Limite d´une suite

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}u_n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < \sqrt{2}$
2. Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire qu´elle est convergente .
3. On pose $x_n = u_n^2 - 2 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$.
   (a) Montrer que (x_n) est géométrique , et exprimer x_n en fonction de n .
   (b) Exprimer u_n en fonction de n , et calculer $\lim u_n$.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2$ en fonction de n .

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 1$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < \sqrt{2n+1}$
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad \dfrac{u_{n-1}}{n} < \sqrt{\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}}$, et calculer $\lim \dfrac{u_{n-1}}{n}$.
   (b) En déduire $\lim \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.
   (c) Montrer que $\lim u_n - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3

Récurrence double :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = -5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$
   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$
   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.

Récurrence forte :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.
   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.
   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > \sqrt{2}$
2. Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire que $\sqrt{2} < u_n \leq 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
3. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$
   (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n - 2 \leq (\frac{1}{4})^n$.
   (c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 5

Partie I : Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(\sqrt{x+2})$.

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que : $(\exists! \alpha \in]0.2[)$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer que $(\forall x \in]0, 2[)$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

Partie II : Soit (u_n) la fonction définie par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan(x) \leq x$
2. Montrer que $0 < u_n \leq 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f_n(x) = \tan(\frac{\pi x}{2}) - \frac{\pi}{2nx}$.

1. Montrer que : $(\exists! \alpha_n \in]0.1[)$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
2. Montrer que (α_n) est décroissante , et déduire qu´elle est convergente .
3. Montrer que $\lim \alpha_n = 0$ et calculer $\lim \alpha_n \sqrt{n}$

Exercice 7

1. Montrer que : $(\exists! \alpha \in]0.1[)$ tel que $2\alpha^3 + \alpha - 1 = 0$.
2. (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 0 \quad et \quad v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \, et \, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & si \quad f(\dfrac{u_n + v_n}{2}) > 0 \\ v_{n+1} = v_n \, et \, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & si \quad f(\dfrac{u_n + v_n}{2}) < 0 \end{cases}$
   (a) Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
   (b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (c) Montrer que $u_n \leq \alpha \leq v_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (d) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune .