Chapitre 5 : Récursivité

La récursivité est une méthode de programmation permettant d'accélérer (ou de simplifier) le fonctionnement d'un algorithme. Bien que rarement obligatoire, tout étudiant en informatique doit l'avoir étudiée et comprise.

I. Introduction aux piles d'exécution

1) Notion de piles

❐ — À faire vous-même **1** —

Vous trouverez sur bouillotvincent.github.io le programme ci-dessous contenant deux fonctions.

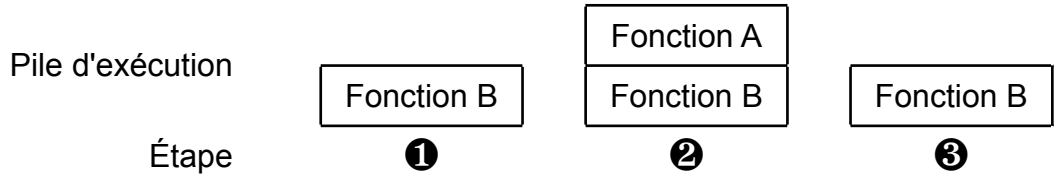
```
def fonctionA():
    print("Début fonctionA")
    for i in range(5): print(f"fonctionA {i}")
    print ("Fin fonctionA")

def fonctionB():
    print("Début fonctionB")
    i=0
    while i<5:
        if i==3:
            fonctionA()
            print("Retour à la fonctionB")
        print(f"fonctionB {i}")
        i = i + 1
    print ("Fin fonctionB")

fonctionB()
```

- Analysez le programme en prédisant son fonctionnement.
- Testez ce programme et expliquez le résultat obtenu.

Explications:

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons une fonction B qui appelle une autre fonction A. L'élément à remarquer dans le programme page précédente est que l'exécution de fonction B est **interrompue** pendant l'exécution de fonction A. Une fois l'exécution de fonction A terminée, l'exécution de fonction B reprend là où elle avait été interrompue.

Pour gérer ces appels de fonctions au sein d'autres fonctions, le système utilise une "pile d'exécution". Une pile d'exécution permet d'enregistrer des informations sur les fonctions en cours d'exécution dans un programme. On parle de pile, car la dernière fonction appelée doit être menée à son terme avant de reprendre la fonction précédemment appelée : les exécutions successives "s'empilent" donc les unes sur les autres. Si nous nous intéressons à la pile d'exécution du programme étudié ci-dessus, nous obtenons le schéma suivant :



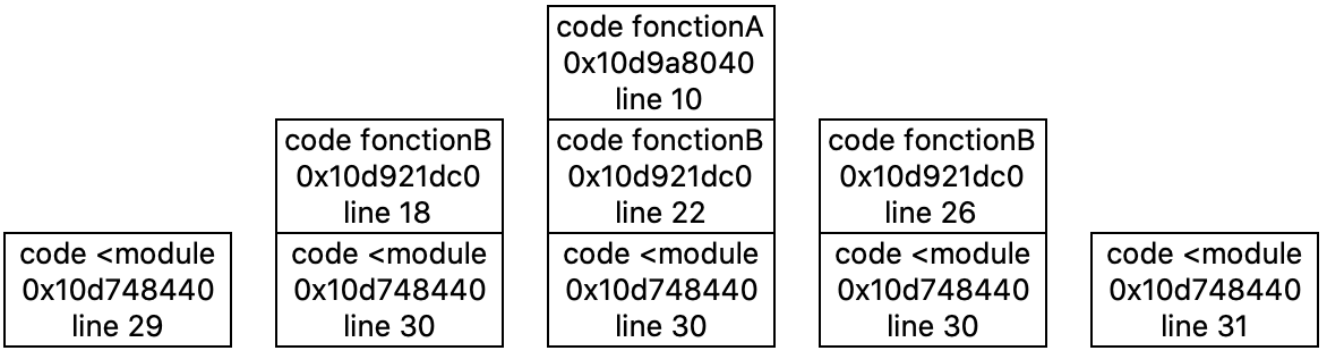
❐ — À faire vous-même **2** —

Il existe plusieurs modules Python permettant d'avoir accès à la pile d'exécution. La bibliothèque **`inspect`** est particulièrement utile : l'instruction **`inspect.stack()`** renvoie une liste contenant la pile d'exécution complète.

