ÉNS de Lyon Semestre d'automne 2016

L3 - Prémaster - Méthodes numériques

TD 1 : Équations elliptiques

Exercice 1 (Équation de Poisson 1D avec condition au bord de Dirichlet)**.**
Cet exercice a pour but d'implémenter la méthode vue en cours (sous Python).

1. Écrire une fonction `elliptique_dirichlet` qui étant donnés des fonctions c, f, des nombres réels a, b et un entier n affiche la solution numérique du problème elliptique suivant :
$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ sur }]0,1[, \\ u(0) = a, \quad u(1) = b, \end{cases}$$
sur le maillage $\{k/n\}$ pour k dans $\{0, \dots, n\}$.
2. Vérifier que pour $f(x) = (1 + 2x - x^2)e^x$, $c(x) = x$ et $(a, b) = (1, 0)$, la solution de l'équation précédente est $u(x) = (1 - x)e^x$. Tracer la solution numérique et u sur un même graphique.
3. Écrire un script `elliptique_dirichlet_script` qui renvoie une approximation numérique de l'ordre de la méthode et trace la courbe d'erreur en norme infinie dans un repère log-log.

Exercice 2 (Équation de Poisson 1D avec condition au bord mixte)**.**
Dans cet exercice on s'intéresse à une condition de Neumann en 1 au lieu de la condition de Dirichlet de l'exercice précédent. La condition au bord de Neumann a une interprétation importante : le flux de u au bord du domaine est nul.

1. Proposer une discrétisation simple de $u'(1)$. Écrire une fonction `elliptique_neumann` qui étant donnés une fonction f, des nombres réels a, σ et un entier n affiche la solution numérique du problème elliptique suivant :
$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[, \\ u(0) = a, \quad u'(1) = \sigma, \end{cases}$$
sur le même maillage que précédemment.
2. Déterminer la solution du problème précédent dans le cas $f(x) = x$ et $(a, \sigma) = (1, -1)$.
Écrire un script `elliptique_neumann_script` analogue à `elliptique_dirichlet_script`.
3. On suppose que l'équation $-u'' = f$ est vérifiée sur $]0, 1]$ et que u est prolongeable en une fonction $C^2([0, 1 + \varepsilon[)$, avec $\varepsilon > 0$. Proposer une meilleure discrétisation de $u'(1)$.
Écrire un script `elliptique_neumann2_script` analogue à `elliptique_neumann_script`.

Exercice 3.
Le but de cet exercice est d'appronfondir les résultats de convergence du cours.

1. Pour l'équation de Poisson avec condition au bord de Dirichlet et avec $c = 0$, on a montré que si f est dans $C^2([0, 1])$ alors la méthode numérique est d'ordre 2. Que se passe-t-il si f est seulement dans $C^1([0, 1])$? dans $C^0([0, 1])$?
2. Justifier théoriquement les ordres de convergence obtenus à l'exercice 2.