Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia A - Traccia 1
Controllo dell'assetto di un drone planare
Gruppo Q

Clarissa Bovo, Fabio Cangiano, Francesca Porzia Fedi, Antonio Zara

Il progetto riguarda il controllo dell'assetto di un drone planare, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{\theta} = \omega \tag{1a}$$

$$J\dot{\omega} = -\beta\omega + \frac{a}{2}\sin(\theta)F_v + aF_p \tag{1b}$$

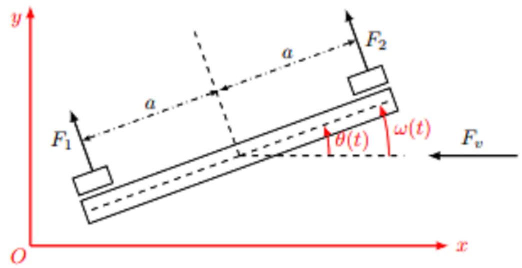

Figura 1: Rappresentazione nel piano del drone considerato

Dove:

- θ rappresenta l'angolo di inclinazione rispetto al piano.
- ω rappresenta la velocità di rotazione rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per il baricentro
- J rappresenta il momento di inerzia del drone rispetto all'asse di rotazione che passa per il baricentro
- β rappresenta il coefficiente d'attrito dinamico dovuto alla presenza dell'aria
- a rappresenta la semi-ampiezza planare del drone
- F_v rappresenta la forza costante dovuta all'azione del vento
- $F_p(t) = F_1(t) - F_2(t)$ rappresenta la differenza delle forze di propulsione applicate al drone (come mostrato in figura 1)

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u).$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x_1 := \theta(t), \quad x_2 := \omega(t) \quad u := F_p, \quad y := \theta(t).$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$\begin{aligned}
f(x,u) &:= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{-\beta x_2(t)}{J} + \frac{aF_v}{2J}\sin(x_1(t)) + \frac{aF_p}{J} \end{bmatrix} \\
h(x,u) &:= x_1(t)
\end{aligned}$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{-\beta x_2(t)}{J} + \frac{aF_v}{2J}\sin(x_1(t)) + \frac{au(t)}{J} \end{bmatrix} \tag{2a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{2b}$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (2) teniamo presente che conosciamo già il valore in equilibrio di x_1 che è θ_e, andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{2,e} \\ \frac{-\beta x_{2,e}}{J} + \frac{aF_v}{2J}\sin(\theta_e) + \frac{au_e)}{J} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{2,e} \\ \frac{au_e}{J} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta x_{2,e}}{J} - \frac{aF_v}{2J}\sin(\theta_e) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{2,e} \\ u_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta x_{2,e}}{a} - \frac{F_v}{2}\sin(\theta_e) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{2,e} \\ u_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F_v}{2}\sin(\theta_e) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} \theta_e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_e = -\frac{F_v}{2}\sin(\theta_e)$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{3a}$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \tag{3b}$$

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate attraverso la Jacobiana effettuata sulla funzione di stato e sulla funzione di uscita, calcolata nella coppia di equilibrio

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{aF_v}{2J}\cos(x_{1,e}) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{J} \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= 0
\end{aligned}$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\frac{a}{J}}{s^2 + \frac{\beta}{J}s + \frac{-F_v a}{2J}\cos(x_{1,e})} \tag{4}$$

Dunque il sistema linearizzato (??) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (4) che possiede una coppia di poli complessi coniugati. In Figura 2 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

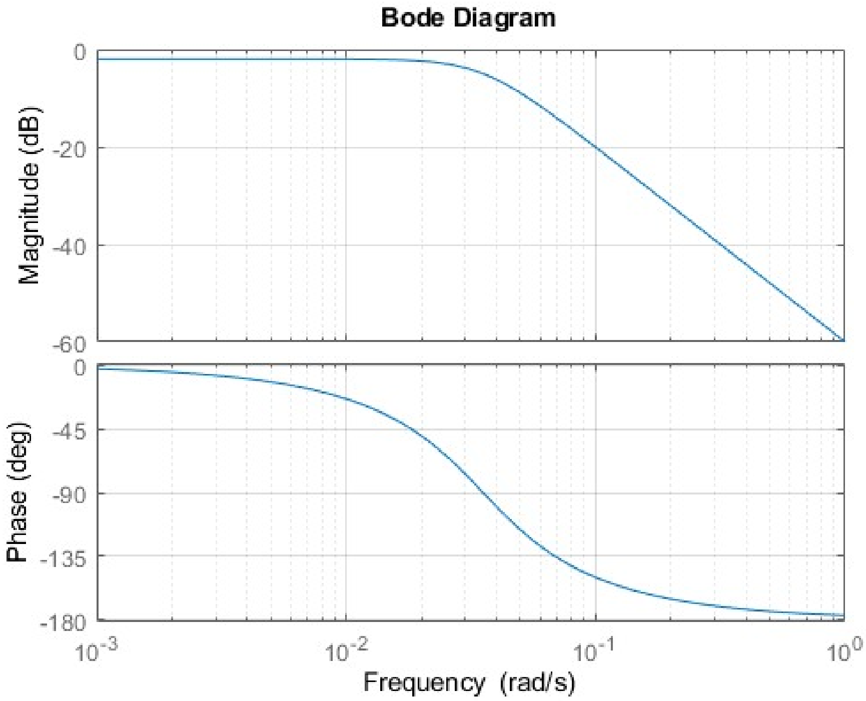

Figura 2: Diagramma di bode di G

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

1) Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.01$ in risposta a un gradino $w(t) = 2 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 2 \cdot 1(t)$.

