מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 8

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: עוצמות 2/2.

משפט 1. (קנטור-שרדר-ברנשטיין) תהיינה A, B קבוצות. אם $|B| \leq |A|$ וגם $|B| \geq |A|$ אז $|A| = |B|$.

משפט 2. (קנטור) תהי A קבוצה, אזי $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

תרגיל 1. הוכיחו כי $|\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| = |[0,1)|$.

פתרון 1. נוכיח את הטענה במספר שלבים. נסמן $I = [0,1)$.

- תחילה, ראינו בהרצאה כי $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ולכן $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$ מתרגיל קודם.
- $|\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| \leq |I|$: נמצא פונקציה $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \to I$ חח"ע.
  - נגדיר פונקציה $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \to I$ באופן הבא: לכל $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$,
  $$f(X) = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots, \quad \forall i \in \mathbb{N}^+ : d_i = \delta_{i \in X} = \begin{cases} 1 & i \in X \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$
  - יהיו $S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ כך ש-$f(S) = f(T)$, נוכיח כי $S = T$. נסמן $n = f(S) = f(T)$. לכל $i \in S$ מתקיים שהספרה ה-i אחרי הנקודה ב-n היא 1, ולכן $i \in T$: $S \subseteq T$. באופן זהה ניתן להראות ש-$T \subseteq S$, ולכן $S = T$.
  - קיבלנו שקיימת פונקציה חח"ע מ-$\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ ל-I ולכן $|\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| \leq |I|$.
- $|I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$: נמצא פונקציה $f : I \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ חח"ע.

- נגדיר פונקציה $g: I \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ באופן הבא: לכל $x \in I$,

$$g(x) = \{(i, d_i(x)) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

כך ש-$d_i(x)$ היא הספרה ה-i לאחר הנקודה ב-x. למשל

$$g(0.9381) = \{(1,9), (2,3), (3,8), (4,1)\}.$$

- יהיו $a \neq b \in I$, נוכיח כי $g(a) \neq g(b)$. נסמן ב-j את האינדקס הראשון כך ש-$d_j(a) \neq d_j(b)$. אזי $g(a) \ni (j, d_j(a)) \neq (j, d_j(b)) \in g(b)$, ולכן $g(a) \neq g(b)$.
- קיבלנו שקיימת פונקציה חח"ע מ-I ל-$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ולכן $|I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$.

- בסך הכל קיבלנו שמתקיים $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ וגם

$$\left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^+\right)\right| \leq |I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}^+\right)\right|,$$

ולכן $|\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)| \leq |I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)|$. ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נקבל ש-$|I| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)|$.

הגדרה 1. תהיינה A, B קבוצות. אוסף כל הפונקציות מ-A ל-B מסומן ב-B^A:

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}.$$

תרגיל 2. הוכיחו כי $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

פתרון 2. לכל $S \subseteq \mathbb{N}$, הפונקציה האופיינית $\chi_S: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ מוגדרת להיות

$$\forall n \in \mathbb{N}: \chi_S(n) = \begin{cases} 1 & n \in S \\ 0 & n \notin S \end{cases}.$$

נגדיר $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בתור $f(S) = \chi_S$ לכל $S \subseteq \mathbb{N}$. f חח"ע: יהיו $S \neq T \subseteq \mathbb{N}$. נניח בה"כ כי קיים $n \in S$ כך ש-$n \notin S$. אזי $\chi_T(n) = 0 \neq 1 = \chi_S(n)$ ולכן $\chi_S \neq \chi_T$: כלומר f חח"ע.

נגדיר $g: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ באופן הבא: נסמן ב-p_i את הראשוני ה-i, ולכל $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר

$$g(\alpha) = \left\{2^{\alpha(0)+1}, 3^{\alpha(1)+1}, \ldots, p_n^{\alpha(n)+1}, \ldots\right\} = \left\{p_n^{\alpha(n)+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

יהיו $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. אזי, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\alpha_2(n) \neq \alpha_1(n)$. אזי $p_n^{\alpha_1(n)+1} \neq p_n^{\alpha_2(n)+1}$. כל האיברים ב-$g(\alpha_2)$ הם ראשוניים בחזקה טבעית כלשהי. לכן, האיבר היחיד ש-p_n הוא גורם ראשוני שלו הוא $p_n^{\alpha_2(n)+1}$. לכן, לכל $x \in g(\alpha_2)$ מתקיים $x \neq p_n^{\alpha_1(n)+1}$, וכך $p_n^{\alpha_1(n)+1} \notin g(\alpha_2)$, בעוד שברור שמתקיים $p_n^{\alpha_1(n)+1} \in g(\alpha_1)$. לכן $g(\alpha_1) \neq g(\alpha_2)$ ו-g חח"ע. בסך הכל, הראנו שקיימות פונקציות חח"ע מ-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ל-$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולהיפך, ולכן מ-CSB הן שוות עוצמה.

תרגיל 3. נגדיר קבוצה A באופן הבא:

$$A = \{f : A \to B \mid \exists n_0, y \in \mathbb{N}. \forall n \geq n_0 : f(n) = y\},$$

כלומר, כל הפונקציות $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ שקבועות החל ממקום מסוים. הוכיחו כי $A \sim \mathbb{N}$.

