ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Έλεγχοι Υποθέσεων Περισσοτέρων των Δύο Ανεξάρτητων Δειγμάτων

Κωνσταντίνος Ι. Μπουγιούκας, PhD

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Ερευνητικό ερώτημα

Έστω ότι μια έρευνα προσπαθεί να απαντήσει αν διαφέρει η απώλεια βάρους ανάλογα με τον τύπο δίαιτας A, B, C, ή D που ακολουθούν οι συμμετέχοντες.

Ανεξάρτητες ομάδες (δείγματα): η δίαιτα με τέσσερις τύπους A, B, C, και D

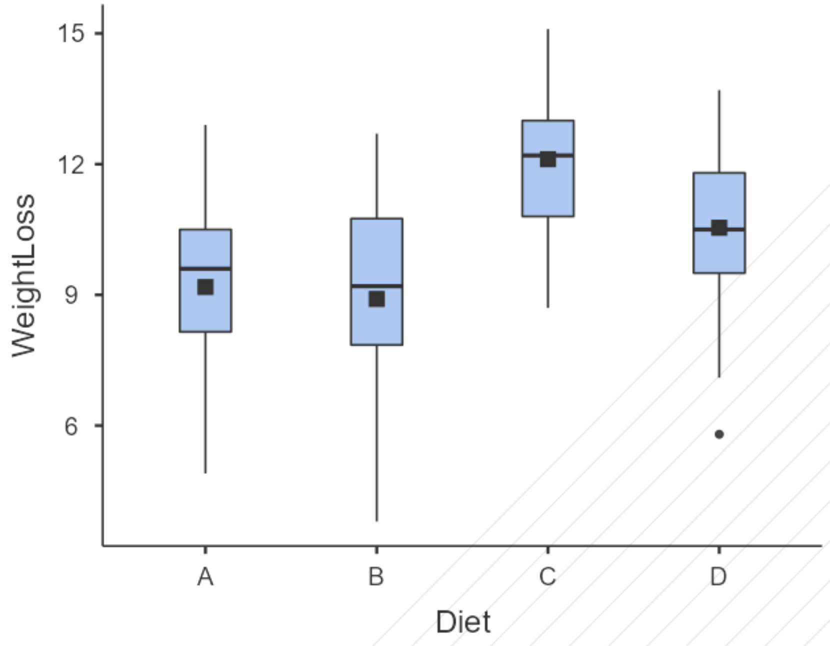
Μετράμε μια ποσοτική μεταβλητή: η απώλειας βάρους

One-way Analysis of Variance (one-way ANOVA)

Για το παράδειγμά μας:
60 υπερβαρα άτομα τυχαιοποιούνται σε 4 **διαφορετικούς τύπους δίαιτας** A, B, C, D

