Chapitre 11 : Information chiffrée

I. Proportion et pourcentage

1) Proportion d'une sous-population

Définition :

On note $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$

Soit A une partie d'un ensemble E.

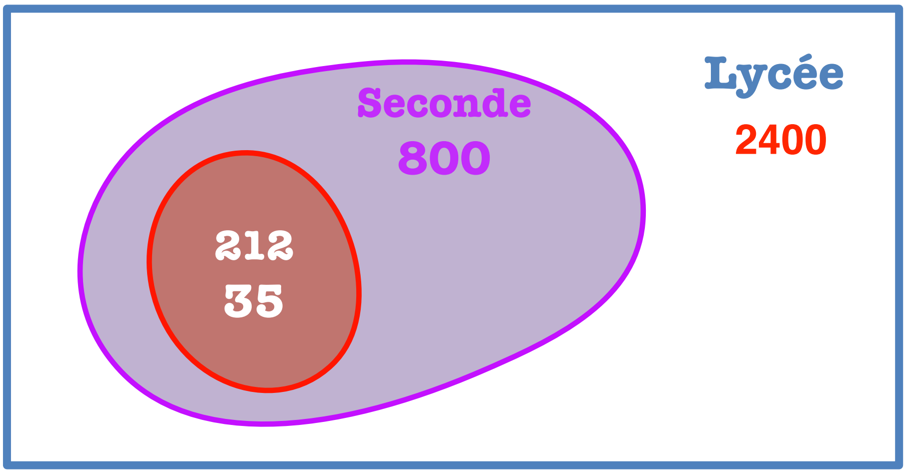
Soit n_E le nombre d'éléments de E et n_A le nombre d'éléments de A.

La **proportion** p des éléments de A par rapport à E s'écrit : $p = \dfrac{\mathbf{n_A}}{\mathbf{n_E}}$

Exemple :

Cette année, au Lycée Ferney-Voltaire, environ 800 élèves sont inscrits en classe de Seconde. 35 d'entre eux sont en Seconde 12.

On peut représenter cette situation par un **diagramme de Venn** (ou diagramme en patates!) :



La population totale n_E est égale à 800.

La sous-population A des élèves de Seconde 12 n_A est égale à 35.

Donc, la **proportion** d'élèves de 212 parmi tous les élèves de Seconde, notée p, est : $p = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{35}{800} = 0{,}04375 \approx 4{,}4\,\%$.

2) Pourcentage d'une quantité

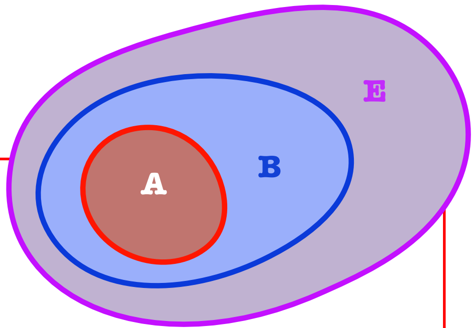
Définition :

Pour prendre le pourcentage **de** quelque chose (= quantité), on **multiplie** cette quantité par le pourcentage souhaité.

Exemple :

10% des 50000 girafes restantes disparaissent chaque année. On fait le calcule suivante : $10\% \times 50000 = \dfrac{10}{100} \times 50000 = 5000$ girafes disparaissent.

3) Proportions échelonnées



Propriété :

Soit $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{E}$.

On appelle p_1 la proportion de **A** dans **B** et p_2 la proportion de **B** dans **E**.

La proportion p de **A** dans l'ensemble **E** est : $p = p_1 \times p_2$

Exemple :

40% des employés d'une entreprise sont des femmes. 25% d'entre elles gagnent moins de 2200€ par mois.

Quelle est la proportion de femmes gagnant moins de 2200€ par mois ?

On fait : $p = p_1 \times p_2 = \dfrac{40}{100} \times \dfrac{25}{100} = 10\,\%$

II. Évolution exprimée en pourcentages

1) Évolution d'une quantité

t **=taux d'évolution**

Propriétés :

- Augmenter une valeur de $\mathbf{p}\,\%$ revient à la multiplier par $\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$.
- Diminuer une valeur de $\mathbf{p}\,\%$ revient à la multiplier par $\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$.
- $\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$ et $\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$ sont appelés des **coefficients multiplicateurs**.

Méthode : Calculer une évolution

A. *L'effectif d'un lycée de 1500 élèves va augmenter l'année prochaine de 4 %. Calculer le nouvel effectif.*

On part de 1500 élèves et on ajoute 4 % de 1500 :

$\underbrace{\mathbf{1500}}_{\text{Ancien}} + \underbrace{\mathbf{1500 \times 4\,\%}}_{\text{Augmentation}} = \underbrace{\mathbf{1500}}_{\text{Ancien}} \times (\mathbf{1} + \underbrace{\mathbf{4\%}}_{\text{Augmentation}}) = \mathbf{1500 \times 1,04 = 1560}$ élèves.

