ÉCHANTILLONNEUR DE GIBBS

# Warm-up

Soit $(X, Y)$ un couple de variables de loi gaussienne centrée de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

où $\rho \in (0, 1)$. Écrire un échantillonneur de Gibbs permettant de simuler approximativement la loi de $(X, Y)$.

# Échantillonneur pour un mélange gaussien

Soit $K \geq 2$ et $n \geq 1$. On considère le vecteur aléatoire $(\theta, X, Z)$ où $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ayant la loi suivante.

- On simule $p = (p_1, \ldots, p_K)$ un vecteur ayant la loi de densité proportionnelle à (loi de Dirichlet) $p \mapsto \prod_{k=1}^{K} p_k^{\gamma_k - 1}$.
- On simule $s^2_{1:K}$, mutuellement indépendantes, et telles que pour tout $1 \leq k \leq K$, $s_k^2$ a une loi inverse-gamma de paramètres, $\lambda_k/2$ et $\beta_k/2$, i.e. de densité proportionnelle à $u \mapsto u^{-\lambda_k/2-1} \exp(-\beta_k/(2u))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $1 \leq k \leq K$, la loi conditionnelle de $m_k$ sachant $s_k^2$ est gaussienne de moyenne $\alpha_k$ et de variance $s_k^2/\lambda_k$.
- Conditionnellement à $\theta = (p_1, \ldots, p_K, m_1, \ldots, m_K, s_1^2, \ldots, s_K^2)$, les $(Z_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et telles que :
  - pour tout $1 \leq k \leq K$, $\mathbb{P}(Z_i = k|\theta) = p_k$ ;
  - conditionnellement à $\theta$ et $Z_i$, $X_i$ suit une loi gaussienne de moyenne $m_{Z_i}$ et de variance $s^2_{Z_i}$.

La densité jointe peut alors s'écrire :

$$\pi : (\theta, x, z) \mapsto \pi(p) \left\{ \prod_{k=1}^{K} \pi(s_k^2) \pi(m_k|s_k^2) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \pi(z_i|\theta) \pi(x_i|z_i, \theta) \right\},$$

où $\pi(w_1|w_2)$ est une notation générique pour la densité de la loi conditionnelle de la variable $W_1$ sachant $W_2$.

1. Montrer que la loi a posteriori de $\theta$ s'écrit :

   $$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{K} p_k \varphi_{m_k, s_k^2}(x_i) \right),$$

   où $\varphi_{m_k, s_k^2}$ est la densité gaussienne de moyenne $m_k$ et de variance $s_k^2$.

2. Écrire la densité de la loi conditionnelle de $Z$ sachant $(X, \theta)$.
3. Écrire la densité de la loi conditionnelle de $\theta$ sachant $(Z, X)$.
4. Écrire le pseudo-code de l'échantillonneur de Gibbs.