מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 5 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 29/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. תהי A קבוצה, ויהיו R_1, R_2 יחסים מעל A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם R_1 ו-R_2 יחסי שקילות מעל A, אז גם $R_1 \cup R_2$ יחס שקילות מעל A.

ב. אם R_1 ו-R_2 יחס סדר חלקי מעל A, אז גם $R_1 \cup R_2$ יחס סדר חלקי מעל A.

ג. אם R_1 ו-R_2 יחסי שקילות מעל A, אז גם $R_1 \triangle R_2$ יחס שקילות מעל A.

ד. אם R_1 ו-R_2 יחס סדר חלקי מעל A, אז גם $R_1 \triangle R_2$ יחס סדר חלקי מעל A.

פתרון 1. א. הפרכה: עבור $A = \{1, 2, 3\}$, נסתכל על יחסי השקילות

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}, \\ R_2 &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\} \end{aligned}$$

$$\implies R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$$

נשים לב ש-$R_1 \cup R_2$ לא טרנזיטיבי: $(1,3), (3,2) \in R_1 \cup R_2$ אבל $(1,2) \notin R_1 \cup R_2$.

ב. הפרכה: עבור $A = \{1, 2, 3\}$, נסתכל על יחסי הסדר החלקיים

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\} \\ R_2 &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,2)\} \end{aligned} .$$

$$\implies R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,2)\}$$

נשים לב ש-$R_1 \cup R_2$ לא טרנזיטיבי: $(1,3), (3,2) \in R_1 \cup R_2$ אבל $(1,2) \notin R_1 \cup R_2$.
בנוסף, עבור $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1)\}$ נקבל ש-$R_1 \cup R_2$ אינו אנטי-סימטרי חלש.

ג. הפרכה: עבור יחס השקילות $R = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ מעל $\mathbb{N}$ נקבל $R \triangle R = \emptyset$, וזהו לא יחס רפלקסיבי.

ד. הפרכה: עבור יחס הסדר החלקי $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x\le y\}$ מעל $\mathbb{N}$ נקבל $R\triangle R=\emptyset$, וזהו לא יחס רפלקסיבי.

שאלה 2. תהי A קבוצה, ויהי R יחס מעל A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. נניח ש-R הוא יחס סדר מלא, ויהי $m\in A$ איבר מינימלי. אזי m איבר קטן ביותר.

ב. נגדיר יחס S מעל A כך שלכל $x,y\in A$:

$$x\ S\ y \iff \exists z\in A: x\ R\ z\wedge z\ R\ y.$$

אזי R טרנזיטיבי אמ"מ $S\subseteq R$.

ג. נניח ש-R סימטרי וטרנזיטיבי. אזי, R יחס שקילות אמ"מ לכל $x\in A$ קיים $y\in A$ כך ש-$x\ R\ y$.

פתרון 2. א. הוכחה: מכיוון ש-m מינימלי, לכל $a\in A$ לא מתקיים $a\ R\ m$. מכיוון ש-R יחס משווה, לכל $a\in A$ מתקיים $a\ R\ m\vee m\ R\ a$, ולכן לכל $a\in A$ מתקיים $m\ R\ a$ ו-m מינימום.

ב. הוכחה:

(i) אם R טרנזיטיבי אז $S\subseteq R$.

- יהיו $(x,y)\in S$. אזי קיים $z\in A$ כך ש-$(x,z)\in R$ וגם $(z,y)\in R$. מטרנזיטיביות R נקבל ש-$(x,y)\in R$.

(ii) אם $S\subseteq R$ אז R טרנזיטיבי.

- יהיו $a,b,c\in A$ כך ש-$(a,b)\in R$ וגם $(b,c)\in R$. מהגדרת S נקבל ש-$(a,c)\in S$, ומכיוון ש-$S\subseteq R$ נקבל ש-$(a,c)\in R$.

ג. הוכחה:

(i) אם R יחס שקילות אז לכל $x\in A$ קיים $y\in A$ כך ש-$x\ R\ y$.

