ÉNS de Lyon Semestre d'automne 2016

L3 - Prémaster - Méthodes numériques

TD 2 : Compléments sur le laplacien

Exercice 1 (Interprétation probabiliste du laplacien 1D)**.**
Le but de cet exercice est d'obtenir l'opérateur laplacien comme limite formelle d'une marche aléatoire convenablement renormalisée et de comparer les modèles discret et continu obtenus.

Soient y_n des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Rademacher, c'est-à-dire $\mathrm{P}(y_n = -1) = \mathrm{P}(y_n = +1) = \frac{1}{2}$. Pour un pas de temps $\tau > 0$ et un pas d'espace $h > 0$, et des entiers n, m (avec $|m| \leqslant n$), on considère :

$$X_{n\tau} = h \sum_{k=1}^{n} y_k, \quad \text{et} \quad v(t,x) = \mathrm{P}(X_t = x) \text{ avec } t = n\tau, x = mh.$$

On peut interpréter X_t comme étant la position à l'instant $t = n\tau$ d'une particule partant de 0 au temps 0, et sautant à gauche ou à droite avec probabilité $1/2$ d'une longueur h à chaque pas de temps.

1. (a) Déterminer l'espérance et la variance de $X_{n\tau}$. Interpréter ce résultat.
   (b) Calculer $v(n\tau, mh)$ pour $|m| \leqslant n$.
   (c) Dans cette question on fixe $t = n\tau$ et $x = mh$. On suppose que $D = \frac{h^2}{\tau}$ est constant (pourquoi ?). En utilisant la formule de Stirling déterminer un équivalent de $v(t,x)$ lorsque h tend vers 0.
2. (a) Montrer que :
$$v(t+\tau, x) = \frac{1}{2} v(t, x-h) + \frac{1}{2} v(t, x+h).$$
   En déduire formellement une équation vérifiée par v dans la limite $h \to 0$ et $\frac{h^2}{\tau} = D$.
   On admet que cette équation admet une unique solution, qu'on note u.
   (b) Déterminer, formellement, $\int_{\mathbb{R}} x^k u(t,x)\, dx$ pour $k = 0, 1, 2$ en fonction de t. Comparer avec 1. (a).
   (c) Proposer une formule pour $u(t,x)$.

Exercice 2 (Équation de Poisson 2D avec condition au bord de Dirichlet homogène)**.**
Le but de cet exercice est d'adapter la méthode vue en cours pour simuler le laplacien en dimension 1 à la dimension 2.

1. On note $\Omega =]0,1[^2$. Déterminer une discrétisation du problème elliptique suivant :
$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
   sur le maillage $\{(i/n, j/n)\}$ pour i, j dans $\{0, \ldots, n\}$.
2. Écrire une formulation matricielle de l'équation discrétisée à résoudre.

3. Écrire une fonction `elliptique_2D` qui étant donnés une fonction f et un entier n affiche la solution numérique du problème (on utilisera `meshgrid`, `contour` et `contourf`). Pour la tester on déterminera la solution de l'équation pour $f(x,y) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi y)$.
4. Écrire un script `elliptique_2D_script` qui renvoie une approximation numérique de l'ordre de la méthode et trace la courbe d'erreur en norme infinie dans un repère log-log.