Chapitre 9 : Loi Binomiale

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Rappels :

- Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.
- L'**univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers Ω.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est l'univers.

L'événement A « On obtient un nombre premier. » s'écrit aussi $A = \{2; 3; 5\}$.

On considère l'événement élémentaire E : « On obtient un 1 ».

On écrit : $E = \{1\}$.

Définition :

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini Ω.

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe un nombre réel à une issue.

Exemple :

Dans l'expérience aléatoire précédente, considérons le jeu suivant

- Si le résultat est un 1 ou un 6, on gagne 10 € ;
- Sinon, on perd 4 €.

On a ici défini une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs réelles 10 ou -4.

Par exemple, dans notre cas, on a : $X(1) = 10$, $X(2) = -4$ ou $X(6) = 10$.

2) Loi de probabilité

Définition :

On appelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X et on note $P(X = x_1)$ la probabilité de l'événement x_1 .

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est un tableau reliant chaque valeur x_i à une probabilité $P(X = x_i)$.

Remarques :

- On note parfois $p_i = P(X = x_i)$.
- La somme de tous les p_i est toujours égale à 1.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple initial.

- Chaque issue d'un lancer de dé est équiprobable et vaut $\frac{1}{6}$.
- La variable aléatoire X est égale à 10 dans le cas où $X = 1$ ou $X = 6$.
- La probabilité que la variable aléatoire X soit égale à 10 est donc égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

On note : $P(X = 10) = \frac{1}{3}$.

De la même façon, on trouve : $P(X = -4) = \frac{2}{3}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est représenté dans un tableau :

x_i	-4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On remarque que dans cet exemple : $P(X = -4) + P(X = 10) = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Considérons l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :
- Si on tire un cœur, on perd 5 €.
- Si on tire un roi, on gagne 7 €.
- Si on tire une autre carte, on gagne 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à un tirage, associe un gain ou une perte.

Déterminons la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -5, 7, 1 mais aussi 2.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 7(roi) -5 (cœur) $= 2$.

- La carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = -5$.

$P(X = -5) = \frac{7}{32}$.

- La carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 7$.

$P(X = 7) = \frac{3}{32}$.

- La carte tirée est le roi de cœur, $X = 2$.

$P(X = 2) = \frac{1}{32}$.

- La carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = 1$.

$P(X = 1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X s'écrit dans le tableau suivant :

x_i	-5	1	2	7
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{32}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$

On peut constater que : $P(X = -5) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 7) = 1$.

3) Arbre pondéré

Pour décrire la **répétition** d'expérience(s) aléatoire(s), il est courant d'utiliser un **arbre pondéré** représentant toutes les issues possibles. Un arbre est un graphe ordonné constitué de **branches** et de **noeuds** contenant toutes les informations relatives aux issues d'une expérience aléatoire.

Propriétés :

