Modèles de Localisation et Applications (MLA)

Daniel Porumbel

`daniel.porumbel@cnam.fr`

`cedric.cnam.fr/~porumbed/mla/`

Rappel : le problème de localisation simple

- $x_{ij} = 1$: le client $j \in \mathcal{N}$ est affecté au site $i \in \mathcal{M}$
- $y_i = 1$: le site $i \in \mathcal{M}$ est ouvert
- J'ai inversé i avec j par rapport à la formulation que vous avez déjà vue en MLA (avec Mme. Elloumi)

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \sum_{i \in \mathcal{M}} c_{ij} x_{ij} & \\
 & \sum_{i \in \mathcal{M}} x_{ij} = 1 & \forall \text{client } j \in \mathcal{N} \\
 & x_{ij} \leq y_i & \forall \text{ site} i \in \mathcal{M}, \forall \text{ client } j \in \mathcal{N} \\
 & x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\} &
\end{array}
$$

Le problème de localisation simple

Version ultra-simple « cas d'école »

- un seul client (pas besoin d'indice *j*) à affecter à un seul site

coût d'ouverture du site *i* — coût d'affectation au site *i*

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in M \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple

Version ultra-simple « cas d'école »

- un seul client (pas besoin d'indice j) à affecter à un seul site

coût d'ouverture du site i — coût d'affectation au site i

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in M \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 2

Version 2 :

- Ajouter des contraintes sur **y**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\ & y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\ & \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = 1 \\ & x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\ & x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 2

Version 2 :

- Ajouter des contraintes sur **y**

$$\min \quad \sum_{i\in\mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i\in\mathcal{M}} c_i x_i$$
$$y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3$$
$$\sum_{i\in\mathcal{M}} x_i = 1$$
$$x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M}$$
$$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\}$$

Calculer la solution optimale

f :	7	2	2	7	7
c :	60	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2) \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

On veut regarder $d = 2$ films à d cinéma différents ;

y	le prix du billet à chaque cinéma
x	le prix du trajet vers chaque cinéma
$y_1 \geq y_2$	Au cinéma 2 il faut acheter une paire de lunettes 3D qui coûte y_1.
$y_1 \geq y_3$	Idem pour cinéma 3, mais une paire suffit pour y_2 et y_3

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2) \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Calculer la solution optimale}}$$

f :	7	2	2	7	7
c :	∞	5	4	3	2

Le problème de localisation simple 3

Version 3 :

- On considère une demande de $d = 2$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \quad (= 2) \\
& x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& x_i \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Calculer la solution optimale}}$$

f :	7	1	1	7	7
c :	∞	5	4	3	2

Reformulation Benders 1

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i \\
& \qquad\qquad\qquad \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d \\
& \qquad\qquad\qquad x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

On va dualiser $F(\mathbf{y})$ en utilisant les variables duales b et $\mathbf{v}$.

Reformulation Benders 1

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} & \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i x_i & \\ & \sum_{i \in \mathcal{M}} x_i = d & \qquad (b) \\ & x_i \leq y_i \quad \forall i \in \mathcal{M} & \qquad (v_i) \end{aligned}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0,1\}, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

On va dualiser $F(\mathbf{y})$ en utilisant les variables duales b et $\mathbf{v}$.

Reformulation Benders 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \;\; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{aligned} & \max\nolimits_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \\ & b - v_i \leq c_i \qquad\qquad \forall i \in \mathcal{M} \\ & b \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Reformulation Benders 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \ \ y_1 \geq y_3 \\
& w \geq F(\mathbf{y}) = \boxed{\begin{aligned} & \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \\ & b - v_i \leq c_i \qquad\qquad \forall i \in \mathcal{M} \\ & b \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Le max représente la valeur d'une solution duale optimale $(b^*, \mathbf{v}^*)$

- L'ensemble de solutions duales réalisables (b, v) est le même pour tout $\mathbf{y}$
- Même si $(b^*, \mathbf{v}^*)$ n'est pas optimale pour tous les $\mathbf{y}$, sa valeur objectif reste toujours une borne inférieure pour w

Reformulation Benders 3

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\
& w \geq d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i \; \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Reformulation Benders 3

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in\mathcal{M}} f_i y_i + w \\
& y_1 \geq y_2,\ \ y_1 \geq y_3 \\
& w \geq d\cdot b - \sum_{i\in\mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i\ \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}} \\
& w \geq 0, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

D'innombrables solutions du polytope Benders $\Longrightarrow$ d'innombrables contraintes de type $w \geq \ldots$.

