מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 10

פונקציות יוצרות :-

הגדרה :- יהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה. פונקציה יוצרת של סדרה זו היא הביטוי הפורמלי :-

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

מסמנים $F(z) \sim \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

מתאימה

תכונות :- אם $F(z) \sim (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ו- $G(z) \sim (b_n)_{n=0}^{\infty}$, אזי :-

1. $F(z) + G(z) \sim (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$.
2. לכל סקלר c, $c \cdot F(z) \sim (c a_n)_{n=0}^{\infty}$.
3. לכל סקלר c, $F(cz) \sim (c^n a_n)_{n=0}^{\infty}$.
4. $z \cdot F(z) \sim (b_n = a_{n-1})_{n=0}^{\infty}$ שימו לב $b_0 = 0$.
5. $F'(z) \sim ((n+1) a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$.

פונקציה יוצרת בסיסית :- עבור הסדרה $(a_n = 1)_{n=0}^{\infty}$ הפונקציה היוצרת שלה היא $F(z) = \frac{1}{1-z}$

תרגיל :- יהי הסדרה $a_0 = 2$

$$\forall n \geq 1 : a_n = 4 a_{n-1}$$

מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

פתרון :-

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ z^n & a_n = 4a_{n-1} & \mathrm{I} \\ & \vdots & \\ z^2 & a_2 = 4a_1 & \\ z^1 & a_1 = 4a_0 & \\ z^0 & a_0 = 2 & \mathrm{II} \end{array}$$

$$F(z) = \underbrace{4a_0 z + 4a_1 z^2 + \ldots + 4a_{n-1} z^n + \ldots}_{\mathrm{I}} \quad \underbrace{+\,2}_{\mathrm{II}}$$

$$4z\underbrace{\left(a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\right)}_{F(z)}$$

סה"כ

$$F(z) = 4zF(z) + 2$$

$$F(z) - 4zF(z) = 2$$

$$F(z)(1-4z) = 2$$

$$F(z) = \frac{2}{1-4z} = 2 \cdot \frac{1}{1-4z}$$

לפי טענות 2,3 נקבל :- $a_n = 2 \cdot 4^n$ $\quad a_n = 2 \cdot 4^n$

תרגיל :- יהי $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_n = 5a_{n-1} + 3 \end{cases}$ מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

פתרון :-

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \mathrm{I} \\ z^n & a_n = 5a_{n-1} + 3 & \mathrm{II} \\ & \vdots & \\ z^2 & a_2 = 5a_1 + 3 & \\ z^1 & a_1 = 5a_0 + 3 & \\ z^0 & a_0 = 4 & \mathrm{III} \end{array}$$

נסכם :-

$$F(z) = 5z\,F(z) + \underbrace{\left(3z + 3z^2 + 3z^3 + \dots\right)}_{3z\cdot\underbrace{\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)}_{=\frac{1}{1-z}}} + 4$$

סה״כ

$$F(z) = 5zF(z) + \frac{3z}{1-z} + 4$$

$$F(z)(1-5z) = \frac{3z}{1-z} + 4$$

$$F(z) = \frac{3z}{(1-z)(1-5z)} + \underbrace{\frac{4}{1-5z}}_{\text{ביטוי טוב}}$$

נתבונן בביטוי $\frac{3z}{(1-z)(1-5z)}$. נרצה לפרק אותו בצורה הבאה

$$/(1-z)(1-5z) \qquad \frac{3z}{(1-z)(1-5z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-5z}$$

נמצא את A,B.

$$3z = A(1-5z) + B(1-z)$$

$$3z = A - 5Az + B - Bz$$

$$3z = (-5A - B)z + (A+B)$$

נעשה השוואת מקדמים :-

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - B = 3 \end{cases}$$

$$A = -B$$

נציב במשוואה השנייה ונקבל

$$-5(-B) - B = 3$$

$$4B = 3 \Longrightarrow B = \frac{3}{4} \Longrightarrow A = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{3z}{(1-z)(1-5z)} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-5z}$$ סה"כ

*

סה"כ

$$F(z) = \frac{3z}{(1-z)(1-5z)} + \frac{4}{1-5z} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-5z} + \frac{4}{1-5z}$$

ע"פ *

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{19}{4}\cdot\frac{1}{1-5z}$$

