מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 7 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 12/9 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. יהי $m \in \mathbb{N}^+$. נגדיר

$$X = \{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid m \cdot q \in \mathbb{Z}\}.$$

הוכיחו כי X סופית, ומצאו את $|X|$.

פתרון 1. תחילה נסתכל על X עבור ערכים קטנים של m:

$$\begin{array}{lcr} m=1 & \Longrightarrow & X=\{0,1\} \\ m=2 & \Longrightarrow & X=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\} \\ m=3 & \Longrightarrow & X=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\} \end{array}.$$

נוכיח כי X סופית ו-$|X| = m+1$ - נמצא פונקציה הפיכה מ-X ל-$[m+1] = \{1,\ldots,m+1\}$.
נגדיר פונקציה $X \to [m+1] : f$ כך שלכל $k \in [m+1]$ מתקיים

$$f(k) = \frac{k-1}{m}.$$

- f חח"ע: לכל $k, k' \in [m+1]$ מתקיים

$$f(k) = f(k') \iff \frac{k-1}{m} = \frac{k'-1}{m} \iff k-1 = k'-1 \iff k = k'.$$

- f על: יהי $x \in X$, אזי $m \cdot x \in \mathbb{Z}$. מכיוון ש-$0 \le x \le 1$ נקבל ש-$0 \le m \cdot x \le m$, ולכן עבור $y = m \cdot x + 1 \in [m+1]$ נקבל

$$f(y) = \frac{(m \cdot x + 1) - 1}{m} = \frac{m \cdot x}{m} = x.$$

שאלה 2. תהיינה A, B קבוצות זרות, ותהי X קבוצה כלשהי. הוכיחו כי

$$\left|X^{A \cup B}\right| = \left|X^A \times X^B\right|.$$

פתרון 2. נגדיר פונקציה $F:X^{A\cup B}\to X^{A}\times X^{B}$, כך שלכל $f:A\cup B\to X$ מתקיים $F\left(f\right)=\left(g,h\right)\in X^{A}\times X^{B}$ כאשר

$$\forall a\in A:g\left(a\right)=f\left(a\right),\quad\forall b\in B:h\left(b\right)=f\left(b\right).$$

נוכיח כי הפונקציה הפיכה: נגדיר $G:X^{A}\times X^{B}\to X^{A\cup B}$, כך שלכל $\left(g,h\right)\in X^{A}\times X^{B}$ מתקיים $G\left(g,h\right)=f$ כאשר

$$\forall z\in A\cup B:f\left(z\right)=\begin{cases}g\left(z\right) & z\in A\\ h\left(z\right) & z\in B\end{cases}.$$

נשים לב כי G מוגדרת היטב מכיוון ש-A,B זרות. נוכיח כי G היא הפונקציה ההופכית של F, מה שיגרור את הפיכות F ושוויון העוצמות של $X^{A\cup B}$ ו-$X^{A}\times X^{B}$. תהיינה $f\in X^{A\cup B},g\in X^{A},h\in X^{B}$ פונקציות. אזי,

$$\begin{aligned}F\left(f\right)=\left(g,h\right) & \iff\left(\forall a\in A:g\left(a\right)=f\left(a\right)\right)\wedge\left(\forall b\in B:h\left(b\right)=f\left(b\right)\right)\\
\left(\text{זרות }A,B\right) & \iff\forall x\in A\cup B:\left(x\in A\to f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)\wedge\left(x\in B\to f\left(x\right)=h\left(x\right)\right)\\
 & \iff G\left(g,h\right)=f.\end{aligned}$$

שאלה 3. בשאלה זו נוכיח שלכל תת-קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים מינימום (לפי היחס $\leq$ הסטנדרטי).

א. הוכיחו שלכל קבוצה סופית $A\subseteq\mathbb{N}$ קיים מינימום.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}$ קיים מינימום.

פתרון 3. א. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n=|A|$.

- בסיס: עבור $n=1$ נקבל ש-$A=\{a\}$. אזי $a\leq a$ ולכן לכל $b\in A$ מתקיים $a\leq b$ - a מינימום.
- צעד: נניח את נכונות הטענה לקבוצה בת n איברים, ותהי A קבוצה בת $n+1$ איברים.
  - יהי $a\in A$ שרירותי. נגדיר $A'=A\setminus\{a\}$. נשים לב כי $n=|A'|$ - מהנחת האינדוקציה קיים מינימום ב-A', נסמנו ב-m.
  - נפריד למקרים - מכיוון ש-$\leq$ הוא יחס משווה:
    * $m\leq a$: במקרה זה m מינימום ב-A: לכל $b\in A$, או ש-$b=a$ ואז $m\leq a$, או ש-$b\in A'$ ו-$m\leq b$.
    * $a\leq m$: במקרה זה a מינימום ב-A: מטרנזיטיביות $\leq$ נקבל שלכל $b\in A'$ מתקיים $a\leq b$. מרפלקסיביות $a\leq a$, ולכן לכל $b\in A$ מתקיים $a\leq b$.