Dans cet exercice, j'ai créé un fichier appelé drawStacks.py qui contient une classe **`dessinePile`** permettant de représenter l'évolution de la pile. Nous utiliserons ce fichier comme un module en l'important grâce à l'instruction : **`from drawStacks import ….`**

Nous allons utiliser ces deux modules pour comprendre exactement le fonctionnement de la pile d'exécution.

- Ouvrez la bibliothèque drawStacks et étudiez le fonctionnement de dessinePile.
- En introduisant les lignes adéquates dans le code du *à faire vous-même 1*, représentez précisément l'évolution de la pile d'exécution pour les fonctions A et B.
- À votre avis, que représente la ligne commençant par 0x ?



Nous pouvons "découper" l'exécution de ce programme en 5 étapes :

- le programme principal s'exécute jusqu'à la ligne 30 : c'est le "module" ;
- À la ligne 30, le programme principal est "mise en pause" et la fonction B s'exécute jusqu'à l'appel de la fonction A à la ligne 22. L'exécution de la fonction B est donc mis en pause à la ligne 22 :

l'adresse mémoire (0x10d921dc0) de la prochaine instruction machine à exécuter est conservée dans la pile d'exécution pendant l'exécution de la fonction A ;

- une fois que la fonction A est terminée, on termine l'exécution de la fonction B ;
- le programme principal reprend la main et continue après la ligne 31.

La fonction située au sommet de la pile d'exécution est en cours d'exécution : toutes les fonctions situées "en dessous" sont mises en pause jusqu'au moment où elles se retrouveront au sommet de la pile. Quand une fonction termine son exécution, elle est automatiquement retirée du sommet de la pile (on dit que la fonction est dépilée).
La pile d'exécution permet de retenir la prochaine instruction à exécuter au moment où une fonction sera sortie de son ""état de pause" (qu'elle se retrouvera au sommet de la pile d'exécution).

Remarque importante : Dans l'exemple ci-dessus, on retrouve une variable i dans les deux fonctions A et B. Toutefois, ces deux variables sont différentes : chaque fonction possède sa propre liste de variables. La bibliothèque inspect permettrait de le voir mais cela va au-delà du sujet de ce chapitre.

2) Notion de récursivité

Dans la section précédente, une fonction B appelait une fonction A. Une fonction peut bien sûr s'appeler elle-même : dans ce cas, on parle de fonction récursive.

Définition :
Une fonction récursive est une fonction qui **s'appelle elle-même** dans sa définition.

— À faire vous-même **3** —

- Que va faire le programme suivant ?

```
def fct():
    print(f"Je m'appelle moi-même !")
    fct()
fct()
```

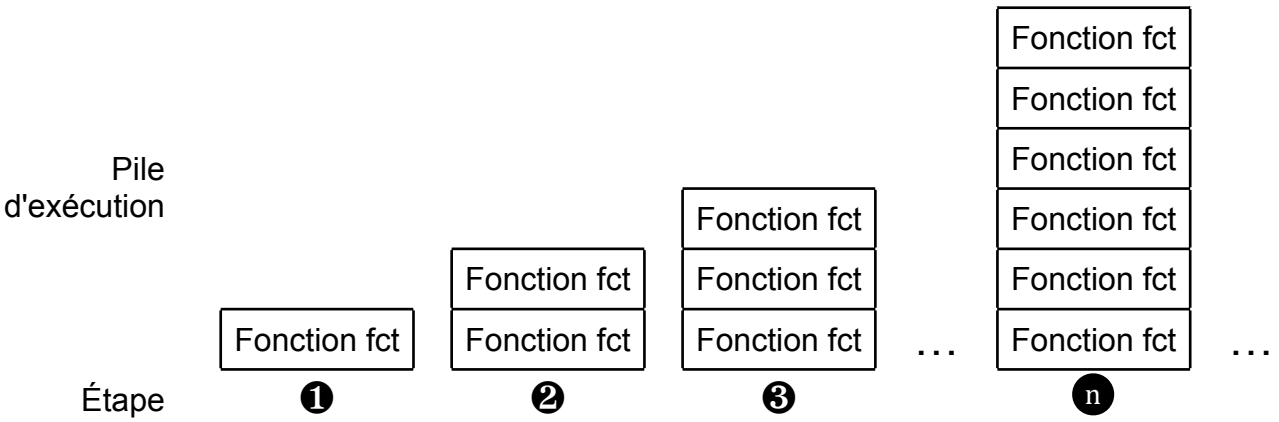
- Lorsque vous lancez ce programme, que constatez-vous ?
- Expliquez la réponse à votre question précédente en utilisant une représentation en terme de piles comme dans la section précédente.

