III. Fonction cube

1) Définition et propriétés algébriques

Définition : La fonction cube f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Remarque : $f(x) = x^3 = x \times x^2 = x \times x \times x$

Exemple : $f(5) = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Propriétés : Soit k un nombre réel.

- L'équation $x^3 = k$ admet une **unique** solution, appelée racine cubique de k, et notée $\sqrt[3]{k}$.
- L'équation $x^3 < k$ admet pour solution l'intervalle $S =]-\infty; \sqrt[3]{k}[$.

Remarque : De manière intéressante, $\sqrt[3]{k}$ est égale à $k^{\frac{1}{3}}$. Une racine cubique est donc aussi une puissance.

2) Variations

Propriété : La fonction cube est **strictement croissante** sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

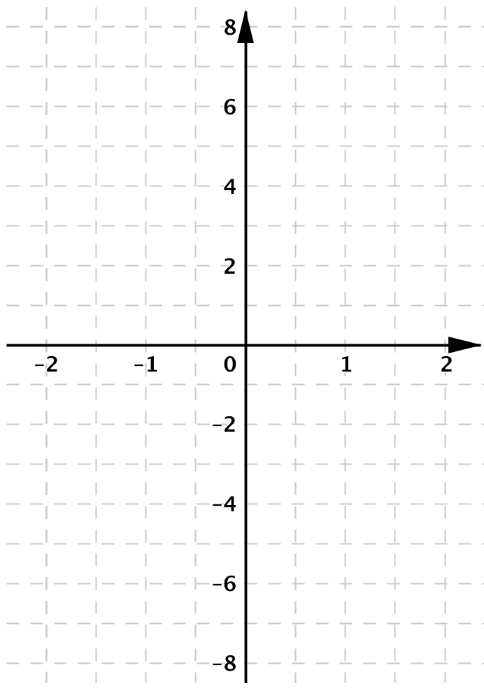
Exemple :

- Si l'on prend $a = 2$ et $b = 5$, alors $f(a) < f(b)$ car la fonction cube est croissante. On peut le voir en calculant $f(a) = 2^3 = 8$ et $f(5) = 5^3 = 125$.
- Si l'on prend $a = -2$ et $b = -1$, alors $f(a) < f(b)$ car la fonction est croissante. On peut le voir en calculant $f(a) = (-2)^3 = -2 \times (-2) \times (-2) = -8$ alors que $f(b) = (-1)^3 = -1 \times (-1)^2 = -1$.

3) Représentation graphique

Remplir le tableau de valeurs ci-dessous et tracer la fonction cube :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Dans ce cas, $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$: **la fonction est dite impaire.**

$f(-x) + f(x) = 0$ car les images sont opposées.

Exemple : montrons que $f(x) = x^3$ est une fonction impaire par le calcul $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$ pour tous les x de l'ensemble de définition (ici, $\mathbb{R}$).

On sait que $f(x) = x^3$.

Calculons $f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x \times x^2 = -x^3$

Donc, en faisant la somme, on trouve $\boxed{f(-x) + f(x) = x^3 + (-x^3) = 0}$. f est donc impaire.

Parité : montrez que $f(x) = x^3 - 2x$ est impaire .

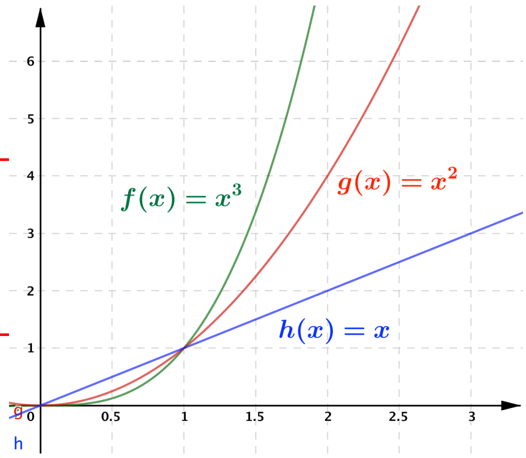
$f(x) = x^3 - 2x$

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x$

$\boxed{f(-x) + f(x) = x^3 - 2x - x^3 + 2x = 0}$

donc f est une fonction impaire.

4) Comparaison des fonctions cube et carré



Propriété :

- Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $x^3 \leq x^2 \leq x$;
- Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a $x^3 \geq x^2 \geq x$.

Remarque :

On peut voir dans le graphique ci-contre que cette propriété est graphique. Pour $x < 1$, la fonction bleue est au-dessus de la fonction rouge qui est au-dessus de la fonction verte.

Démonstration **(au programme)** :

Procédons par disjonction des cas :

- **Cas 1 :** $0 \leq x \leq 1$

Multiplions chaque membre de cette inégalité par x. Comme x est positif, le sens de l'inégalité n'est pas changé.

On obtient un premier résultat: $0 \leq x^2 \leq x$.

Multiplions à nouveau par x. On obtient donc : $0 \leq x^3 \leq x^2$.
Or, on vient de démontrer que $x^2 \leq x$ donc, on en déduit que $x^3 \leq x^2 \leq x$.

❖ **Cas 2 :** $x \geq 1$
Multiplions chaque membre de cette inégalité par x. Comme x est positif, le sens de l'inégalité n'est pas changé.
On obtient $x^2 \geq x$.

On réitère l'opération : $x^3 \geq x^2$ (et $x^2 \geq x$). Donc, on peut en déduire : $x^3 \geq x^2 \geq x$