Feuille d'exercice N° 6

Statistique

Exercice 1. *Moyenne et variance empiriques*
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. d'espérance m et de variance σ^2. Supposons que $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$. Notons

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \qquad T_n = \sqrt{n-1}\frac{\bar{X}_n - m}{s_X}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$, $\mathbf{Var}(\bar{X}_n)$ et le risque quadratique $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - m)^2]$.
2. Montrer les convergences suivantes

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} m, \qquad \sqrt{n}(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \text{quand } n \to \infty.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[s_X^2] = (n-1)\sigma^2/n$ et en déduire un estimateur sans biais pour σ^2.
4. Montrer que $s_X^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.
5. Déterminer la loi limite de la statistique T_n lorsque $n \to \infty$. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour la moyenne m.

Supposons désormais que les X_i sont de loi gaussienn, à savoir $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

6. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$?
7. Montrer que $\bar{X}_n$ et s_X^2 sont mutuellement indépendants.
8. Montrer que ns_X^2/σ^2 suit la loi de khi-deux χ^2_{n-1}.
9. En déduire la loi de la statistique T_n à n fixé. En déduire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour la moyenne m.

Exercice 2. *Convergence de la loi de Student*
Montrer que la loi de Student convergent en loi vers la loi normale standard lorsque le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini :

$$t_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Exercice 3. *Loi Gamma*
La densité de la loi Gamma $\Gamma(a, b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$ est donnée par

$$f_{(a,b)}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx}, \qquad x > 0.$$

Notons $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de la loi Gamma $\Gamma(a, b)$. Rappelons que la fonction Gamma est définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$. On a $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$ et $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1. Soit $X \sim \Gamma(a, b)$. Calculer $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k = 1, 2, \dots$.
2. Notons $m_1 : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ et $m_2 : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ les deux premiers moments de la loi Gamma en fonction des paramètres, à savoir $m_1(a, b) = \mathbb{E}[X]$ et $m_2(a, b) = \mathbb{E}[X^2]$. Calculer l'estimateur par la méthode des moments (EMM) des paramètres a et b qui est défini comme la solution par rapport à a et b du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}_n = m_1(a, b) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = m_2(a, b) \end{cases}$$

3. Calculer la fonction de log-vraisemblance $\ell(a, b)$ et montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) n'admet pas d'expression explicite.
4. On peut approcher l'EMV par la méthode de Newton-Raphson (voir TP). Déterminer le gradient $\nabla\ell(a, b)$, la matrice Hessienne $H = \nabla^2\ell(a, b)$ ainsi que son inverse H^{-1}. En déduire la formule de mise à jour des paramètres a et b par la méthode de Newton-Raphson.