ב. יהי $k \in A$ ($A \neq \emptyset$). נגדיר

$$B = \{a \in A \mid a \leq k\}\,.$$

מכיוון ש-A מכילה מספרים טבעיים, ויש לכל היותר $k+1$ טבעיים הקטנים או שווים ל-k, נקבל ש-B סופית. מהסעיף הקודם, קיים מינימום m ב-B לפי $\leq$. אזי לכל $b \in B$ מתקיים $m \leq b$. יהי $a \in A \setminus B$, אזי $a \not\leq k$. מכיוון ש-$\leq$ יחס משווה (ו-$a \neq k$ כי $k \leq k$) נקבל ש-$k \leq a$. אזי מטרנזטיביות נקבל $m \leq a$. בסך הכל, קיבלנו כי לכל $a \in A$ מתקיים $m \leq a$.

שאלה 4. הוכיחו באינדוקציה את הטענה הבאה: לכל קבוצה סופית $A \neq \emptyset$ ולכל יחס סדר חלקי R מעל A, קיים ב-A איבר מינימלי לפי R.

הערה 1. העזרו בטענה הבאה (ניתן להשתמש ללא הוכחה): אם (A, R) היא קס"ח ו-$A' \subseteq A$, אז $R' = R \cap (A' \times A')$ הוא יחס סדר חלקי מעל A'. לאחר מכן, בצעד האינדוקציה הסירו איבר מ-A והפרידו למקרים.

פתרון 4. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n = |A| \in \mathbb{N}^+$.

- בסיס: תהי $A = \{a\}$ קבוצה ויהי R יחס בינארי על A. לא קיים $a \neq b \in A$ ולכן לא קיים $a \neq b \in A$ כך ש-$(a, b) \in R$ - לכן a מינימלי ב-A לפי R.
- צעד: יהי $1 < n \in \mathbb{N}^+$. נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. תהי A קבוצה בת n איברים ויהי R יחס בינארי עליה.
  - יהי $a \in A$. נגדיר $A' = A \setminus \{a\}$ ו-$R' = R \cap (A' \times A')$.
  - נשים לב ש-$|A'| = n - 1$ ו-R' הוא יחס סדר חלקי עליה. לכן, לפי הנחת האינדוקציה קיים ב-A' איבר מינימלי לפי R', נסמנו ב-b.
  - לכן לא קיים $c \neq b \in A'$ כך ש-$c \; R \; b$. נפריד למקרים:
    * אם $a \; R \; b$: מתקיים ש-a מינימלי. נניח בשלילה שקיים $a \neq c \in A$ כך ש-$c \; R \; a$. מטרנזיטיביות נקבל ש-$c \; R \; b$, ומכיוון ש-b מינימלי ב-R' נקבל ש-$c = b$. קיבלנו כי $c \; R \; a$ וגם $a \; R \; c$, בסתירה לכך ש-$c \neq a$ ו-R אנטי-סימטרי חלש.
    * אם $(a, b) \notin R$: מתקיים ש-b מינימלי. יהי $c \neq b \in A$. אם $c = a$ נקבל ש-$(c, a) \notin R$, ואחרת מכיוון ש-b מינימלי ב-A' נקבל ש-$(c, a) \notin R$ - לכן בכל מקרה מתקיים $(c, a) \notin R$.

שאלה 5. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים ייצוג בינארי יחיד, כלומר קיים $r \in \mathbb{N}$ ו-$c_0, \dots, c_r \in \{0,1\}$, וגם $c_r = 1$ כך ש-

$$n = c_r \cdot 2^r + c_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \cdots + c_0 = \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i,$$

ובנוסף ייצוג זה יחיד.

רמז: השתמשו באינדוקציה חזקה, והפרידו למקרים לפי זוגיות המספר בצעד.