B. *Un ordinateur valant 800€ en 2010 voit son prix baisser de 10% par an. Quel est son prix en 2011 ?*

On part de 800€ et on enlève 10 % de 800 :

$\mathbf{800 \times (1 - 10\%)} = \underbrace{\mathbf{800}}_{\text{Ancien}} \times \mathbf{0,9 = 720}$ ~~élèves.~~

C. *Un vêtement en soldes à - 70% est vendu 15€. Quel était son prix avant réduction ?*

On cherche le prix de départ. Appelons-le $\mathbf{P}$. La formule que l'on a vue précédemment nous indique que : $\mathbf{P \times (1 - 70\%) = 15}$.

On doit donc résoudre cette équation : $\mathbf{P \times (1 - 70\%)} = \underbrace{\mathbf{P}}_{\text{Ancien}} \times \underbrace{\mathbf{0,3}}_{\text{Diminution de 70\%}} = \underbrace{\mathbf{15}}_{\text{Nouveau}}$.

Donc, $\mathbf{P = \dfrac{15}{0,3} = 50}$ € .

2) Taux d'évolution

Définition : On prend une valeur initiale $\mathbf{X_{ini}}$ qui subit une évolution pour arriver à une valeur finale $\mathbf{X_{fin}}$.

On définit le **taux d'évolution** comme la division : $\mathbf{t = \dfrac{X_{fin} - X_{ini}}{X_{ini}}}$.

Remarque 1:

Lorsque t est exprimé en %, on parle de pourcentage d'évolution de.

Remarque 2:

Si $\mathbf{t > 0}$, l'évolution est une **augmentation**.

Si $\mathbf{t < 0}$, l'évolution est une **diminution**.

Méthode : Calculer un taux d'évolution

Entre deux années successives, le montant des importations d'un pays est passé de 33 millions à 29 millions.

Calculer le taux d'évolution en % du montant des importations.

taux négatif -> diminution des quantités

$$t = \frac{29-33}{33} = \frac{-4}{33} \approx -0,12 = -12\,\%.$$

On conclut que les importations ont **diminué de 12 %** entre les deux années.

3) <u>Evolutions successives</u>

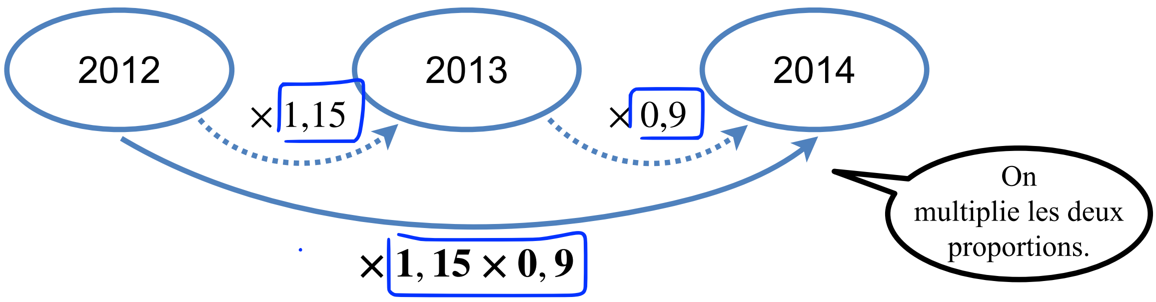
<u>Propriété :</u>

Si une grandeur subit **<u>plusieurs évolutions successives</u>** alors le coefficient multiplicateur global est égal **<u>aux produits des coefficients multiplicateurs de chaque évolution</u>**.

<u>Méthode :</u> Comment calculer un taux d'évolution **<u>global</u>**

En 2013, une entreprise d'automobiles voit ses ventes augmenter de 15% par rapport à 2012.
En 2014, ses ventes diminuent de 10 % par rapport à 2013.
<u>Calculer le taux d'évolution des ventes sur les deux années.</u>

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation en 2013 est égal à :
$1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$.
Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution en 2014 est égal à :
$1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$.
Graphiquement, on peut représenter la situation comme ci-dessous :



Le coefficient multiplicateur global (sur les deux années) est donc égal à :

$$1,15 \times 0,9 = 1,035 = 1 + \frac{3,5}{100}.$$

taux d'évolution

On conclut que le taux d'évolution des ventes sur les deux années vaut **<u>3,5 %.</u>**

Remarque importante :

Lorsque que l'on augmente de $\mathbf{t}\,\%$ puis que l'on baisse de $\mathbf{t}\,\%$, on ne revient pas à la quantité de départ!

