ÉNS de Lyon Semestre d'automne 2016

L3 - Prémaster - Méthodes numériques

TD 3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Le but de ce TD est de démontrer un théorème qui assure l'existence et l'unicité de la solution d'un système différentiel (par exemple linéaire). La démonstration est fondée sur le théorème du point fixe de Banach-Picard, qui fait l'objet du premier exercice.

Exercice 1 (Théorème du point fixe de Banach-Picard)**.**
On considère un espace métrique complet (non vide) (X, d).

1. Soit $f : X \to X$ une application k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$. Montrer qu'il existe un unique point fixe x^* de f et que pour tout x_0 dans X la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge à vitesse au moins géométrique vers x^* avec l'estimation :
$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$
2. Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $f : X \to X$ une application telle que f^p est k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$. Que deviennent les résultats de la question précédente dans ce cas ?

Exercice 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)**.**
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \ \ \|$. On considère I un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On suppose de plus que f est globalement lipschitzienne en la seconde variable sur tout compact en la première variable :

$$\forall K \subset\subset I \quad \exists k \geqslant 0 \quad \forall t \in K \ \forall y, z \in \mathbb{R}^n \quad \|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k \|y - z\| .$$

On fixe t_0 dans I et x_0 dans $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{C}$$

admet une unique solution, définie globalement sur I.

On note $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de la convergence uniforme. L'espace E est complet.

1. Montrer que le problème de Cauchy (C) est équivalent à un problème de point fixe dans E pour un opérateur T à déterminer.
2. On suppose que l'intervalle I est compact. En considérant les T^n montrer que (C) admet une unique solution.
3. Montrer le résultat dans le cas d'un intervalle I quelconque.
4. Appliquer ce qui précède au cas d'un système linéaire à coefficients constants $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$ (calculer les $T^n(x_0)$) et à l'équation de l'oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$.

5. (lemme de Grönwall) Soient u, f, g dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions positives telles que :

$$\forall t \in I \quad u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} g(s)u(s)\, ds \right| .$$

Montrer que la fonction u vérifie l'inégalité :

$$\forall t \in I \quad u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)e^{\int_s^t g(\tau)\, d\tau}\, ds \right| .$$

6. (continuité par rapport aux conditions initiales) On suppose que l'intervalle I est compact. On note $x(\cdot; x_0) \in E$ la solution de (C) ayant pour condition initiale x_0. Montrer que la différence entre deux solutions vérifie :

$$\forall t \in I \quad \|x(t;x_0) - x(t;\widehat{x_0})\| \leqslant e^{k|t-t_0|}\,\|x_0 - \widehat{x_0}\| .$$

En déduire que $\mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto x(\cdot;x_0) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ est lipschitzienne. Quel est l'intérêt numérique des résultats précédents ?

7. Déterminer l'unique solution de $\dot{x} = x^2$ avec $x(0) = 1$. La méthode précédente s'applique-t-elle à cette équation ?

8. Y a-t-il une unique solution à l'équation $\dot{x} = |x|^{1/2}$ avec $x(0) = 0$?

Remarque. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue.

Sous ces seules hypothèses le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà assure l'existence d'une solution locale au problème (C) pour toute condition initiale (t_0, x_0) dans U : il existe $\alpha > 0$ et $x \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ tels que (C) est vérifié pour t dans $[t_0, t_0 + \alpha]$. La démonstration de ce théorème est fondée sur la caractérisation des parties compactes de $\mathcal{C}(K, X)$ avec K compact et X métrique en terme d'équicontinuité (théorème d'Arzelà-Ascoli).

Sous l'hypothèse supplémentaire que f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure en plus l'unicité de la solution maximale de (C). La démonstration de ce théorème utilise la même idée que celle de l'exercice 2, mais les estimations sont locales en temps (faites sur des cylindres de sécurité).