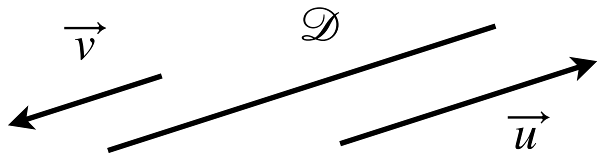
II. Equation cartésienne d'une droite

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition :

Soit $\mathscr{D}$ une droite.

On appelle vecteur directeur de $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui possède la même **direction** que la droite $\mathscr{D}$.



Rem : Dans la définition ci-dessus, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$.
b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$.

2) Equation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :

L'ensemble des points $\mathrm{M(x; y)}$ dont les coordonnées vérifient l'équation $\mathrm{ax + by + c = 0}$, avec $\mathrm{(a; b) \neq (0; 0)}$, est une droite $\mathscr{D}$ de **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

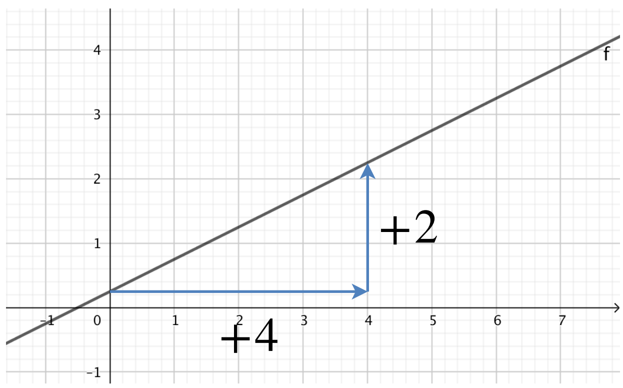
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.

Exemple :

existe une infinité d'équations

$2x - 4y + 1 = 0$ est **une** équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par le point $\mathrm{A}\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Graphiquement, cette droite « monte » de 2 unités sur l'axe des y si on se « décale vers la droite » de 4 unités sur l'axe des x.



Réciproque :

Soient a et b deux réels.

Toute droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$, avec $(\mathrm{a}; \mathrm{b}) \neq (0; 0)$ et $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.

Rappel utile pour la démonstration :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration au programme :

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0; \mathrm{y}_0)$ point appartenant à $\mathscr{D}$.

Considérons un point $\mathrm{M}(\mathrm{x}; \mathrm{y})$ du plan.

$\mathrm{M} \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\\\mathrm{y}-\mathrm{y}_0\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

condition pour que M appartienne à $\mathscr{D}$

$\iff (\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\mathrm{a} - (\mathrm{y}-\mathrm{y}_0) \times (-\mathrm{b}) = 0$

$\iff \mathrm{ax} - \mathrm{a} \times \mathrm{x}_0 + \mathrm{by} - \mathrm{b} \times \mathrm{y}_0 = 0$

$\iff \mathrm{ax} + \mathrm{by} - \mathrm{a} \times \mathrm{x}_0 - \mathrm{b} \times \mathrm{y}_0 = 0$

$\iff \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$ avec $\mathrm{c} = -\mathrm{a} \times \mathrm{x}_0 - \mathrm{b} \times \mathrm{y}_0$.

La droite $\mathscr{D}$ admet bien une équation cartésienne de la forme $\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; 1)$et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 5)$.
4) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5; 3)$ et $C(1; -3)$.

1) Soit un point $M(x; y)$ de la droite d .

   Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de d. Donc les vecteurs

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. On en déduit:

$5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.

Après calculs, on conclut qu'une équation cartésienne de d est

$5x+y-16=0$.

<u>Remarque :</u>

Une autre méthode consiste à appliquer le théorème énoncé plus haut.

Ainsi, comme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, une équation de d est de la forme : $5x+1\times y+c=0$.

Pour déterminer c, on substitue les coordonnées de A dans l'équation.

2) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Le théorème nous donne une équation cartésienne de d': $-6x+4y+c=0$.

Pour trouver, on utilise le point B ou le point C.

$B(5;3)$ appartient à d' donc : $-6\times4+4\times3+c=0$ donc $c=18$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x+4y+18=0$ ou, une fois simplifiée, $-3x+2y+9=0$.

3) <u>Equation réduite de droite</u>

<u>Théorème :</u>

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

- **Cas $\mathbf{b=0}$** : $\mathscr{D}$ est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathscr{D}$ admet une équation réduite du type $x=k$, avec $k\in\mathbb{R}$.

  Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Cas $\mathbf{b\neq0}$** : $\mathscr{D}$ est une droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathscr{D}$ admet une équation réduite du type $y=mx+p$, avec m et p réels.

  Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, où m est le coefficient directeur de la droite.