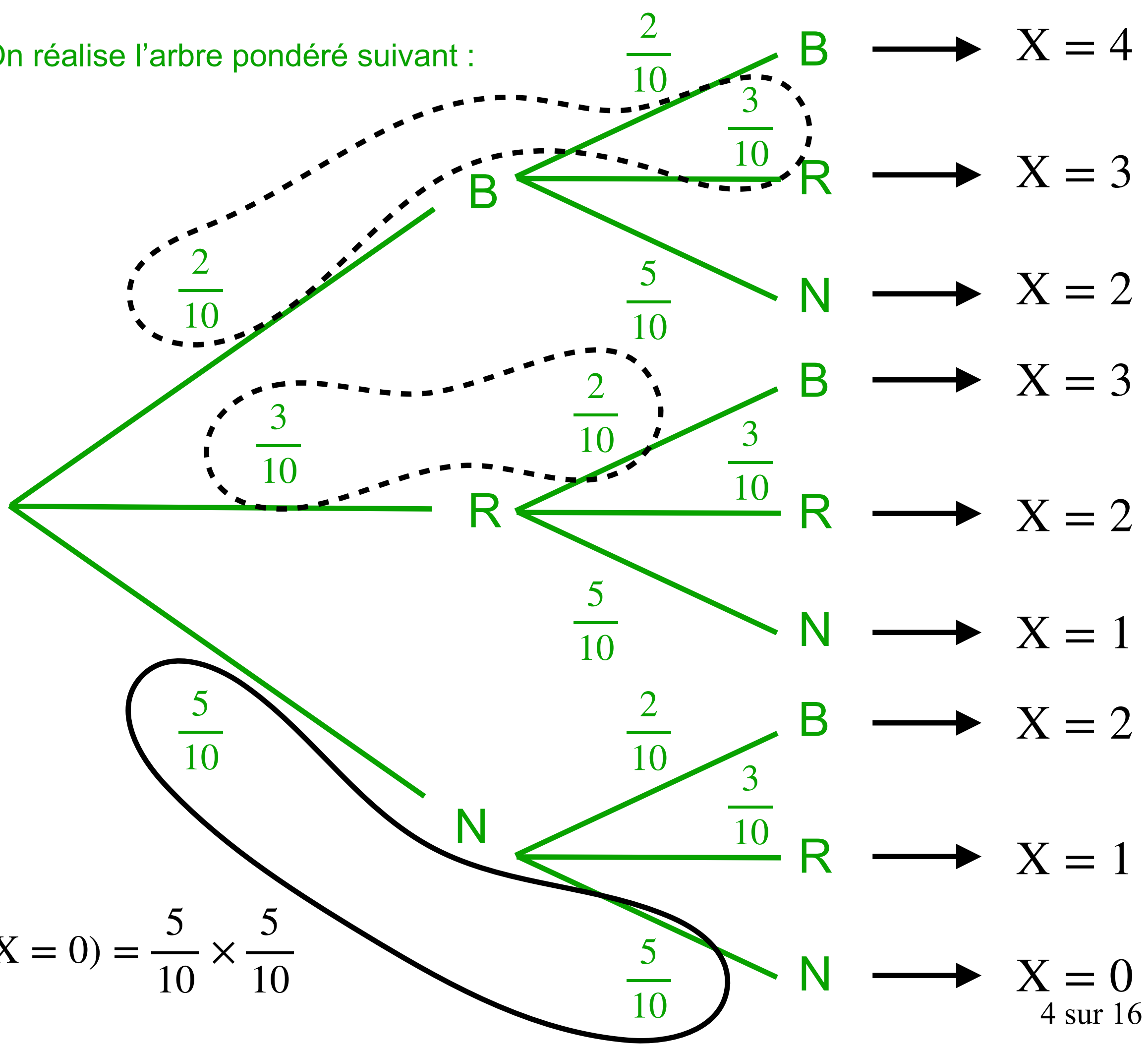
Sur un arbre pondéré :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1 ;
- la probabilité d'un chemin jusqu'à un noeud est le produit des probabilités rencontrées lors du parcours de ce chemin jusqu'à ce noeud.
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

Exemple : On dispose d'une urne contenant 2 boules blanches B notées "+2", 3 boules rouges R notées "+1" et 5 boules noires N notées "0". On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.
Soit la variable aléatoire X égale à la somme des nombres notées sur les boules.

On veut déterminer la loi de probabilité de X.

On réalise l'arbre pondéré suivant :



$$P(X=0) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10}$$

On en déduit la loi de probabilité de X en calculant $P(X = x_i)$.

$$P(X=0) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$$ (courbe solide)

$$P(X=1) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{100}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{29}{100}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{12}{100}$$ (courbes en pointillés)

$$P(X=4) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$$

On remarque que la somme des probabilités fait bien 1.

La loi de probabilité se résume dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{4}{100}$

4) Espérance d'une variable aléatoire

Définitions :

Soit une variable aléatoire X prenant n valeurs x_i de probabilité $p_i = P(X = x_i)$

L'espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ défini par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \ldots p_n \times x_n$$

Rem : Le symbole Σ que l'on prononce "sigma" signifie que l'on fait la somme des éléments à l'intérieur du sigma.

