Limite d´une suite(2)

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que :
   $(\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}(\exists c \in]k, k+1[)$ tel que $(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k} = \dfrac{3}{2}\sqrt{c}$
2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ $u_n - \dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3n\sqrt{n}} < u_n - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par :
$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{1+k^2} - \arctan(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{1+k^2} - \arctan(n+1)$

1. Montrer ,en appliquant TAF , que pour tout $x > 1$
   $\arctan(x+1) - \arctan(x) < \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\arctan(x) - \arctan(x-1) > \dfrac{1}{1+x^2}$
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

Exercice 3

Partie I : Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$

1. Montrer que $(\forall x \in]0,1[)$ $0 < f'(x) < \dfrac{1}{2\pi}$
2. Montrer que $(\exists! \alpha \in]0,1[)$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Partie II : Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n < 1$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) .
3. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n$.
   (b) calculer $\lim u_n$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par : $f_n(x) = -1 + x + x^2 + ... + x^n$

1. Montrer que : $(\exists! \alpha_n \in [0,1])$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$
2. (a) Calculer α_1 et α_2 .
   (b) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (c) En déduire que (α_n) est décroissante .
3. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} * - \{1,2\})$ $2\alpha_n = 1 + \alpha_n^{n+1}$
   (b) Calculer $\lim \alpha_n^{n+1}$ et déduire $\lim \alpha_n$

Exercice 5

Partie I : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer $f(]\frac{2}{3},+\infty[)$
2. On pose $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .Vérifier que $f(\varphi)=\varphi$.
3. Montrer que $\left(\forall x\in\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[\right)$ $|f'(x)|\leq\dfrac{4}{9}$

Partie II : Soit (u_n) la fonction définie par $u_0=2$, $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

1. Montrer que $u_n\in\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
2. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $|u_{n+1}-\varphi|\leq\dfrac{4}{9}|u_n-\varphi|$.
3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 6

Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ et f_n la fonction définie sur $]\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x-\cos(\dfrac{x}{n})$.

1. Montrer que : $(\exists!\alpha_n\in\mathbb{R})$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$ et que $\alpha_n\in]0.1[$.
2. Montrer que $(\forall x\in]0,1[)$ $f_{n+1}(x)<f_n(x)$
3. Montrer que (α_n) est croissante , et déduire qu´elle est convergente .
4. Calculer $\lim\alpha_n$

Exercice 7

Soient f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2+x}{1+x}$ $\Big(\forall x\in I=[1,+\infty[\Big)$.

1. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.
2. Montrer que $f(I)\subset I$.
3. Montrer que $|(fof)'(x)|\leq\dfrac{1}{25}$ $(\forall x\geq 1)$
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)\,(\forall n\in\mathbb{N})$.
   Montrer que $u_n\geq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
5. on pose $x_n=u_{2n}$ et $y_n=u_{2n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   (a) Vérifier $x_{n+1}=fof(x_n)$ et $y_{n+1}=fof(y_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   (b) Montrer que $x_n<\sqrt{2}<y_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   (c) Montrer que (x_n) est croissante et que (y_n) est décroissante .
   (d) Montrer que $|x_{n+1}-y_{n+1}|\leq\dfrac{1}{25}|x_n-y_n|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   (e) En déduire que (x_n) et (y_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune .