3) Opérations sur les fonctions dérivées

Optionnel

Propriété : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.

- ❖ La somme de f et g est dérivable sur I et sa dérivée est, pour tout $x \in I$ $f'(x) + g'(x)$.
- ❖ La fonction kf est dérivable sur I et sa dérivée est, pour tout $x \in I$, $k \times f'(x)$.

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^3$ 2) $f_2(x) = x^2 + x$ 3) $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$

4) $f_4(x) = x \times (3x + 4)$ 5) $f_5(x) = 2 \times (x^3 + x^2 + 1)$.

IV. Applications de la dérivée

1) Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque :
Le **SIGNE** de la dérivée nous informe sur les **VARIATIONS** de la fonction.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le **signe** de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

1) Pour tout $x \in [0; 10]$, on a : $f'(x) =$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit :

Donc

La fonction f' est une fonction affine et $f'(0) = -8$ donc négative en 0 et $f'(3) = 4 \times 3 - 8 = 4 > 0$ en $x = 3$.

3) On peut donc dresser le tableau de signes et le compléter par le tableau de variations.

x	
$f'(x)$	
f	

2) Etude des variations, extremum de fonction

Propriété :

Lorsque la fonction dérivée f' s'annule et change de signe, la fonction atteint un extremum local.

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) **a.** Montrer que $f'(x) = 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]$

b. En déduire le signe de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f puis la tracer dans le cours.

Exemple 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) Montrer que $f'(x) = 3(x + 4)(x - 1)$ puis, déterminer le signe de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f puis la tracer dans le cours.