2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 30°$.

3) Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo dell'1% : $S\% \leq 1\%$.

4) Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 1\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 1s$.

5) Il disturbo in uscita $d(t)$ con una banda limitata nel range di pulsazioni [0,0.1], deve essere abbattuto di almeno 35_{dB}.

6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[10^3, 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 80_{dB}.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto delle specifiche richieste.

1) Al punto uno ci viene richiesto un $e_\infty \leq 0.01$ tenendo come riferimento un gradino in ingresso $w(t) = 2 \cdot 1(t)$ e un disturbo in uscita pari a un gradino $d(t) = 2 \cdot 1(t)$.

L'errore a regime è definito come

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) \tag{5}$$

con $e(t) = w(t) - y(t)$ ricavato dal fatto che consideriamo un sistema in retroazione.

Attraverso l'utilizzo del Teorema del Valore Finale possiamo riscrivere (5) come

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) \tag{6}$$

Utilizzando le funzioni di sensitività ricavate dallo studio del sistema in retroazione e tenendo per adesso solo in considerazione l'ingresso di riferimento possiamo scrivere $E(s)$ come:

$$E(s) = E_w(s) = S(s) \cdot W(s)$$

quindi è possibile riscrivere (6) come:

$$\begin{aligned} e_{\infty,w} &= \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot W(s) \\ e_{\infty,w} &= \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{W}{s} \\ e_{\infty,w} &= W \cdot \lim_{s\to 0} S(s) \end{aligned}$$

Focalizzandoci adesso sul $\lim_{s\to 0} S(s)$ può essere riscritto attraverso l'utilizzo della forma fattorizzata di $L(s)$ ovvero $L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$ e si ricava che:

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

Considerando il fatto che non è conveniente avere poli nell'origine poichè abbasserebbero ancora di più la fase pongo $g = 0$ e ne ricavo che:

$$e_{\infty,w} = W \cdot \lim_{s\to 0} \frac{1}{\mu + 1} = \frac{W}{1+\mu}$$

Effettuando adesso lo stesso ragionamento per il disturbo in uscita $d(t)$ ricaviamo che:

$$e_{\infty,d} = \frac{D}{1+\mu}$$

e che quindi possiamo scrivere l'errore a regime come

$$e_\infty = \frac{W+D}{1+\mu} \approx \frac{W+D}{\mu} \leq e^* = 0.01 \tag{7a}$$

$$\mu \geq \frac{W+D}{0.01} = \frac{2+2}{0.01} = 400 \tag{7b}$$

Abbiamo ricavato il guadagno minimo di $L(s)$ per poter avere un errore a regime uguale a 0.01

$$L(0) = \mu = 400$$

2) In questo punto delle specifiche ci viene richiesto di far si che la nostra $L(s)$ abbia un margine di fase $M_f \geq 30°$ e quindi ne terremo conto durante la progettazione del regolatore

3) In questo punto ci viene richiesto che il nostro sistema abbia al massimo una $S\% \leq S^* = 1\% = 0.01$.

Se progettiamo $L(s)$ in modo che $F(s)$ abbia una coppia di poli c.c. dominanti in $\omega_n \approx \omega_c$ con coefficiente di smorzamento ξ allora possiamo approssimare ques'ultimo come

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$

Essendo il nostro un sistema del 2° ordine con una coppia di poli complessi coniugati rispettivamente in

$$p_1 = -0.025 + 0.025i \qquad p_2 = -0.025 - 0.025i$$

posso scrivere S^* come

$$S^* = e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}} = 0.01.$$

Per far si che $S\% \leq S^*$ occorre far si che $\xi \geq \xi^*$, quindi adesso ricaveremo ξ^* attraverso l'utilizzo di S^*

$$\xi^* = \sqrt{\frac{(\ln(S^*))^2}{\pi^2 + (\ln(S^*))^2}} = \sqrt{\frac{(\ln(0.01))^2}{\pi^2 + (\ln(0.01))^2}} = 0.8261$$

Trovato ξ^* e sapendo che $\xi \geq \xi^*$ possiamo arrivare alla seguente conclusione

$$\xi^* \leq \xi \approx \frac{M_f}{100} \implies M_f \geq 100 \cdot \xi^* = 82.61$$

Siamo arrivati alla conlusione che per far si che $L(s)$ abbia una $S\% \leq 0.01$ occorre che

$$M_f \geq 82.61$$

Abbiamo trovato che il margine di fase per la sovraelongazione percencentuale è maggiore del margine di fase richiesto da progetto, quindi l'abbiamo automaticamente rispettato.

4) In questo punto ci viene richiesto che il tempo di assetamento a $\epsilon = 1\%$, ovvero $T_{a,1}$, sia inferiore a $1s$.

Considerando il fatto che il nostro sistema è del 2° ordine possiamo approssimare $T_{a,1}$ come

$$T_{a,1} \approx \frac{4,6}{\xi\omega_n}$$

e da qui ricaviamo che

$$\xi\omega_n \geq \frac{4.6}{T^*} = \frac{4,6}{1} = 4.6$$

Ora sapendo che $\xi \approx \frac{M_f}{100}$ posso arrivare alla conclusione che

$$\omega_n \geq \frac{460}{M_f} = \frac{460}{82.61} = 5.5684$$

Ricordandoci che nel punto precedente abbiamo supposto $\omega_n \approx \omega_c$ possiamo scrivere che

$$\omega_c \geq 5.5684$$

con ω_c intesa come pulsazione di attraversamento in 0 dB.

