double **tab , long algorithme)
{
        long j,verdict,**M;
        for(j=0 ; j<12 ; j++)
        {
            clock_t begin = clock();
            switch(algorithme)
            {
                case 1:
ProduitMatriciel(PireCas(tab[0][j]),MeilleurCas(tab[0][j]),tab[0][j
],tab[0][j],tab[0][j]); break;
                case 2:  verdict =
sousMat1(PireCas(tab[0][j]),tab[0][j],tab[0][j],MeilleurCas(1),1,1)
; break;
                case 3:  M = MeilleurCas(1) ; M[0][0]=(long)
(tab[0][j]*(tab[0][j] - 1) +tab[0][j]/2) ;
                         verdict =
sousMat2(MeilleurCas(tab[0][j]),tab[0][j],tab[0][j],M,1,1); break;
            }
            clock_t end = clock();
            tab[1][j] = (double)(end - begin) / CLOCKS_PER_SEC;
            tab[2][j] = verdict;

        }
        return tab;
}

double **Tableau_de_ValeursPoduit(void)
{
    long i ;
    double **tab;
    tab = (double **)malloc(4*sizeof(double *));
    for(i=0 ; i<4 ; i++) tab[i] = (double
*)malloc(10*sizeof(double));
    tab[0][0]=10;
    tab[0][1]=15;
    tab[0][2]=20;
    tab[0][3]=25;
```

```
    tab[0][4]=30;
    tab[0][5]=35;
    tab[0][6]=40;
    tab[0][7]=45;
    tab[0][8]=50;
    tab[0][9]=55;
    for(i=0 ; i<10 ; i++)tab[1][i] = 0 ;
    return tab;
}

double **Tableau_de_ValeursSousMat(void)
{
    long i ;
    double **tab;
    tab = (double **)malloc(4*sizeof(double *));
    for(i=0 ; i<4 ; i++) tab[i] = (double
*)malloc(10*sizeof(double));
    tab[0][0]=500;
    tab[0][1]=1000;
    tab[0][2]=2000;
    tab[0][3]=3000;
    tab[0][4]=4000;
    tab[0][5]=5000;
    tab[0][6]=6000;
    tab[0][7]=7000;
    tab[0][8]=8000;
    tab[0][9]=9000;
    for(i=0 ; i<10 ; i++)tab[1][i] = 0 ;
    return tab;
}
void Afficher_Tableau_de_Valeurs(double **tab)
{
    long j,verdict;
        for(j=0 ; j<10 ; j++)
        {
            verdict = (int)tab[2][j];
            if(verdict) printf("N = %f \t T= %f \t , B est sous-
Matrice de A  \n",tab[0][j],tab[1][j]);
            else printf("N = %f \t T= %f \t , B n'est pas sous-
Matrice de A  \n",tab[0][j],tab[1][j]);
        }
}


int main(int argc, char *argv[])
{
```

```
    //printf("Execution de ProduitMatriciel :\n");
    //Afficher_Tableau_de_Valeurs(Calcul_des_Temps(Tableau_de_Valeu
rs(),1));

    printf("Execution de sousMat1 :\n");
    Afficher_Tableau_de_Valeurs(Calcul_des_Temps(Tableau_de_Valeurs
SousMat(),2));

    printf("Execution de sousMat2 :\n");
    Afficher_Tableau_de_Valeurs(Calcul_des_Temps(Tableau_de_Valeurs
SousMat(),3));

/*  int a[5][4] ={
            {0 ,1 ,2 ,3 },
            {4 ,5 ,6 ,7 },
            {8 ,9 ,10,11},
            {12,13,14,15},
            {16,17,18,19}
            },
        b[2][2]={
                {9 ,10},
                {13,14}
                };
    int **A=MatrixToPointer(&a[0][0],5,4),
        **B=MatrixToPointer(&b[0][0],2,2);
            printf("A = \n");
    AfficherMatrice(A,5,4);
    printf("B = \n");
    AfficherMatrice(B,2,2);
    printf("Resultat = %d",sousMat2(A,5,4,B,2,2));
*/

/*
    int Mat1[2][3] = {{1,2,0},{4,3,-1}},Mat2[3][2] =
{{5,1},{2,3},{3,4}};

    int **A=MatrixToPointer(&Mat2[0][0],3,2),
        **B=MatrixToPointer(&Mat1[0][0],2,3);
    printf("A = \n");
    AfficherMatrice(A,3,2);
    printf("B = \n");
    AfficherMatrice(B,2,3);
    printf("C = \n");
    AfficherMatrice(ProduitMatriciel(A,B,3,2,3),3,3);
```

```
*/
    getchar();
    return 0;
}
```