סוג שאלות אשר לא דיברנו עליו בתרגולים:-

שאלה :- כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=15$ כאשר $x_i \in \mathbb{N}$ לכל i ?

פתרון :- שימו לב שאלה זו שקולה לשאלה הבאה :-
בכמה דרכים ניתן לחלק 15 כדורים זהים ל-3 תאים כך שאין הגבלה על מספר הכדורים בתא. כמובן תשובה לשאלה זו אנחנו מכירים היטב מהתרגולים. שכן, התשובה היא $\binom{15+3-1}{3-1}=\binom{15+3-1}{15}$ (לפי הגדרה)

אולם, למה שתי השאלות הנ"ל שקולות?

הסבר :- שימו לב שאנחנו בעצם מחלקים את המספר 15 ל-3 מספרים x_1,x_2,x_3 כך שסכומם הוא 15 ואין הגבלה על כל x_i לומר $0\le x_i\le 15$ וכמובן לא יכול להיות ש- $x_i>15$ או $x_i<0$ (כי x_i לכל הפחות 0 כלומר לא מכניסים אף כדור לתא ה-i).
בנוסף, מבחינתנו הכדורים זהים כי למשל את 15 אפשר לחשוב עליו כ 15 פעמים המספר 1 ולא אכפת לנו איזה אחדים אנחנו מכניסים לתא ה-i כלומר אם החלטנו להכניס לתא הראשון 4 אחדים אז "הערך של x_1 הוא 4" ולא אכפת לנו איזה 4 אחדים בחרנו לשים בתא הראשון.
זה מסביר למה השאלה הראשונה שקולה לשנייה. לכן התשובה לשאלה הוא $\binom{15+3-1}{3-1}$.

שאלה נוספת :- כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=15$ כאשר $-5\le x_1\le 7$, $-3\le x_2\le 12$, $0\le x_2\le 14$.

פתרון :- נגדיר משתנים חדשים y_1,y_2,y_3 באופן הבא :-

$$y_1=x_1+5 \implies 0\le y_1\le 12 \quad , \quad y_2=x_2+3 \implies 0\le y_2\le 15$$

$$y_3=x_3 \implies 0\le y_3\le 14 .$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל :-

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Longrightarrow (y_1-5) + (y_2-3) + y_3 = 15$$

$$\Longrightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 23$$

אז השאלה המקורית שלנו שקולה לשאלה :-

כמה פתרונות יש למשוואה $y_1+y_2+y_3=23$ כך ש-

$$0 \le y_1 \le 12 \ , \ 0 \le y_2 \le 15 \ , \ 0 \le y_3 \le 14$$

נפתור בעזרת השאלה הראשונה בעמוד הקודם וגם בעזרת עקרון ההכלה וההדחה :-

נגדיר $A_1 =$ כל הפתרונות בהם $12 < y_1$.

$A_2 =$ 〃 〃 〃 $15 < y_2$.

$A_3 =$ 〃 〃 〃 $14 < y_3$.

בנוסף, נגדיר $U =$ קבוצת כל הפתרונות כאשר $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$.

אנחנו כמובן מחפשים $|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c|$. לפי עקרון ההכלה וההדחה

$$|A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

כמובן $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \phi$ כי לא ייתכן שיש פתרון שבו למשל $y_1 > 12$ וגם $y_2 > 15$ כי הסכום יותר גדול מ- 23

$\Leftarrow A_1 \cap A_2 = \phi$. שאר הקבוצות ריקות מאותו עקרון. בנוסף לכן $\phi = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

כעת, לפי שאלה קודמת. $|U| = \binom{23+3-1}{3-1}$.

נחשב את $|A_1|$ ובאותו אופן נסיק מה הם $|A_2|, |A_3|$.

נזכור ש- $A_1 =$ קבוצת כל הפתרונות בהן $y_1 > 12$. אז נשים 13 אחדים (או כדורים "מה שתרצו") ב- y_1 ונשארו 10 אחדים שניתן לחלק

כרצוננו ל- y_1, y_2, y_3. אז חוזרים לאותה שאלה: כמה פתרונות יש למשוואה $y_1+y_2+y_3=10$ והתשובה היא $\binom{10+3-1}{3-1}$

לכן, $|A_1|=\binom{12}{2}$.

באותו אופן נקבל:- $|A_2|=\binom{7+3-1}{3-1}$, $|A_3|=\binom{8+3-1}{3-1}$

סה"כ תשובה סופית לשאלה שניה היא:-

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = \binom{25}{2} - \binom{12}{2} - \binom{9}{2} - \binom{10}{2}$$