Échantillonneur de Gibbs

Warm-up

Soit (X, Y) un couple de variables de loi gaussienne centrée de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} ,$$

où $\rho \in (0, 1)$. Écrire un échantillonneur de Gibbs permettant de simuler approximativement la loi de (X, Y).

Introduisons le vecteur $Z = X - \rho Y$. Alors,

$$\mathrm{Cov}(Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) - \rho\mathrm{Cov}(Y, Y) = 0, .$$

Ainsi, puisque le vecteur (Y, Z) est gaussien, Y et Z sont indépendantes. On écrit ensuite

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[Z + \rho Y|Y] = \mathbb{E}[Z] + \rho Y = \rho Y .$$

et

$$\mathbb{V}[X|Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2|Y] = \mathbb{E}[(X - \rho Y)^2|Y] = \mathbb{E}[Z^2|Y] = \mathbb{V}[Z] = 1 - \rho^2 .$$

La loi conditionnelle de X sachant Y, notée $\pi_{X|Y}(\cdot|Y)$, est donc une gaussienne de moyenne ρY et de variance $1 - \rho^2$. On obtient un résultat similaire pour la loi de Y sachant X, notée $\pi_{Y|X}(\cdot|X)$, par symétrie. Ainsi une itération d'un échantillonneur de Gibbs lorsque l'état courant est (X_k, Y_k) serait :

- *Simuler $X_{k+1} \sim \pi_{X|Y}(\cdot|Y_k)$.*
- *Simuler $Y_{k+1} \sim \pi_{Y|X}(\cdot|X_{k+1})$.*

Échantillonneur pour un mélange gaussien

Soit $K \geq 2$ et $n \geq 1$. On considère le vecteur aléatoire (θ, X, Z) où $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ayant la loi suivante.

- On simule $p = (p_1, \ldots, p_K)$ un vecteur ayant la loi de densité proportionnelle à (loi de Dirichlet) $p \mapsto \prod_{k=1}^{K} p_k^{\gamma_k - 1}$.
- On simule $s_{1:K}^2$, mutuellement indépendantes, et telles que pour tout $1 \leq k \leq K$, s_k^2 a une loi inverse-gamma de paramètres, $\lambda_k/2$ et $\beta_k/2$, i.e. de densité proportionnelle à $u \mapsto u^{-\lambda_k/2-1} \exp(-\beta_k/(2u))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $1 \leq k \leq K$, la loi conditionnelle de m_k sachant s_k^2 est gaussienne de moyenne α_k et de variance s_k^2/λ_k.
- Conditionnellement à $\theta = (p_1, \ldots, p_K, m_1, \ldots, m_K, s_1^2, \ldots, s_K^2)$, les $(Z_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et telles que :
  - pour tout $1 \leq k \leq K$, $\mathbb{P}(Z_i = k|\theta) = p_k$;
  - conditionnellement à θ et Z_i, X_i suit une loi gaussienne de moyenne m_{Z_i} et de variance $s_{Z_i}^2$.

La densité jointe peut alors s'écrire :

$$\pi : (\theta, x, z) \mapsto \pi(p) \left\{ \prod_{k=1}^{K} \pi(s_k^2)\pi(m_k|s_k^2) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \pi(z_i|\theta)\pi(x_i|z_i, \theta) \right\} ,$$

où $\pi(w_1|w_2)$ est une notation générique pour la densité de la loi conditionnelle de la variable W_1 sachant W_2.

1. Montrer que la loi a posteriori de θ s'écrit :

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K} p_k \varphi_{m_k, s_k^2}(x_i) \right) ,$$

où φ_{m_k, s_k^2} est la densité gaussienne de moyenne m_k et de variance s_k^2.

Pour écrire cette loi conditionnelle, il suffit d'écrire que la densité conditionnelle est proportionnelle 'a la densité jointe et ensuite de ne conserver que les quantités qui dépendent de θ. On obtient alors,

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) \propto \pi(\theta, x) &\propto \pi(\theta)\pi(x|\theta) , \\ &\propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i|\theta) , \\ &\propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K} p_k \varphi_{m_k, s_k^2}(x_i) \right) . \end{aligned}$$

2. Écrire la densité de la loi conditionnelle de Z sachant (X, θ).

