Un problème de salaires (Bac Polynésie 2017)

Une étude de l'INSEE a listé l'évolution en France des salaires nets annuels moyens de 1990 à 2010.

Tableau (disponible sur bouillotvincent.github.io) :

Année (indice depuis 1990)	Salaire annuel moyen (Femmes)	Salaire annuel moyen (Hommes)
0	4519,74 €	18824,34 €
2	4737,97 €	18521,85 €
4	6575,64 €	19494,67 €
6	6840,08 €	19388,54 €
8	7309,45 €	20353,58 €
10	8208,67 €	21227,61 €
12	9728,14 €	21656,75 €
14	9811,86 €	24011,65 €
16	11055,17 €	25322,97 €
18	13366,32 €	25875,93 €
20	12169,41 €	26330,00 €
22	14218,41 €	27326,08 €
24	17059,87 €	31569,03 €
26	19574,49 €	32394,49 €
28	20553,24 €	33364,61 €
30	23538,37 €	33993,03 €

Modélisation 1 (fonction) :

En se servant des données de cette étude, on modélise l'évolution des salaires nets annuels moyens jusqu'en 2020 :

❖ Pour les hommes par la fonction h définie sur $[0; 30]$ par :

$$h(x) = 0{,}25 \times x^3 + 2 \times x^2 + 318 \times x + 17865$$

❖ Pour les femmes par la fonction f définie sur $[0; 30]$ par :

$$f(x) = 0{,}6 \times x^3 - 13 \times x^2 + 470 \times x + 13324$$

Ainsi, $h(0)$ désigne le salaire net annuel des hommes en 1990, $f(1)$ désigne le salaire net annuel des femmes en 1991, etc…

1) Calculer h(15) et f(15) puis interpréter les résultats.

2) Calculer l'écart des salaires nets annuels moyens prévus par ce modèle entre les hommes et les femmes en 2020.

3) Montrer que l'écart entre ces deux salaires peut être modélisé par la fonction g définie sur $[0,30]$ par $g(x) = -0,35 \times x^3 + 15 \times x^2 - 152 \times x + 4541$

$g(x) = h(x) - f(x)$ avec

$$h(x) = 0,25 \times x^3 + 2 \times x^2 + 318 \times x + 17865$$
$$\underline{-f(x) = 0,6 \times x^3 - 13 \times x^2 + 470 \times x + 13324\ .}$$
$$h(x) - f(x) = -0,35x^3 + 15x^2 - 152x + 4541$$

4) On note g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

$$g(x) = -0,35 \times x^3 + 15 \times x^2 - 152 \times x + 4541$$

$$g'(x) = -0,35 \times 3x^2 + 15 \times 2x - 152 \times 1 + 0$$
$$= -1,05 \times x^2 + 30 \times x - 152$$

5) Déterminer graphiquement le signe de $g'(x)$ sur $[0,30]$.

Graphiquement, négative sur $[0; 6,5]$ et sur $[22; 30]$ et positive sur [6,5 ; 22]

x	0		6.5		22		30
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

6) **a.** En quelle année l'écart a-t-il été maximum ?

En l'année 22 depuis 1990: donc l'écart de salaire a été maximum en 1990+22 = 2012

7) **b.** Peut-on affirmer que l'écart entre les salaires nets annuels moyens des hommes et des femmes n'a fait que diminuer depuis 1990?

Non. Il a même augmenté à un moment.

<u>Modélisation 2 (suites et tableur):</u>

En se servant à nouveau des données de cette étude, on va modéliser l'évolution des salaires nets annuels moyens jusqu'en 2020 par deux suites $H(n)$ pour les hommes et $F(n)$ pour les femmes.

1) Rappelez pourquoi l'utilisation des suites convient bien à la situation étudiée.
2) À l'aide du fichier fourni ci-dessus et du tableur (on pourra s'aider de diagramme en nuage de points), montrez pourquoi la suite $F(n) = 5000 \times 1.052^n$ donne une bonne approximation de l'évolution des salaires annuels moyen des femmes.
3) Comment s'appelle une telle suite ? Précisez sa raison et son premier terme.
4) On a trouvé de manière expérimentale que le salaire annuel moyen des hommes était bien modélisé par une augmentation régulièrement de 2,5% par an. Donnez la valeur du coefficient multiplicateur associé à une telle augmentation puis donnez le lien entre u_{n+1} et u_n .
5) Si on prend un salaire de base en 1990 de 17000 euros pour les hommes, on obtient une bonne approximation de la réalité. Donner la formule explicite de la suite $H(n)$ ainsi obtenue.
6) À l'aide du tableur déterminez en quelle année l'écart a été maximum et comparer votre résultat à la Partie 1.
7) À l'aide du tableur, déterminez en quelle année le salaire des femmes va dépasser le salaire des hommes.