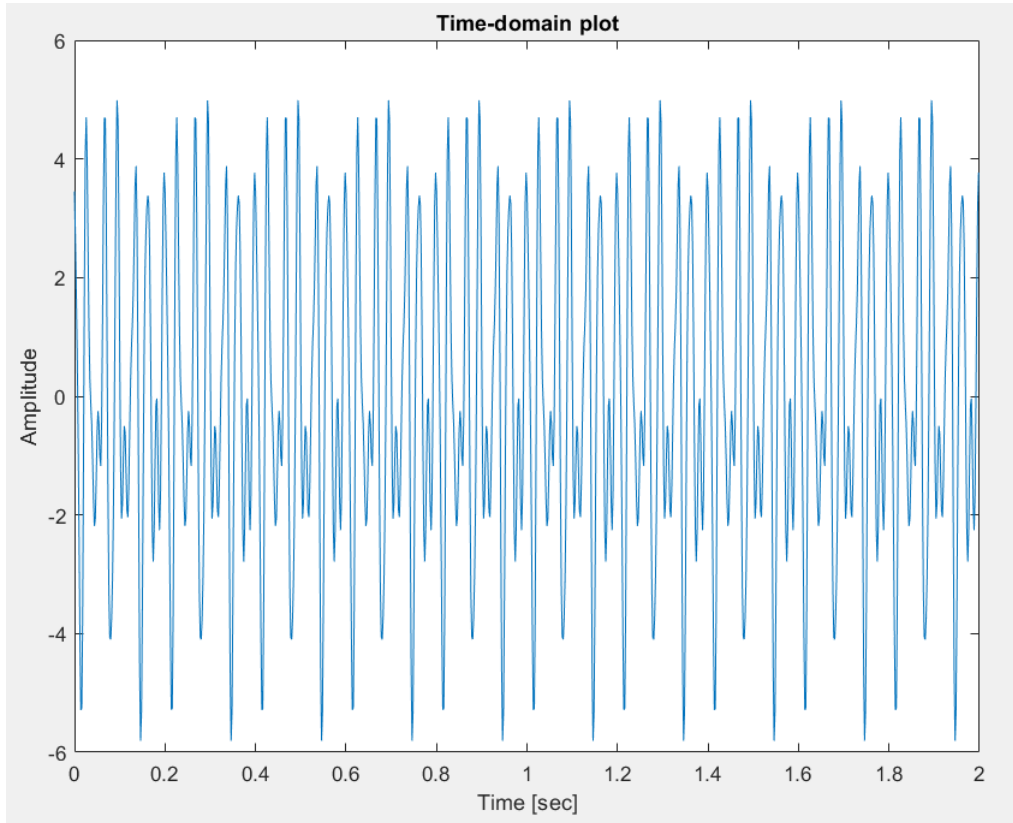


Ορισμός του σήματος

Έστω ένα σήμα της μορφής: $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$, όπου $s_i(t) = A \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$. Για $A_1 = 3, A_2 = 2, A_3 = 1, f_1 = 30 \text{ Hz}, f_2 = 45 \text{ Hz}, f_3 = 70 \text{ Hz}$ και $\phi_1 = 0.6 \text{ rad}, \phi_2 = -0.8 \text{ rad}, \phi_3 = 2 \text{ rad}$, έχουμε:

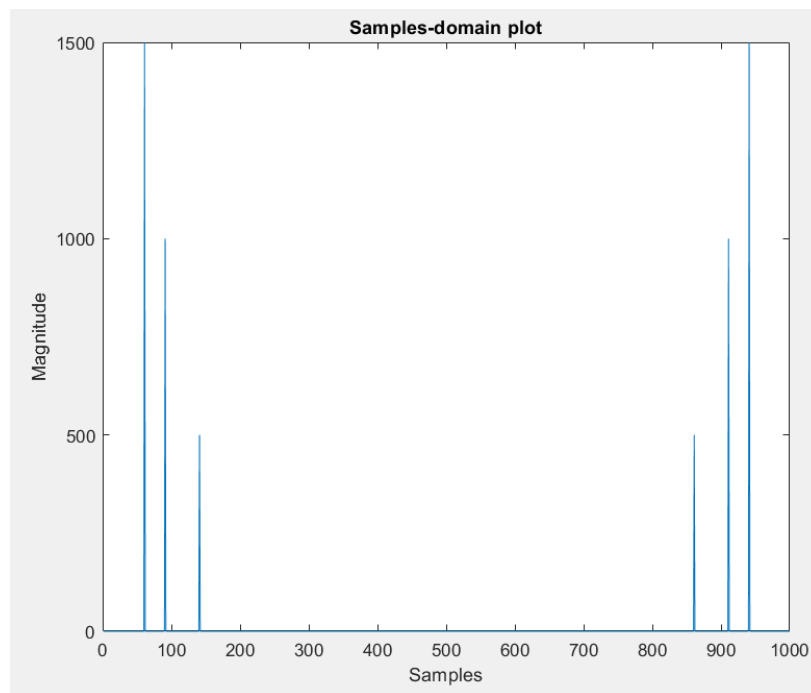


Το σήμα $s(t)$ στο time-domain

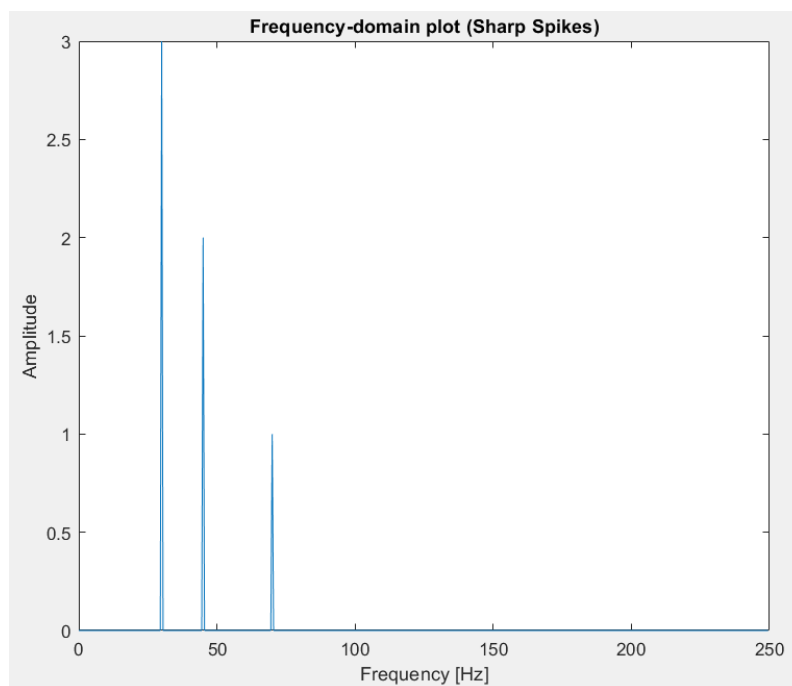
1 Όταν η συχνότητα δειγματοληψίας περιέχει ακέραιο αριθμό κύκλων του σήματος