In conclusione abbiamo trovato la pulsazione minima sotto il quale non possiamo attraversare gli 0 dB per poter progettare il nostro regolatore.

5) In questo punto ci viene richiesto di attenuare il disturbo in uscita $d(t)$ di 35_{dB} nel range di pulsazioni tra $[0, 0.1]$.

   Attraverso l'utilizzo delle funzioni di sensitività, in particolare di $S(j\omega)$ che ci consente di lavorare direttamente sul disturbo in uscita, possiamo dire che per far si che $d(t)$ sia attenuato di 35_{dB} dobbiamo osservare lo studio in frequenza di $S(j\omega)$, ovvero

$$|S(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ 1_{dB} & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$

   e sapendo che $\omega_{d,max} \ll \omega_c$ possiamo concludere che per far si che $S(j\omega)$ vada ad attenuare $d(t)$ occorre che

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq 35_{dB}$$

   nel range di pulsazioni dato dalle specifiche.

6) In questo punto ci viene richiesto di attenuare di almeno 80_{dB} il disturbo di misura $n(t)$ che ha un range di pulsazioni tra $[10^3, 10^6]$.

   Attraverso l'utilizzo delle funzioni di sensitività, in particolare di $F(j\omega)$ che ci consente di lavorare direttamente sul disturbo di misura, possiamo dire che per far si che $n(t)$ sia attenuato di 80_{dB} dobbiamo osservare lo studio in frequenza di $F(s)$, ovvero

$$|F(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 1_{dB} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$

   e sapendo che $\omega_c \ll \omega_{n,min}$ possiamo concludere che per far si che $F(j\omega)$ vada ad attenuare $n(t)$ occorre che

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -80_{dB}$$

   nel range di pulsazioni dato dalle specifiche.

Pertanto, dopo aver effettuato le varie osservazioni sulle specifiche, mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

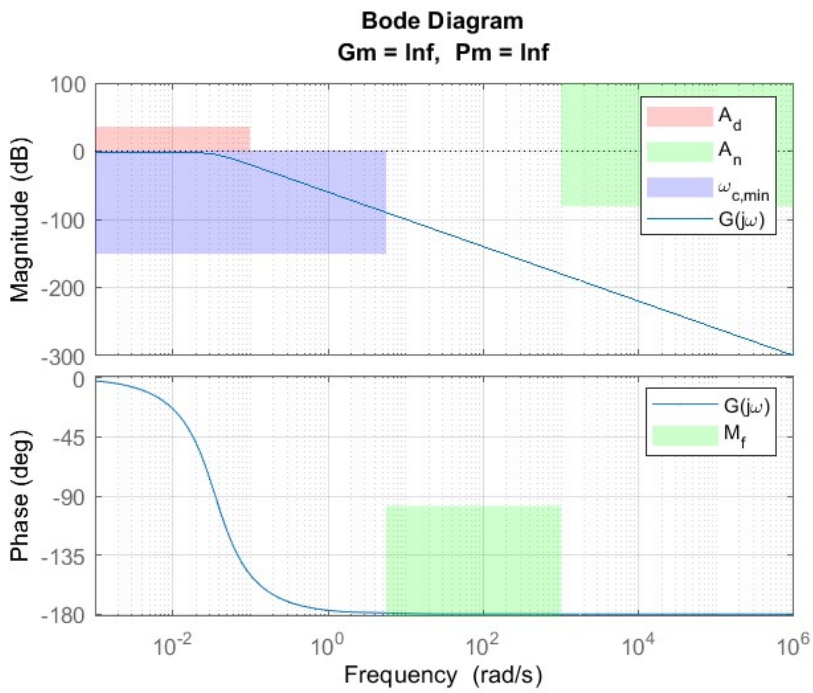

Figura 3: Diagramma di bode di G(s) con specifiche

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

Dalle analisi sull'errore a regime (vedi 7b) emerge che il valore minimo prescritto per L(0)

$$\mu = 400$$

La risposta in frequenza della funzione di trasferimento del sistema linearizzato calcolata in zero è pari a

$$G_0 = 0.80$$

Quindi il guadagno minimo del regolatore viene ottenuto come L(0)/G(0)

$$R_s(s) = \mu/G_0 = 500$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $Ge = R_s(s) \cdot G(s)$ e, in Figura 4, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

