III. Fonction inverse

1) Définition

Définition : La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Rappel :

- ❖ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
  On note aussi cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- ❖ La fonction inverse n'est donc **pas définie en 0**.

2) Variations

Propriété :

La fonction inverse f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

Remarques :

La variation d'une fonction ne s'étudie que sur un **intervalle**. On ne peut donc pas dire que f est décroissante sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui n'est pas un intervalle (c'est une **réunion** d'intervalles). On peut par contre conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

Exemple :
Dans ces exemples, on va prendre deux nombres et comparer les images par la fonction inverse appelée f. On va se servir de la décroissance de la fonction inverse sur $\left]-\infty;0\right[$ et $\left]0;+\infty\right[$.

- ❖ Comparer les nombres $\dfrac{1}{7}$ et $\dfrac{1}{9}$.

On sait que $7<9$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$: l'ordre de l'inégalité est donc renversée.

Ainsi : $f(7)>f(9)$ et $\boxed{\dfrac{1}{7}>\dfrac{1}{9}}$

- ❖ Comparer les nombres $\dfrac{1}{\pi}$ et $\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$.

On doit comparer π et $\sqrt[3]{27}$. Calculons $\sqrt[3]{27}$: $\sqrt[3]{27} =$ ....

On en déduit : π......$\sqrt[3]{27}$

Or la fonction inverse est .... : l'ordre de l'inégalité est ....

Ainsi : $f(\pi) < f\left(\sqrt[3]{27}\right)$ et $\boxed{\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}}$

❖ Comparer les nombres $-\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{-5}$.

❖ Comparer les nombres $\dfrac{1}{5}$ et $-\dfrac{1}{4}$.

<u>Démonstration de la décroissance :</u>

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a > 0$ et $b > 0$ et de plus $a - b < 0$ par hypothèse. Donc $f(b) - f(a) < 0$ ce qui prouve que f est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La décroissance sur l'intervalle $]-\infty;0[$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels strictement négatifs tels que $a < b$.

3) Représentation graphique

<u>Remarques :</u>

1) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est une hyperbole de centre O.

2) La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine. On dit que la fonction est impaire. Mathématiquement, cela se traduit par $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\dfrac{1}{3}$