Αν ορίσουμε ως συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 500 \text{ Hz}$, $T_s = 2 \text{ ms}$, και θεωρήσουμε **ακέραια χρονική διάρκεια δειγματοληψίας** $duration = 2 \text{ sec}$ για παράδειγμα, τότε το φάσμα θα εμφανίζει τα αναμενόμενα **sharp spikes** στις συχνότητες 30, 45 και 70 Hz. Φυσικά, αφού παίρνουμε 500 samples/sec και η χρονική διάρκεια δειγματοληψίας είναι 2 sec, τότε τα συνολικά δείγματα θα είναι 1000, δηλαδή $(duration) \times F_s$. Φυσικά, επειδή μετράμε ως πρώτο δείγμα τον χρόνο $t = 0 = 0 \text{ ms}$, τότε αυτό σημαίνει ότι το 1000ο δείγμα μας θα είναι την χρονική στιγμή $duration - T_s$ κι όχι την χρονική στιγμή $duration$.

Το διάγραμμα που δείχνει τα 1000 δείγματα στην "συχνότητα" (για την ακρίβεια δεν είναι ακριβώς η συχνότητα, οπότε θα το ονομάσουμε sample-domain) είναι το εξής:



Τα δείγματα του $s(t)$ στο sample-domain



Το σήμα $s(t)$ στο frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο)

Όπως είναι αναμενόμενο, έχουμε 3 sharp spikes στις 3 συχνότητες που περιέχει το σήμα μας (άθροισμα 3 τόνων). Ο κώδικας MATLAB που πραγματοποιεί αυτόν τον μονόπλευρο ΜΣ Fourier γίνεται μέσω των παρακάτω γραμμών κώδικα:

```
S = fft(s);
S_oneside = S(1 : N/2);
f = Fs * (0 : N/2 - 1) / N;
S_meg = abs(S_oneside) / (N/2);

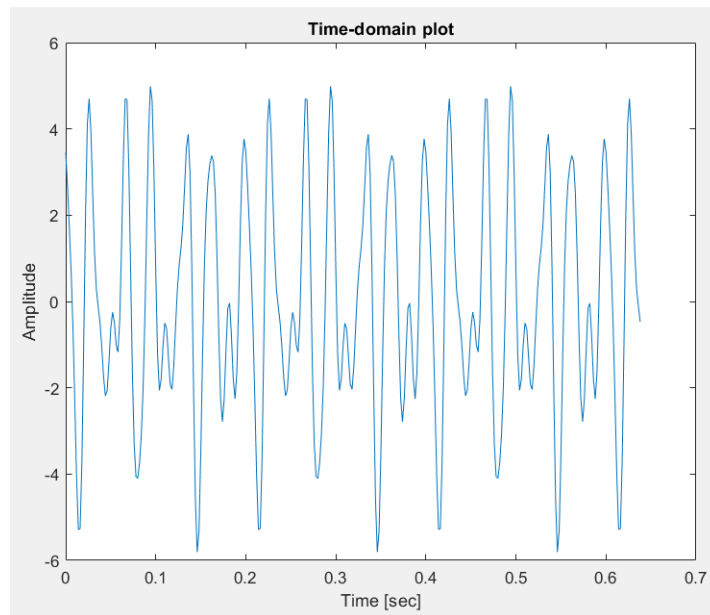
figure();
plot(f, S_meg);
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('Amplitude');
title('Frequency-domain plot (Sharp Spikes)');
```

Με αυτόν τον τρόπο η μεταβλητή $S_{oneside}$ περιέχει 500 στοιχεία, ακριβώς τα μισά από όσα έβγαλε η δειγματοληψία. Εξάλλου, από την στιγμή που το φάσμα είναι πάντοτε συμμετρικό, δεν αξίζει να κρατήσουμε και τα 1000 στοιχεία, αλλά τα μισά, αφού και τα μισά "κουβαλάνε" ακριβώς την ίδια πληροφορία. Η 3η και η 4η γραμμή κώδικα μετασχηματίζουν το sample-domain σε frequency-domain. Έχοντας εντοπίσει τα σημεία στα οποία γίνονται τα spikes-ώσεις, μπορούμε να γράψουμε τον εξής κώδικα, για να ανακτήσουμε και τις αρχικές φάσεις των σημάτων s_1, s_2, s_3 που προστέθηκαν, για να μας δώσουν το τελικό σήμα $s(t)$.