פתרון 5. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ נבחר $r = 0$ ו-$c_0 = 1$. זהו הייצוג היחיד מכיוון שלכל $r > 0$ יתקיים $c_r \cdot 2^r > 1$.
- צעד האינדוקציה: יהי $1 < n \in \mathbb{N}$, נניח את נכונות הטענה לכל $0 \leq j < n$ ונוכיח עבור n. נפריד למקרים לפי זוגיות n:

- n זוגי: אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = 2k$, וגם $k < n$. לפי הנחת האינדוקציה קיים $r \in \mathbb{N}$ ו-$c_0, \dots, c_r \in \{0,1\}$ כך ש-

$$k = \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i,$$

נבחר $r' = r + 1$ ולכל $0 \leq i \leq r'$ נגדיר

$$c'_i = \begin{cases} c_{i-1} & i > 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases},$$

ונקבל

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^{i+1} \\ &= \sum_{j=1}^{r'} c_j \cdot 2^j \\ &= \sum_{j=0}^{r'} c_j \cdot 2^j. \end{aligned}$$

- n אי-זוגי: יהי $n > k \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = 2k + 1$. לפי הנחת האינדוקציה קיים $r \in \mathbb{N}$ ו-$c_0, \dots, c_r \in \{0,1\}$ כך ש-

$$k = \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i,$$

נבחר $r' = r + 1$ ולכל $0 \le i \le r'$ נגדיר

$$c_i' = \begin{cases} c_{i-1} & i > 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases},$$

ונקבל

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^{i+1} + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{r'} c_j \cdot 2^j + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{r'} c_j \cdot 2^j. \end{aligned}$$

ניתן להוכיח את יחידות הייצוג ע"י הוכחה שלכל $0 \le i \le r$, מתקיים ש-c_i הוא בדיוק שארית החלוקה של $n/2^i$ ב-2.

שאלה 6. נגדיר סדרה $(a_n)_{n \ge 0}$ באופן הבא:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \begin{cases} 1 & n \le 2 \\ a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-3} & n > 2 \end{cases}.$$

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \le 2^n$.

פתרון 6. נוכיח את הטענה באינדוקציה חזקה על n.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n \le 2$ מתקיים $a_n = 1$ ו-$1 \le 2^n$ - מתקיים.

- צעד האינדוקציה: יהי $n > 2$. נניח את נכונות הטענה לכל $1 \leq k < n$, ונוכיח עבור n.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-3} \\ &\leq 2^{n-1} + 4 \cdot 2^{n-3} \quad (\text{הנחת האינדוקציה}) \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n. \end{aligned}$$

שאלה 7. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ויהי $G = (V, E)$ גרף בעל n צמתים חסר משולשים (כלומר לא מכיל מעגלים בגודל 3).

א. הוכיחו שלכל זוג שכנים $u, v \in V$ מתקיים $\deg(u) + \deg(v) \leq n$.

ב. נניח כי n זוגי ונסמן $k = n/2$. הוכיחו (באינדוקציה על k) ש-$|E| \leq k^2$.

פתרון 7. א. נניח בשלילה שקיימים שכנים $u, v \in V$ כך ש-$\deg(u) + \deg(v) > n$. פרט ל-u, v קיימים $n-2$ צמתים. בנוסף, בסכימת דרגות u ו-v הקשת $\{u, v\}$ נספרת פעמיים. לכן, פרט לה נספרות יותר מ-$n-2$ קשתות. לכן, לפי עיקרון שובך היונים קיים קודקוד $w \notin \{u, v\}$ המופיע בשתי קשתות לפחות. מכיוון ש-w נספר לכל היותר פעם אחת לכל קודקוד (הגרף פשוט), נקבל ש-$\{u, w\}, \{v, w\} \in E$, ולכן u, v, w מהווים משולש בגרף - סתירה.

ב. נוכיח את הטענה באינדוקציה על k.

(i) בסיס: עבור $k = 1$ נקבל ש-$n = 2$. לכן $V = \{u, v\}$, ולא יכולה להיות בגרף קשת פרט ל-$\{u, v\}$: לכן $|E| \leq 1 = k^2$.

(ii) צעד: יהי $k > 1$. נניח את נכונות הטענה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k. יהי $G = (V, E)$ גרף חסר משולשים כך ש-$|V| = n = 2k$, אזי $n > 2$.

- אם $E = \emptyset$, סיימנו. אחרת, יהיו $u, v \in V$ כך ש-$\{u, v\} \in E$.
- נגדיר גרף G' הנוצר מ-G על ידי הסרת u, v וכל קשתותיהם.
- נשים לב ש-G' חסר משולשים גם כן (רק הסרנו קשתות, לא יכלנו ליצור מעגלים חדשים).
- נשים לב ש-$|V'| = 2(k-1)$. מהנחת האינדוקציה נקבל ש-$|E'| \leq (k-1)^2$.
- בנוסף, מסעיף א' מתקיים $\deg(u) + \deg(v) \leq n$, ולכן הסרנו מ-E לכל היותר $n-1$ קשתות ($\{u, v\}$ נספרת פעמיים). אזי,

$$|E| \leq |E'| + n - 1 \leq \left(k^2 - 2k + 1\right) + 2k - 1 = k^2.$$