דיסקרטית תרגול 4 - המשך תורת הקבוצות ויחסים

-הגדרה: A,B קבוצות. נגדיר $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \wedge b\in B\}$

זוג מכפלה קרטזית.

המכפלה הקרטזית של B,A
מסומנת ב $A\times B$
והיא הקבוצה של כל הזוגות
הסדורים האפשריים
כשהם זוג האיבר הראשון שייך לA
והאיבר השני שייך לB.

דוגמא: $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4\}$

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

יחס: יהיו A,B קבוצות. יחס בין A ל B הוא תת קבוצה של $A\times B$.

-אם R יחס בין A ל B אנחנו מסמנים ב aRb את הכוונה: $(a,b)\in R$.

- מעתה נעסוק על יחס R מ A ל A (במקרה כזה נגיד R הוא יחס על A) אז נגיד ש R הוא:

- רפלקסיבי אם לכל $a\in A$ מתקיים aRa כלומר $(a,a)\in R$
- סימטרי אם לכל $a,b\in A$ אם aRb אז bRa.
- אנטי סימטרי אם ורק אם לכל $a,b\in A$ אם aRb וגם bRa אז $a=b$.
- טרנזיטיבי אם ורק אם לכל $a,b,c\in A$ אם aRb וגם bRc אז aRc

- דוגמה: היחסים הבאים על $A=\{0,1,2,3\}$ הם רפלקסיביים, סימטריים, אנטי סימטריים, טרנזיטיביים?

① $\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$

סימטרי - לבדוק לפי הגדרה. לא אנטי סימטרי.

לא רפלקסיבי כי למשל $1\in A$ אבל $(1,1)\notin R$.

לא טרנזיטיבי: כי למשל מתקיים $1R2$ ו-$2R1$ אבל לא מתקיים $1R1$.

② $\{(0,0),(1,1)\}$

סימטרי - לבדוק לפי הגדרה.

אנטי סימטרי - " " "

טרנזיטיבי - " " " (באופן ריק).

לא רפלקסיבי למשל $(2,2)\notin R$

③ $\{(0,0),(0,2),(0,1),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

רפלקסיבי - לבדוק לפי הגדרה

טרנזיטיבי - " " "

לא סימטרי - כי למשל $(0,2)\in R$ אבל $(2,0)\notin R$.

לא אנטי סימטרי - למשל $(1,2),(2,1)\in R$ אבל $2\neq 1$

<u>חיתוך של יחסים</u>

<u>משפט</u>: אם R,S יחסים טרנזיטיביים על קבוצה A, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

<u>הוכחה</u>: יהיו R,S יחסים טרנזיטיביים על הקבוצה A ויהיו $a,b,c\in A$

כך ש-$(a,b)\in R\cap S$ ו-$(b,c)\in R\cap S$. נוכיח ש-$(a,c)\in R\cap S$.

- לפי הגדרת חיתוך מתקיים ש-$(a,b)\in R$ וגם $(a,b)\in S$

ומכך ש-$(b,c)\in R\cap S$ אז מהגדרת חיתוך נקבל ש-$(b,c)\in R$ ו-$(b,c)\in S$.

וכיוון ש-S טרנזיטיבי והיינו ש-$(b,c)\in S$ וגם $(a,b)\in S$ אז לפי הגדרת הטרנזיטיביות נקבל ש-$(a,c)\in S$.

- וכיוון גם ש-R טרנזיטיבי והיינו ש-$(a,b)\in R$ וגם $(b,c)\in R$ אז מטרנזיטיביות של R נקבל ש-$(a,c)\in R$

סה"כ קיבלנו ש-$(a,c)\in R$ וגם $(a,c)\in S$ ומהגדרת חיתוך נקבל $(a,c)\in R\cap S$

לכן נקבל ש-$R\cap S$ יחס טרנזיטיבי על הקבוצה A.

חלוקות ועידונים

הגדרה: תהי A קבוצה ותהי F משפחה של קבוצות.

נאמר שF היא חלוקה של A אם מתקיים:

(1) לכל $S\in F$, S לא ריקה $(S\neq\emptyset)$

(2) לכל $S,T\in F$ אם $S\neq T$ אז $S\cap T=\emptyset$

(3) $$\bigcup_{S\in F} S = A$$

* הקבוצות בF נקראות מחלקות.

הגדרה: תהי A קבוצה, ויהיו F_1,F_2 חלוקות של A.

החלוקה F_1 היא עידון של F_2 אמ"ם לכל $S\in F_1$ קיים $T\in F_2$ כך ש $S\subseteq T$.

תרגיל / שאלה על חלוקות

- תהי A קבוצה ויהיו F_1,F_2 חלוקות של A. נבנה משפחת קבוצות G חדשה ע"י שניקח את החיתוך של כל קב' מ F_1 וכל קבוצה מ F_2 בתנאי שהם לא ריק, כלומר:

$$G=\{S\cap T \mid S\in F_1, T\in F_2, S\cap T\neq\emptyset\}$$

הוכח: G היא חלוקה.

(נוכיח ש(3) התכונות למעלה מתקיימות).