Démonstration (à laisser faire aux élèves) :

Soit P_{ini} une quantité subissant une hausse de $t\ \%$ puis une baisse de $t\ \%$.
Selon la propriété précédente, la quantité finale s'écrit :

$$P_{fin} = P_{ini} \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$P_{fin} = P_{ini} \times \left[1 - \left(\frac{t}{100}\right)^2\right] = P_{ini} - P_{ini} \times \left(\frac{t}{100}\right)^2 .$$

À part lorsque $t = 0$, $P_{fin} \neq P_{ini}$.

4) Évolution réciproque

Définition :

Soit $\mathbf{t}$ le taux d'évolution de la valeur $\mathbf{X_{ini}}$ à la valeur $\mathbf{X_{fin}}$.

On appelle **évolution réciproque** le taux d'évolution $\mathbf{t}'$ permettant de passer de la valeur $\mathbf{X_{fin}}$ à la valeur $\mathbf{X_{ini}}$.

Exemple :

Un boxeur veut changer de catégorie. Il part d'un poids initial de 80 kg et augmente son poids à 100 kg. Après quelques combats perdus, il décide de revenir à son poids initial.

Quelles sont les variations (en %) de son poids ?

On peut représenter la situation comme suit:

80 kg augmenté de $25\ \%$ → 100 kg diminué de $20\ \%$ → 80 kg

$$80 \xrightarrow{\times 1,25} 100 \xrightarrow{\times 0,8} 80$$

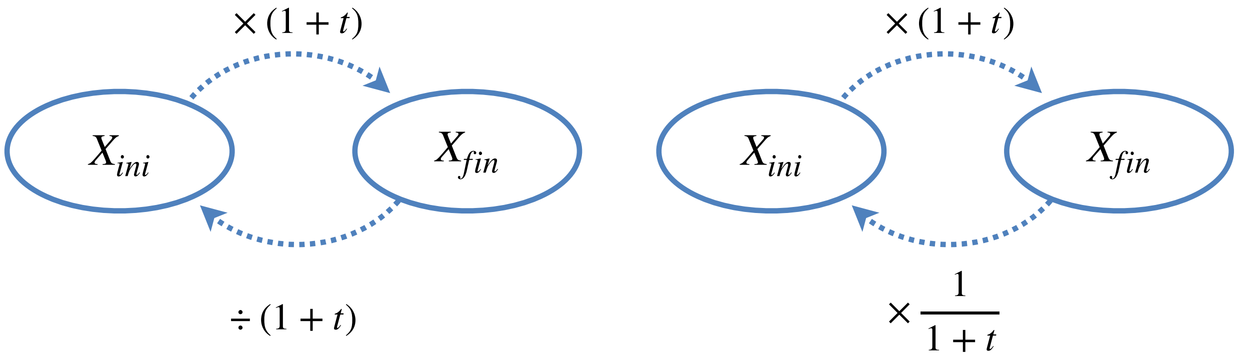
En déduire l'évolution réciproque de 25% :

On dit que $\mathbf{-20\ \%}$ est **l'évolution réciproque** de $+\mathbf{25}\ \%$.

Fonction inverse = division

Propriété :

On appelle $\mathbf{t}$ le taux d'évolution de la valeur $\mathbf{X_{ini}}$ à la valeur $\mathbf{X_{fin}}$.
L'évolution **réciproque** possède le coefficient multiplicateur **inverse** de l'évolution directe.



Méthode : Déterminer et utiliser un taux d'évolution réciproque

a) *La population de pingouins du Cap s'est effondrée de 12 % sur l'année 2014.*
Quel devrait être le pourcentage d'évolution sur l'année 2015 pour que la population revienne à son niveau initial ?

b) *Le nombre de visiteurs étrangers à Paris a augmenté de 16 % sur l'année 2018. On s'attend à qu'il redescende à sa valeur initiale en 2019.*
Quel est le pourcentage de baisse sur l'année 2019 ?

a) On cherche tout d'abord le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 12 %. Il est égal à : $1-\frac{12}{100}=0{,}88$.
On en déduit le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque.
Il est égal à : $\frac{1}{0{,}88}\approx 1{,}136=1+\frac{13{,}6}{100}$.
Pour que la population de pingouins retrouvent sa valeur initiale, il faudrait qu'elle augmente d'environ $13{,}6\,\%$ sur l'année 2015.

b) Le coefficient multiplicateur est dans ce cas égal à $1+\frac{16}{100}=1{,}16$.
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à son inverse.
Donc, on en déduit que $\frac{1}{1{,}16}\approx 0{,}86=1-0{,}14=1-\frac{14}{100}$.
Sur l'année 2019, la baisse a été de $14\,\%$.