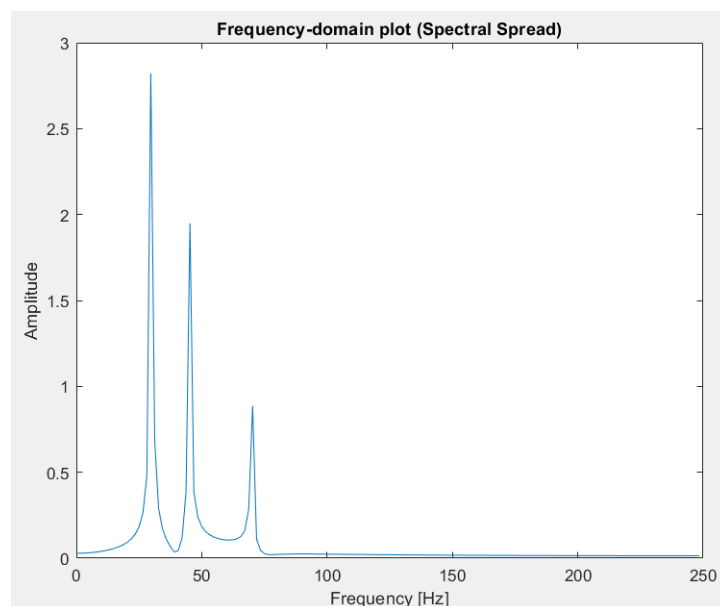
```
ph1 = angle(S_oneside(f1*duration+1))
ph2 = angle(S_oneside(f2*duration+1))
ph3 = angle(S_oneside(f3*duration+1))
```

2 Όταν η συχνότητα δειγματοληψίας ΔΕΝ περιέχει ακέραιο αριθμό κύκλων του σήματος

Αν για παράδειγμα, θέσουμε $duration = 0.64sec$, τότε, θα παρατηρήσουμε ότι στο frequency-domain, εμφανίζεται το λεγόμενο spectral spread (φασματική εξάπλωση-διαρροή), με αποτέλεσμα να μην να διακρίνονται τα spikes-ώσεις, αλλά πλέον να μην είναι sharp και να εμφανίζουν "κοιλότητες" στο κάτω μέρος τους.

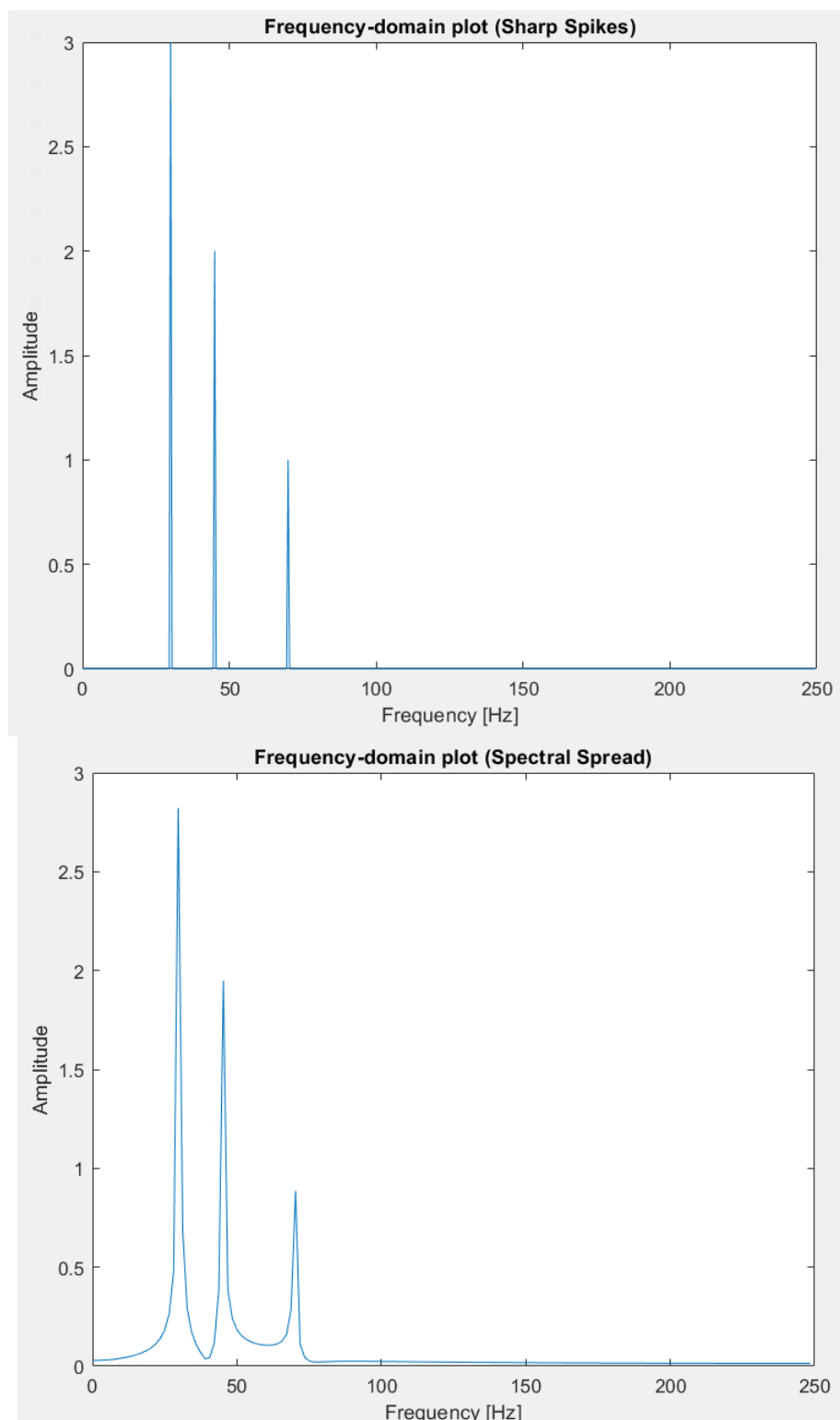


Το σήμα $s(t)$ στο time-domain



Το σήμα $s(t)$ στο frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο)

Αν συγκρίνουμε μαζί τα 2 φάσματα, θα καταλάβουμε την διαφορά.



Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο): $duration = 2sec$ (πάνω) vs $duration = 0.64sec$ (κάτω)

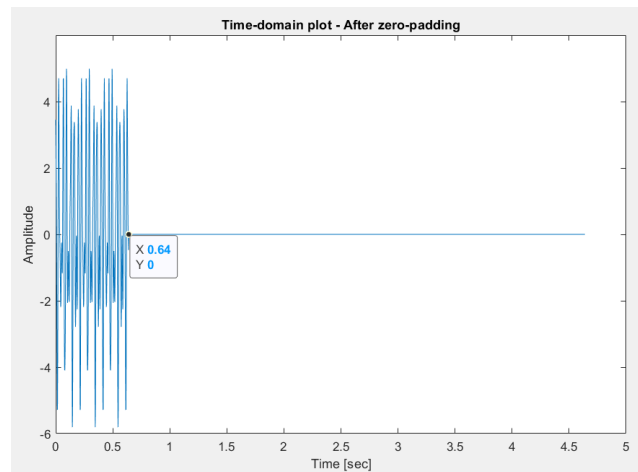
Ποια ήταν, ωστόσο η περίοδος του σήματος $s(t)$ εν προκειμένω? Έχουμε $f_1 = 30, f_2 = 45, f_3 = 70$, άρα ισχύει ότι: $T_1 = \frac{1}{30}, T_2 = \frac{1}{45}, T_3 = \frac{1}{70}$. Η περίοδος του αθροισμένου σήματος $s(t)$ που εμπεριέχει τους 3 αυτούς τόνους δίνεται από το Ε.Κ.Π. (LCM) των περιόδων του σήματος, δηλαδή: $T = LCM(T_1, T_2, T_3) = LCM(\frac{1}{30}, \frac{1}{45}, \frac{1}{70}) = \frac{1}{GCD(30,45,70)} = \frac{1}{5} = 200\text{ ms}$. Συνεπώς, στην 1η περίπτωση που είχαμε $duration = 2\text{ sec}$ (όταν λέμε $duration$ αναφερόμαστε στο πόσο διαρκεί το σήμα μας ή αλλιώς το πόση ώρα κάνουμε την δειγματοληψία), το σήμα μας διαρκούσε ακριβώς 10 περιόδους, ενώ στην 2η περίπτωση που θεωρήσαμε $duration = 640\text{ ms}$, δειγματοληπτούσαμε 3.2 περιόδους, δηλαδή όχι ακέραιο αριθμό κύκλων-περιόδων. Γι' αυτό, και στο φάσμα, δεν προέκυψαν οι ώσεις ως sharp spikes και εμφανίστηκε spectral spread.

Ωστόσο, στην πραγματικότητα είναι σχεδόν απίθανο να δειγματοληπτούμε πάντα με τέτοιο τρόπο ώστε η διάρκεια $duration$ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του σήματος. **Για να καταπολεμηθεί αυτό, κάνουμε 2 έξτρα διαδικασίες πριν εξάγουμε τον ΜΣ Fourier του σήματος: α) windowing και β) padding.**

2.1 Padding

Κανονικά, όπως είπαμε και παραπάνω, το padding είναι το 2ο βήμα της μεθοδολογίας που θα μας δώσει σχεδόν sharp spikes στην περίπτωση που το $duration$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T (περίοδος σήματος $s(t)$), αλλά εδώ θα το δοκιμάσουμε από μόνο του, για να δούμε την επίδραση που θα έχει (μεμονωμένα) στο σήμα $s(t)$.

Όταν λέμε padding εννοούμε να γεμίσουμε το σήμα μας με πολλά μηδενικά στο τέλος του. Για παράδειγμα, εδώ είχαμε 320 δείγματα (ανά $T_s = \frac{1}{500}\text{ sec} = 2\text{ ms}$) και ο χρόνος μας έφτανε μέχρι τα 640 ms (για την ακρίβεια 638 ms). Αν δοκιμάσουμε padding με 2000 μηδενικά στο τέλος του σήματος, τότε το νέο σήμα μας θα είναι διάρκειας + 4 δευτερολέπτων ($2000 \times 2\text{ ms}$) από το "αυθεντικό", οπότε στο time-domain, το σήμα $s(t)$ πλέον θα εκτείνεται ως τα 4.638 sec.



Time-domain με padding ($duration = 0.64\text{ sec} \implies duration = 4.64\text{ sec}$)

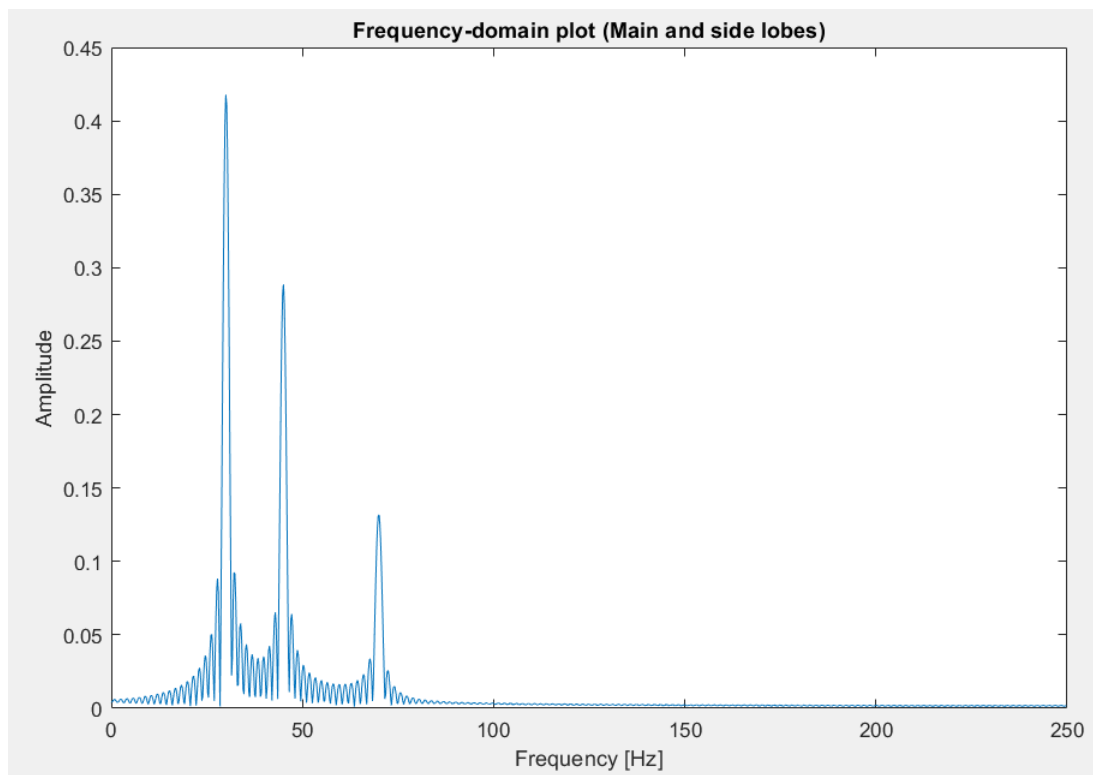
Το παραπάνω διάγραμμα δημιουργήθηκε με τον εξής κώδικα:

```
s = s1 + s2 + s3;  
s = [s zeros(1, 2000)];  
t_extra = duration : Ts : duration + 1999*Ts;  
t = [t t_extra];  
  
figure();  
plot(t, s);  
xlabel('Time [sec]');  
ylabel('Amplitude');  
title('Time-domain plot - After zero-padding');
```