- מכיוון ש-R יחס שקילות, הוא רפלקסיבי. לכן לכל $x\in A$ מתקיים $(x,x)\in R$, וכך קיים $y\in A$ כך ש-$(x,y)\in R$.

(ii) אם לכל $x\in A$ קיים $y\in A$ כך ש-$x\ R\ y$ אז R יחס שקילות.

- יהי $x\in A$. אזי קיים $y\in A$ כך ש-$(x,y)\in R$. מכיוון ש-R סימטרי מתקיים $(y,x)\in R$.
- מטרנזיטיביות R נקבל ש-$(x,x)\in R$ ($(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R \implies (x,x)\in R$).

שאלה 3. תהי A קבוצה, ותהי $\mathcal{H}$ קבוצת כל החלוקות של A. נגדיר יחס R מעל $\mathcal{H}$ באופן הבא: לכל $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}$, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in R$ אמ"מ $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$.

א. כתבו במפורש את $\mathcal{H}$ כאשר $A = \{1,2,3,4\}$.

ב. הוכיחו כי R הוא יחס סדר חלקי.

ג. מצאו איבר מינימלי ומקסימלי ב-$\mathcal{H}$.

פתרון 3. א.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\} \cup \\ &\{\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\},\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}\} \cup \\ &\{\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\},\{\{1\},\{2,4\},\{4\}\},\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}\} \cup \\ &\{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\} \cup \\ &\{\{\{1\},\{2,3,4\}\},\{\{2\},\{1,3,4\}\},\{\{3\},\{1,2,4\}\},\{\{4\},\{1,2,3\}\}\} \\ &\{\{\{1,2,3,4\}\}\}.\end{aligned}$$

ב.
- R רפלקסיבי: לכל $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ מתקיים ש-$\mathcal{F}$ היא עידון של $\mathcal{F}$: לכל $S \in \mathcal{F}$ קיימת $T = S \in \mathcal{F}$ כך ש-$S \subseteq T$, ולכן $(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \in R$.
- R אנטי-סימטרי חלש: תהיינה $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}$ כך ש-$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in R$.
  - מכיוון שהחלוקות שונות, קיים $a \in A$ ו-$X \neq Y \subseteq A$ כך ש-$x \in X \cap Y$, $X \in \mathcal{F}_1$ וגם $Y \in \mathcal{F}_2$.
  - מכיוון ש-$\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$, קיימת $T \in \mathcal{F}_2$ כך ש-$X \subseteq T$.
  - מכיוון ש-Y היא הקבוצה היחידה ב-$\mathcal{F}_2$ שמכילה את x (כי מחלקות שונות ב-$\mathcal{F}_2$ זרות) נקבל ש-$T = Y$, לכן $X \subseteq Y$.
  - נניח בשלילה ש-$(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \in R$, כלומר $\mathcal{F}_2$ היא עידון של $\mathcal{F}_1$.
  - לכן עבור $Y \in \mathcal{F}_2$ קיימת $S \in \mathcal{F}_1$ כך ש-$Y \subseteq S$. אזי $x \in S$, ומכיוון שמחלקות שונות ב-$\mathcal{F}_1$ זרות נקבל ש-$X = S$.
  - בסך הכל קיבלנו כי $Y \subseteq X$ וגם $X \subseteq Y$, לכן $X = Y$ והגענו לסתירה.
- R טרנזיטיבי: תהיינה $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in \mathcal{H}$ כך ש-$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \in \mathcal{H}$, אזי $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$ וגם $\mathcal{F}_2$ היא עידון של $\mathcal{F}_3$.
  - תהי $S_1 \in \mathcal{F}_1$. מכיוון ש-$\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$, קיימת $S_2 \in \mathcal{F}_2$ כך ש-$S_1 \subseteq S_2$.
  - מכיוון ש-$\mathcal{F}_2$ היא עידון של $\mathcal{F}_3$, קיימת $S_3 \in \mathcal{F}_3$ כך ש-$S_2 \subseteq S_3$ - לכן $S_1 \subseteq S_3$.