ולפי שורות 2,3 נקבל :-

$$\boxed{a_n = -\frac{3}{4} + \frac{19}{4}\cdot 5^n}$$

תרגיל :- יהי
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 7 \end{cases}$$
מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

פתרון :-

$$\begin{array}{llcll}
\vdots & & & \vdots & \\
z^n & a_n & = & a_{n-1} & +7 \\
\vdots & & & \vdots & \\
z^3 & a_3 & = & a_2 & +7 \\
z^2 & a_2 & = & a_1 & +7 \\
z^1 & a_1 & = & a_0 & +7 \\
z^0 & a_0 & = & 2 &
\end{array}$$

$$F(z) = zF(z) + \frac{7z}{1-z} + 2$$

$$F(z) = \frac{7z}{(1-z)^2} + \underbrace{\frac{2}{1-z}}_{2}$$

$$\downarrow$$

הסדרה המתאימה ל- $\frac{1}{(1-z)^2}$ היא לפי

כלל 5 :- $(n+1)a_{n+1}$ שבה $a_{n+1}=1$

לכן הסדרה היא $C_n=(n+1)$.

אם מכפילים את הפונקציה היוצרת ב- z

אז לפי כלל 4 נקבל $b_n = C_{n-1} = (n-1+1)=n$

לכן הסדרה המתאימה ל- $\frac{z}{(1-z)^2}$

היא $(a_n=n)_{n=0}^{\infty}$.

ואז נכפיל ב- 7 ונקבל $(7n)_{n=0}^{\infty}$ מתאימה

ל- $\frac{7z}{(1-z)^2}$

סה״כ $F(z)$ מתאימה ל- $a_n = 7n+2$

תרגיל :- מצאו נוסחה מפורשת לנוסחת הנסיגה הבאה :-

$$\begin{cases} a_0 = 2, \ a_1 = -1 \\ a_n = 4a_{n-2} \end{cases}$$

בתכנון :-

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
z^n & a_n = 4a_{n-2} \\
\vdots & \vdots \\
z^3 & a_3 = 4a_1 \\
z^2 & a_2 = 4a_0 \\
z^1 & a_1 = -1 \\
z^0 & a_0 = 2
\end{array}$$

$$F(z) = \underbrace{\left(4a_0 z^2 + 4a_1 z^3 + \dots + 4a_{n-2} z^n + \dots\right)}_{4z^2\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\right)} + 2 - z$$

סה״כ

$$F(z) = 4z^2 F(z) + 2 - z$$

$$F(z) - 4z^2 F(z) = 2 - z$$

$$F(z)\left(1 - 4z^2\right) = 2 - z$$

נרצה לכתוב את $1-4z^2$ בצורה הבאה:

$$1-4z^2 = \underbrace{(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)}$$

$$1-4z^2 = 1 - (\alpha_1+\alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2 z^2$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -4 = \alpha_1\alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$\downarrow$

נציב

$$-4 = -\alpha_2^2 \Longrightarrow \alpha_2 = \pm 2$$

נבחר α_2 להיות אחד מבין ± 2 ואז α_1 יהיה המספר השני שלא בחרנו. סה״כ

נבחר $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=2$ ונקבל:

$$1-4z^2 = (1+2z)(1-2z)$$

סה״כ

$$F(z) = \frac{2-z}{(1+2z)(1-2z)}$$

נרצה לרשום

$$\frac{2-z}{(1+2z)(1-2z)} = \frac{A}{1+2z} + \frac{B}{1-2z} \quad / (1+2z)(1-2z)$$

$$2 - z = A(1-2z) + B(1+2z)$$

$$2-z = A-2Az+B+2Bz$$

נעשה השוואת מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} 2 = A+B \\ -1 = 2B-2A \end{cases} \Rightarrow A = 2-B$$

$$\Downarrow$$

$$-1 = 2B-2(2-B)$$

$$-1 = 4B-4$$

$$A = 1\tfrac{1}{4} \Leftarrow B = \frac{3}{4}$$

לכן

$$F(z) = 1\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+2z} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-2z}$$

לכן

$$\boxed{a_n = \frac{5}{4}\cdot(-2)^n + \frac{3}{4}\cdot 2^n}$$