**ÉNS de Lyon** Semestre d'automne 2016

L3 - Prémaster - Méthodes numériques

---

## TD 4 : Systèmes différentiels

---

L'objectif de ce TD est d'étudier quelques méthodes numériques classiques pour approcher la solution d'un système differentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{C}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Pour ce faire on fixe le pas de temps $h = \frac{T}{n}$ et on considère $t_n = nh$. La formulation intégrale de (C) peut s'écrire :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\, dt = x(t_n) + h \int_0^1 f(t_n + h\theta, x(t_n + h\theta))\, d\theta.$$

Pour obtenir des formules de récurrence sur les $x(t_n)$, on approche d'abord l'intégrale ci-dessus par une formule de quadrature. Les formules de quadrature les plus simples conduisent aux méthodes suivantes.

| nom quadrature | formule de quadrature | méthode numérique ; $x_{n+1} =$ | nom schéma |
|---|---|---|---|
| rectangle à gauche | $\int_0^1 g(\theta)\, d\theta = g(0)$ | $x_n + hf(t_n, x_n)$ | Euler explicite |
| rectangle à droite | $\int_0^1 g(\theta)\, d\theta = g(1)$ | $x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$ | Euler implicite |
| trapèzes | $\int_0^1 g(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$ | $x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))$ | Crank-Nicolson |

Mentionnons également la méthode du point médian inspirée de la formule de quadrature du même nom ($\int_0^1 g(\theta)\, d\theta = g(1/2)$), définie par :

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right).$$

(Notez que cette méthode est équivalente à la méthode des trapèzes si $f$ est linéaire.)

Enfin la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), d'usage très fréquent, est définie par :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

avec

$$k_1 = f\left(t_n, x_n\right), k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right), k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right), k_4 = f\left(t_n + h, x_n + hk_3\right).$$

Les méthodes implicites nécessitent en général de résoudre à chaque pas de temps un système non linéaire. Le premier exercice a pour but d'implémenter une méthode de résolution de tels systèmes.

**Exercice 1** (Méthode de Newton-Raphson)**.**

L'algorithme de Newton-Raphson permet d'approcher les solutions d'une équation de la forme $F(X) = 0$, où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable (au moins). Écrire une fonction `newton` qui étant donnés une fonction $F$, sa différentielle $dF$, une valeur initiale $x_0$, une erreur maximale $errmax$ et un nombre maximal d'itération $nmax$ renvoie la valeur approchée de la solution de $F(X) = 0$ par la méthode de Newton-Raphson. On pourra mettre en évidence la convergence quadratique sur le système $x^2 + y^2 = 2, x^2 - y^2 = 1$.

**Exercice 2** (Équations de Lotka-Volterra/système proies-prédateurs).
Le but de cet exercice est d'implémenter les méthodes numériques décrites en introduction pour le système de Lotka-Volterra, défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, & x(0) = x_0 \geqslant 0 \\ \dot{y} = -cy + dxy, & y(0) = y_0 \geqslant 0 \end{cases}, \tag{LV}$$

où $a, b, c, d$ sont des nombres réels strictement positifs. Ce modèle a été introduit en 1926 par V. Volterra et a permis de décrire certains relevés de populations de poissons dans la mer Adriatique. Les effectifs de proies et de prédateurs sont respectivement $x$ et $y$.[1]

1. Représenter le champ de vecteurs associé au système (LV) dans le plan de phase $(x, y)$. On pourra utiliser la fonction `quiver` et considérer les paramètres : $(a, b, c, d) = (3, 1, 2, 1)$.
2. Montrer que les méthodes d'Euler implicite et explicite sont convergentes pour le système (LV).
3. Écrire une fonction `euler_explicite` qui étant donnés une fonction $f$, une donnée initiale $x_0$, un entier $n$ et un temps final $T$ renvoie la solution approchée du système différentiel (C) par la méthode d'Euler explicite, pour le pas de temps $h = \frac{T}{n}$, sur le maillage $\{kh\}$, $k = 0, \ldots, n$. On pourra la tester avec une équation différentielle dont on connaît la solution avant de l'appliquer au système de Lotka-Voltera avec les paramètres $(a, b, c, d) = (3, 1, 2, 1)$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ et $T = 8$.
4. Reprendre la question précédente avec la méthode d'Euler implicite, en utilisant la méthode de Newton-Raphson.
5. Mettre en œuvre les autres méthodes décrites en introduction pour le système (LV).
6. Pour chacune des méthodes précédentes, représenter les trajectoires dans le plan de phase $(x, y)$.
7. Mettre en évidence des estimations d'erreurs du type : $|x_n - x(T)| \leqslant Ch^p$ où $p$ est l'ordre de la méthode.
8. Montrer que $I(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$ est une intégrale première du système (LV). Étudier numériquement sa conservation pour chaque méthode numérique.

**Exercice 3** (Oscillateur harmonique, méthode symplectique).
Le but de cet exercice est d'étudier la conservation numérique de l'énergie dans l'équation de l'oscillateur harmonique. On s'intéresse à l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$, qu'on met sous la forme du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -x, & y(0) = y_0 \end{cases}. \tag{oh}$$

1. Déterminer le point d'équilibre non trivial du système (LV). Montrer qu'à une transformation affine près le système linéarisé en ce point est (oh).
2. Montrer que $I(x, y) = x^2 + y^2$ est une intégrale première du système (oh). Étudier numériquement sa conservation pour chaque méthode numérique décrite en introduction. Comparer avec le système de Lotka-Volterra.
3. Pour les différentes méthodes numériques calculer les quantités $Q(h)$ vérifiant $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (x_n^2 + y_n^2)\, Q(h)$.

1. Les proies sont nourries par l'environnement et leur taux de reproduction $a$ est indépendant des prédateurs. Elles sont mangées par les prédateurs au taux $by$, proportionnel au nombre de prédateurs. Les prédateurs meurent avec le taux $c$, indépendant du nombre de proies, et se reproduisent avec le taux $dx$ proportionnel au nombre de proies qui sont de la nourriture pour eux.