Πλέον, η μεταβλητή N που περιείχε τον αριθμό των δειγμάτων (320), γίνεται $N_2 = 2320$ και ο κώδικας που εξάγει το διάγραμμα στο frequency-domain αλλάζει ως εξής:

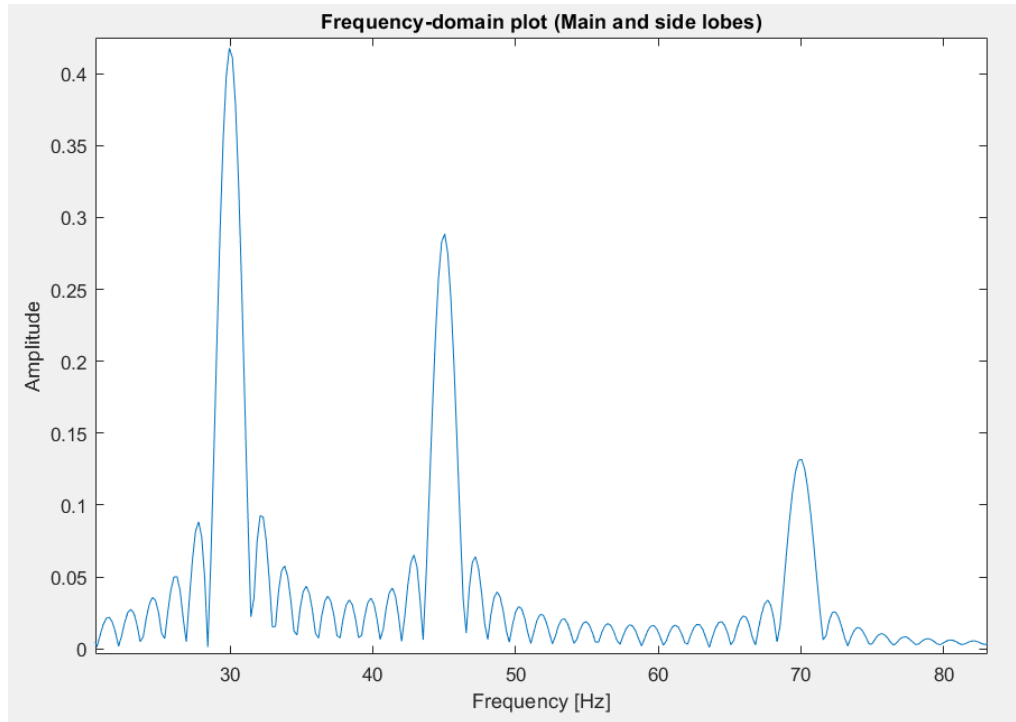
```
N2 = length(s);  
S_oneside = S(1 : N2/2);  
f = Fs * (0 : N2/2 - 1) / N2;  
S_meg = abs(S_oneside) / (N2/2);
```

Το frequency-domain έχει πλέον αυτή την μορφή:



Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο): $duration = 0.64sec + 4sec$

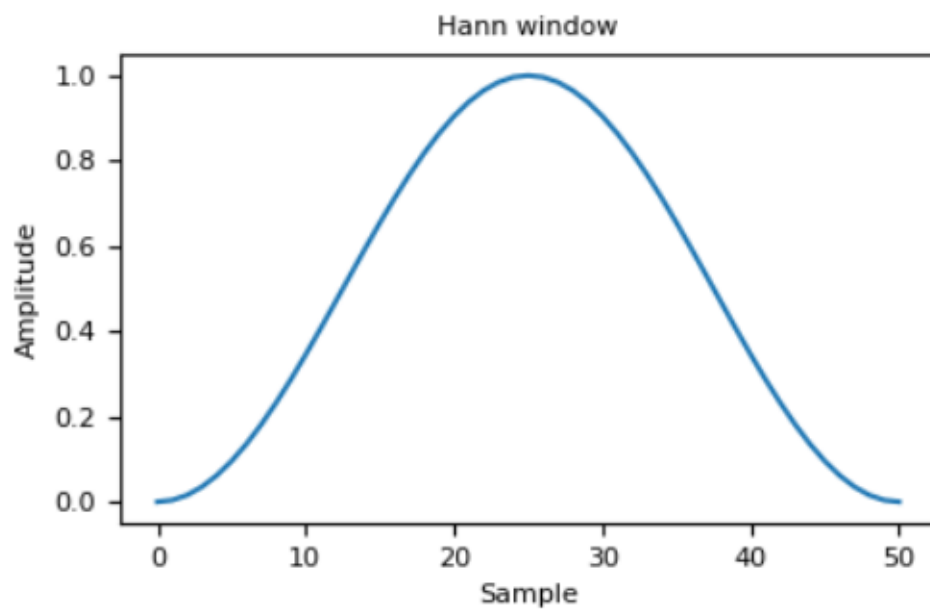
Παρατηρούμε ότι και πάλι μπορούμε να διακρίνουμε τις συχνότητες των 3 τόνων, αλλά πλέον υπάρχουν 3 κεντρικοί λοβοί και πολλοί παρασιτικοί δίπλα τους. Αν δούμε την παραπάνω εικόνα "ζουμαρισμένη", τότε αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές.



Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο): Zoomed in

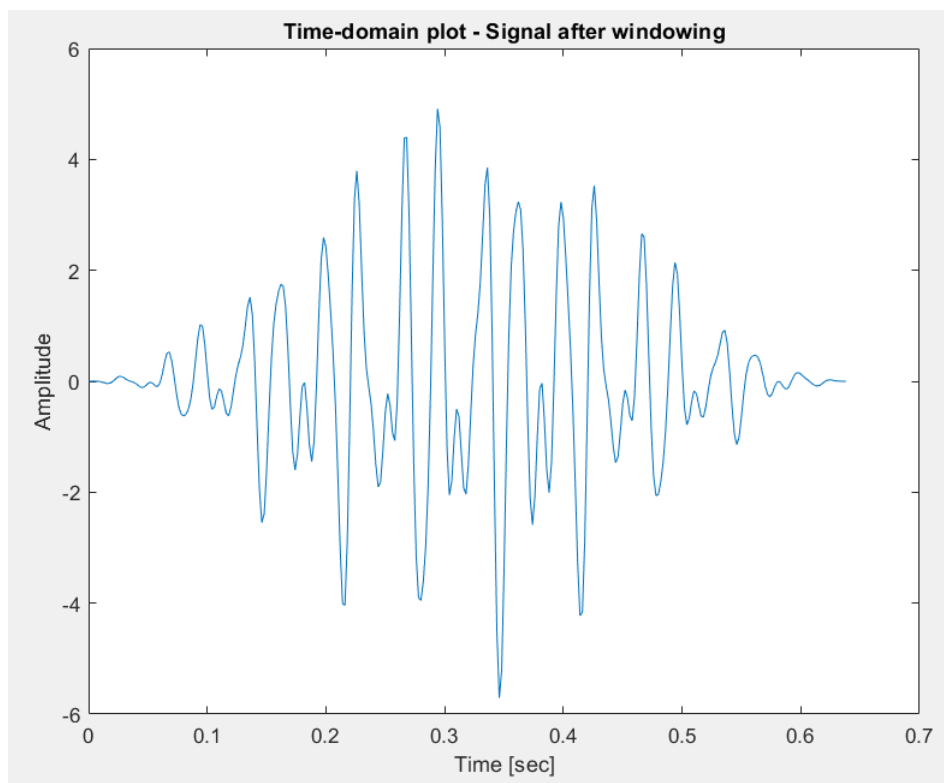
2.2 Windowing and padding

Συνεπώς, από μόνο του padding δεν μπορεί να βοηθήσει στο πρόβλημα, απεναντίας φαίνεται να χειροτερεύει το διάγραμμα στο frequency-domain. Αν, όμως, δοκιμάσουμε να "φιλτράρουμε" πρώτα το σήμα μας (windowing) περνώντας το μέσα από ένα παράθυρο, θα έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, θα δοκιμάσουμε το παράθυρο Hanning, το οποίο έχει την εξής απόκριση στο πεδίο του χρόνου.



Hanning Window

Αν περάσουμε το σήμα μας από αυτό το παράθυρο, τότε:

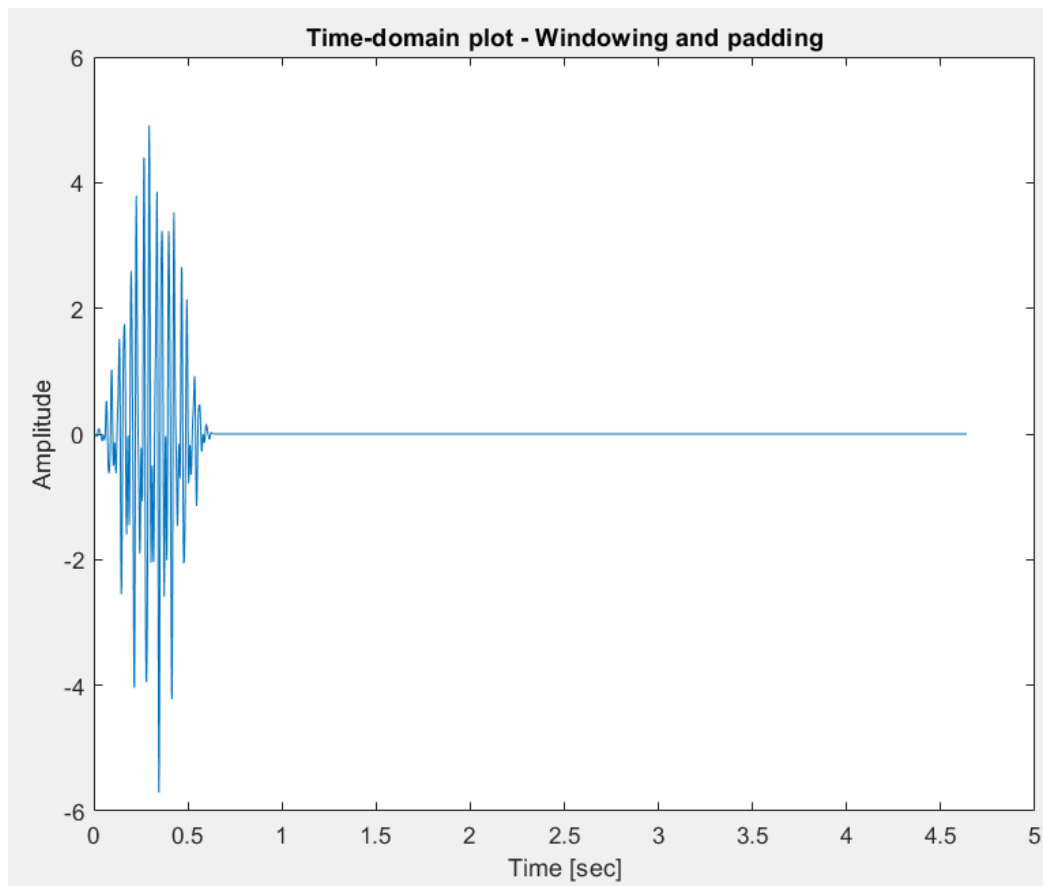


Time-domain: Το σήμα $s(t)$ έχοντας περαστεί μέσα από παράθυρο Hanning

Αυτό γίνεται, αν γράψουμε τον εξής κώδικα:

```
s = s1 + s2 + s3;  
N = length(s);  
s = s .* hanning(N)';  
  
figure();  
plot(t, s);  
xlabel('Time [sec]');  
ylabel('Amplitude');  
title('Time-domain plot - Signal after windowing');
```

