Chapitre 9 : Loi Binomiale

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Rappels :

- Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.
- L'**univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers Ω.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est l'univers.

L'événement A « On obtient un nombre premier. » s'écrit aussi $A = \{2; 3; 5\}$.

On considère l'événement élémentaire E : « On obtient un 1 ».

On écrit : $E = \{1\}$.

Définition :

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini Ω.

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe un nombre réel à une issue.

Exemple :

Dans l'expérience aléatoire précédente, considérons le jeu suivant

- Si le résultat est un 1 ou un 6, on gagne 10 € ;
- Sinon, on perd 4 €.

On a ici défini une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs réelles 10 ou -4.

Par exemple, dans notre cas, on a : $X(1) = 10$, $X(2) = -4$ ou $X(6) = 10$.

2) Loi de probabilité

Définition :

On appelle $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ les valeurs prises par X et on note $P(X = x_1)$ la probabilité de l'événement x_1 .

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est un tableau reliant chaque valeur x_i à une probabilité $P(X = x_i)$.

Remarques :

- On note parfois $p_i = P(X = x_i)$.
- La somme de tous les p_i est toujours égale à 1.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple initial.

- Chaque issue d'un lancer de dé est équiprobable et vaut $\frac{1}{6}$.
- La variable aléatoire X est égale à 10 dans le cas où $X = 1$ ou $X = 6$.
- La probabilité que la variable aléatoire X soit égale à 10 est donc égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

On note : $P(X = 10) = \frac{1}{3}$.

De la même façon, on trouve : $P(X = -4) = \frac{2}{3}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est représenté dans un tableau :

x_i	-4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On remarque que dans cet exemple : $P(X = -4) + P(X = 10) = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Considérons l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on perd 5 €.
- Si on tire un roi, on gagne 7 €.
- Si on tire une autre carte, on gagne 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à un tirage, associe un gain ou une perte.

Déterminons la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -5, 7, 1 mais aussi 2.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 7(roi) -5 (cœur) $= 2$.

- La carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = -5$.

$P(X = -5) = \dfrac{7}{32}$.

- La carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 7$.

$P(X = 7) = \dfrac{3}{32}$.

- La carte tirée est le roi de cœur, $X = 2$.

$P(X = 2) = \dfrac{1}{32}$.

- La carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = 1$.

$P(X = 1) = \dfrac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X s'écrit dans le tableau suivant :

x_i	-5	1	2	7
$P(X = x_i)$	$\dfrac{7}{32}$	$\dfrac{21}{32}$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{3}{32}$

On peut constater que : $P(X = -5) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 7) = 1$.

3) Arbre pondéré

Pour décrire la **répétition** d'expérience(s) aléatoire(s), il est courant d'utiliser un **arbre pondéré** représentant toutes les issues possibles. Un arbre est un graphe ordonné constitué de **branches** et de **noeuds** contenant toutes les informations relatives aux issues d'une expérience aléatoire.

Propriétés :

Sur un arbre pondéré :