Reformulation Benders 3

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \mathcal{M}} f_i y_i + w \\ & y_1 \geq y_2, \; y_1 \geq y_3 \\ & w \geq d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \quad \forall \underbrace{b \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \geq 0 : b - v_i \leq c_i \; \forall i \in \mathcal{M}}_{\text{Polytope Benders}} \\ & w \geq 0, y_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

D'innombrables solutions du polytope Benders $\Longrightarrow$ d'innombrables contraintes de type $w \geq \dots$.

1. Soit $(\mathbf{y}^*, w^*)$ la solution optimale du maître restreint
2. On résout le sous-problème Benders $F(\mathbf{y}^*)$ et on détermine les valeurs duales optimales $(b^*, \mathbf{v}^*)$.
3. On ajoute dans le maître la coupe associée à $(b^*, \mathbf{v}^*)$:

$$w \geq d \cdot b^* - \sum_i y_i v_i^*$$

4. Revenir à 1 si la coupe ci-dessus est violée par $\mathbf{y}^*$.

Questions

1. Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?
   - Toutes les solutions avec $v_i \leq b \ \forall i$ sont des rayons !

Questions

1. Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?
   - Toutes les solutions avec $v_i \leq b \; \forall i$ sont des rayons !

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$. Cette contrainte impose d'ouvrir au minimum d sites ; on aurait pu l'ajouter dès le départ.

Les coupes précédentes « $\cdots \geq w$ » étaient des coupes d'optimalité.

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

- Toutes les solutions avec $v_i \leq b \ \forall i$ sont des rayons !

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$. Cette contrainte impose d'ouvrir au minimum d sites ; on aurait pu l'ajouter dès le départ.

Les coupes précédentes « $\cdots \geq w$ » étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$?

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

- Toutes les solutions avec $v_i \leq b \; \forall i$ sont des rayons !

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$. Cette contrainte impose d'ouvrir au minimum d sites ; on aurait pu l'ajouter dès le départ.

Les coupes précédentes « $\cdots \geq w$ » étaient des coupes d'optimalité.

---

2 Si on a $y_i = 0$ pour un i, peut-on avoir une solution du polytope Benders avec $v_i \to \infty$? Oui, il faut faire attention à cela et chercher des coupes avec de petits coefficients.

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

- Toutes les solutions avec $v_i \leq b \; \forall i$ sont des rayons !

Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$. Cette contrainte impose d'ouvrir au minimum d sites ; on aurait pu l'ajouter dès le départ.

Les coupes précédentes « $\cdots \geq w$ » étaient des coupes d'optimalité.

---

3 Rappel : le coût d'affectation des clients pour un $\mathbf{y}^*$ figé est $F(\mathbf{y}^*) = d \cdot b^* - \sum_i y_i^* v_i^*$. Donc la dérivée partielle de $F(\mathbf{y})$ par rapport à tout y_i est ≤ 0. C'est normal ?

Questions

1 Si la solution du sous-problème Benders est un rayon de valeur objectif non-bornée ?

- Toutes les solutions avec $v_i \leq b \; \forall i$ sont des rayons !