- נראה שלכל $M\in G$ מתקיים ש $M\neq\emptyset$

תהי $M\in G$. אז לפי הגדרת G קיימות שתי קבוצות $\hat{S}\in F_1$ ו $\hat{T}\in F_2$ כך ש $M=\hat{S}\cap\hat{T}$ ולפי הגדרת G מתקיים $\hat{S}\cap\hat{T}\neq\emptyset$ כלומר $M\neq\emptyset$.

- נניח כעת שלכל $M,K\in G$ אם $M\neq K$ אז $M\cap K=\emptyset$.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיימים $M,K\in G$ כך ש $M\neq K$ ומקיים $M\cap K\neq\emptyset$.

$M,K\in G$ לפי הגדרת G קיימים $S_1,S_2\in F_1$, $T_1,T_2\in F_2$

כך ש $M=S_1\cap T_1$ $K=S_2\cap T_2$.

לפי ההנחה בשלילה שלנו $(M\cap K\neq\emptyset)$ קיים x כך ש $x\in K\cap M$

ומהגדרת חיתוך קבוצות נסיק ש $x\in K$ <u>וגם</u> $x\in M$

נזכור ש $K=S_2\cap T_2$ ו $M=S_1\cap T_1$

כלומר קיבלנו $x\in S_2\cap T_2$ <u>וגם</u> $x\in S_1\cap T_1$

שוב מהגדרת חיתוך קבוצות נקבל: $x\in T_2$ <u>וגם</u> $x\in S_2$ <u>וגם</u> $x\in T_1$ וגם $x\in S_1$

לכן (מחיתוך קבוצות) נקבל $x\in S_1\cap S_2$ <u>וגם</u> $x\in T_1\cap T_2$.

לפי ההנחה F_1,F_2 חלוקות של A ו $S_1,S_2\in F_1$ ו $T_1,T_2\in F_2$

לפי הגדרת/תכונת חלוקה ומכיוון ש $x\in S_1\cap S_2$ (זו בעצם אומרת $S_1\cap S_2\neq\emptyset$)

נקבל ש $S_1=S_2$

ומכאן $x\in T_1\cap T_2$, אזי $T_1\cap T_2\neq\emptyset$, ומכיוון ש $T_1,T_2\in F_2$ אזי מהגדרת חלוקה נקבל ש $T_1=T_2$.

אזי מכאן נקבל:

$$K=S_2\cap T_2 \overset{\substack{T_2=T_1\\ S_2=S_1}}{=} S_1\cap T_1=M$$

בסתירה לכך ש $K\neq M$.

לכן: לכל $M,K\in G$ אם $K\neq M$ אז $M\cap K=\emptyset$.

דבר אחרון שנותר להראות: $\bigcup_{K\in G} K = A$

(נראה הכלה דו כיוונית)

- נראה קודם ש $\bigcup_{K\in G} K \subseteq A$:

יהי $x\in\bigcup_{K\in G} K$ מהגדרת איחוד נקבל שקיים $\hat{K}\in G$ כך ש $x\in\hat{K}$

$\hat{K}\in G$ ומהגדרת G נקבל שקיימים $\hat{S}\in F_1$ ו $\hat{T}\in F_2$

כך ש $\hat{S}\cap\hat{T}\neq\emptyset$ ו $\hat{K}=\hat{S}\cap\hat{T}$

מהנתון ש $x\in\hat{K}$ נקבל $x\in\hat{S}\cap\hat{T}$.

ומהגדרת חיתוך נקבל $x\in\hat{S}$ וגם $x\in\hat{T}$

- נסתכל על $\hat{S}$, מכיוון ש $\hat{S}\in F_1$ ו F_1 חלוקה של A

אז $\hat{S}\subseteq A$ ולכן לכל $y\in\hat{S}$ מתקיים $y\in A$

בפרט זה נכון עבור $y=x$ לכן נקבל ש $x\in A$.

- נסתכל על $\hat{T}$, מכיוון ש $\hat{T}\in F_2$ ו F_2 חלוקה של A

אז $\hat{T}\subseteq A$ ולכן לכל $t\in T$ מתקיים $t\in A$

בפרט זה נכון עבור $t=x$ לכן נקבל $x\in A$.

סה"כ קיבלנו שלכל $x\in\bigcup_{K\in G} K$ מתקיים $x\in A$ ולפי הגדרת

הכלת קבוצות נקבל $\bigcup_{K\in G} K\subseteq A$.

- נראה ש $A\subseteq\bigcup_{K\in G} K$:

יהי $x\in A$. מכיוון ש F_1, F_2 חלוקות של A לכן קיימות $T\in F_2$, $S\in F_1$

כך ש $x\in T$ וגם $x\in S$ כלומר $S\cap T\neq\emptyset$ (כי $x\in S\cap T$)

ולפי הגדרת G ומכך ש $S\cap T\neq\emptyset$ מתקיים ש $S\cap T\in G$

לכן אם נסמן $\tilde{K}=S\cap T$ נקבל ש $\tilde{K}\in G$

מתקיים $x\in\tilde{K}$ ולכן מהגדרת איחוד מתקיים $x\in\bigcup_{K\in G} K$

לכן הוכחנו ש $A\subseteq\bigcup_{K\in G} K$

הוכחנו שני הכיוונים וקיבלנו ש $\bigcup_{K\in G} K = A$ כנדרש

סה"כ קיבלנו ש G חלוקה של A.