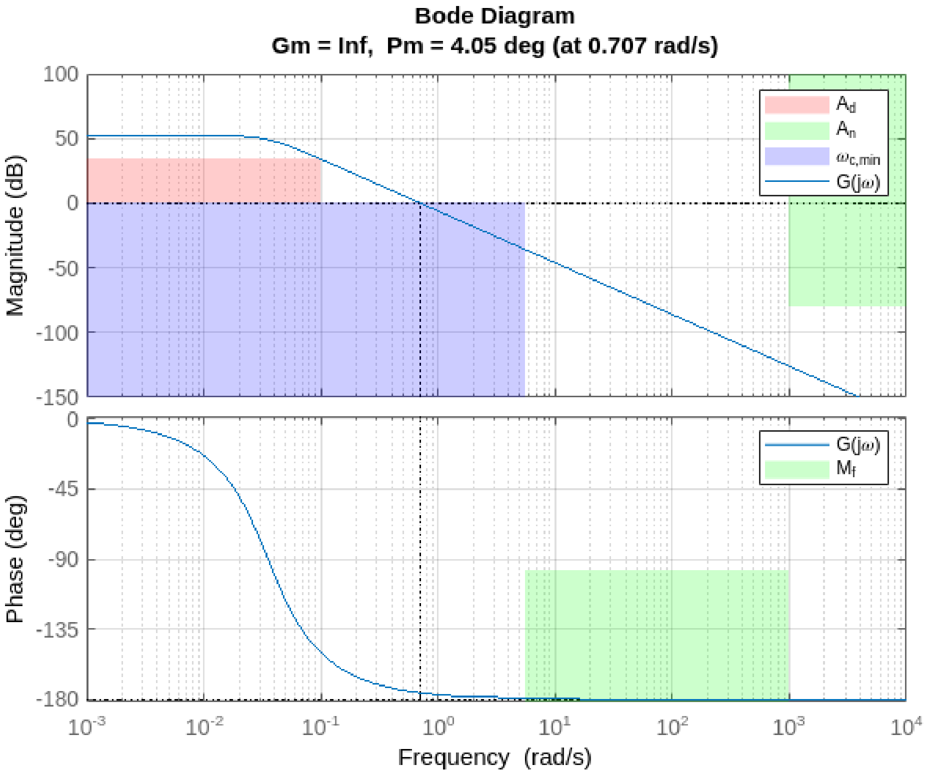

Figura 4: Diagramma di G estesa

Da Figura 4, emerge che nell'intervallo in cui possiamo attraversare gli 0 dB la fase si trova sempre sotto al margine di fase imposto come limite.

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B.

Per questo motivo, inizialmente, abbiamo deciso di realizzare il nostro regolatore dinamico come una rete anticipatrice

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

Per progettare la rete anticipatrice abbiamo imposto la pulsazione di attraversamento degli 0dB all'interno del range definito da $\omega_{c_{min}}, \omega_{c_{max}}$. In particolare abbiamo preso $\omega_c^* = \omega_{c,min} + 1$ rad/s e $M_f^* = M_f + 5$ gradi.

In seguito abbiamo calcolato M^*, φ^*, τ e $\alpha\tau$ usando le formule di inversione:

$$\begin{aligned}
&\omega_c^* = 6.5684 \text{ rad/s}\\
&M_f = 87.6085 \text{ gradi}\\
&M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \simeq 86.2886\\
&\varphi^* = 87.1724\\
&\alpha\tau = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin\varphi^*} = 0.0058\\
&\tau = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c^* \sin\varphi^*} = 13.1454
\end{aligned}$$

In questa prima fase, i valori calcolati di $\alpha\tau$ e τ ci permettono di definire il regolatore dinamico. Per verificare che i vincoli siano rispettati dobbiamo osservare il comportamento della funzione $L(s)$:

$$L(s) = R(s)G(s) = R_d(s)R_s(s)G(s)$$

Verifichiamo il comportamento di L(s) tramite il suo diagramma di Bode.
Osserviamo dalla figura 5 che attraverso la rete anticipatrice siamo riusciti ad attraversare gli 0dB all'interno del range definito da $\omega_{c_{min}}, \omega_{c_{max}}$ e a rispettare il margine di fase, ma non viene rispettata la specifica sull'abbattimento del rumore di misura n(t).

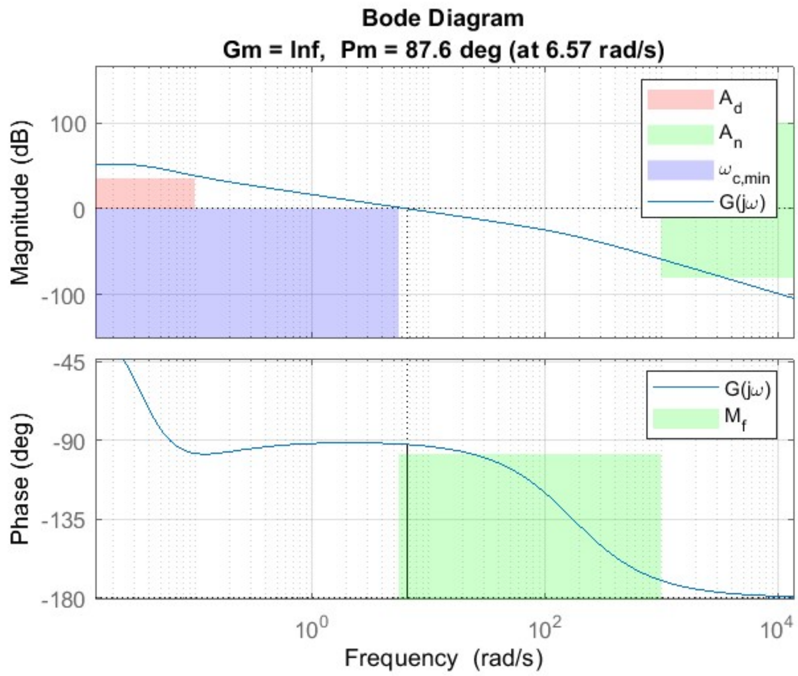

Figura 5: Diagramma di Bode di L(s) con rete anticipatrice

Per questo motivo abbiamo deciso di aggiungere un polo reale negativo in modo da abbasare l'ampiezza in alte frequenze e mantenere la fase il più costante possibile.

$$Polo(s) = \frac{1}{1+\sigma s}$$

Nello specifico abbiamo imposto $\sigma = 1/80$.
In questo modo il nostro regolatore dinamico diventa:

$$R_d(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \cdot \frac{1}{1+\sigma s}$$

Verifichiamo nuovamente il comportamento di L(s) tramite il suo diagramma di Bode.
Osserviamo dalla figura 6 che attraverso la rete anticipatrice e il polo reale negativo la funzione in anello aperto rispetta i vincoli imposti.

