

6) Résolution d'inéquations à l'aide d'un tableau de signes

Règles : Pour remplir un tableau de signes, on va utiliser la règle des signes. Celle-ci dit que la multiplication ou la division de **deux nombres de même signe donne un nombre positif**. Dans le cas contraire, le nombre résultat est négatif.

❖ Cas d'un produit :

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$

➡ Le signe de $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$.

On va donc utiliser la partie **5)** pour dresser le tableau de signe de $3 - 6x$ et $x + 2$.

D'abord, on résout :

$$\begin{aligned} 3 - 6x &= 0 & x + 2 &= 0 \\ 6x &= 3 & x &= -2 \\ x &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour : $3 - 6x$, $a = -6 < 0$ donc la fonction est décroissante et on aura + , - .

Pour : $x + 2$, $a = 1 > 0$ donc la fonction est croissante et on aura - , + .

➡ On aura donc le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3 - 6x$	+	+	0	-	
$x + 2$	-	0	+	+	
$(3 - 6x)(x + 2)$	-	0	+	0	-

Conclusion :

On en déduit que $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ si $-2 < x < \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ s'écrit : $S = \left] -2; \frac{1}{2} \right[$.

Exemple :

a. $(x - 3)(x - 1) \leq 0$

b. $(x - 9)(x - 5) < 0$

c. $(2x + 4)(3x - 3) \geq 0$

d. $(15 - 5x)(x + 1)(x + 2) > 0$

❖ Cas d'un quotient :

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\frac{2 - 6x}{3x - 2} \leq 0$.

➔ **Valeur interdite.** L'équation n'est pas définie lorsque $3x - 2 = 0$, donc $x = \frac{2}{3}$. Cette valeur est une valeur interdite.

➔ Le signe de $\frac{2 - 6x}{3x - 2}$ dépend du signe de $2 - 6x$ et de $3x - 2$.

On va donc utiliser la partie 5) pour dresser le tableau de signe de $2 - 6x$ et $3x - 2$.

D'abord, on résout :

$$\begin{array}{ll} 2 - 6x = 0 & 3x - 2 = 0 \\ 6x = 2 & 3x = 2 \\ x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & x = \frac{2}{3} \end{array}$$

Pour : $2 - 6x$, $a = -6 < 0$ donc la fonction est décroissante et on aura + , - .

Pour : $3x - 2$, $a = 3 > 0$ donc la fonction est croissante et on aura - , + .

➔ On aura donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2 - 6x$	+	0	-	-
$3x - 2$	-	-	0	+
$\frac{2 - 6x}{3x - 2}$	-	0	+	-

double barre =
valeur interdite

Conclusion :

On en déduit que $\frac{2 - 6x}{3x - 2} \leq 0$ si $x \leq \frac{1}{3}$ ou si $x \geq \frac{2}{3}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2 - 6x}{3x - 2} \leq 0$ s'écrit : $S = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

Exemple :

a. $\frac{2x+8}{x-9} > 0$ b. $\frac{6x+1}{7-x} \geq 0$ c. $\frac{x+5}{3x-5} \leq 0$ d. $\frac{-2x-10}{4x-3x} \geq 0$

7) Cas avec factorisation

Méthode : Résoudre une inéquation grâce à une factorisation

Résoudre par le calcul dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $x^2 > 7$

Pour appliquer la méthode précédente, il faut trouver une expression factorisée...

→ $x^2 > 7 \iff x^2 - 7 > 0 \iff x^2 - \sqrt{7}^2 > 0 \iff (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) > 0$

→ Le signe de $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ dépend du signe de chaque facteur, comme on a vu précédemment ! La méthode est la même : à faire par vous-même.