Μέτρηση της **απώλειας βάρους** σε kg μετά από 6 μήνες

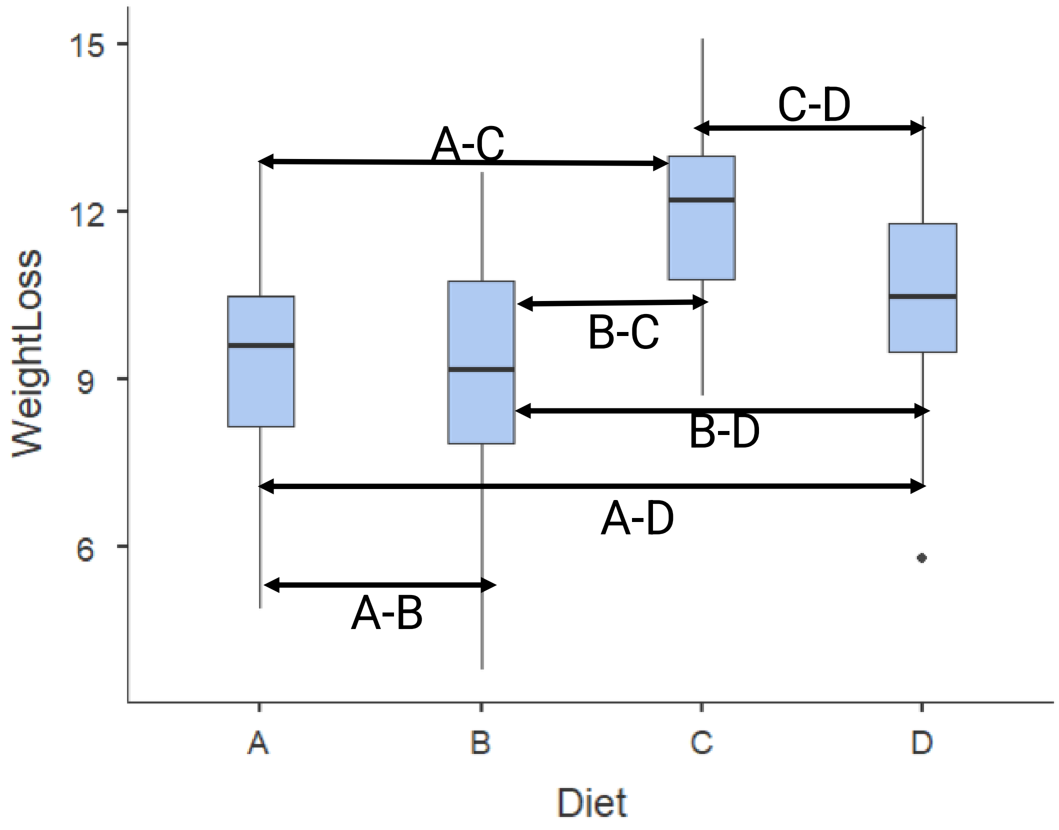
Diet	Weight Loss	Sample Mean	Sample SD
A	9.9 9.6 8.0 4.9 10.2 9.0 9.8 10.8 6.2 8.3 12.9 11.8 5.5 9.3 11.5	9.18	2.29
B	9.5 3.8 11.5 9.2 4.5 8.9 5.2 8.2 7.5 12.7 10.0 10.0 11.7 8.2 12.7	8.91	2.78
C	10.8 10.2 14.4 8.7 12.2 12.9 13.0 15.1 14.5 13.0 12.5 10.8 10.5 12.2 10.9	12.11	1.79
D	13.2 9.5 10.6 9.9 9.5 10.5 11.8 5.8 10.0 11.6 11.8 7.1 9.4 13.7 13.7	10.54	2.23



Το πρόβλημα των πολλαπλών συγκρίσεων

Αλλά για ποιο λόγο να μην εφαρμοστεί απλά η Student t δοκιμασία για όλες τις δυνατές συγκρίσεις ανά δύο;

$$FWER = 1 - (1 - a_{\{για\ κάθε\ σύγκριση\}})^{αριθ.\ συγκρίσεων}$$



Π.χ. για 6 συγκρίσεις: $FWER = 1 - (1 - 0.05)^6$ = 1 − 0.74 = 0.26

για 45 συγκρίσεις $FWER = 0.9$ δηλ. 90% πιθανότητα για ψευδώς θετικό αποτέλεσμα

One-way ANOVA: Υποθέσεις που ελέγχονται

Μηδενική Υπόθεση H_0: οι μέσες τιμές της απώλειας βάρους στις τέσσερις ομάδες δίαιτας **δεν** διαφέρουν (δηλ. είναι ίσες $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$).

Εναλλακτική Υπόθεση H_1: υπάρχει τουλάχιστον μια ομάδα δίαιτας με μέση τιμή απώλειας βάρους που διαφέρει από τις άλλες.

(ισοδύναμα: τουλάχιστον δυο από τις $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ διαφέρουν μεταξύ τους)

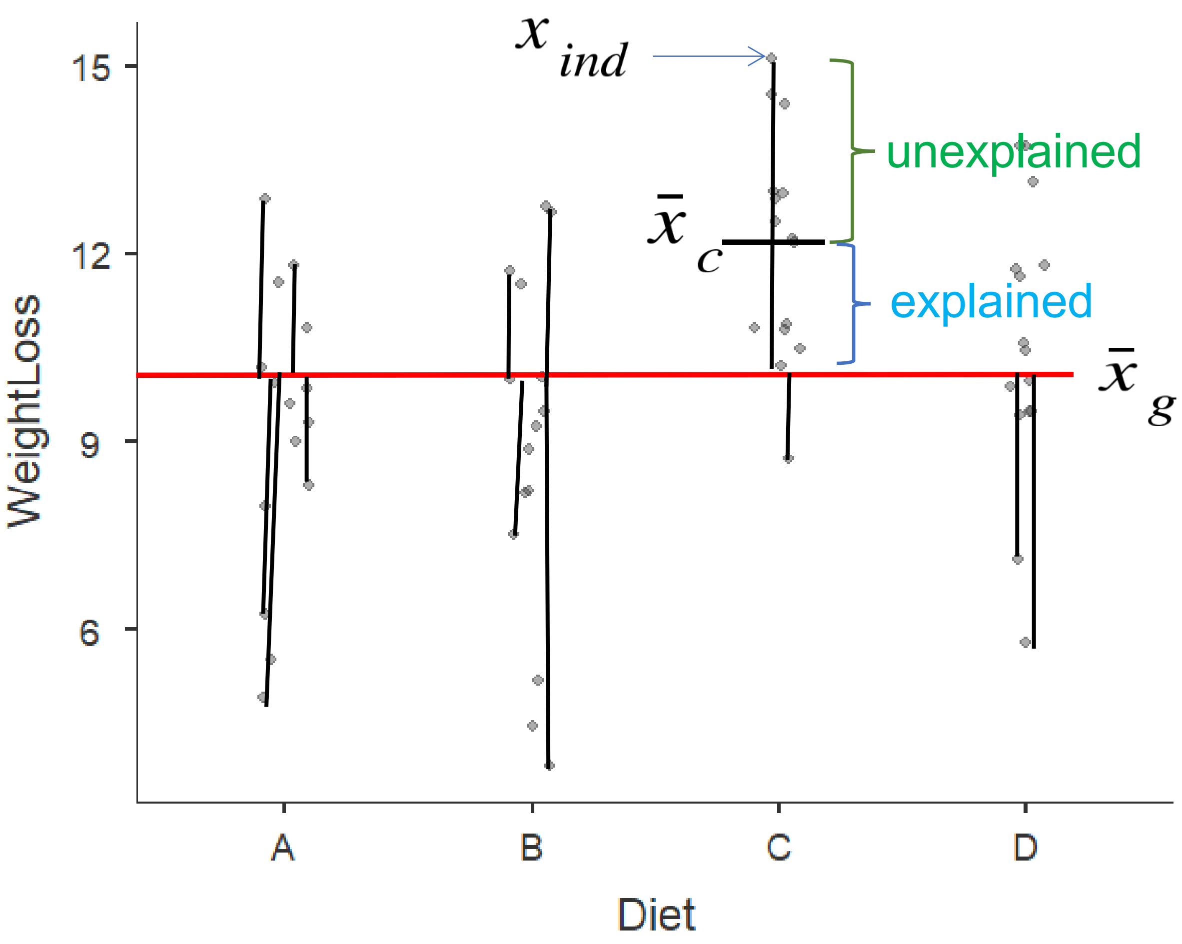
Βασικές προϋποθέσεις της one-way ANOVA

- **Ανεξάρτητα δείγματα**

- **Κανονική κατανομή** της ποσοτικής μεταβλητής (π.χ. της απώλειας βάρους) σε όλες τις ομάδες (π.χ. ομάδες δίαιτας)
  - ➲ έλεγχος κανονικότητας (π.χ. ιστογράμματα, Shapiro-Wilk test)

- **Ισότητα των διακυμάνσεων** μεταξύ των ομάδων
  - ➲ έλεγχος ομοιογένειας των διακυμάνσεων (Levene’s test)
    - Εάν στο Levene’s test, $P > 0.05$ τότε ANOVA (Fisher’s)
    - Εάν Levene’s test, $P < 0.05$ τότε ANOVA with corrected df (Welch’s)

Γιατί δεν έχουν όλοι την ίδια απώλεια βάρους;



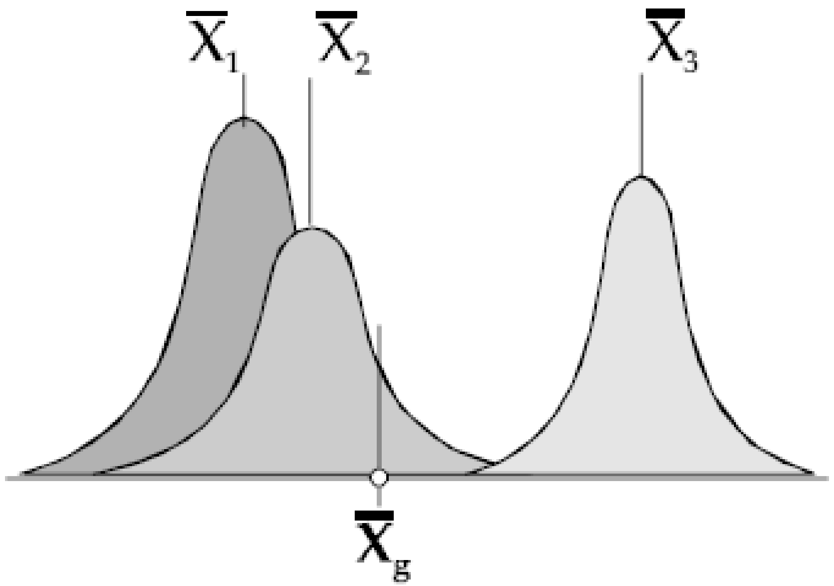
1. οι δίαιτες μπορεί να επιδρουν διαφορετικά στα άτομα (explained by diet “X” or between group variation)