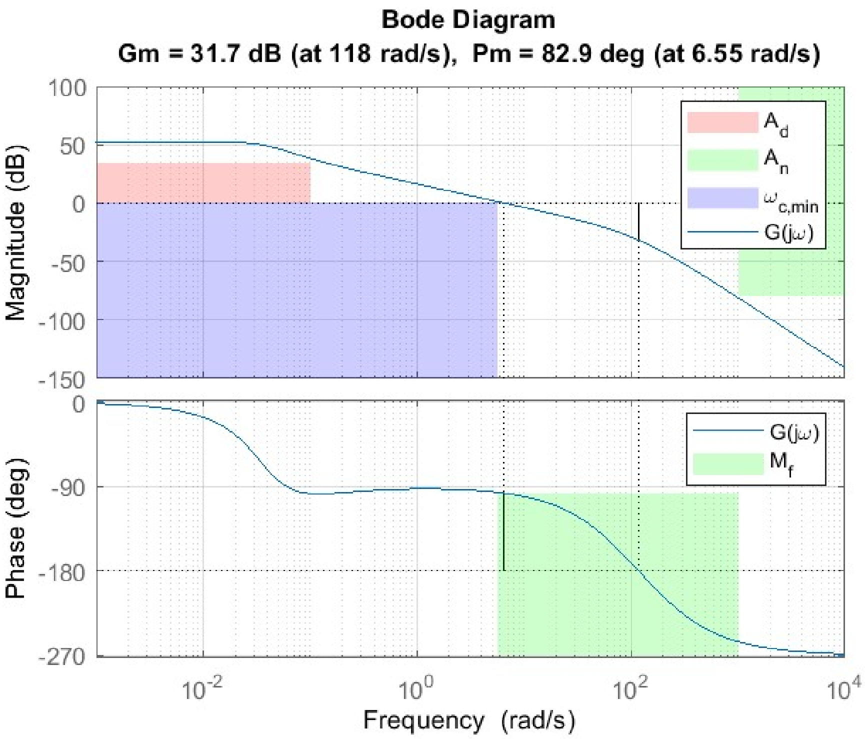

Figura 6: Diagramma di Bode di L(s) con rete anticipatrice e polo

Infine abbiamo verificato che il sistema in anello chiuso rispetti le specifiche.
La funzione in anello chiuso $F(s)$ è rappresentata dal seguente Diagramma di Bode

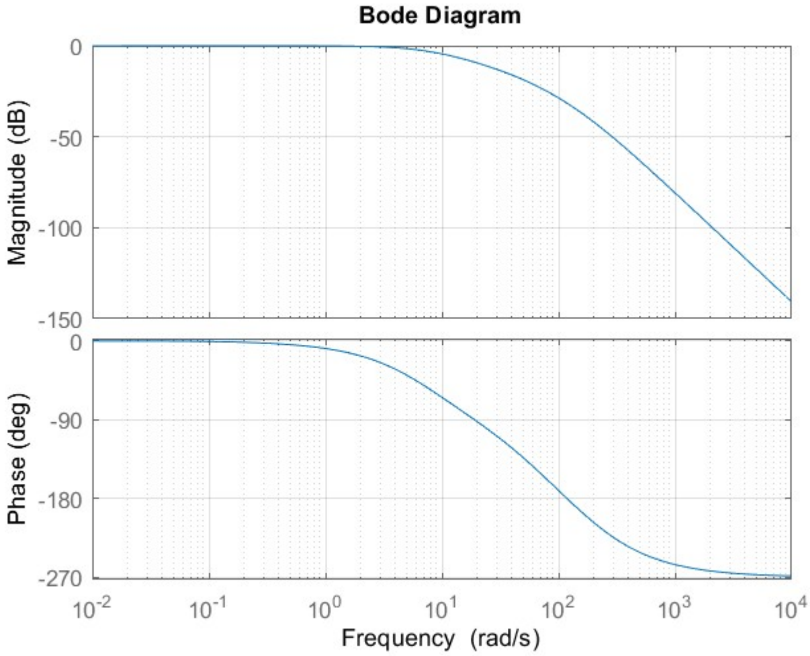

Figura 7: Diagramma di Bode di F(s)

Nella seguente figura 8 si può osservare che abbiamo testato il sistema in anello chiuso con l'ingresso a gradino citato nelle specifiche della sezione 3 e riportando i vincoli di sovraelongazione e tempo di assestamento.