- לכן $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_3$ ומתקיים $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_3)\in R$.

- חלוקה $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$ אם ניתן לאחד מחלקות ב-$\mathcal{F}_1$ כדי להגיע ל-$\mathcal{F}_2$. לכן, האיבר המינימלי והמקסימלי הם בהתאמה

$$\mathcal{F}_{min}=\left\{\{a\}\mid a\in A\right\},\mathcal{F}_{max}=\{A\}.$$

תהי $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(A\right)$ חלוקה כלשהי.

- $\mathcal{F}_{min}$ היא עידון של $\mathcal{F}$: לכל $a\in A$ ברור כי a נמצא במחלקה של a ב-$\mathcal{F}$, ולכן $\{a\}$ מוכלת בה.
- $\mathcal{F}$ היא עידון של $\mathcal{F}_{max}$: לכל מחלקה $S\in\mathcal{F}$ מתקיים $S\subseteq A\in\mathcal{F}_{max}$.

יחס הרישא

הגדרה 1. תהי A קבוצה. נסמן ב-A^* את כל הסדרות באורך סופי של איברי A. כלומר, A^* היא קבוצת כל ה-n-יות הסדורות $(a_1,\ldots,a_n)$, כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו-$a_1,\ldots,a_n\in A$:

$$\begin{aligned}A^*&=\{(a_1,\ldots,a_n)\mid n\in\mathbb{N},a_1,\ldots,a_n\in A\}\\&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(a_1,\ldots,a_n)\mid a_1,\ldots,a_n\in A\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^n.\end{aligned}$$

נסמן ב-ε את ה-"סדרה הריקה" - המקרה בו $n=0$.

הגדרה 2. תהי A קבוצה. יחס הרישא $\leq_{\text{pre}}$ מעל A^* מוגדר באופן הבא: לכל

$$\left(a_1,\ldots,a_n\right),\left(b_1,\ldots,b_m\right)\in A^*,$$

$\left(a_1,\ldots,a_n\right)\leq_{\text{pre}}\left(b_1,\ldots,b_m\right)$ אמ"מ $n\geq m$ וגם לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $a_i=b_i$.

אינטואיציה:

אם $\left(a_1,\ldots,a_n\right)\leq_{\text{pre}}\left(b_1,\ldots,b_m\right)$ אז איברי $(a_i)_{i=1}^n$ מופיעים בתחילת הסדרה $(b_i)_{i=1}^m$. היחס $\leq_{\text{pre}}$ הוא יחס סדר מלא אם $|A|=1$, אך לא יחס סדר מלא אם $|A|>1$: אם ב-a יש שני איברים שונים, α ו-β, אז הסדרות (α) ו-(β) מקיימות $(\beta)\not\leq_{\text{pre}}(\alpha)$ וגם $(\alpha)\not\leq_{\text{pre}}(\beta)$.

טענה 1. תהי A קבוצה. אזי היחס $\leq_{\text{pre}}$ מעל A^* הוא יחס סדר חלקי.

שאלה 4.

א. הוכיחו את טענה 1.

ב. האם קיים איבר מינימלי ב-A^*? אם כן, מצאו אחד כזה.

ג. האם קיים איבר מקסימלי ב-A^*? אם כן, מצאו אחד כזה.

פתרון 4. א. נוכיח כי $\leq_{\text{pre}}$ הוא יחס סדר חלקי.

(i) $\leq_{\text{pre}}$ רפלקסיבי: תהי $(a_i)_{i=1}^n \in A^*$. אזי $n \geq n$ וגם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = a_i$, ולכן $(a_i)_{i=1}^n \leq_{\text{pre}} (a_i)_{i=1}^n$.