פתרון 3.
- $|\mathbb{N}| \leq |A|$:
  - נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N} \to A$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש-$g(n) = f$ היא הפונקציה הקבועה n - לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(k) = n$.
  - יהיו $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$, נסמן $f_1 = g(n_1), f_2 = g(n_2)$. אזי $f_1(0) = n_1 \neq n_2 = f_2(0)$ ולכן $g(n_1) \neq g(n_2)$, ו-g חח"ע.
- $|A| \leq |\mathbb{N}^3|$.
  - תהי $f \in A$. יהיו $n_0, y \in \mathbb{N}$ כך ש-n_0 הוא האיבר המינימלי שמקיים

$$\forall n \geq n_0 : f(n) = y.$$

  - נגדיר $h : A \to \mathbb{N}^3$ באופן הבא:

$$h(f) = \left(2^{f(0)+1} \cdot 3^{f(1)+1} \cdot 5^{f(2)+1} \cdot \cdots \cdot p_{n_0}^{f(n_0)+1}, y\right) = \left(\prod_{i=0}^{n_0} p_i^{f(i)+1}, n_0, y\right).$$

נוכיח כי h חח"ע: יהיו $f_2 \neq f_1 \in A$. אם ה-y של f_1 שונה מה-y של f_2, או שה-n_0-ים שונים, נקבל ש-$h(f_1) \neq h(f_2)$ וסיימנו. כעת, נותר המקרה בו n_0 ו-y זהים בשתי הפונקציות. לכן, לכל $n \geq n_0$ מתקיים $f_1(n) = f_2(n)$. מכיוון ש-$f_1 \neq f_2$, קיים $0 \leq n < n_0$ כך ש-$f_1(n) \neq f_2(n)$. לכן מתקיים $p_n^{f_1(n)+1} \neq p_n^{f_2(n)+1}$. מכאן, החזקה של p_n כגורם ראשוני ב-$\prod_{i=0}^{n_0} p_i^{f_1(i)+1}$ שונה מאשר ב-$\prod_{i=0}^{n_0} p_i^{f_2(i)+1}$, מכיוון ששאר הגורמים הם ראשוניים אחרים. לכן בהכרח מתקיים ש-$\prod_{i=0}^{n_0} p_i^{f_1(i)+1} \neq \prod_{i=0}^{n_0} p_i^{f_2(i)+1}$, וכך $h(f_1) \neq h(f_2)$ ו-h חח"ע.

- ניתן להוכיח כי $|\mathbb{N}^3| = |\mathbb{N}^2|$. בסך הכל, קיבלנו ש-

$$|\mathbb{N}| \leq |A| \leq \left|\mathbb{N}^3\right| = \left|\mathbb{N}^2\right| = |\mathbb{N}|$$

ולכן ממשפט CSB נקבל ש-$|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

תרגיל 4. תהי E וקבוצה ויהיו $A,B\subseteq E$. נגדיר פונקציה $f:\mathcal{P}\left(E\right)\to\mathcal{P}\left(A\right)\times\mathcal{P}\left(B\right)$ כך שלכל $X\in\mathcal{P}\left(E\right)$ מתקיים

$$f\left(X\right)=\left(X\cap A,X\cap B\right).$$

1. הוכיחו כי f חח"ע אמ"מ $A\cup B=E$.
2. הוכיחו כי f על אמ"מ $A\cap B=\emptyset$.
3. איזה תנאי על A,B לקיים כך ש-f תהיה הפיכה? במקרה זה, מהי הפונקציה ההופכית של f?

פתרון 4. 1. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(א) אם f חח"ע אז $A\cup B=E$. נניח כי $A\cup B\subset E$, אזי קיים $x\in E$ כך ש-$x\notin A\cup B$. לכן

$$f\left(\left\{x\right\}\right)=\left(\left\{x\right\}\cap A,\left\{x\right\}\cap B\right)=\left(\emptyset,\emptyset\right)=f\left(\emptyset\right),$$

ולכן f לא חח"ע.

(ב) אם $A\cup B=E$ אז f חח"ע. נניח כי קיימים $X\neq Y\in E$ כך ש-$f\left(X\right)=f\left(Y\right)$. נניח בה"כ כי קיים $z\in X\setminus Y$.

$$f\left(X\right)=f\left(Y\right)\implies X\cap A=Y\cap A\wedge X\cap B=Y\cap B.$$

מכיוון ש-$X\cap A=Y\cap A$, $z\in X$ ו-$z\notin Y$ נקבל ש-$z\notin A$, ובאופן דומה $z\notin B$. לכן $z\notin A\cup B$ ומתקיים $A\cup B\neq E$.

2. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(א) אם f על אז $A\cap B=\emptyset$. נניח כי קיים $z\in A\cap B$ ויהי $Y=\left(\left\{z\right\},\emptyset\right)$. נניח בשלילה שקיים $X\in\mathcal{P}\left(E\right)$ כך ש-$f\left(X\right)=Y$. אזי $z\in X\cap A$, ולכן $z\in X$. בנוסף $X\cap B=\emptyset\not\ni z$, ומכיוון ש-$z\in B$ מתקיים $z\notin X$: סתירה.

(ב) אם $A\cap B=\emptyset$ אז f על. יהי $\left(S,T\right)\in\mathcal{P}\left(A\right)\times\mathcal{P}\left(B\right)$. נגדיר $X=S\cup T$. מכיוון ש-$S\cap T=\emptyset$ מתקיים $X\cap A=S$ וגם $X\cap B=T$, ולכן $f\left(X\right)=\left(S,T\right)$.

(ג) התנאי הוא $A\cap B=\emptyset\wedge A\cup B=E$, כלומר $\left\{A,B\right\}$ היא חלוקה של E, פרט לתנאי ש-$A,B\neq\emptyset$ (ניתן להכללה לכל מספר קבוצות). במקרה זה, הפונקציה ההופכית של f היא $f^{-1}:\mathcal{P}\left(A\right)\times\mathcal{P}\left(B\right)\to\mathcal{P}\left(E\right)$, כך ש-

$$\forall\left(S,T\right)\in\mathcal{P}\left(A\right)\times\mathcal{P}\left(B\right):f\left(S,T\right)=S\cup T.$$