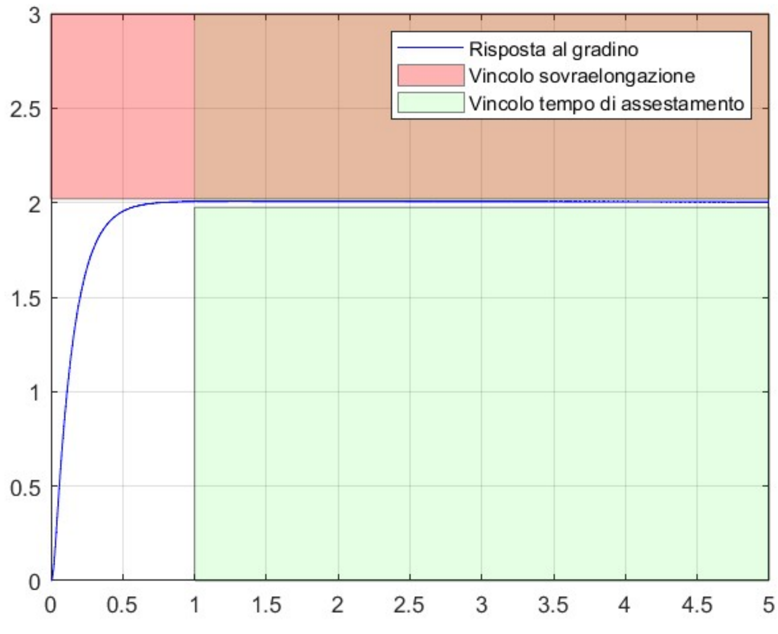

Figura 8: Test gradino

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo il sistema di controllo sul sistema linearizzato con i seguenti ingressi:

$$w(t) = -2 \cdot 1(t) \tag{10a}$$

$$d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.3 \cdot \sin(0.025kt) \tag{10b}$$

$$n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.2 \cdot \sin(10^3 kt) \tag{10c}$$

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\text{Y(s)} = Y_\omega(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$$

Possiamo studiare la risposta del sistema ai precedenti ingressi come somma delle singole risposte ai singoli ingressi. In particolare:

- $Y_\omega(s)$ uscita con ingresso $w(t)$(10a) e ponendo D(s) e N(s) = 0
  Utilizziamo la funzione di sensitività complementare portando in ingresso $w(t)$(10a)

$$\text{F(s)} = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s)}$$

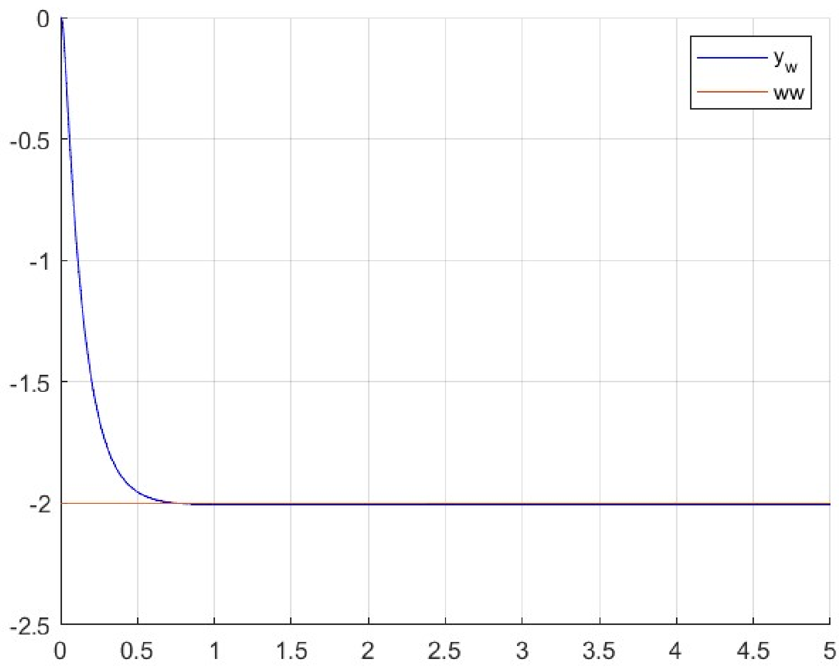

Figura 9: Risposta al gradino

- $Y_d(s)$ uscita con ingresso $d(t)$(10b) e ponendo W(s) e N(s) = 0
  Nel secondo caso utilizziamo la funzione di sensitività portando in ingresso $d(t)$(10b)

