Th de Rolle & Th des Accroissements Finis

Exercice 1

1. soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x) - x^2$.
   (a) Montrer que : $(\exists c \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[)$ tel que $f(c) = 0$
   (b) En appliquant le Th de Rolle , montrer qu´il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = 2\alpha$
2. On pose $g(x) = (x-2)(x-1)(x+4)(x+3)$.
   (a) Montrer que l´équation $g'(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire ,sans calculer $g''(x)$,que l´équation $g''(x) = 0$ admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}$.
3. Soit h une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $h(1) - h(0) = \frac{1}{2}$.
   Montrer que : $(\exists c \in]0,1[)$ $\dfrac{h'(c)}{c} = \dfrac{2}{(1+c^2)^2}$.
4. f une fonction continue sur $[0,3]$ et dérivable sur $]0,3[$ telle que $f(0) = f(3) - 1$.
   Montrer que : $(\exists c \in]0,1[)$ tel que $3f'(3c) = 1$

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ telle que :

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'_d(0) = 0$$

1. Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   Montrer que g est continue à droite en 0 .
2. Montrer que : $(\exists c \in]0,1[)$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 3

a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Soit φ la fonction définie sur $[a.b]$ par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - k\Big(g(x) - g(a)\Big)$.
   (a) Déterminer le réel k tel que $\varphi(b) = 0$.
   (b) En déduire que : $(\exists c \in]a,b[)$ tel que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Exercice 4

a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Soit φ la fonction définie sur $[a.b]$ par $\varphi(x) = \Big(f(b) - f(a)\Big)x^3 - \Big(b^3 - a^3\Big)f(x)$.

1. Montrer que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$
2. Montrer que : $(\exists c \in]a,b[)$ tel que $\Big(b^3 - a^3\Big)f'(c) = 3c^2\Big(f(b) - f(a)\Big)$.
3. **Application** : On pose $f(t) = \sin(t) - t$ et $[a,b] = [0,x]$ pour tout $x > 0$
   Calculer la limite suivante $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t) - t}{t^3}$

Exercice 5

1. Montrer que $(\forall x > 0)(\exists c \in]x, x+1[)$ tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $S_n > 2\sqrt{n+1} - 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(\sqrt[3]{t}) - \sqrt[3]{t}$.

1. Montrer que : $(\exists x > 0)(\exists c \in]0, x^3[)$ tel que $\arctan(x) - x = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{x^3}{1 + \sqrt[3]{c^2}}$
2. (a) En déduire que : $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3} < -\dfrac{1}{3(1+x^2)}$

   (b) Calculer la limite suivante $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\arctan(t) - t}{t^3}$