III. Loi binomiale

1) Variable aléatoire

Définition : On s'intéresse à un schéma de Bernoulli composé de n expériences identiques et indépendantes avec une probabilité de succès p.
On s'intéresse à la **variable aléatoire** X qui **compte le nombre de succès** obtenus.
On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Exemple :

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*".
Cela correspond à un schéma de Bernoulli de paramètre $\mathrm{n} = 3$ et $p = 0{,}5$.
La variable aléatoire X associée au schéma compte le nombre de succès.
Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$.

Trouver la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2) Trouver une loi binomiale à partir d'un arbre pondéré

Méthode : Utiliser une loi binomiale

Un sac contient 2 boules gagnantes et 8 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans le sac.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules gagnantes.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2)$ d'obtenir **exactement** 2 boules gagnantes.

c) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 2)$ d'obtenir **au moins** 2 boules gagnantes.

a) On répète **3** fois de manière **indépendante** une expérience **aléatoire** à **deux issues** : boules gagnantes et boules perdantes. C'est un schéma de Bernoulli.

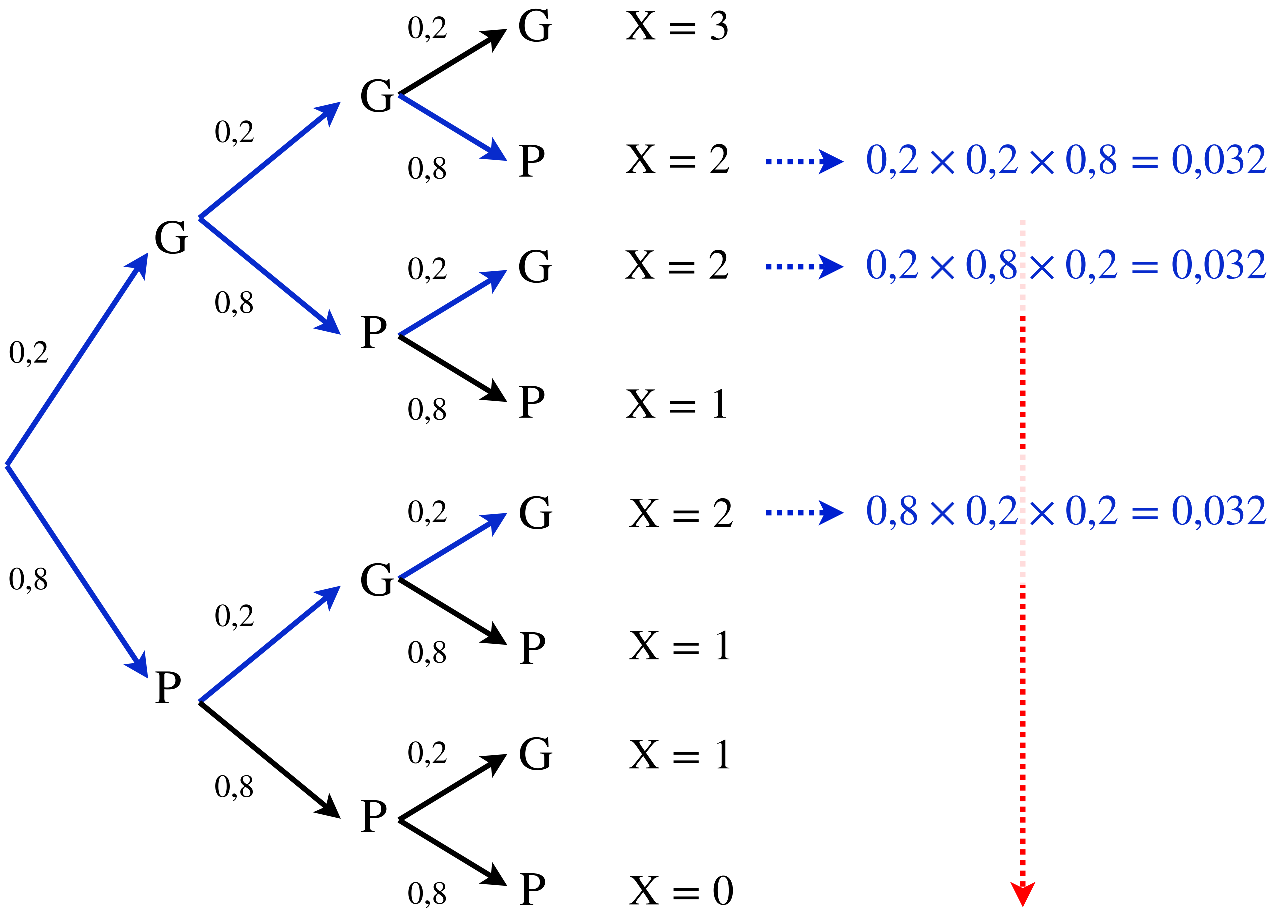
Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{2}{10} = 0{,}2$

X suit une loi binomiale de paramètres : $\mathrm{n} = 3$ et $p = 0{,}2$.

b) On construit un arbre pondéré et on repère le nombre de branches qui nous amène à tirer **exactement** 2 boules gagnantes :

C'est un arbre à 3 niveaux car on répète 3 fois l'expérience.



$$P(X = 2) = 0{,}032 \times 3 = 0{,}096$$

La probabilité d'obtenir 2 boules gagnantes est égale à 0,096 ou 9,6%.

c) « Avoir au moins 2 boules gagnantes » signifie en avoir 2 ou 3.

Donc : $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$.

or $P(X = 3) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$ (voir l'arbre)

donc : $P(X \geq 2) = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104 = 10{,}4\,\%$

La probabilité d'obtenir **au moins** 2 boules gagnantes est égale à 10,4%.

2) Trouver une loi binomiale à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité P(X=5).
c) Calculer la probabilité P(X≤5).
d) Calculer la probabilité P(X≥3).

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.
Le **succès** est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres : n = 7 et p = $\frac{2}{3}$.

b) voir la feuille loi_binomiale_et_calculatrice

On trouve P(X=5) ≈ 0,31.
La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) voir la feuille loi_binomiale_et_calculatrice

On trouve P(X≤5) ≈ 0,74.
La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

d) P(X≥3) = 1 – P(X≤2)
≈ 1 – 0,045 (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)
≈ 0,955.