(ii) $\leq_{\text{pre}}$ אנטי-סימטרי חלש: תהיינה $(a_i)_{i=1}^n , (b_i)_{i=1}^m \in A^*$ כך ש-$(a_i)_{i=1}^n \leq_{\text{pre}} (b_i)_{i=1}^m$ וגם $(b_i)_{i=1}^m \leq_{\text{pre}} (a_i)_{i=1}^n$. אזי $n \geq m$ וגם $m \geq n$, ולכן $n = m$. בנוסף, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$. בסך הכל, קיבלנו ש-$(a_i)_{i=1}^n = (b_i)_{i=1}^m$.

(iii) $\leq_{\text{pre}}$ טרנזיטיבי: תהיינה $(a_i)_{i=1}^n , (b_i)_{i=1}^m , (c_i)_{i=1}^k \in A^*$ כך ש-$(a_i)_{i=1}^n \leq_{\text{pre}} (b_i)_{i=1}^m$ וגם $(b_i)_{i=1}^m \leq_{\text{pre}} (c_i)_{i=1}^k$. אזי $n \geq m$ וגם $m \geq k$, ולכן $n \geq k$. בנוסף, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$ ולכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $b_i = c_i$ (לכן גם לכל $1 \leq i \leq n$). בסך הכל, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = c_i$ ו-$(c_i)_{i=1}^k \leq_{\text{pre}} (a_i)_{i=1}^n$.

ב. הסדרה הריקה ε (אורכה 0) מהווה איבר מינימלי ב-A^*: לכל $(a_i)_{i=1}^n \in A^*$ מתקיים $n \geq 0$ מכיוון ש-$n \in \mathbb{N}$. בנוסף, התנאי השני מתקיים באופן ריק: לא קיים i כך ש-$0 \leq i \leq 1$. לכן $(a_i)_{i=1}^n \leq_{\text{pre}} \varepsilon$ ו-ε מינימום - לכן בפרט מינימלי.

ג. לא קיים איבר מקסימלי ב-A^*: נניח בשלילה ש-$(a_i)_{i=1}^n \in A^*$ איבר מקסימלי. יהי $\alpha \in A$ איבר כלשהו. נגדיר $(b_i)_{i=1}^{n+1} \in A^*$ באופן הבא:

$$\forall 1 \leq i \leq n+1 : b_i = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ \alpha & i = n+1 \end{cases} .$$

נשים לב ש-$n+1 \geq n$ ולכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$. לכן $(b_i)_{i=1}^{n+1} \leq_{\text{pre}} (a_i)_{i=1}^n$ וגם $(b_i)_{i=1}^{n+1} \neq (a_i)_{i=1}^n$, בסתירה לכך ש-$(a_i)_{i=1}^n$ מקסימלי.

שאלה 5. בדקו האם כל אחת מהפונקציות הבאות היא חח"ע/על (האם בהכרח חח"ע, בהכרח לא חח"ע או ייתכן שחח"ע, וכנ"ל לעל) במידה והפונקציה הפיכה, מצאו את הפונקציה ההופכית.

א. $f : (1, \infty) \to (0, 1)$, לכל $x \in (1, \infty)$ מתקיים $f(x) = 1 - 1/x$.

ב. $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $g(x) = 1/x$.

ג. $h : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, לכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $h(A) = A \triangle \mathbb{N}$.

ד. פונקציה $f : A \to B$ כלשהי עבור קבוצות סופיות A, B כך ש-$|A| < |B|$.

ה. פונקציה $f : A \to B$ כלשהי עבור קבוצות סופיות A, B כך ש-$|A| > |B|$.

פתרון 5. א. (i) f היא חח"ע: יהיו $x, x' \in (1, \infty)$ כך ש-$f(x) = f(x')$. אזי,

$$1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x'} \iff -\frac{1}{x} = -\frac{1}{x'} \iff x = x'.$$

(ii) f היא על: יהי $y \in (0,1)$. נרצה למצוא $x \in (1, \infty)$ כך ש-$f(x) = y$.

$$f(x) = y \iff 1 - \frac{1}{x} = y \iff \frac{1}{x} = 1 - y \iff x = \frac{1}{1-y}$$

נשים לב שמכיוון ש-$y \in (0,1)$, $1 - y \in (0,1)$ וכך $x = 1/(1-y) \in (1, \infty)$. לכן עבור $x = 1/(1-y)$ נקבל $f(x) = y$.

