$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. On en déduit:

$5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.

Après calculs, on conclut qu'une équation cartésienne de d est

$5x+y-16=0.$

Remarque :

Une autre méthode consiste à appliquer le théorème énoncé plus haut.

Ainsi, comme $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, une équation de d est de la forme : $5x+1\times y+c=0.$

Pour déterminer c, on substitue les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Le théorème nous donne une équation cartésienne de d': $-6x+4y+c=0.$

Pour trouver, on utilise le point B ou le point C.

$B(5;3)$ appartient à d' donc : $-6\times 4+4\times 3+c=0$ donc $c=18.$

Une équation cartésienne de d' est : $-6x+4y+18=0$ ou, une fois simplifiée, $-3x+2y+9=0.$

3) Equation réduite de droite

Théorème :

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan d'équation cartésienne $\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0.$

- **Cas $\mathbf{b}=\mathbf{0}$** : $\mathscr{D}$ est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathscr{D}$ admet une équation réduite du type $\mathrm{x}=\mathrm{k}$, avec $\mathrm{k}\in\mathbb{R}$.

  Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Cas $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$** : $\mathscr{D}$ est une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathscr{D}$ admet une équation réduite du type $\mathrm{y}=\mathrm{mx}+\mathrm{p}$, avec m et p réels.

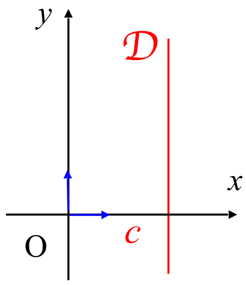
  Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$, où m est le coefficient directeur de la droite.

4) Retour sur les équations réduites de droites

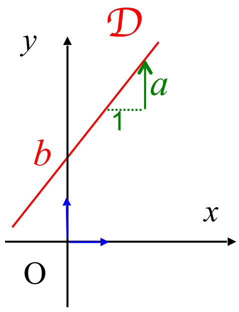
Propriété :

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

- Si $\mathscr{D}$ est **parallèle à l'axe des ordonnées**, alors l'équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $x = c$, avec c un nombre réel.



- Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $y = ax + b$, avec a et b deux nombres réels.



Rappel :

a est appelé le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice :

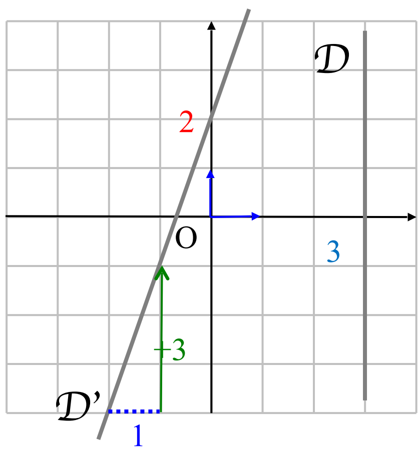
Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 4$ b) $y = -1$ c) $3x + 2y = 2$

	a)	b)	c)
Coefficient directeur			
Ordonnée à l'origine			

Exemples :

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation x = 3 .

La droite $\mathscr{D}'$ a pour équation y = 3x + 2 : son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3 .



Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation donnée

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Dans ce repère, **en expliquant le plus précisément possible**, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations : $(d_1) : y = 2x + 3$, $(d_2) : y = 4$, $(d_3) : x = 3$.

<u>Propriété réciproque :</u>

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et a, b, c trois nombres réels.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) sont telles que :
$y = ax + b$ ou $x = c$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Les points $A\begin{pmatrix}6{,}4\\42\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}346\\2419\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

❖ Le point A appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d. On remplace donc x dans l'équation de la droite et on compare le résultat à y.
Ici, ce n'est pas le cas, puisque : $42 \neq 7 \times 6{,}4 - 3 = 41{,}8$: $A \notin d$.

❖ Faire de même avec les coordonnées du point B.

5) Conséquence pour la pente

Propriété :
Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite $\mathscr{D}$ tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Rem : Cette pente correspond au m apparaissant dans le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$. Voir ce lien.