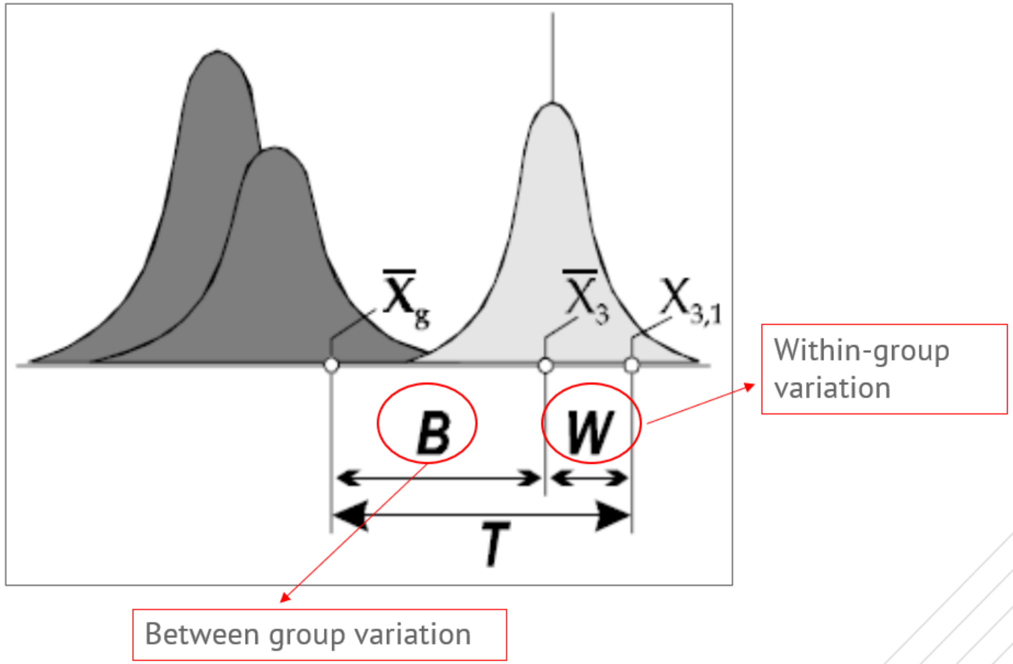
2. οι άνθρωποι είναι διαφορετικοί (unexplained by diet “X” or within group variation)

$$SS_{total} = \boxed{SS_{between}} + \boxed{SS_{within}}$$

Η ANOVA χωρίζει την **συνολική διακύμανση** σε:

- **Μεταξύ των ομάδων** διακύμανση (Between-group variation): οφείλεται στις διαφορές μεταξύ των ομάδων
- **Εντός των ομάδων** διακύμανση (Within-group variation): οφείλεται στην τυχαία διακύμανση μεταξύ των παρατηρήσεων εντός της κάθε ομάδας