Exemple :
avec l'exemple du paragraphe 3) (loi de probabilité ci-dessus), il suffit de calculer :

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{100} + 1 \times \frac{25}{100} + 2 \times \frac{30}{100} + 3 \times \frac{29}{100} + 4 \times \frac{4}{100} = 1{,}88$$

Donc, l'espérance vaut 1,88. Cela signifie que si on répète l'expérience 100 fois, on avoir une somme de 188 en moyenne.

II. Schéma de Bernoulli

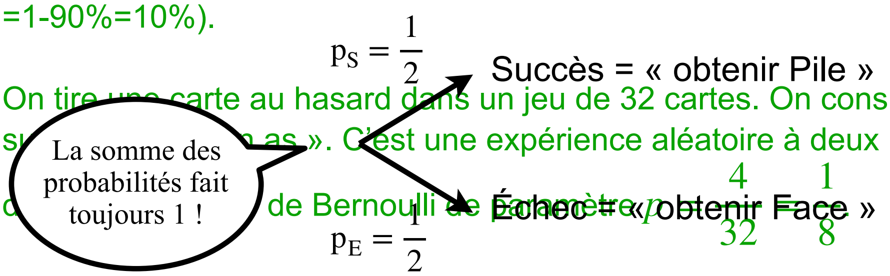
1) Définition

Définition :
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à **deux issues** que l'on peut nommer « succès » et « échec ». Le paramètre p décrit la probabilité du succès.

Exemples :

a) Un tennisman a un taux de réussite de 90% au premier service. Il fait un premier service : il réussit (succès avec p=90%) ou il rate (échec avec =1-90%=10%).

b) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère comme s... as ». C'est une expérience aléatoire à deux issues. C'est d... de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

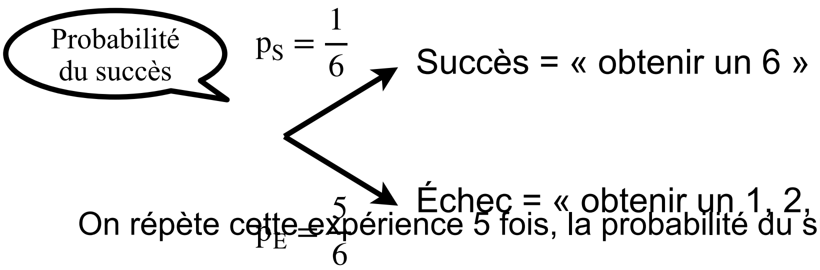


Définition :
Un schéma de Bernoulli est la **répétition** de n épreuves de Bernoulli de façon **indépendante** (les épreuves ne dépendent pas l'une de l'autre).

Exemples :

a) On lance un dé **5 fois de suite** et on note à chaque fois le résultat.
On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
À chaque lancer, on considère comme succès « *obtenir un six* » et comme échec « *ne pas obtenir un six* ».

Pour chaque expérience (i.e. lancer de dé), on peut représenter la situation comme ci-dessous :



On répète cette expérience 5 fois, la probabilité du succès est égale à $\frac{1}{6}$

On dit que les **paramètres du schéma de Bernoulli** sont $n = 5$ et $p =$

b) On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.
On considère comme succès « *obtenir Pile* » et comme échec « *obtenir Face* ». C'est encore un schéma de Bernoulli.

Dans ce cas, pour chaque expérience (le lancer d'une pièce), on peut faire l'arbre de probabilité ci-dessous :

On répète cette expérience 20 fois, la probabilité du succès est égale à 0,5.
On dit que les **paramètres du schéma de Bernoulli** sont $\mathrm{n} = 20$ et $\mathrm{p} = \frac{1}{}$

Probabilité d'avoir Blanc puis Rouge

c) Une rue comporte 5 feux tricolores. Je passe en scooter successivem devant ces feux tricolores.
Les expériences sont identiques et on considère « avoir un feu vert » comme un succès. Cependant, **les 5 expériences ne sont pas indépendantes** (phénomène de *vague verte*).

Ce n'est donc pas un schéma de Bernoulli car le résultat d'une expérience dépend du résultat des autres.

