3) Opérations sur les fonctions dérivées

Optionnel

Propriété : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.

- ❖ La somme de f et g est dérivable sur I et sa dérivée est, pour tout $x \in I$ $f'(x) + g'(x)$.
- ❖ La fonction kf est dérivable sur I et sa dérivée est, pour tout $x \in I$, $k \times f'(x)$.

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

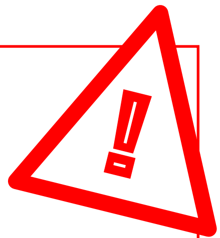
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^3$ 2) $f_2(x) = x^2 + x$ 3) $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$

4) $f_4(x) = x \times (3x + 4)$ 5) $f_5(x) = 2 \times (x^3 + x^2 + 1)$.

IV. Applications de la dérivée

1) Signe de la dérivée et sens de variation



Théorème :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- ❖ Si, pour tout $x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque :

Le **SIGNE** de la dérivée nous donne **toutes** les informations sur les **VARIATIONS** de la fonction.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) Déterminer le **signe** de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

1) Pour tout $x \in [0; 10]$, on a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = \boxed{4x - 8}$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Soit : $4x - 8 = 0$

Donc $4x = 8$ et $x = \dfrac{8}{4} = 2$.

La fonction f' est une fonction affine et $f'(0) = -8$ donc négative en 0 et $f'(3) = 4 \times 3 - 8 = 4 > 0$ en $x = 3$.

3) On peut donc dresser le tableau de signes et le compléter par le tableau de variations.

x	0		2		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

2) Etude des variations, extremum de fonction

Propriété :

Lorsque la fonction dérivée f' **s'annule** et **change de signe**, la fonction atteint un extremum (minimum ou maximum) local.

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$.

1) Calculer la fonction dérivée de f

2) **a.** Montrer que $f'(x) = 3\left[\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{9}\right]$

b. En déduire le signe de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f puis la tracer dans le cours.

Exemple 1 :

1) $f'(x) = 3x^2 + 2 \times 2x + 2 = 3x^2 + 4x + 2$

2) **a.** Montrer que $f'(x) = 3\left[\left(x + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{9}\right]$

Développement à l'aide d'une identité remarquable.

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2\times x\times\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{2}{3} + \frac{4}{9}$$

donc :

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right] = 3\left[x^2+2x\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right]$$

$$= 3\left[x^2+2x\frac{2}{3}+\frac{6}{9}\right]$$

$$= 3x^2+6x\frac{2}{3}+3\frac{6}{9}$$

$$= 3x^2+\frac{12x}{3}+\frac{18}{9}$$

$$= 3x^2+4x+2$$

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right] = f'(x)$$

b. En déduire le signe de f' en fonction de x.

$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$ est toujours positif ! On rajoute $\frac{2}{9}$ à un nombre toujours positif :

$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}$ est x positif. On multiplie par 3 (nombre positif) ce nombre donc

$f'(x) > 0$ pour tout x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f puis la tracer dans le cours.