Explications :

Comme vous pouvez le constater, nous avons une erreur dans la console Python :
RecursionError: maximum recursion depth exceeded while calling a Python object

Dans cette fonction, on empile des fonctions dans la piles d'exécution sans jamais les dépiler : la taille de la pile d'exécution augmente sans cesse. Pour éviter de saturer la RAM de l'ordinateur, Python interrompt le programme en générant une erreur quand la pile d'exécution dépasse une certaine taille.

Cette erreur est assez simple à comprendre si on regarde l'évolution de la pile d'exécution :



Conclusion :

Quand on écrit une fonction récursive, il est nécessaire de penser à mettre en place une condition qui permettra à un moment ou à un autre de mettre fin aux appels récursifs.

II. Utilisation des algorithmes récursifs

1) Initiation à la récursivité : premier problème

Pour définir la puissance n-ième d'un nombre, on a l'habitude d'écrire la formule :

$$x^n = x \times x \times \ldots \times x \times x$$

Cette formule semble simple et facile à lire : x est simplement répétée n fois.

Exercice :

1) Écrire une fonction Python qui renvoie la valeur de x^n sans recourir à la récursivité et **sans utiliser l'opérateur puissance ****. x et n seront les arguments de la fonction.
2) Cette fonction est-elle directement liée à la formule ci-dessus ?

La fonction que vous avez écrite demande l'utilisation d'une variable intermédiaire, ce qui est étrange compte tenu du fait que la formule initiale n'en comporte pas.

Une autre manière d'aborder cette question est de réécrire notre problème mathématique sous la formule d'une suite :

$$\text{puissance}(x, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \times \text{puissance}(x, n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Remarque : On a ici **défini** la fonction puissance à partir de d'elle-même et d'une condition initiale.

Exercice :

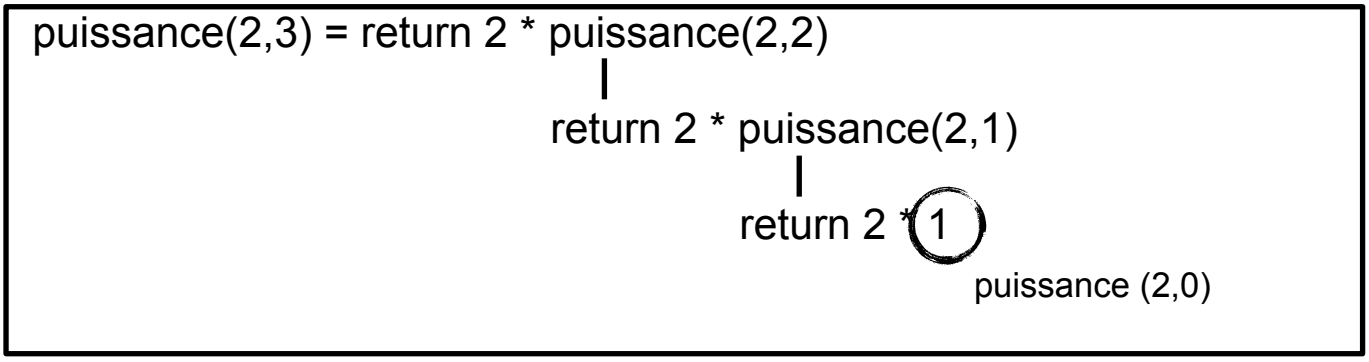
Démontrez que la suite ci-dessus revient bien à la définition initiale de x^n. Un raisonnement par récurrence est demandée.

Propriété :
Une structure informatique récursive est toujours mathématiquement associée à la notion de définition par récurrence.

À faire vous-même 4

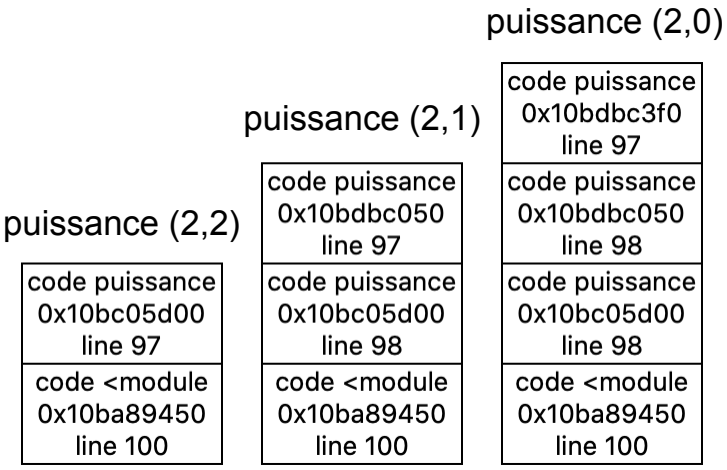
- Programmer la fonction puissance de manière récursive à partir de la définition ci-dessus. Les deux arguments x et n seront conservés.
- Tester votre fonction pour x=2 et n=3 puis n=10.