(iii) קיבלנו כי f היא חח"ע ועל ולכן הפיכה. מהסעיף הקודם ראינו כי לכל $x \in (1,\infty), y \in (0,1)$ מתקיים

$$f(x) = y \iff x = \frac{1}{1-y},$$

ולכן הפונקציה ההופכית היא $f^{-1} : (0,1) \to (1,\infty)$ כך ש-

$$\forall y \in (0,1) : f^{-1}(y) = 1/(1-y).$$

ב. (i) g היא חח"ע: יהיו $x, x' \in (0, \infty)$ כך ש-$g(x) = g(x')$, אזי $1/x = 1/x'$ ולכן $x = x'$.

(ii) g היא על: יהי $y \in (0, \infty)$. עבור $x = 1/y \in (0, \infty)$ נקבל ש-$g(x) = 1/(1/y) = y$.

(iii) קיבלנו כי g היא חח"ע ועל ולכן הפיכה. מהסעיף הקודם ראינו כי לכל $x, y \in (0,\infty)$ מתקיים ש-$g(x) = y$ אמ"מ $x = 1/y$, ולכן $g^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ מקיימת

$$\forall y \in (0,\infty) : g^{-1}(y) = g(y) = \frac{1}{y}.$$

ג. (i) h היא חח"ע: תהיינה $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש-$h(A) = h(B)$. אזי $A \triangle \mathbb{N} = B \triangle \mathbb{N}$. לכן מתרגיל בית קודם נקבל

$$(A \triangle \mathbb{N}) \triangle \mathbb{N} = (B \triangle \mathbb{N}) \triangle \mathbb{N} \implies A = B.$$

(ii) h היא על: תהי $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. נגדיר $A = B \triangle \mathbb{N}$ ונקבל

$$h(A) = (B \triangle \mathbb{N}) \triangle \mathbb{N} = B \triangle (\mathbb{N} \triangle \mathbb{N}) = B \triangle \emptyset = B.$$

(iii) קיבלנו כי g היא חח"ע ועל ולכן הפיכה. מהסעיף הקודם ראינו כי לכל $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $h(A) = B$ אמ"מ $A = B \triangle \mathbb{N}$. לכן הפונקציה ההופכית : h^{-1} $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ היא $h^{-1} = h$.

הערה: פונקציה שהופכיות לעצמן (כמו סעיפים ב., ג.) נקראת <u>אינבולוציה</u> (Involution).

ד. (i) ייתכן ש-f חח"ע. למשל, עבור $B = \{1,2,3\}, A = \{1,2\}$ ו-$f(1) = 1$ $f(2) =$ נקבל ש-f לא חח"ע, אך עבור $f(1) = 1, f(2) = 2$ נקבל ש-f חח"ע.

(ii) f בהכרח לא על. נניח בשלילה ש-f על, אזי $|\mathrm{Im}(f)| = |B|$. בנוסף $|\mathrm{Im}(f)| = |f(A)| \leq |A|$, בסתירה לכך ש-$|A| < |B|$.

ה. (i) f בהכרח לא חח"ע. נניח בשלילה ש-f חח"ע, אזי $|\mathrm{Im}(f)| = |f(A)| = |A|$, מכיוון שלכל מקור ממופה תמונה שונה. עם זאת, $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$ ולכן $|\mathrm{Im}(f)| \leq |B|$, בסתירה לכך ש-$|A| > |B|$.

(ii) ייתכן ש-f על. עבור $B = \{1,2\}, A = \{1,2,3\}$ ו-$f(1) = f(2) =$ 1 $2, f(3) = 1$ נקבל ש-f על, אך עבור $f(1) = f(2) = f(3) = 1$ נקבל ש-f לא על.