$$\text{S(s)} = \frac{1}{1 + R(s) \cdot G(s)}$$

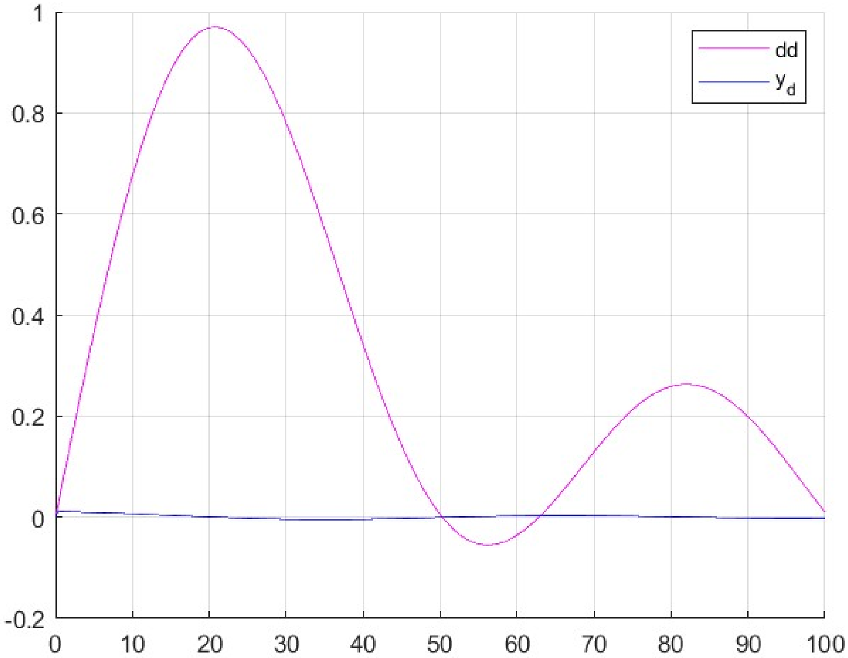

Figura 10: Risposta al disturbo in uscita

- $Y_n(s)$ uscita con ingresso $n(t)$(10c) e ponendo W(s) e D(s) = 0
  Nel terzo caso utilizziamo la funzione di sensitività complementare negata, in ingresso $n(t)$(10c)

$$F(s) = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s)}$$

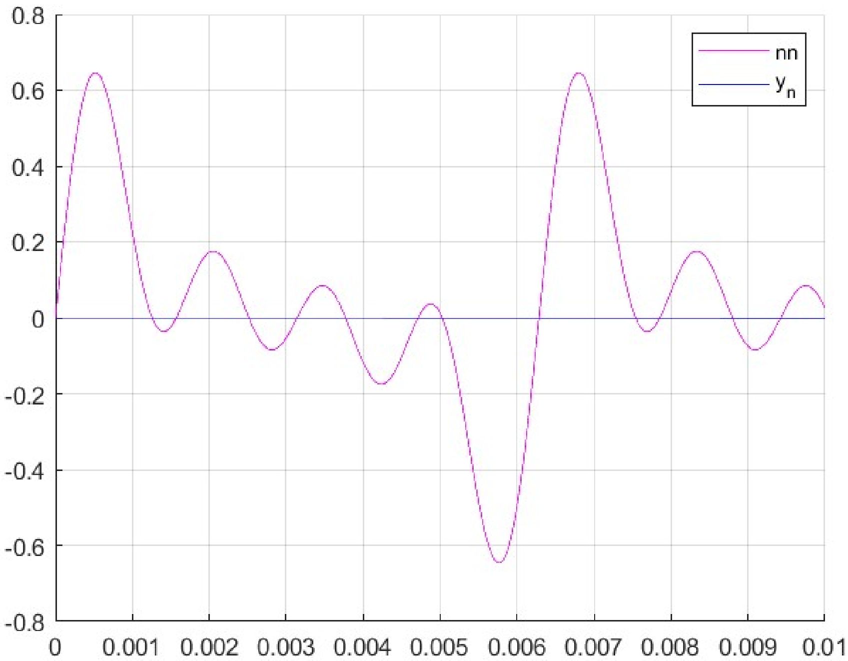

Figura 11: Risposta al disturbo di rumore

Attraverso l'utilizzo di simulink siamo andati a realizzare uno schema a blocchi contenente il sistema linearizzato e a testarlo con tutti gli ingressi in contemporanea.

