Devoir Surveillé N°1

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-\sqrt[3]{x}}{x-8}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\Big(\pi - 2\arctan(3x+1)\Big)$. 2 pts

2. (a) Montrer que : $(\forall x>1) \quad \arctan(\dfrac{x}{x+1}) - \arctan(\dfrac{x-1}{x}) = \arctan(\dfrac{1}{2x^2})$. 1pt

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\Big(\arctan(\dfrac{x}{x+1}) - \arctan(\dfrac{x-1}{x})\Big)$. 0.5pt

3. (a) Calculer $\tan(2\arctan\sqrt{2})$ et $\tan(\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}))$. 1pt

   (b) Montrer que $\frac{\pi}{4} < \arctan\sqrt{2} < \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} < \arctan 2\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$. 1pt

   (c) En déduire que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$. 0.5pt

Exercice 2

Soit φ la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = 1 + \sin(x) - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que φ réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle que l´on déterminera . 1pt
2. En déduire que : $\exists! \alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. 0.5 pt
3. Soit f la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1+\sin(x)} & \text{si } 0 < x < \alpha \\ f(x) = x & \text{si } \alpha \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

   Montrer que f est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. 1.5 pt

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \pi \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0 . 1pt
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \pi - \arctan(x^2)$. (En posant $\alpha = \arctan(x^2)$) 2pts
3. Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J à déterminer . 1pt

   (b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J. 1pts

Exercice 4

On considère l´équation $(*) \quad \arctan(x) + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}$

1. Montrer que si x est une solution de $(*)$ alors x est positif . 1pt
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(x^3)$

   (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l´on déterminera . 1pt

   (b) En déduire que $(*)$ admet une solution unique c dans $\mathbb{R}$. 1pt

3. (a) Vérifier que $\dfrac{x+x^3}{1-x^4} = \dfrac{x}{1-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. 0pt

(b) Déterminer la valeur exacte de c. 1pt

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

1. (a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 0.5pt

   (b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left[1, +\infty\right[$. 0.5pt

   (c) Dresser le tableau de variations de f^{-1} et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$ 1pt

2. **Question supplémentaire**

   (a) Montrer que $f(x) = \dfrac{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}{2\tan(\frac{x}{2})}$ pour tout x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 0.5

   (b) Montrer que $f^{-1}(x) = 2\arctan(x - \sqrt{x^2 - 1})$ pour tout x de $\left[1, +\infty\right[$. 1pt

   (c) Vérifier que $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ et en déduire que $\tan(\dfrac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$. 1pt