2) <u>Représentation d'un schéma de Bernoulli: arbre pondéré</u>

<u>Méthode :</u> Représenter un schéma de Bernoulli grâce à un arbre pondéré

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2. En utilisant l'arbre, déterminer les probabilités suivantes :
   a) On tire deux boules blanches.
   b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
   c) On tire au moins une boule blanche.

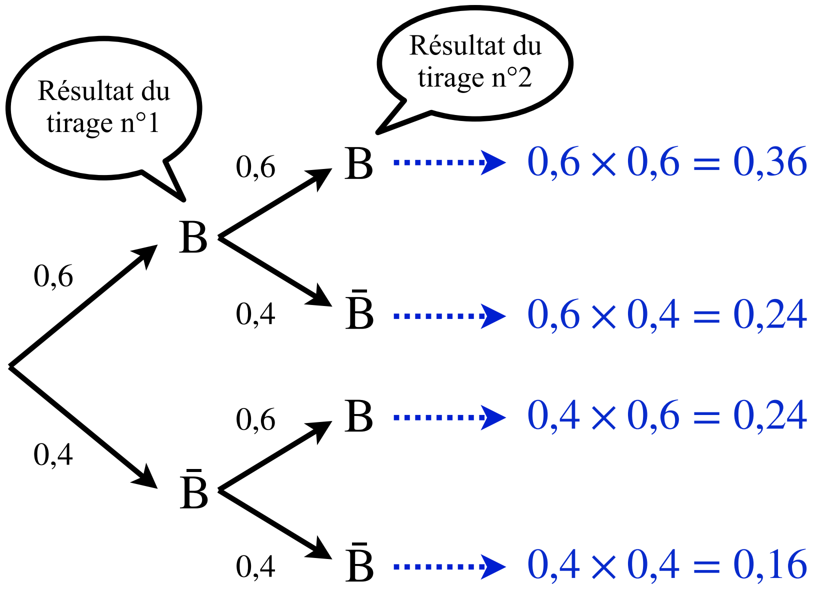
1. On va choisir de noter B l'événement : « On tire une boule blanche ».
   L'événement contraire, noté $\bar{\mathrm{B}}$, se traduit par : « On tire une boule rouge ».

En tout, il y a **cinq boules** dans l'urne.

Trois de ces boules sont blanches donc : $p(B) = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

De la même manière, on en déduit : $p(\bar{B}) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \quad \left(= 1 - \dfrac{3}{5} \right)$.

Tous les résultats de cette expérience peuvent être résumés dans un **arbre pondéré :**

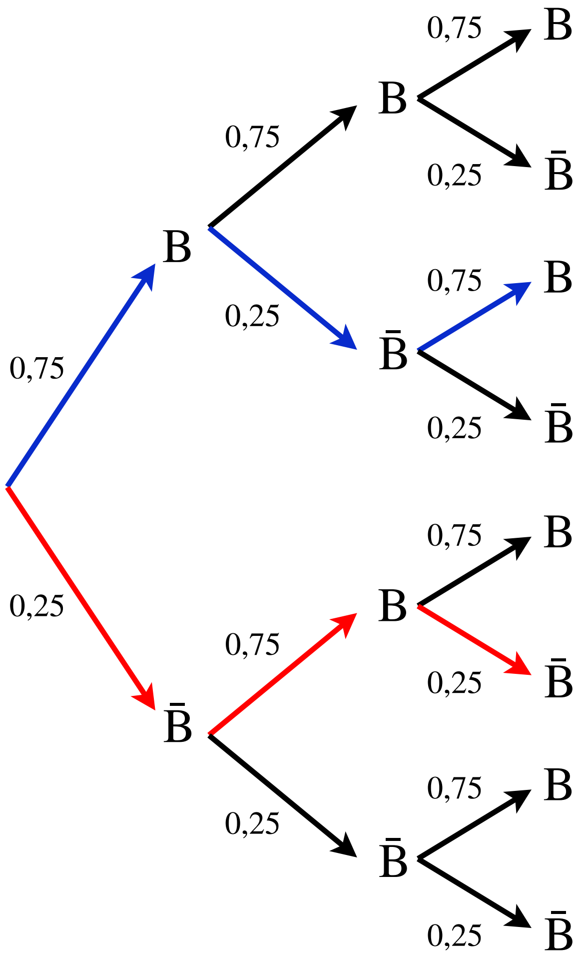


2. À partir de l'arbre, on peut maintenant lire les réponses :
   a) Obtenir deux boules blanches correspond à la première ligne $(B; B)$.
   Donc : $P_a = 0{,}36$.