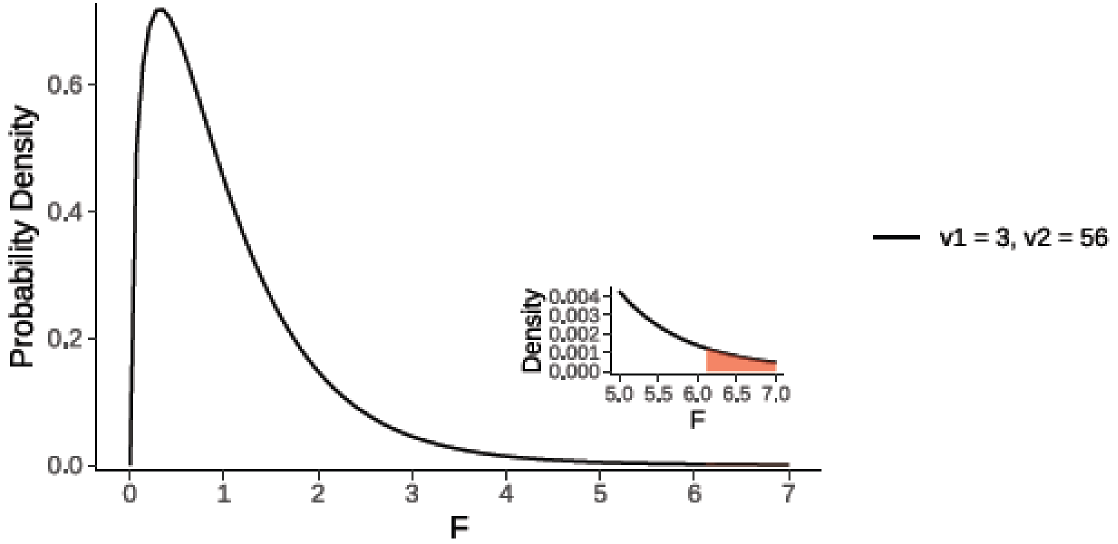
F-test

Η One-Way ANOVA χρησιμοποιεί το F στατιστικό:

$$F = \frac{\text{Μεταξύ των ομάδων διακύμανση}}{\text{Εντός των ομάδων διακύμανση}}$$

Το F στατιστικό ακολουθεί την F-κατανομή με df1=k-1=4-1=3, df2 = n-k=60-4= 56

- k: ο αριθμός των ομάδων
- n: ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων στην έρευνα



Σημείωση: Εάν μόνο δύο μέσες τιμές συγκρίνονται, τότε το F-test συμπίπτει με ένα independent samples t-test και ισχύει $F = t^2$.

Διόρθωση για πολλαπλές συγκρίσεις (post-hoc tests)

- Tukey (όταν οι διακυμάνσεις των ομάδων είναι ίσες)
- Games-Howell (όταν οι διακυμάνσεις των ομάδων είναι άνισες)
- Bonferroni

Kruskal-Wallis test

- Μη παραμετρικός έλεγχος εναλλακτικός της one-way ANOVA (στηρίζεται στην διάταξη των μετρήσεων)

- Συνήθως χρησιμοποιείται σε μικρά δείγματα και μη-κανονικές κατανομές

- Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων θα πρέπει να γίνει με βάση τις διάμεσες τιμές των ομάδων και το IQR

Διόρθωση για πολλαπλές συγκρίσεις (post-hoc tests)

Ερώτηση 1

Στην ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) η εναλλακτική υπόθεση είναι:

(α) Όλες οι μέσες τιμές είναι απαραίτητα άνισες μεταξύ τους

(β) Όλες οι μέσες τιμές είναι ίσες μεταξύ τους

(γ) Τουλάχιστον τρεις μέσες τιμές να είναι άνισες μεταξύ τους

(δ) Τουλάχιστον μια μέση τιμή να διαφέρει από τις άλλες

Ερώτηση 2

Στην ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) :

(α) Πρέπει η διακύμανση μεταξύ των ομάδων να είναι ίση με την διακύμανση εντός των ομάδων

(β) Χρησιμοποιείται ο λόγος F

(γ) Χρησιμοποιείται η t-κατανομή

(δ) Θα πρέπει η ποσοτική μεταβλητή να μην ακολουθεί την κανονική κατανομή στις ομάδες

Ερώτηση 3

Για δυο ανεξάρτητα δείγματα που ακολουθούν την κανονική κατανομή αν εφαρμοστεί t δοκιμασία και ανάλυση διακύμανσης θα ισχύει:

(α) $\mathrm{F} = t^2$

(β) $\mathrm{F} = t^3$

(γ) $\mathrm{F} = t^2/2$

(δ) $\mathrm{F} = \sqrt{t}$

Ερώτηση 4

Η μη παραμετρική δοκιμασία αντίστοιχη της παραμετρικής one-way ANOVA είναι:

(α) Η δοκιμασία Mann-Whitney

(β) Δεν υπάρχει αντίστοιχος μη παραμετρικός έλεγχος

(γ) Η δοκιμασία Wilcoxon

(δ) Η δοκιμασία Kruskal-Wallis

Ερώτηση 5

Σε μια έρευνα συγκρίθηκε η αποτελεσματικότητα 3 θεραπειών με συνολικό μέγεθος δείγματος 300 άτομα. Θεωρώντας ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις της ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) βρέθηκε ότι η p-τιμή του ελέγχου είναι ίση με **0.3**. Το συμπέρασμα που προκύπτει για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 είναι:

(α) Όλες οι μέσες τιμές που αφορούν την αποτελεσματικότητα των θεραπειών διαφέρουν μεταξύ τους.

(β) Πρέπει απαραίτητα να ακολουθήσει έλεγχος post-hoc.

(γ) Στατιστικά μη σημαντικό αποτέλεσμα, δεν απορρίπτεται η Η0.

(δ) Στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα, απορρίπτεται η Η0.