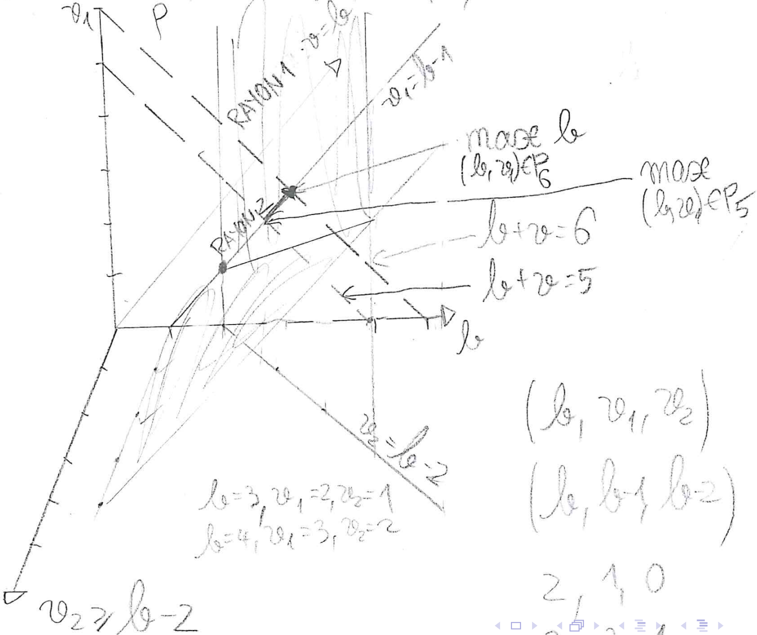
Réponse : on obtient une coupe de faisabilité. La plus forte est $b = v_1 = v_2 \cdots = v_n$, ce qui conduit à $d - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i \leq 0$. Cette contrainte impose d'ouvrir au minimum d sites ; on aurait pu l'ajouter dès le départ.

Les coupes précédentes « $\cdots \geq w$ » étaient des coupes d'optimalité.

---

3 Rappel : le coût d'affectation des clients pour un $\mathbf{y}^*$ figé est $F(\mathbf{y}^*) = d \cdot b^* - \sum_i y_i^* v_i^*$. Donc la dérivée partielle de $F(\mathbf{y})$ par rapport à tout y_i est ≤ 0. C'est normal ? Oui : plus de sites $\Longrightarrow$ le coût d'affectation ne peut que baisser

$b - v_1 \leq 1 \Rightarrow v_1 \geq b - 1$,



(b, v_1, v_2)

$(b, b-1, b-2)$

2, 1, 0

Benders automatique

`cplex` $\geq$ 12.9 est capable de réaliser une décomposition de Benders automatique. Si vous déclarez les variables **y** comme des variables entières et les variables **x** comme des variables continues, il va jouer sur les variables **x** pour générer très probablement la même décomposition que nous.

Sous `C++`, il suffit d'ajouter :

```
cplex.setParam(IloCplex::Param::Benders::
    Strategy, IloCplex::BendersFull);
```

Sous `Julia` :

```
set_optimizer_attribute(m, "
    CPXPARAM_Benders_Strategy",3);
```

Résoudre le sous-problème plus vite sans PL si $\sum_i y_i = d$?

Rappel :

$$F(\mathbf{y}) = \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i$$
$$b - v_i \leq c_i \qquad \forall i \in \mathcal{M}$$
$$b \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{v} \geq 0$$

Soit la solution suivante $b = \max_i c_i$ et $v_i = b - c_i \forall i \in [1..n]$:

Sa valeur objectif est $\sum y_i c_i$, c.a.d, on ne peut pas faire mieux quelque soit $\mathbf{y}$ avec $\sum_i y_i = d$!

Une seule contrainte peut suffire !

Résoudre le sous-problème plus vite sans PL si $\sum_i y_i = d$?

Rappel :

$$F(\mathbf{y}) = \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i$$
$$b - v_i \leq c_i \qquad \forall i \in \mathcal{M}$$
$$b \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{v} \geq 0$$

Soit la solution suivante $b = \max_i c_i$ et $v_i = b - c_i \forall i \in [1..n]$:
Sa valeur objectif est $\sum y_i c_i$, c.a.d, on ne peut pas faire mieux quelque soit $\mathbf{y}$ avec $\sum_i y_i = d$!

