Calcul d'une fonction dérivée

Il faut bien connaitre les dérivées des fonctions de références.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f(x) = x^n$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n x^{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
- si $f(x) = \sqrt{x}$ alors f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- si $f(x) = e^x$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$
- si $f(x) = \ln(x)$ alors f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Calcul d'une fonction dérivée

Reconnaître la nature de l'expression. $\forall k \in \mathbb{R} \quad (k \times u(x))' = k \times u'(x)$

- Pour une somme, on utilise $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
- Pour un produit, on utilise $(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
- Pour un inverse, on utilise $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = -\dfrac{v'(x)}{v(x)}$
- Pour un quotient, on utilise $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
- Pour une composée, on utilise $((v \circ u)(x))' = u'(x) \times v'(u(x))$

  (ou alors une des formules pour $(u(x))^n$, $\dfrac{1}{(u(x))^n}$, $\sqrt{u(x)}$

  $e^{u(x)}$, $\ln(u(x))$ ...)

Calcul d'une fonction dérivée

Reconnaître la nature de l'expression

- Naturellement, toutes ces formules nécessitent de calculer une dérivée. Il est parfois nécessaire d'utiliser une des formules précédentes pour calculer $u'(x)$ ou $v'(x)$.

- Souvent, en particulier dans les problèmes, on ne s'arrête pas à l'utilisation des formules de dérivées. Il faut ensuite transformer l'expression, comme par exemple factoriser et/ou réduire au même dénominateur.

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = 3x^2 + 5x + e^x$

Méthode : la formule pour une somme s'utilise aussi pour 3, 4, ... termes

Solution : $f'(x) = (3x^2)' + (5x)' + (e^x)'$

$$f'(x) = 6x + 5 + e^x$$

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = (3e^x - 1)(2x^2+5)$

Méthode : C'est un produit : $(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

Solution : On note $u(x) = 3e^x - 1$ et $v(x) = 2x^2 + 5$

D'où $u'(x) = 3e^x - 0 = 3e^x$ et $v'(x) = 2 \times 2x + 0 = 4x$

D'où $f'(x) = 3e^x \times (2x^2+5) + (3e^x - 1) \times 4x$

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2 + 2x}$

Méthode : Formule $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

Solution : $u(x) = e^x + 1 \qquad u'(x) = e^x$

$v(x) = x^2 + 2x \qquad v'(x) = 2x + 2$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 2x) - (e^x + 1) \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2}$$

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{5}{x+e^x}$

Méthode : Plutôt que $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, il est plus simple de voir $k \times \dfrac{1}{v(x)}$

Solution : $f(x) = 5 \times \dfrac{1}{x+e^x}$ OR $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

$v(x) = x + e^x$ $v'(x) = 1 + e^x$

d'où $f'(x) = 5 \times \left(\dfrac{-(1+e^x)}{(x+e^x)^2}\right) = \dfrac{-5-5e^x}{(x+e^x)^2}$

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = (x^2+3x-5)^3$

Méthode : $(u(x)^n)' = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$

Solution : $n = 3$ et $u(x) = x^2 + 3x - 5$

$u'(x) = 2x + 3$

d'où $f'(x) = 3 \times (2x+3) \times (x^2 + 3x - 5)^2 = (6x+9)(x^2+3x-5)^2$

Calcul d'une fonction dérivée

Exple : Calculer la dérivée de $f(x) = 3x e^{-x}$

Méthode : C'est un produit, mais comme $v(x) = e^{-x}$, il faut utiliser la formule pour $e^{u_1(x)}$

Solution : $u(x) = 3x$ $\quad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 3$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$\left(e^{u_1(x)}\right)' = u_1'(x) \times e^{u_1(x)}$

avec $u_1(x) = -x$ et $u_1'(x) = -1$

Donc $\left(e^{-x}\right)' = (-1) \times e^{-x}$

D'où $f'(x) = 3e^{-x} + 3x \times (-e^{-x})$

$= 3e^{-x} - 3x e^{-x}$

$= (3 - 3x)e^{-x}$

Rque : $\left(e^{ax+b}\right)' = a e^{ax+b}$