En procédant comme à la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \pi(z|\theta, x) \propto \pi(\theta, z, x) &\propto \pi(z|\theta)\pi(x|z, \theta) , \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \pi(z_i|\theta)\pi(x_i|z_i\theta) , \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{z_i=k} p_k \varphi_{m_k, s_k^2} \right) . \end{aligned}$$

3. Écrire la densité de la loi conditionnelle de θ sachant (Z, X).

La densité de la loi conditionnelle de θ sachant (Z, X) s'écrit

$$\pi(\theta|z, x) \propto \pi(\theta, z, x) \propto \pi(\theta)\pi(z|\theta)\pi(x|z, \theta) \propto \pi(p|z)\pi(m, s^2|x, z) .$$

On peut ensuite calculer chacune de ces deux densités. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \pi(p|z) \propto \pi(\theta, z, x) &\propto \pi(p)\pi(z|p) , \\ &\propto \prod_{k=1}^{K} p_k^{\gamma_k - 1} \prod_{i=1}^{n} p_{z_i} \propto \prod_{k=1}^{K} p_k^{\gamma_k + n_k - 1} , \end{aligned}$$

où n_k est le nombre de z_i égaux à k. Ainsi, $\pi(p|z)$ est la densité de la loi de Dirichlet de *paramètres* $(\gamma_1 + n_1, \ldots, \gamma_K + n_K)$. *D'autre part,*

$$\begin{aligned}
\pi(m, s^2|x, z) &\propto \pi(s^2)\pi(m|s^2)\pi(z|m, s^2)\pi(x|z, m, s^2)\,, \\
&\propto \left\{\prod_{i=1}^{n} s_{z_i}^{-1} \exp\left(-\frac{(x_i - m_{z_i})^2}{2s_{z_i}^2}\right)\right\} \left\{\prod_{k=1}^{K} (s_k^2)^{-\lambda_k/2-1} \exp(-\beta_k/(2s_k^2))\right\} \\
&\qquad \times \prod_{k=1}^{K} s_k^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda_k(m_k - \alpha_k)^2}{2s_k^2}\right)\,, \\
&\propto \prod_{k=1}^{K} (s_k^2)^{-n_k/2-\lambda_k/2-3/2} \exp(-\beta_k/(2s_k^2)) \\
&\qquad \times \prod_{k=1}^{K} \exp\left(\frac{-1}{2s_k^2}\left(\lambda_k(m_k-\alpha_k)^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}(x_i - m_k)^2\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
&\lambda_k(m_k - \alpha_k)^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}(x_i - m_k)^2 \\
&\quad = (n_k + \lambda_k)m_k^2 - 2m_k\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k\right) + \lambda_k\alpha_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i^2\,, \\
&\quad = (n_k + \lambda_k)\left(m_k - \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k}{n_k + \lambda_k}\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k\right)^2}{n_k + \lambda_k} + \lambda_k\alpha_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i^2\,, \\
&\quad = (n_k + \lambda_k)(m_k - \tau_k)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k\right)^2}{n_k + \lambda_k} + \lambda_k\alpha_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i^2\,,
\end{aligned}$$

où $\tau_k = (\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k)/(n_k + \lambda_k)$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\pi(m, s^2|x, z) &\propto \prod_{k=1}^{K} (s_k^2)^{-n_k/2-\lambda_k/2-3/2} \exp\left(-\frac{\rho_k}{2s_k^2}\right) \\
&\qquad \times \prod_{k=1}^{K} \exp\left(\frac{-(n_k + \lambda_k)}{2s_k^2}\left(m_k - \tau_k)^2\right)\right)\,,
\end{aligned}$$

où

$$\rho_k = \beta_k + \lambda_k\alpha_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{z_i=k}x_i + \lambda_k\alpha_k\right)^2}{n_k + \lambda_k}\,.$$

Finalement, sous $\pi(m, s^2|x, z)$, *les* s_k^2 *sont indépendants de loi* $\mathcal{IG}((n_k + \lambda_k)/2; \rho_k/2)$ *et les* m_k *sont indépendants conditionnellement aux* s_k^2 *et de loi* $\mathcal{N}(\tau_k; s_k^2/(n_k + \lambda_k))$, $1 \le k \le K$.

4. Écrire le pseudo-code de l'échantillonneur de Gibbs.

   Il suffit, à chaque itération, de simuler la variable sélectionnée conditionnellement aux autres en utilisant les questions précédentes.