Une seule contrainte peut suffire !

Résoudre le sous-problème plus vite sans PL si $\sum_i y_i = d$?

Rappel :

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{y}) = \max_{b,\mathbf{v}} d \cdot b - \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i v_i \\
b - v_i \leq c_i \qquad & \forall i \in \mathcal{M} \\
b \in \mathbb{R} \\
\mathbf{v} \geq 0
\end{aligned}
$$

Soit la solution suivante $b = \max_i c_i$ et $v_i = b - c_i \forall i \in [1..n]$: Sa valeur objectif est $\sum y_i c_i$, c.a.d, on ne peut pas faire mieux quelque soit $\mathbf{y}$ avec $\sum_i y_i = d$!

Une seule contrainte peut suffire !

Comparaison sur ma machine

Pour $n = 50.000$

0.8s Modèle de base sans décomposition `cplex 12.6`

10s Modèle de base sans décomposition `cplex 12.10`

1.6s Décomposition automatique `cplex 12.10`

0.3s Décomposition Benders manuelle résolution sous-problème sans PL `cplex 12.6`

0.3s Décomposition Benders manuelle résolution sous-problème sans PL `gurobi8.11`

>10s Décomposition Benders manuelle résolution sous-problème par PL `cplex 12.6`

Sur la vitesse du code

La théorie seule ne peut pas tout expliquer :

- Le temps de calcul est multiplié par 7 si on oublie d'appeler `cplex.end()` à la fin du sous-problème.
  - Video : `youtu.be/YuKnE6zH-J8`
- Lorsqu'on résout le sous-problème, il faut chercher une coupe avec de petits coefficients. Après avoir optimisé l'objectif de départ `obj`, on ajoute `model.add(obj==objVal)` et on change la fonction objectif. Deux approches pour cela
  1. un seul appel `ilo_obj.setLinearCoefs(v,newvals)`
  2. une boucle qui appelle `ilo_obj.setLinearCoef(...)` sur chaque variable

  La version 2 ne s'execute pas en temps constant mais en temps linéaire ; ainsi, un « simple » changement de fonction objectif peut nécessiter un temps quadratique.

Sur la vitesse du code

La théorie seule ne peut pas tout expliquer :

- Le temps de calcul est multiplié par 7 si on oublie d'appeler `cplex.end()` à la fin du sous-problème.
  - Video : `youtu.be/YuKnE6zH-J8`
- Lorsqu'on résout le sous-problème, il faut chercher une coupe avec de petits coefficients. Après avoir optimisé l'objectif de départ `obj`, on ajoute `model.add(obj==objVal)` et on change la fonction objectif. Deux approches pour cela
  1. un seul appel `ilo_obj.setLinearCoefs(v,newvals)`
  2. une boucle qui appelle `ilo_obj.setLinearCoef(...)` sur chaque variable

  La version 2 ne s'execute pas en temps constant mais en temps linéaire ; ainsi, un « simple » changement de fonction objectif peut nécessiter un temps quadratique.

Sur la vitesse du code

La théorie seule ne peut pas tout expliquer :

- Le temps de calcul est multiplié par 7 si on oublie d'appeler `cplex.end()` à la fin du sous-problème.
  - Video : `youtu.be/YuKnE6zH-J8`
- Lorsqu'on résout le sous-problème, il faut chercher une coupe avec de petits coefficients. Après avoir optimisé l'objectif de départ `obj`, on ajoute `model.add(obj==objVal)` et on change la fonction objectif. Deux approches pour cela
  1. un seul appel `ilo_obj.setLinearCoefs(v,newvals)`
  2. une boucle qui appelle `ilo_obj.setLinearCoef(...)` sur chaque variable

  La version 2 ne s'execute pas en temps constant mais en temps linéaire ; ainsi, un « simple » changement de fonction objectif peut nécessiter un temps quadratique.