6) Résolution d'inéquations à l'aide d'un tableau de signes

Règles : Pour remplir un tableau de signes, on va utiliser la règle des signe. Celle-ci dit que la multiplication ou la division de **deux nombres de même signe donne un nombre positif**. Dans le cas contraire, le nombre résultat est négatif.

❖ Cas d'un produit :

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

➡ Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $3-6x$ et $x+2$.

On va donc utiliser la partie **5)** pour dresser le tableau de signe de $3-6x$ et $x+2$.
D'abord, on résout :

$$3-6x=0 \qquad x+2=0$$
$$6x=3 \qquad x=-2$$
$$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Pour : $3-6x, a=-6<0$ donc la fonction est décroissante et on aura + , - .
Pour : $x+2, a=1>0$ donc la fonction est croissante et on aura - , + .

➡ On aura donc le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-6x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ si $-2<x<\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ s'écrit : $S=\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

Exemple :

a. $(x-3)(x-1) \leq 0$ **b.** $(x-9)(x-5) < 0$

c. $(2x+4)(3x-3) \geq 0$ **d.** $(15-5x)(x+1)(x+2) > 0$

❖ Cas d'un quotient :

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante : $\dfrac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

➡ **Valeur interdite.** L'équation n'est pas définie lorsque $3x - 2 = 0$, donc $x = \dfrac{2}{3}$. Cette valeur est une valeur interdite.

➡ Le signe de $\dfrac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe de $2-6x$ et de $3x-2$.

On va donc utiliser la partie **5)** pour dresser le tableau de signe de $3-6x$ et $x+2$.

D'abord, on résout :

$$2-6x=0 \qquad 3x-2=0$$
$$6x=2 \qquad 3x=2$$
$$x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad x=\frac{2}{3}$$

Pour : $2-6x, a=-6<0$ donc la fonction est décroissante et on aura + , - .

Pour : $3x-2$, $a=3>0$ donc la fonction est croissante et on aura - , + .

➡ On aura donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

double barre = valeur interdite

Conclusion :

On en déduit que $\dfrac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ si $x \leq \dfrac{1}{3}$ ou si $x \geq \dfrac{2}{3}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ s'écrit : $S = \left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]\dfrac{2}{3};\infty\right[$.

Exemple :

a. $\dfrac{2x+8}{x-9} > 0$ **b.** $\dfrac{6x+1}{7-x} \geq 0$ **c.** $\dfrac{x+5}{3x-5} \leq 0$ **d.** $\dfrac{-2x-10}{4x-3x} \geq 0$

7) Cas avec factorisation

Méthode : Résoudre une inéquation grâce à une factorisation

Résoudre par le calcul dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 > 7$

Pour appliquer la méthode précédente, il faut trouver une expression factorisée…

➡ $x^2 > 7 \iff x^2 - 7 > 0 \iff x^2 - \sqrt{7}^2 > 0 \iff \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) > 0$

car c'est une identité remarquable ! On sait en effet que $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} - \mathrm{B})(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ donc en posant $A = x$ et $B = \sqrt{7}$, on trouve bien le résultat ci-dessus.

➡ Le signe de $\left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)$ dépend du signe de chaque facteur, comme on a vu précédemment ! La méthode est la même : à faire par vous-même.