Modèles de Localisation et Applications (MLA)

Daniel Porumbel

daniel.porumbel@cnam.fr

cedric.cnam.fr/~porumbed/mla/

Rappel : le problème de localisation simple

- $x_{ij} = 1$: le client $j \in \mathcal{N}$ est affecté au site $i \in \mathcal{M}$
- $y_i = 1$: le site $i \in \mathcal{M}$ est ouvert
- J'ai inversé i avec j par rapport à la formulation que vous avez déjà vue en MLA (avec Mme. Elloumi)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \sum_{i \in \mathcal{M}} c_{ij} x_{ij} & \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_{ij} = 1 & \forall \text{client } j \in \mathcal{N} \\
& x_{ij} \leq y_i & \forall \text{ site} i \in \mathcal{M}, \forall \text{ client } j \in \mathcal{N} \\
& x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\} &
\end{aligned}
$$

Le problème de localisation simple

Version ultra-simple « cas d'école »

- un seul client (pas besoin d'indice j) à affecter à un seul site

coût d'ouverture du site i — coût d'affectation au site i

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in M \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple

Version ultra-simple « cas d'école »

- un seul client (pas besoin d'indice j) à affecter à un seul site

$$\min \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i}_{\text{coût d'ouverture du site } i} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i}_{\text{coût d'affectation au site } i}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1$$

$$x_i \leq y_i \quad \forall i \in M$$

$$x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}$$

$$\boxed{\text{Calculer la solution optimale}}$$

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 2

Version 2 :

- Ajouter des contraintes sur **y**

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 2

Version 2 :

- Ajouter des contraintes sur **y**

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Calculer la solution optimale}}$

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2) \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

On veut regarder $d = 2$ films à d cinéma différents ;

y	le prix du billet à chaque cinéma
x	le prix du trajet vers chaque cinéma
$y_1 \geq y_2$	Au cinéma 2 il faut acheter une paire de lunettes 3D qui coûte y_1.
$y_1 \geq y_3$	Idem pour cinéma 3, mais une paire suffit pour y_2 et y_3

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2) \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	∞	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i$$
$$y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3$$
$$\sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2)$$
$$x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M}$$
$$x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}$$

$$\boxed{\text{Calculer la solution optimale}}$$

f :	7	1	1	7	7
c :	∞	5	4	3	2

Reformulation Benders 1

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \\
& \qquad\qquad\qquad x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

On va dualiser $F(\mathbf{y})$ en utilisant les variables duales b et $\mathbf{v}$.

Reformulation Benders 1

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} & \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i & \\ & \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d & (b) \\ & x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} & (v_i) \end{aligned}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

On va dualiser $F(\mathbf{y})$ en utilisant les variables duales b et $\mathbf{v}$.

Reformulation Benders 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in\mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{aligned} & \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i\in\mathcal{M}} y_i v_i \\ & b - v_i \leq c_i \qquad\qquad \forall i \in \mathcal{M} \\ & b \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Reformulation Benders 2

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{array}{ll} \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i & \\ b - v_i \leq c_i & \forall i \in \mathcal{M} \\ b \in \mathbb{R} & \\ \mathbf{v} \geq 0 & \end{array}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Le max représente la valeur d'une solution duale optimale $(b^*, \mathbf{v}^*)$

- L'ensemble de solutions duales réalisables (b, v) est le même pour tout $\mathbf{y}$
- Même si $(b^*, \mathbf{v}^*)$ n'est pas optimale pour tous les $\mathbf{y}$, sa valeur objectif reste toujours une borne inférieure pour w

Reformulation Benders 3

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i \; \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Reformulation Benders 3

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i \; \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

On a d'innombrables solutions duales (sommets du polytope Benders) $\implies$ on génère que les contraintes utiles.

Reformulation Benders 3

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w$$
$$y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3$$
$$w \geq d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i \; \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}}$$
$$x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}$$

On a d'innombrables solutions duales (sommets du polytope Benders) $\implies$ on génère que les contraintes utiles.

1. Soit $(\mathbf{y}^*, w^*)$ la solution optimale du maître restreint
2. On résout le sous-problème Benders $F(\mathbf{y}^*)$ et on détermine les valeurs duales optimales $(b^*, \mathbf{v}^*)$.
3. On ajoute dans le maître la coupe associée à $(b^*, \mathbf{v}^*)$:
$$w \geq d \cdot b^* - \sum_i y_i v_i^*$$
4. Revenir à 1 si la coupe ci-dessus est violée par $\mathbf{y}^*$.

Questions

1. Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$, c.à.d, une coupe qu'on peut ajouter dès le départ.

Les coupes vues auparavant étaient des coupes d'optimalité.

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$, c.à.d, une coupe qu'on peut ajouter dès le départ.

Les coupes vues auparavant étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$?

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$, c.à.d, une coupe qu'on peut ajouter dès le départ.

Les coupes vues auparavant étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$? Oui, il faut faire attention à cela et chercher des coupes avec de petits coefficients.

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$, c.à.d, une coupe qu'on peut ajouter dès le départ.

Les coupes vues auparavant étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$? Oui, il faut faire attention à cela et chercher des coupes avec de petits coefficients.

---

3 Rappel : le coût d'affectation des clients pour un $\mathbf{y}^*$ figé est $F(\mathbf{y}^*) = d \cdot b^* - \sum_i y_i^* v_i^*$. Donc la dérivée partielle de $F(\mathbf{y})$ par rapport à tout y_i est ≤ 0. C'est normal ?

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$, c.à.d, une coupe qu'on peut ajouter dès le départ.

Les coupes vues auparavant étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$? Oui, il faut faire attention à cela et chercher des coupes avec de petits coefficients.

---

3 Rappel : le coût d'affectation des clients pour un $\mathbf{y}^*$ figé est $F(\mathbf{y}^*) = d \cdot b^* - \sum_i y_i^* v_i^*$. Donc la dérivée partielle de $F(\mathbf{y})$ par rapport à tout y_i est ≤ 0. C'est normal ? Oui : plus de sites $\Longrightarrow$ le coût d'affectation ne peut que baisser