La fonction puissance, représentée dans **un arbre d'appels**, fonctionne comme suit :



En terme de pile d'exécution (voir schéma ci-contre), l'appel à puissance(2,0) va être au sommet de la pile, suivi par puissance(2,1) suivi par puissance(2,2) etc.

Remarque : dans l'exemple précédent, le dépilage n'est pas accessible car return est une instruction bloquante.



À faire vous-même 5

Nous allons étudier le calcul de la factorielle grâce à une fonction récursive.

D'après Wikipédia : "En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n".

Par exemple : la factorielle de 3 est : 3 x 2 x 1 = 6 ; la factorielle de 4 est 4 x 3 x 2 x 1 = 24 ; la factorielle de 5 est 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 ...

Si on note la factorielle de n par n!, on a :

- 0! = 1 (par définition)
- Pour tout entier n > 0, n! = n x (n – 1)!

Vous allez utiliser cette définition de la factorielle pour définir une fonction récursive appelée fact. Cette fonction prendra un nombre n en argument en renverra la factorielle de ce nombre. Tester votre fonction pour n=5 puis n=10.

2) Double récursion

En mathématiques, une suite définie par récurrence est une suite définie par son premier terme et par une relation de récurrence, qui définit chaque terme à partir du précédent ou **des précédents** lorsqu'ils existent. Dans le cadre d'une double récursion, on s'intéresse aux deux termes précédents.

Prenons l'exemple de la suite de Fibonacci qui est définie par :

$u_0 = 0,\ u_1 = 1$

et par la relation de récurrence suivante avec n entier et n > 1 : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Ce qui nous donne pour les 6 premiers termes de la suite de Fibonacci :

$u_0 = 0$

$u_1 = 1$

$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$

$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$

$u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$

$u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$

❐ À faire vous-même **6**

En vous aidant de ce qui a été fait pour la fonction fact, écrivez une fonction récursive **fib** qui donnera le n-ième terme de la suite de Fibonacci.

Cette fonction prendra en argument l'entier n.

3) Erreurs et bonnes pratiques

Règles importantes :

Lorsque l'on définit une structure récursive, il faut s'assurer :

- que la récursion va se terminer en prenant garde à définir un (ou plusieurs) cas terminal.
- que toutes les valeurs utilisées par une fonction soient dans le domaine de définition de la fonction
- qu'il y ait bien une définition pour toutes les valeurs du domaine.

Exemple :
Expliquez pourquoi les fonctions récursives ci-dessous sont incorrectes :

- $f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ n + f(n+1) \text{ si } n > 0 \end{cases}$
- $g(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ n + f(n-3) \text{ si } n > 0 \end{cases}$ avec n entier naturel
- $h(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ n + h(n-1) \text{ si } n > 1 \end{cases}$

Principe :
Une fois que l'on a suivi les trois règles ci-dessus, lorsque l'on écrit une fonction récursive, il faut toujours supposer que les appels récursifs produisent les bons résultats, sans chercher à construire de tête l'arbre des appels.

4) Optimisation de fonctions récursives

Il est possible d'améliorer de manière très importante les performances d'une fonction récursive en sauvegardant les résultats des appels précédents (programmation dynamique — voir chapitre ???) ou en définissant notre fonction récursive de manière plus astucieuse.

Exemple : fonction puissance

1) Justifiez la définition ci-dessous :

$$\text{puissance}(x,n) = \begin{cases} ???? & \text{si } ???? \\ ???? & \text{si } ???? \\ \text{puissance}(x, n/2) & \text{si } n > 1 \text{ et n est pair} \\ x \times \text{puissance}(x, (n-1)/2) & \text{si } n > 1 \text{ et n est impair} \end{cases}$$

2) Quelles sont les conditions initiales qui doivent être spécifiées ?
3) Programmer cette fonction puissanceRapide de manière récursive en Python. L'argument sera deux entiers x et n.
4) Combien d'appels récursifs sont effectués pour calculer 7^{28} ? Dans la version naïve, combien d'appels récursifs étaient effectués ? Expliquez.