מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 9

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. מצאו את מספר הדרכים לחלק את $[n] = \{1, \ldots, n\}$ ל-3 קבוצות (אין סדר בין הקבוצות, וקבוצה יכולה להיות ריקה).

שאלה 2. יהיו $k, n \in \mathbb{N}^+$ כך ש-$k \geq n$. מצא את מספר הפתרונות ה<u>שלמים</u> של המשוואה

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = k,$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $|x_i| \geq 1$.

שאלה 3. הוכח באופן קומבינטורי את הזהויות הבאות:

א. לכל $2 \leq k \in \mathbb{N}$:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} k^{n-i} (k-1)^i .$$

ב. לכל $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n + (k-r) - 1}{n} = \binom{k + (n-k) - 1}{n-k}.$$

ג. לכל $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}.$$

ד. אם $n > m$ אז

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

שאלה 4. נתון משולש שווה צלעות שאורך צלעו 1. הוכיחו כי לכל בחירה אפשרית של 5 נקודות במשולש (כולל נקודות על הצלעות), קיימות שתי נקודות שהמרקן ביניהן הוא לכל היותר $1/2$.

שאלה 5. נתונים n כדורים זהים, ויהי $k \leq n$. הוכיחו כי מספר החלוקות השונות של הכדורים ללכל היותר k מחלקות לא-ריקות שווה למספר החלוקות בהן בכל קבוצה יש לכל היותר k כדורים.

שאלה 6. נתונות $n \in \mathbb{N}^+$ אבני לגו זהות. שני מגדלי לגו שונים זה מזה אמ"מ מספר האבנים מהם הם בנויים שונה. בכמה דרכים ניתן להרכיב מגדלי לגו **מסודרים** על ידי שימוש בכל אבני הלגו, כך שאף מגדל אינו ריק.

שאלה 7. גרף $G = (V, E)$ הוא מעגל פלוס אם קיימת קשת יחידה $e \in E$ כך ש-$G' = (V, E \setminus \{e\})$ הוא מעגל פשוט.

א. מצא את מספר הגרפים שהם מעגל פלוס בעלי n צמתים שונים.

ב. הוכח כי $G = (V, E)$ הוא מעגל פלוס אמ"מ קיימים $u \neq v \in V$ כך ש-$\deg(u) = \deg(v) = 3$, לכל $w \in V \setminus \{v, u\}$ מתקיים $\deg(w) = 2$, $\{u, v\} \in E$ וגם $G' = (V, E \setminus \{e\})$ הינו קשיר.

שאלה 8. תהי $x_1, \ldots, x_{11}$ סדרת שלמים. הוכיחו שקיימים $1 \leq i \leq j \leq 11$ כך ש-

$$\sum_{k=i}^{j} x_k \equiv 0 \mod 10.$$

שאלה 9. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}^+$ המורכב מהספרות 0 ו-7 בלבד כך ש-$n \equiv 0 \mod 359$.