   b) On peut obtenir une boule blanc et une boule rouge de deux manières : « Avoir Blanc puis Rouge » ou « Avoir Rouge puis Blanc ». On fait la somme des deux lignes $(B; \bar{B})$ et $(\bar{B}; B)$.
   Donc : $P_b = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

   c) On tire **au moins une** boule blanche signifie que l'on doit sélectionner toutes les branches de l'arbre contenant un événement B. On doit donc prendre toutes les branches sauf celle du bas.
   Donc : $P_b = 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}36 = 0{,}84$.

<u>Technique de calcul sur un arbre pondéré :</u>



Sur un chemin de branches,
on **multiplie** les probabilités

$$P = 0{,}75 \times 0{,}25 \times 0{,}75 \approx 0{,}14$$

Sur un chemin de branches,
on **multiplie** les probabilités

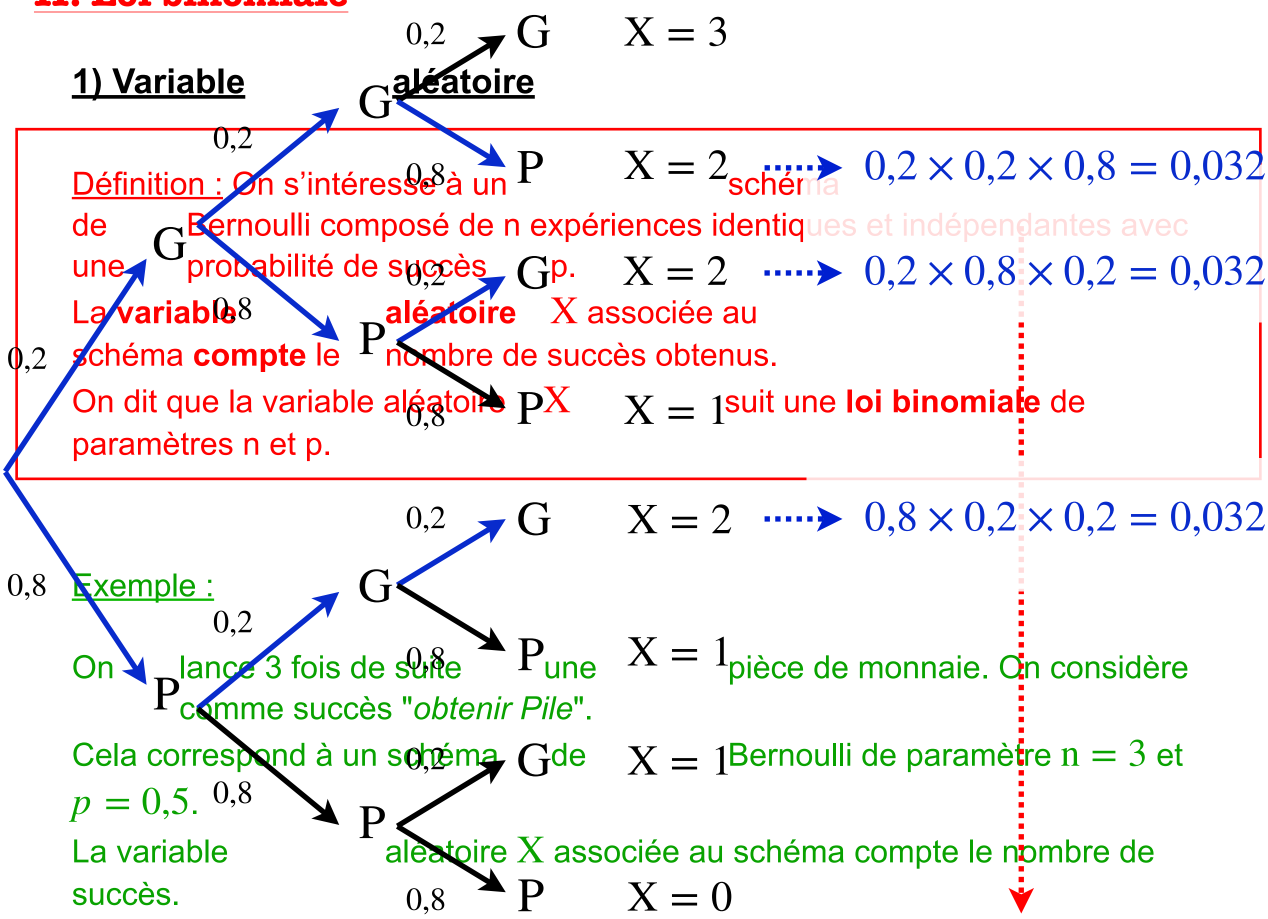
$$P = 0{,}25 \times 0{,}75 \times 0{,}25 \approx 0{,}05$$

