

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes

- 1** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[3]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{3}$. 1pt
- 2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- a** Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$. 1pt
- b** Simplifier $f(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. 1pt

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- 1** **a** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0.5 pt
- b** Montrer que f est continue sur \mathbb{R} . 0.5 pt
- 2** **a** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} - 1$. 0.5 pt
- b** En déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . 0.5 pt
- c** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} . 1pt
- d** Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = -\frac{\alpha^3 + \alpha}{\alpha^3 + 1}$. 1.5 pt
- 3** Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
- a** Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n dans \mathbb{R} et que $x_n \geq 1$. 1pt
- b** Etudier la monotonie de (x_n) . 0.5pt
- c** Montrer que (x_n) est convergente et calculer sa limite. 1 pt

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$.
 C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0.5pt
- 2** **a** Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite. Interpréter graphiquement le résultat. 1pt

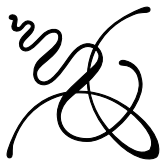
- (b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. 1pt
- (c) Dresser le tableau de variations de f . 0.5pt
- 3** (a) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$. 1pt
- (b) Etudier la position relative de C_f et la droite (Δ) d'équation $y = \frac{\pi}{2}x$. 0.5pt
- 4** Tracer C_f . 1pt

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$ et $a \in]0, +\infty[$

On considère f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2a}[$ par : $f(x) = \sqrt[n]{\tan^2(ax)}$.

- 1** Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite. 0.5pt
 - 2** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2a}[$. 0.5pt
 - 3** (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2a}[$ vers \mathbb{R}^+ . 0.5pt
 - (b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$. 0.5pt
 - (c) Calculer $f(\frac{\pi}{4a})$ et $(f^{-1})'(1)$. 1pt
 - 4** Vérifier que : $(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2a}[) \quad f'(x) = \frac{2a}{n} \times \frac{1 + f^n(x)}{\sqrt[n]{f(x)^{n-2}}}$. 0.5pt
 - 5** En déduire que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{n}{2a} \times \frac{\sqrt{x^{n-2}}}{1 + x^n}$. 1pt
 - 6** (BONUS)
- On pose $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}(\frac{1}{x^2})$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
- (a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$. 0.5pt
 - (b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. 0.5pt
 - (c) En déduire que $g(x) = \frac{\pi}{2a}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. 0.5pt



Le Bac se prépare chaque jour