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît deux points

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soit $A\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ deux points d'une droite d. Déterminer une équation de la droite d.

II. Parallélisme et vecteur directeur

1) Parallélisme

Propriété : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exemple :

Dans un repère du plan, d_1, d_2, d_3 et d_4 admettent pour équations respectives :

$y = 3x + 4,$ $\quad$ $y = 3x + 9,$ $\quad$ $x = 8$ $\quad$ $x = -1$

- Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car ______________________________

  ____.

- Les droites d_1 et d_3 sont sécantes car ______________________________

  ____.

- Les droites d_3 et d_4 sont parallèles car ______________________________

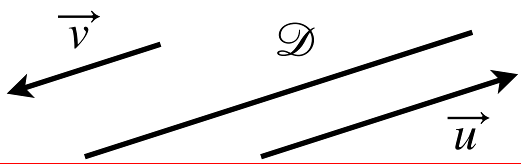
  ____.

2) Vecteur directeur

Définition :

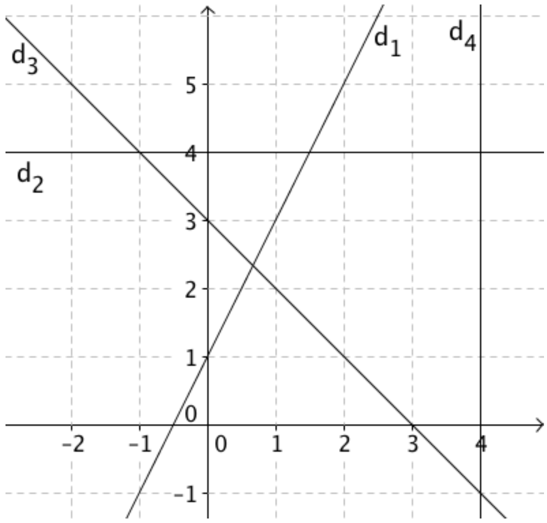
Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même **direction** que la droite $\mathscr{D}$.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Donner deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour les droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



- Pour d_1 : ________________________________

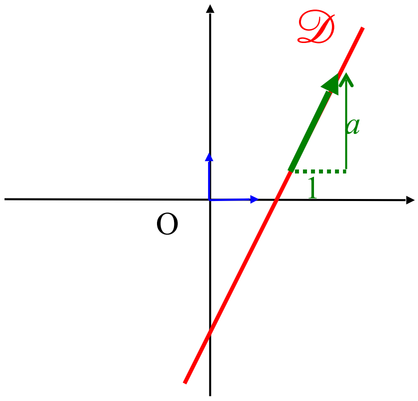
- Pour d_2 : ________________________________

- Pour d_3 : ________________________________

- Pour d_4 : ________________________________

<u>Propriété :</u>
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

- Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
- Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.



<u>Exemple</u> :

- La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
- La droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = -1$ ________________________________
____
- La droite $\mathscr{D}'$ d'équation $x = 3$ ________________________________
____
- La droite $\mathscr{D}''$ d'équation $4y = 2x + 3$ ________________________________
____

<u>Méthode</u> : Déterminer une équation de droite dont on connaît un point et un vecteur directeur

Soit $A(-3;4)$ un point d'une droite d admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. **Déterminer une équation de la droite d.**

a. Trouver un vecteur $\overrightarrow{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ ayant pour forme $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.

____

____

b. Écrire l'équation de la droite en laissant l'ordonnée à l'origine b inconnue.

____

____

c. Trouver b en se servant du point A.