Les probabilités des feuilles
s'additionnent.

$$P = 0{,}05 + 0{,}14 = 0{,}19$$

II. Loi binomiale

1) Variable aléatoire



Définition : On s'intéresse à un schéma de Bernoulli composé de n expériences identiques et indépendantes avec une probabilité de succès p.
La **variable aléatoire** X associée au schéma **compte** le nombre de succès obtenus.
On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Exemple :
On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*".
Cela correspond à un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 3$ et $p = 0{,}5$.
La variable aléatoire X associée au schéma compte le nombre de succès.
Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note $P(X = 3)$.

$P(X = 2) = 0{,}032 \times 3 = 0{,}096$

Trouver la valeur de $P(X = 3)$:

$$P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2) Trouver une loi binomiale à partir d'un arbre pondéré

Activité : 3 tirages successives de 4 cartes de Jungle Speed. P(X=2) avec X = tirer une carte de couleur bleue.

Méthode : Utiliser une loi binomiale

Un sac contient 2 boules gagnantes et 8 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans le sac.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules gagnantes.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Calculer la probabilité $P(X = 2)$ d'obtenir **exactement** 2 boules gagnantes.

c) Calculer la probabilité $P(X \geq 2)$ d'obtenir **au moins** 2 boules gagnantes.

a) On répète **3** fois de manière **indépendante** une expérience **aléatoire** à **deux issues** : boules gagnantes et boules perdantes. C'est un schéma de Bernoulli.

Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{2}{10} = 0{,}2$

X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = 0{,}2$.

b) On construit un arbre pondéré et on repère le nombre de branches qui nous amène à tirer **exactement** 2 boules gagnantes :

C'est un arbre à 3 niveaux car on répète 3 fois l'expérience.

La probabilité d'obtenir 2 boules gagnantes est égale à 0,096 ou 9,6%.

c) « Avoir au moins 2 boules gagnantes » signifie en avoir 2 ou 3.

Donc : $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$.

or $P(X = 3) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$

donc : $P(X \geq 2) = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104 = 10{,}4\,\%$

La probabilité d'obtenir **au moins** 2 boules gagnantes est égale à 10,4%.

2) Trouver une loi binomiale à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité P(X=5).
c) Calculer la probabilité P(X≤5).
d) Calculer la probabilité P(X≥3).

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.
Le **succès** est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres : n = 7 et p = $\frac{2}{3}$.

b) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFdP* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFdP(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve P(X=5) ≈ 0,31.
La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFRép* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve $P(X \leq 5) \approx 0,74$.
La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$
$\approx 1 - 0,045$ (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)
$\approx 0,955$.