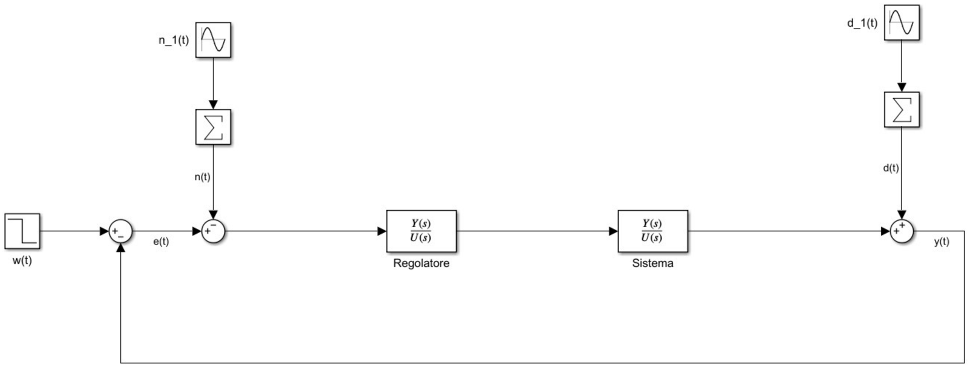

Figura 12: Schema a blocchi del sistema linearizzato

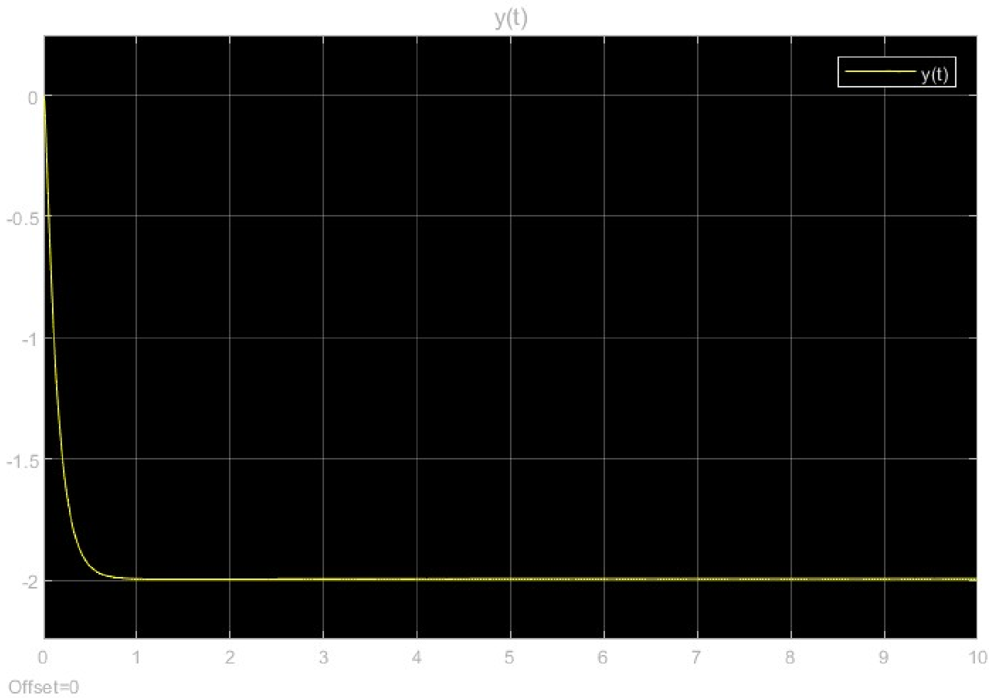

Figura 13: Risposta del sistema linearizzato

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare.

Tramite l'utilizzo di Simulink abbiamo sviluppato il seguente schema a blocchi

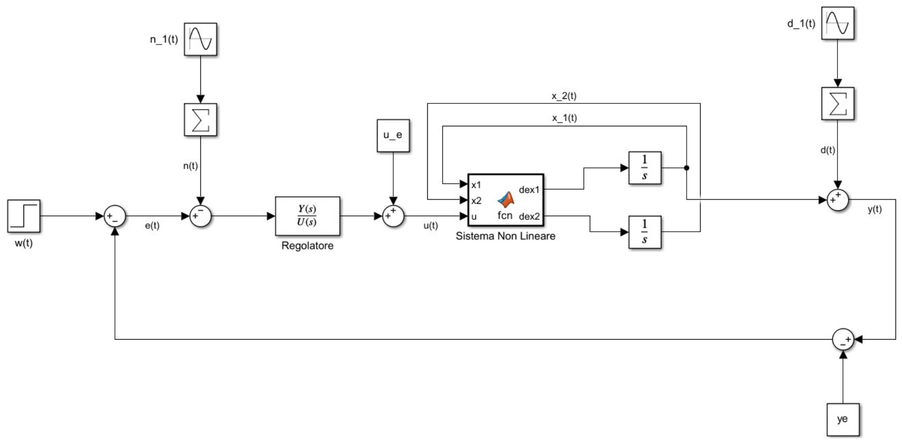

Figura 14: Schema a blocchi per test su sistema non lineare

Nel blocco "Sistema Non Lienare" abbiamo inserito il nostro sistema non linearizzato tramite l'utilizzo del seguente codice:

```
function [dex1,dex2] = fcn(x1,x2,u)
%Parametri
beta = 0.5;
J = 10;
a = 0.01;
F_v = -5;

%Sistema
dex1 = x2;
dex2 = (-beta/J)*x2+(a/(2*J))*sin(x1)*F_v+(a/J)*u;
```

Abbiamo usato come riferimento $w(t)$, rumore di uscita $d(t)$ e di misura $n(t)$ quelli specificati nel punto precedente.
Oltre a ciò abbiamo impostato come stato iniziale del sistema lo stato di equilibrio (specificato mediante i blocchi integratori), ottenendo come risposta:

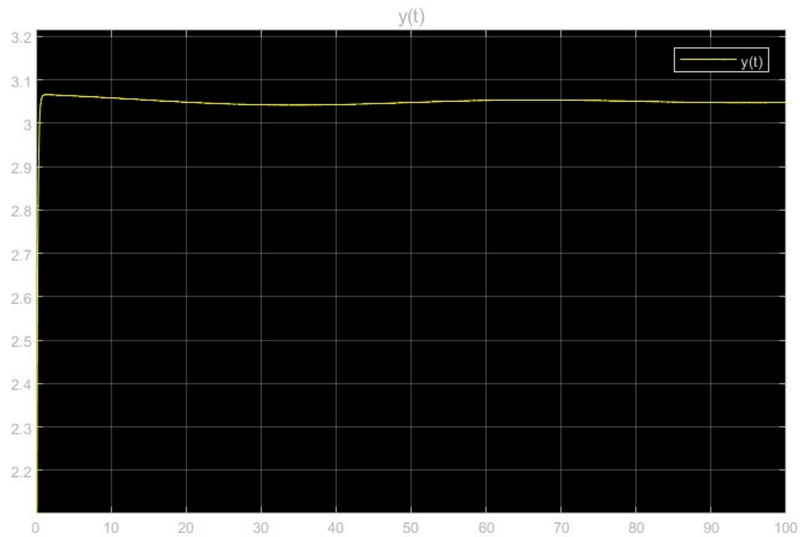

Figura 15: Risposta del Sistema non Linearizzato

8 Conclusioni

In conclusione abbiamo verificato la realizzabilità del sistema di controllo che manovra il drone nel rispetto delle specifiche imposteci dal progetto.
Abbiamo superato tutti i test, ciò è stato possibile attraverso il regolatore statico e dinamico, in particolare con il regolatore statico siamo andati a rispettare le specifiche a regime, mentre con quello dinamico tutte le specifiche in transitorio.