Εν, συνεχεία εφαρμόζουμε και το 2ο βήμα της μεθοδολογίας μας, το padding, που είδαμε και παραπάνω, οπότε το σήμα $s(t)$ πλέον θα μοιάζει ως εξής:

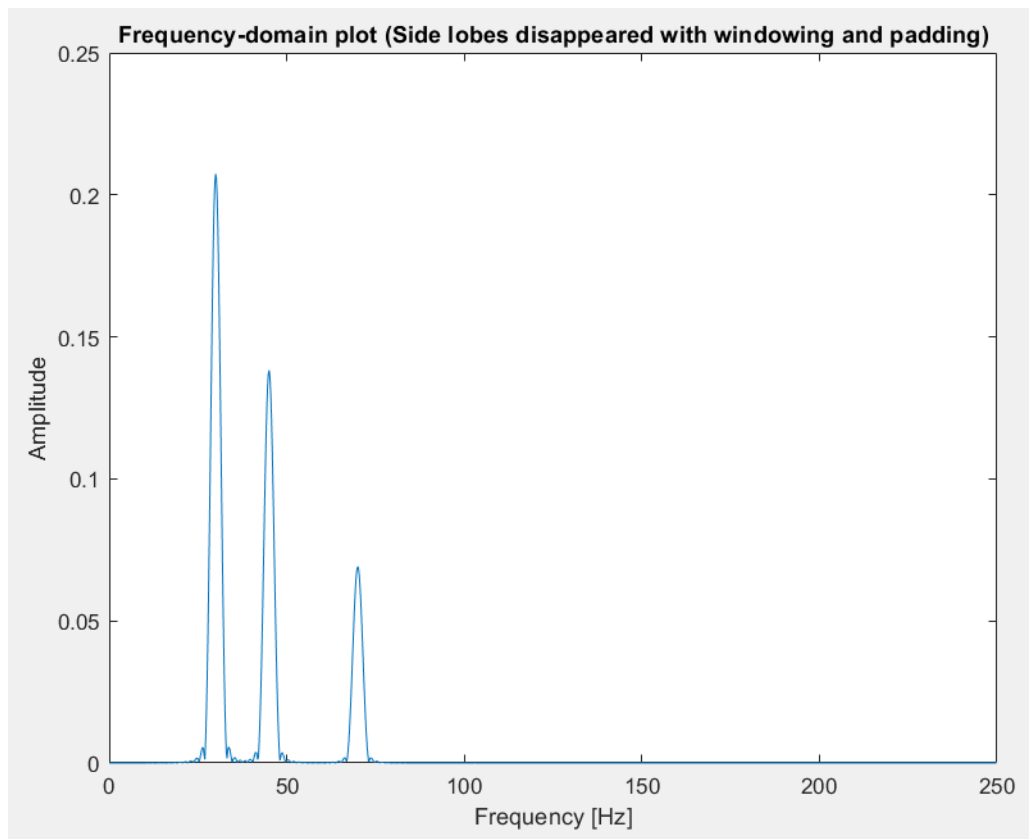


Time-domain: Το σήμα $s(t)$ μετά από windowing και padding

Ο κώδικας του padding είναι ο εξής:

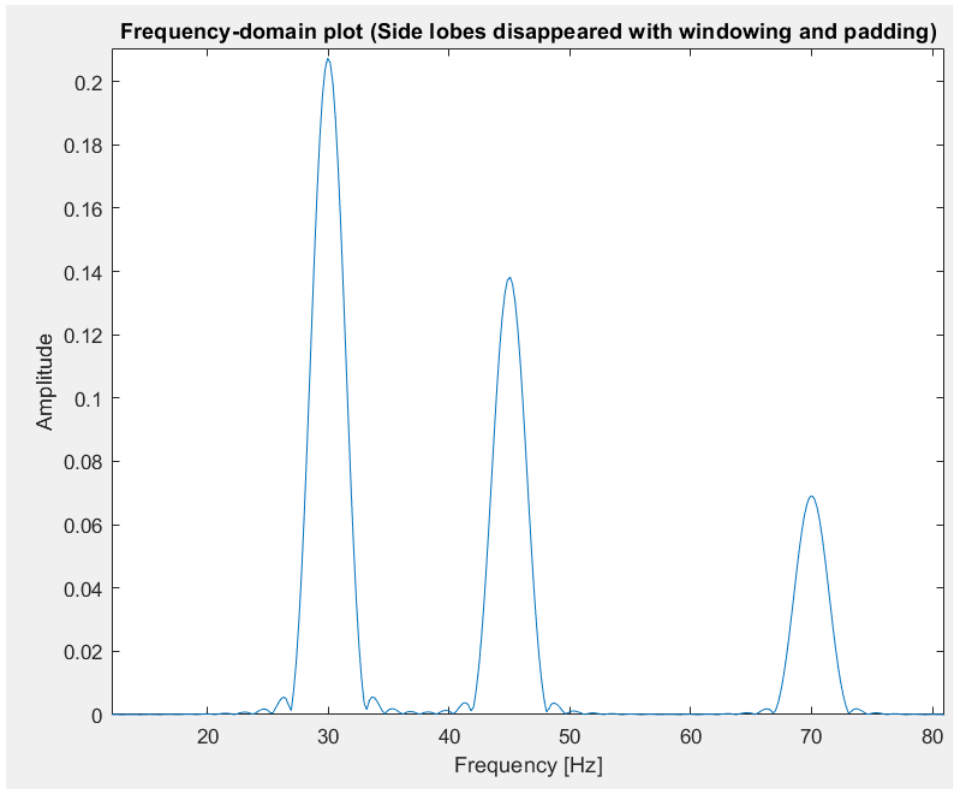
```
s = [s zeros(1, 2000)];  
t_extra = duration : Ts : duration + 1999*Ts;  
t = [t t_extra];  
  
figure();  
plot(t, s);  
xlabel('Time [sec]');  
ylabel('Amplitude');  
title('Time-domain plot - Windowing and padding');
```

Πλέον, στο frequency-domain έχουμε:



Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο): After windowing and padding

Εάν ζουμάρουμε και πάλι, θα δούμε ότι οι κεντρικοί λοβοί (3 main lobes), που μοιάζουν με sharp spikes-ώσεις έχουν διατηρηθεί, ωστόσο η ισχύς των παρασιτικών λοβών (side lobes) έχει μειωθεί αισθητά.



