2021/2022
Pr: S.Bouzawit

Devoir 2

Durée:2h

2bac s-math
Madariss Joudour AlMaarifa
Larache

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes

1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[3]{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{3}$. 1pt

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(a) Montrer que $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$. 1pt

(b) Simplifier $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. 1pt

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1 (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 0.5 pt

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. 0.5 pt

2 (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1$. 0.5 pt

(b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. 0.5 pt

(c) Montrer que l´équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. 1pt

(d) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = -\dfrac{\alpha^3+\alpha}{\alpha^3+1}$. 1.5 pt

3 Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

(a) Montrer que l´équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$ et que $x_n \geq 1$. 1pt

(b) Etudier la monotonie de (x_n) . 0.5pt

(c) Montrer que (x_n) est convergente et calculer sa limite. 1 pt

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :$f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.
C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 Calculer $\underset{x \to +\infty}{lim} f(x)$. 0.5pt

2 (a) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite . Interpréter graphiquqement le résultat . 1pt

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$. 1pt

(c) Dresser le tableau de variations de f . 0.5pt

3 (a) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$. 1pt

(b) Etudier la position relative de C_f et la droite (Δ) d´équation $y = \dfrac{\pi}{2}x$. 0.5pt

4 Tracer C_f . 1pt

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$ et $a \in]0,+\infty[$
On considère f la fonction définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2a}[$ par : $f(x) = \sqrt[n]{tan^2(ax)}$.

1 Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite . 0.5pt

2 Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,\dfrac{\pi}{2a}[$. 0.5pt

3 (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,\dfrac{\pi}{2a}[$ vers $\mathbb{R}^+$. 0.5pt

(b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$. 0.5pt

(c) Calculer $f(\dfrac{\pi}{4a})$ et $(f^{-1})'(1)$. 1pt

4 Vérifier que : $(\forall x \in]0,\dfrac{\pi}{2a}[) \quad f'(x) = \dfrac{2a}{n} \times \dfrac{1+f^n(x)}{\sqrt{f(x)^{n-2}}}$. 0.5pt

5 En déduire que $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{n}{2a} \times \dfrac{\sqrt{x^{n-2}}}{1+x^n}$. 1pt

6 (**BONUS**)
On pose $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}(\dfrac{1}{x^2})$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

(a) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$. 0.5pt

(b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$. 0.5pt

(c) En déduire que $g(x) = \dfrac{\pi}{2a}$ pour tout x de $]0,+\infty[$. 0.5pt

Le Bac se prépare chaque jour