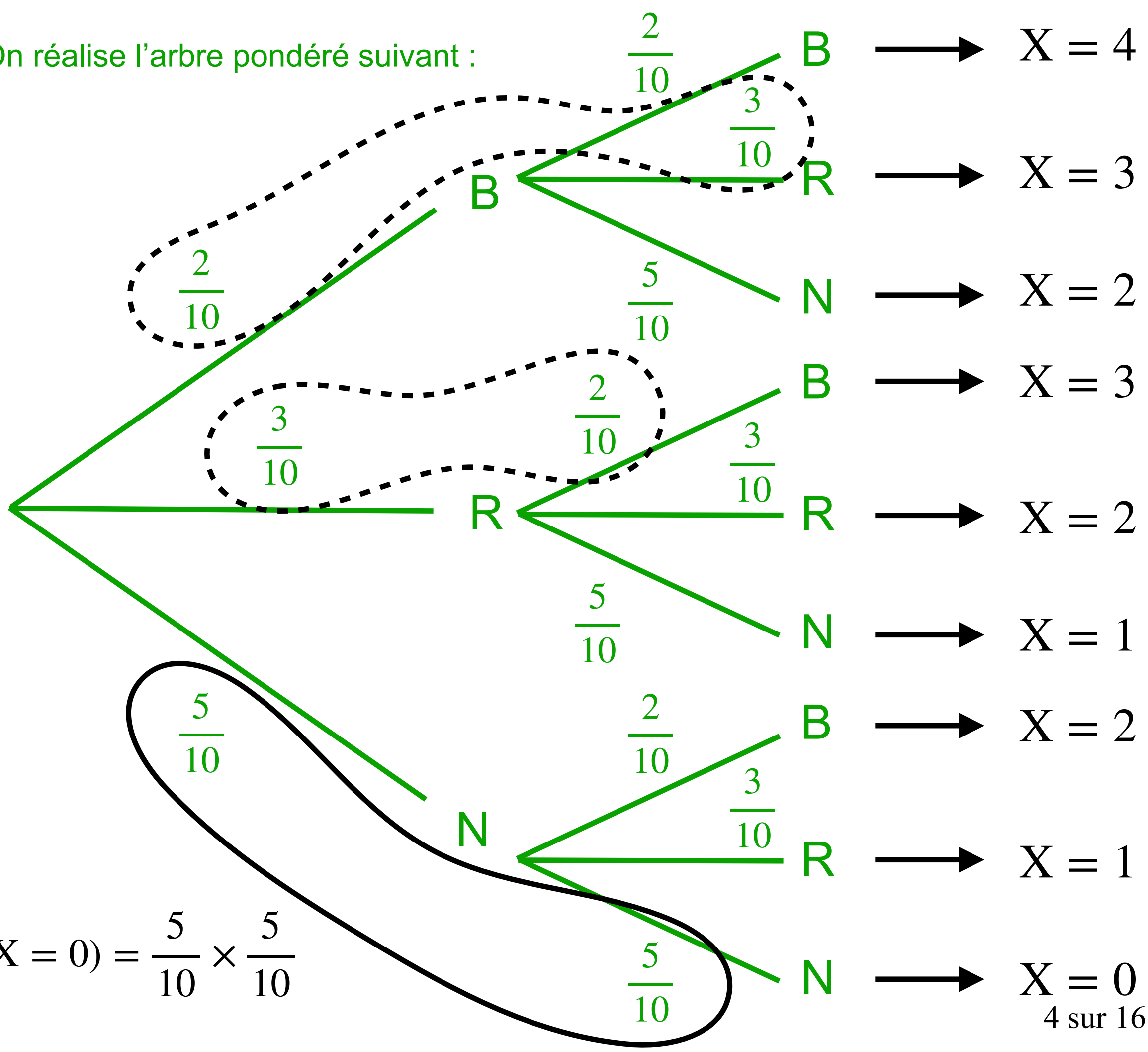
- la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1 ;
- la probabilité d'un chemin jusqu'à un noeud est le produit des probabilités rencontrées lors du parcours de ce chemin jusqu'à ce noeud.
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

Exemple : On dispose d'une urne contenant 2 boules blanches B notées "+2", 3 boules rouges R notées "+1" et 5 boules noires N notées "0". On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.

Soit la variable aléatoire X égale à la somme des nombres notées sur les boules.

On veut déterminer la loi de probabilité de X.

On réalise l'arbre pondéré suivant :



$$P(X=0)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}$$

On en déduit la loi de probabilité de X en calculant $P(X = x_i)$.

$$P(X=0) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$$ (courbe solide)

$$P(X=1) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{100}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{29}{100}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{12}{100}$$ (courbes en pointillés)

$$P(X=4) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$$

On remarque que la somme des probabilités fait bien 1.

La loi de probabilité se résume dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{4}{100}$

4) Espérance d'une variable aléatoire

Définitions :

Soit une variable aléatoire X prenant n valeurs x_i de probabilité $p_i = P(X = x_i)$

L'espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ défini par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \ldots p_n \times x_n$$

Rem : Le symbole Σ que l'on prononce "sigma" signifie que l'on fait la somme des éléments à l'intérieur du sigma.

Exemple :
avec l'exemple du paragraphe 3) (loi de probabilité ci-dessus), il suffit de calculer :

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{100} + 1 \times \frac{25}{100} + 2 \times \frac{30}{100} + 3 \times \frac{29}{100} + 4 \times \frac{4}{100} = 1{,}88$$

Donc, l'espérance vaut 1,88. Cela signifie que si on répète l'expérience 100 fois, on avoir une somme de 188 en moyenne.