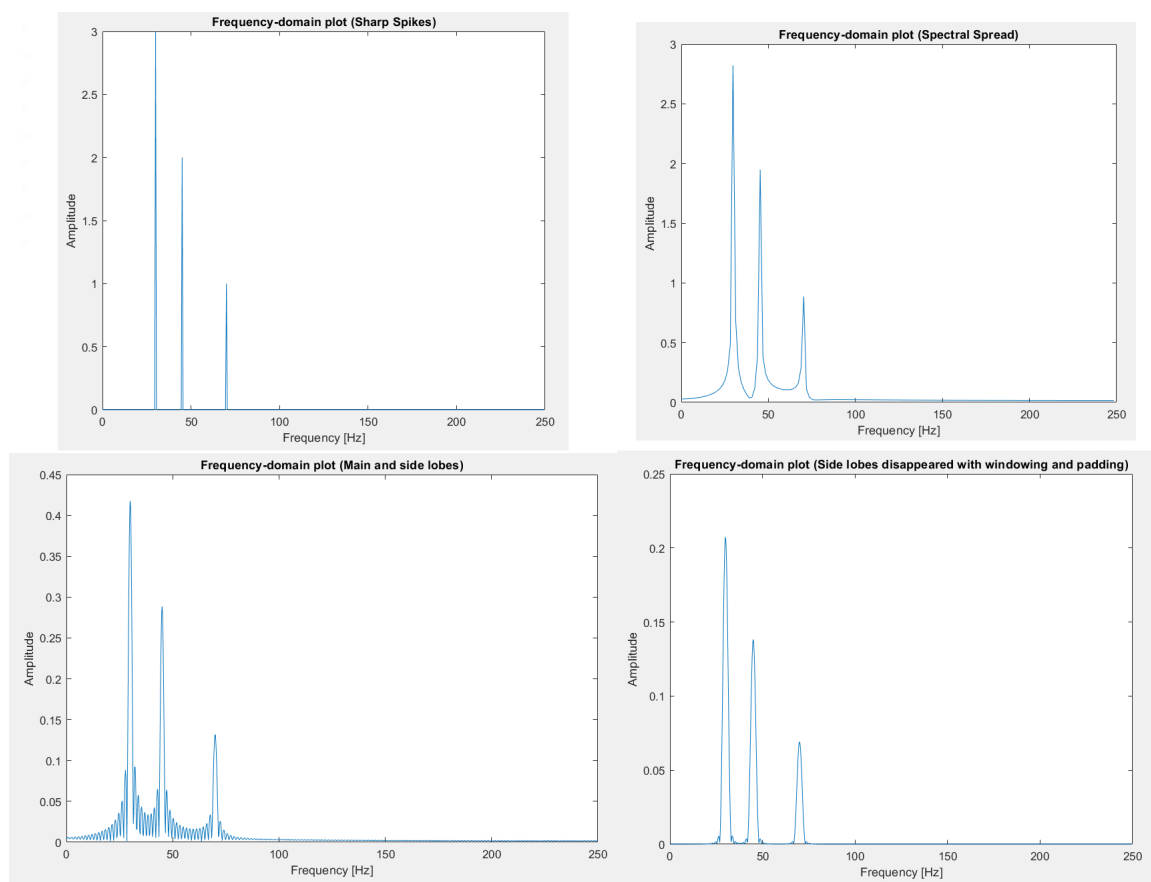
Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο): After windowing and padding - Zoomed in

Πλέον, είναι εμφανές ότι υπάρχουν 3 τόνοι στις συχνότητες των $f_1 = 30Hz$, $f_2 = 45Hz$ και $f_3 = 70Hz$. Στην περίπτωση, που μόλις μελετήσαμε (δηλαδή όταν $\frac{duration}{T} \neq \text{integer}$), αν εφαρμόσουμε πρώτα **windowing** (π.χ. **Hanning**) και ύστερα **padding** στο original σήμα μας $s(t)$, τότε μπορούμε να ανακτήσουμε από το φάσμα (frequency-domain), την πληροφορία για το time-domain, δηλαδή εν προκειμένω να εντοπίσουμε τους 3 τόνους και γενικά να έχουμε μία πολύ καλή απεικόνιση του "αληθινού φάσματος". Ωστόσο, αυτό που δεν μπορούμε να κάνουμε είναι να βρούμε τις αρχικές φάσεις των συνημιτόνων στο αρχικό σήμα $s(t)$, πράγμα, το οποίο γινόταν όταν $duration = \kappa \times T$ με τον κώδικα:

```
ph1 = angle(S_oneside(f1*duration+1))
ph2 = angle(S_oneside(f2*duration+1))
ph3 = angle(S_oneside(f3*duration+1))
```

Τέλος, θα βάλουμε πλάι-πλάι τις 4 περιπτώσεις φασμάτων που είδαμε στο frequency-domain, για να γίνει πιο κατανοητή η όλη μελέτη:

1. Όταν $duration = \kappa \times T$, $k \in \mathcal{N}$ (πάνω αριστερά)
2. Όταν $duration \neq \kappa \times T$, $k \in \mathcal{N}$ (πάνω δεξιά)
3. Όταν $duration \neq \kappa \times T$, $k \in \mathcal{N}$ και με padding μόνο (κάτω αριστερά)
4. Όταν $duration \neq \kappa \times T$, $k \in \mathcal{N}$ και με windowing και μετά padding (κάτω δεξιά)



Frequency-domain ($S(f)$ - μονόπλευρο)