toudeh@staff.haifa.ac.il

מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 1

שעת קבלה :-
ימי ה' $20^{00}-21^{00}$
בתיאום מראש במייל (עד יום רביעי בערב)

קבוצות :-

הגדרה :- קבוצה היא אוסף של אובייקטים ששמים אותם בתוך סוגריים מסולסים. האובייקטים האלו נקראים איברים.

לדוגמה :- $\{1, \{7\}, 3, 4\}$ האיברים שלה הם 1, $\{7\}$, 3, 4.

אם איבר a שייך לקבוצה מסויימת A מסמנים $a\in A$.

בדוגמה שלנו $1, \{7\}, 3, 4 \in \{1, \{7\}, 3, 4\}$.

הגדרה :- תהיינה A,B קבוצות. אומרים ש- A מוכלת ב- B (בסימון $A\subseteq B$, או $B\supseteq A$) אם לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$.

לדוגמה :- $B=\{3,7,9\}$, $A=\{3,7,1\}$ אז $A\nsubseteq B$ כי $1\in A$ וגם $1\notin B$.

דוגמאות לקבוצות חשובות :-

1. הקבוצה הריקה : $\emptyset$.
2. קבוצת המספרים הטבעיים :- $\mathbb{N}:=\{0,1,2,3,4,\dots\}$
3. קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים :- $\mathbb{N}^+:=\{1,2,3,4,\dots\}$
4. קבוצת המספרים השלמים :- $\mathbb{Z}:=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$
5. קבוצת המספרים הרציונליים :- $\mathbb{Q}$ הקבוצה הזו של מספרים שהם מהצורה $\frac{m}{n}$ כאשר $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq0$. למשל $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$.

   דוגמה למספר שהוא אי-רציונלי :- $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{p}$ לכל p ראשוני.
6. קבוצת המספרים הממשיים :- $\mathbb{R}$ אפשר לחשוב עליה בתור ציר X שאנחנו מכירים.

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} \mathbb{R}$$

תרגיל:- בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונות שתי קבוצות A,B.

קבעו האם $A\in B$ או $A\subseteq B$ או שניהם ביחד או אף אחד מהם:-

א) $A=\emptyset$, $B=\{\emptyset\}$, ב) $A=\emptyset$, $B=\{\{\emptyset\}\}$. ג) $A=\{\emptyset\}$, $B=\{\{\emptyset\}\}$

ד) $A=\{\emptyset\}$, $B=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, ה) $A=\emptyset$, $B=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$,

ו) $A=\{\{\emptyset\}\}$, $B=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

שני דברים שונים

פתרון:- א. $A\in B$, $A\subseteq B$.

ב. $A\notin B$, $A\subseteq B$.

ג. $A\in B$, $A\not\subseteq B$.

ד. $A\in B$, $A\subseteq B$.

ה. $A\in B$, $A\subseteq B$.

ו. $A\notin B$, $A\subseteq B$.

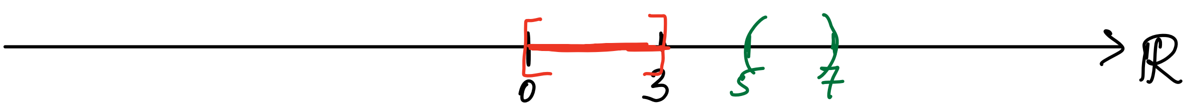
כדי ש- $A\in B$, B צריכה להיות מהצורה $\{A,.....\}$. וכדי ש- $A\subseteq B$ צריך שכל איבר בקבוצה A יהיה גם בקבוצה B.

תרגיל:- נניח ש- $\{\{a\},b\}=\{\{c\},d\}$ האם בהכרח $a=c$ וגם $b=d$?

פתרון:- לא נכון. אם ניקח:- $a=1$, $d=\{1\}$, $c=2$, $b=\{2\}$.

אז נקבל $\{\{1\},\{2\}\}=\{\{2\},\{1\}\}$ אבל $a\neq c$ וגם $b\neq c$.

עוד דוגמה לקבוצה:- $[0,3]=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 3\}$ קטע סגור.



$(5,7)=\{x\in\mathbb{R}: 5<x<7\}$ קטע פתוח

$[7,9)=\{x\in\mathbb{R}: 7\leq x<9\}$ קטע חצי-סגור חצי-פתוח.

פעולות בין קבוצות:- תהיינה A,B שתי קבוצות. נגדיר:-

1. $A\cup B := \{x \mid x\in A \text{ או } x\in B\}$.
2. $A\cap B := \{x \mid x\in A \text{ וגם } x\in B\}$.
3. $A\setminus B := \{x \mid x\in A \text{ וגם } x\notin B\}$.

הגדרה:- תהיינה A,B קבוצות. נגדיר את ההפרש הסימטרי שלהן באופן הבא:-

$$A\oplus B = \underset{\downarrow\ \text{סימון אחר}}{A\triangle B} = \{x \mid \underbrace{(x\in A \text{ וגם } x\notin B)}_{x\in A\setminus B} \text{ או } \underbrace{(x\in B \text{ וגם } x\notin A)}_{x\in B\setminus A}\}$$

$$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \underset{\text{בתרגיל הבית}}{=} (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

תרגיל:- תארו את $A\oplus B$, $A\setminus B$, $A\cup B$, $A\cap B$ עבור:-

א) $A=\{1,2,4,5,7,8,10\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$.

ב) $A=\mathbb{N}_{even}=\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$, $B=\mathbb{N}_{odd}=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$.

ג) $A=[1,4]=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\le x\le 4\}$, $B=(3,5)=\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x<5\}$.

פתרון:- א.

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$$
$$A\cap B=\{1,5,7\}$$
$$A\setminus B=\{2,4,8,10\}$$
$$A\oplus B=\{2,3,4,8,9,10\}$$

ב.

$$A\cup B=\mathbb{N}$$
$$A\cap B=\emptyset$$
$$A\setminus B=A$$
$$A\oplus B=\mathbb{N}$$

ג. $A\cup B=[1,5)$, $A\cap B=(3,4]$, $A\setminus B=[1,3]$, $A\oplus B=[1,3]\cup(4,5)$

הגדרה :- תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A מסומנת ב-$P(A)$ והיא מוגדרת להיות אוסף כל הקבוצות המוכלות ב-A.

$$P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

אם $X \subseteq A$ אומרים ש-X תת-קבוצה של A.

למעשה $P(A)$ הוא אוסף כל תתי-הקבוצות של הקבוצה A.

דוגמה :- $A = \{a, \{7\}\}$ אז $P(A) = \{\phi, \{a,\{7\}\}, \{a\}, \{\{7\}\}\}$

עוד דוגמה :- אם $B = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ אז

$$P(B) = \{\phi, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\phi, \{\phi\}\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \{\{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$$

באופן כללי אם יש ב-A n איברים אז ב-$P(A)$ יש 2^n איברים.