____

____

____

____

III. Positions relatives de droites

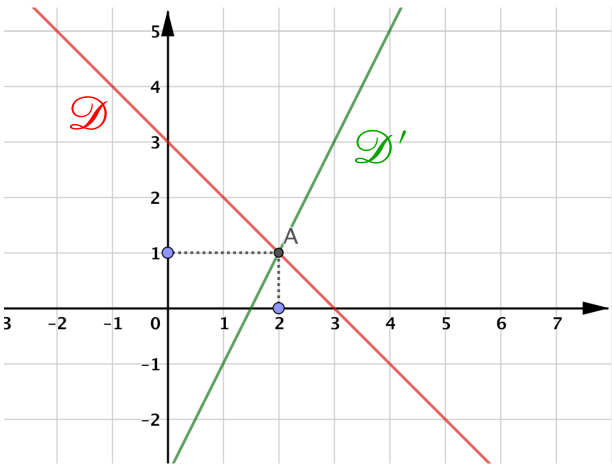
1) Droites et systèmes

Propriété :

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont sécantes, alors les coordonnées de leur point d'intersection I est l'unique couple (x, y) solution du système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$.

Exemple :

- Les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 3$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = 2x - 3$ se coupent au point A.
- Ce point A appartient simultanément à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ donc $A(x, y)$ est la solution de : $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$
- Graphiquement on lit : $A(2; 1)$.



Retrouver ce résultat par le calcul.

Propriété :

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles, alors le système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$ n'admet pas de solution.

Exemple :

- Les droites $\mathscr{D}$ d'équation $-3x + y = 1$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $6x - 2y = 6$ se coupent-elles ?

Propriété :

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues alors, le système associé admet une infinité de solutions.

Exemple :

- Les droites $\mathscr{D}$ d'équation $-6x - 3y = -6$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $2x + y = 2$ se coupent-elles ?

2) <u>Applications</u>

Indice :

Ex 39 p 193
Ex 140 p 199
Ex 145 p 199

Exercices :

1) Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes :
d1 : $y = 2x+1$ d2 : $y = 5x-3$ d3 : $y = -2x-7$ d4 : $y = 7x$ d5 : $y = -5$

2)Même exercice :
d1 : $y + 3 = 5x$ d2 : $3y = 9x-6$ d3 : $x = -2y+1$ d4 : $y = 7(x+5)$

3) Représenter dans un repère les droites suivantes :
d1 : $y = -3x+5$ d2 : $y = 4x-2$ d2 : $y = 5$

4) Soit d la droite d'équation $y = 9x-11$. Les points A(12 ; 97) et B(-6 ; 65) appartiennent-ils à la droite d ? Justifier.

5) Soit d et d' les droites d'équation respective $y = -3$ et $x = 3$.
Parmi les points A(3 ; -3), B(3 ; 3), C(-3 ; 3) et D(-3 ; -3) lesquels appartiennent à la droite d ? à la droite d' ?

6) Dans chaque cas, dire si les droites d1 et d2 sont parallèles.
a) d1 : $y = 3x+5$ et d2 : $y = 3x-2$ b) d1 : $y = -3x+7$ et d2 : $y = 3x+8$
c) d1 : $y = 4x+1$ et d2 : $y = 4x$ d) d1 : $y = 5$ et d2 : $y = 5x$

7) Même exercice :
a) d1 : $y = 2x+3$ et d2 : $y = 3x+2$ b) d1 : $y = 5x+1$ et d2 : $y = 1+5x$
c) d1 : $y = 5$ et d2 : $y = 7$ d) d1 : $x = 3$ et d2 : $x = -1$

8) Pour chacune des affirmations indiquer si elle est vraie ou fausse.
a. La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
b. La droite d'équation $y = x$ est parallèle à l'axe des abscisses.
c. Les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont parallèles.
d. Les droites d'équation $y = 3$ et $x = 2$ sont sécantes.

9) Répondre aux questions suivantes:
a. Donner l'équation de la droite d1 passant par le point A(0 ; 2) et parallèle à la droite d2 d'équation $y = -2x+5$.
b. Donner l'équation de la droite d3 passant par le point A(0 ; -1) et parallèle à l'axe des abscisses.
c. Donner l'équation de la droite d4 passant par le point A(3 ; 2) et parallèle à l'axe des ordonnées.