Implémenter la décomposition de Benders pour un problème de choix de liaisons

Daniel Porumbel
http://cedric.cnam.fr/~porumbed/mla/

Un problème d'installation de liaisons

$$\min \sum_{\{i,j\}\in E} y_{ij}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq 0, \ \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq d_i, \ \forall i \in T$$

$$b_{\text{nd}} y_{ij} - x_{ij} - x_{ji} \geq 0, \ \forall \{i,j\} \in E, \ i < j$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \ x_{ij}, x_{ji} \geq 0, \ \forall \{i,j\} \in E, \ i < j$$

Un problème d'installation de liaisons

L'installation d'une liaison y_{ij} coute 1, mais pas de coût pour envoyer un flux x_{ij} sur y_{ij}

$$\min \sum_{\{i,j\}\in E} y_{ij}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq 0,\ \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq d_i,\ \forall i \in T$$

Demande du terminal $i \in T$

$$b_{\text{nd}} y_{ij} - x_{ij} - x_{ji} \geq 0,\ \forall \{i,j\} \in E,\ i < j$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ x_{ij}, x_{ji} \geq 0,\ \forall \{i,j\} \in E,\ i < j$$

Bande passante d'une liaison (débit max câble)

Si la solution **y** est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} &\geq 0,\ \forall i \notin T \cup \{s\}\\
\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} &\geq d_i,\ \forall i \in T\\
-x_{ij} - x_{ji} &\geq -b_{\text{nd}} y_{ij},\ \forall \{i,j\} \in E,\ i<j\\
x_{ij} &\geq 0,\ \forall \{i,j\} \in E
\end{aligned}
$$

Voici le dual :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -\sum_{\{i,j\}\in E} b_{\text{nd}} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i\in T} d_i v_i\\
x_{ij}: \quad & -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i<j\\
x_{ji}: \quad & -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i<j\\
& \mathbf{v} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

Ce dual est réalisable et doit être borné !

Si la solution y est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq 0,\ \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq d_i,\ \forall i \in T$$

$$-x_{ij} - x_{ji} \geq -b_{\text{nd}} y_{ij},\ \forall \{i,j\} \in E,\ i<j$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall \{i,j\} \in E$$

Voici le dual :

$$\max \quad -\sum_{\{i,j\}\in E} b_{\text{nd}} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i\in T} d_i v_i$$

$$x_{ij}: \quad -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i<j$$

$$x_{ji}: \quad -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i<j$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

Ce dual est réalisable et doit être borné !

Si la solution **y** est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq 0,\ \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\}\in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\}\in E} x_{ij} \geq d_i,\ \forall i \in T$$

$$-x_{ij} - x_{ji} \geq -b_{\text{nd}} y_{ij},\ \forall \{i,j\} \in E,\ i < j$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall \{i,j\} \in E$$

Voici le dual :

$$\max \quad -\sum_{\{i,j\}\in E} b_{\text{nd}} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i\in T} d_i v_i$$

$$x_{ij}: \quad -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i < j$$

$$x_{ji}: \quad -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E,\ i < j$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

Ce dual est réalisable et doit être <u>borné</u> !

Le dual précédent est intégré dans le modèle Benders

- Sa valeur objectif ne doit pas dépasser 0, sinon ce dual sera non-borné.

$$\min \mathbf{1}^\top \mathbf{y}$$

$$0 \geq -\sum_{\{i,j\}\in E} b_{\text{nd}} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i,$$

$$\forall \mathbf{v} \in \underbrace{\left\{\mathbf{v} \geq \mathbf{0} : -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0, -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0\right\}}_{\mathscr{P}}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^n$$

Il est impossible d'écrire toutes les contraintes ! Il faut les générer une par une à l'aide du sous-problème Benders :

- $\max_{\mathbf{v}\in\mathscr{P}} -\sum_{\{i,j\}\in E} b_{\text{nd}} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i$