4) Représentation graphique

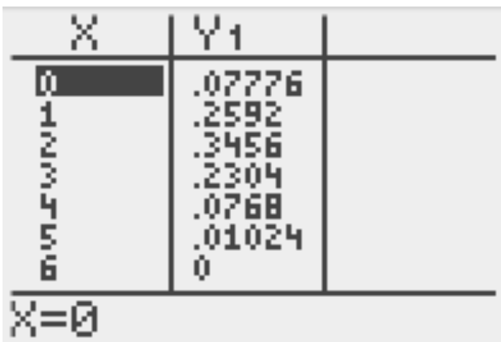
Méthode : Représenter une loi binomiale par un diagramme en bâtons

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,4$.
Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X=k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

Avec Texas Instruments :
Touche « *Y=* » et saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

Afficher la table : Touches « *2nd* » et « *GRAPH* » :



X	Y1
0	.07776
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.01024
6	0

X=0

Avec Casio :
Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;

Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
Table Func   :Y=
Y1:BinomialPD(X,5,0.4)
```

Afficher la table : Touche « *TABL* » :

X	Y1
1	0.0777
2	0.2592
3	0.3456
4	0.2304

Avec le tableur :

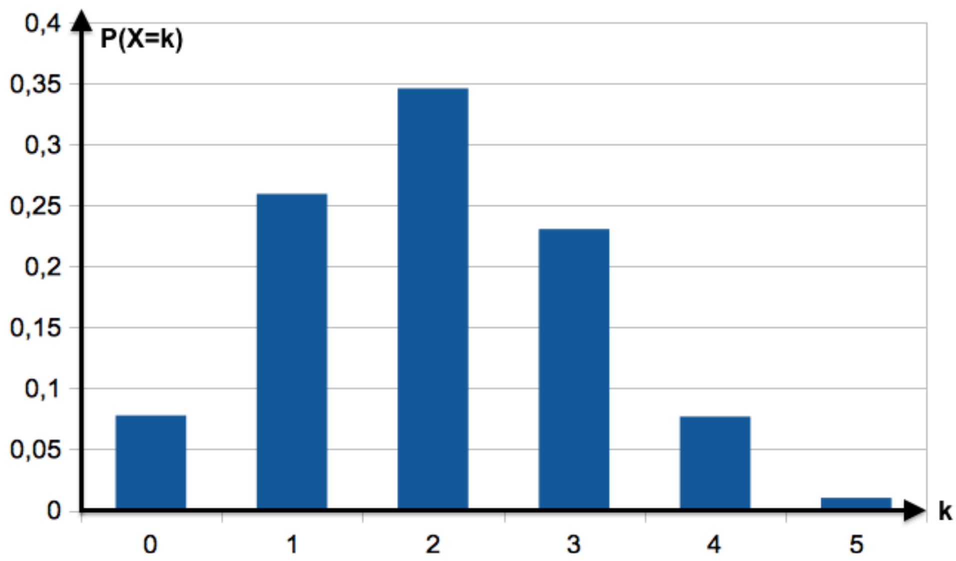
Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

B1 =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



III. Espérance de la loi binomiale

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la **loi binomiale de paramètres n et p.**
Si on répète un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé **l'espérance de X**.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. L'espérance s'écrit alors : $E(X) = n \times p$

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

Un QCM comporte 6 questions. A chaque question, quatre solutions sont proposées et une seule est exacte.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.
On répond au hasard à chaque question.
1) Combien de bonnes réponses peut-on espérer obtenir ?
2) Quelle note peut-on alors espérer obtenir ?

1) La situation est une situation de Bernoulli car il y a répétitions d'expériences aléatoires et indépendantes ($n = 6$) avec deux issues : réponse correcte (succès $p = \frac{1}{4}$) ou réponse fausse (échec $p = \frac{3}{4}$) .

   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.
   X suit une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = \frac{1}{4}$
   On en déduit : $E(X) = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$.
   Si on fait le QCM **100 fois**, on peut espérer obtenir $1,5 \times 100 = 150$ bonnes réponses en répondant au hasard.

2) Si on répète le QCM un grand nombre de fois, on va obtenir $1,5 \times 0,5 = 0,75$ points en répondant au hasard.