מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 3

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: תורת הקבוצות, יחסים.

תורת הקבוצות

תזכורת: עבור קבוצות A, B, ההפרש הסימטרי של A ו-B יסומן ב-$A \triangle B$ או $A \oplus B$, ומוגדר להיות

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,. \end{aligned}$$

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

פתרון 1. **1.** הוכחה:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ (\text{הגדרת הפרש}) &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ (\text{אסוציאטיביות של } \wedge) &\iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ (\text{הגדרת הפרש}) &\implies x \in A \wedge x \notin (B \setminus C) \\ (\text{הגדרת הפרש}) &\iff x \in A \setminus (B \setminus C)\,. \end{aligned}$$

2. הוכחה - כדי להראות שוויון בין הקבוצות, נראה הכלה דו כיוונית.

- $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$: יהי $x \in (A \cup B) \setminus C$.
  - מהגדרת הפרש מתקיים $x \in A \cup B$ (כלומר $x \in A$ או $x \in B$) וגם $x \notin C$.
  - אם $x \in A$, אזי $x \in A \setminus C$, ואם $x \in B$, אזי $x \in B \setminus C$.
  - בכל מקרה, $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$: יהי $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
  - מהגדרת איחוד מתקיים $x \in A \setminus C$ או $x \in B \setminus C$.
  - אם $x \in A \setminus C$, אזי $x \in A$ (ולכן $x \in A \cup B$) וגם $x \notin C$, ולכן $x \in (A \cup B) \setminus C$.
  - אם $x \in B \setminus C$, אזי $x \in B$ (ולכן $x \in A \cup B$) וגם $x \notin C$, ולכן $x \in (A \cup B) \setminus C$.
  - בכל מקרה, $x \in (A \cup B) \setminus C$.

3. הוכחה: יהי $x \in A \triangle C$.

- לכן $x \in A \setminus C \cup C \setminus A$, כלומר $(x \in A \setminus C) \vee (x \in C \setminus A)$.
- אם $x \in A \setminus C$, מתקיים $x \in A$ וגם $x \notin C$. נפריד למקרים:
  - אם $x \in B$, נקבל ש-$x \in B \triangle C$, ואחרת נקבל ש-$x \in A \triangle B$.
  - בכל מקרה מתקיים $x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.
- המקרה בו $x \in C \setminus A$ זהה.

הגדרה 1. תהיינה A, B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A, B מוגדרת להיות

$$A \times B = \left\{ \underbrace{(a, b)}_{\text{זוג סדור}} \mid a \in A \wedge b \in B \right\}$$

דוגמה 1. עבור $A = \{\emptyset, \text{יפתח}\}$ ו-$B = \{1, 2\}$,

$$A \times B = \{(\text{יפתח}, 1), (\text{יפתח}, 2), (\emptyset, 1), (\emptyset, 2)\}.$$

בנוסף, לכל קבוצה X מתקיים $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.

- באופן כללי, עבור קבוצות $A_1, \ldots, A_n$, אזי

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i = \left\{ \underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{n\text{-יה סדורה}} \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n \right\}.$$

- בנוסף, אם $A = A_1 = \cdots = A_n$, אזי

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ פעמים}} = A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \ldots, a_n \in A\}.$$

- עבור קבוצות $A_1, A_2, \ldots$, נגדיר

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i = \left\{x \mid \exists i \in \mathbb{N}^+ : x \in A_i\right\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} A_i = \left\{x \mid \forall i \in \mathbb{N}^+ : x \in A_i\right\}$$

תרגיל 2. תהיינה $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$, $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ משפחות (אוסף קבוצות). הוכח כי

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} (A_i \setminus B_i).$$

פתרון 2. יהי $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, אזי $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ וגם $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$.

- קיים $j \in \mathbb{N}^+$ כך ש-$x \in A_j$, וגם לכל $i \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $x \notin B_i$. בפרט, מתקיים

$$x \in A_j \setminus B_J \implies x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} (A_i \setminus B_i).$$

הגדרה 2. תהי A קבוצה. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ היא חלוקה של A אם שלוש התכונות הבאות מתקיימות:

1. כל איבר ב-A נמצא במחלקה כלשהי:

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = A.$$

2. אין חיתוך בין מחלקות שונות:

$$\forall S, T \in \mathcal{F} : S \neq T \to S \cap T = \emptyset.$$

3. אף מחלקה ב-$\mathcal{F}$ אינה ריקה:

$$\forall S \in \mathcal{F} : S \neq \emptyset.$$

הגדרה 3. תהי A קבוצה, ויהיו $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ חלוקות של A. $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$ אם

$$\forall S \in \mathcal{F}_1 \exists T \in \mathcal{F}_2 : S \subseteq T.$$

דוגמה 2. עבור $A = \{1,2,3,4\}$ והחלוקות

$$\mathcal{F}_1 = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\{1,2,3\},\{4\}\},$$

נקבל ש-$\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$:

- עבור $\{1\} \in \mathcal{F}_1$, $\{1,2,3\} \in \mathcal{F}_2$ ומתקיים $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$.
- עבור $\{2,3\} \in \mathcal{F}_1$, $\{1,2,3\} \in \mathcal{F}_2$ ומתקיים $\{2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.
- עבור $\{4\} \in \mathcal{F}_1$, $\{4\} \in \mathcal{F}_2$ ומתקיים $\{4\} \subseteq \{4\}$.

תרגיל 3. תהי A קבוצה, ויהיו $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ חלוקות של A. נגדיר משפחת קבוצות $\mathcal{G}$ על ידי

$$\mathcal{G} = \{S \cap T \mid (S,T) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, S \cap T \neq \emptyset\}.$$

הוכיחו כי $\mathcal{G}$ היא חלוקה של A.

פתרון 3. נוכיח את שלוש התכונות של חלוקה:

1. נראה כי $\bigcup_{L \in \mathcal{G}} L = A$ באמצעות הכלה דו-כיוונית:

   (א) $\bigcup_{L \in \mathcal{G}} L \subseteq A$.

   - יהי $x \in \bigcup_{L \in \mathcal{G}} L$. מהגדרת איחוד, קיים $L' \in \mathcal{G}$ כך ש-$x \in L'$.
   - מהגדרת $\mathcal{G}$, קיימים $S' \in \mathcal{F}_1, T' \in \mathcal{F}_2$ כך ש-$S' \cap T' = L'$.
   - מהגדרת החיתוך, נקבל ש-$x \in S'$ וגם $x \in T'$.
   - מכיוון ש-$S' \in \mathcal{F}_1$ ו-$\mathcal{F}_1$ חלוקה של A, מתקיים $S' \subseteq A$.
   - מהגדרת הכלה נקבל ש-$x \in A$.

   (ב) $A \subseteq \bigcup_{L \in \mathcal{G}} L$.

   - יהי $a \in A$.
   - מכיוון ש-$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ חלוקות של A, קיימות $S' \in \mathcal{F}_1, T' \in \mathcal{F}_2$ כך ש-$x \in S'$ וגם $x \in T'$.

- מהגדרת חיתוך נקבל ש-$x \in S' \cap T'$, ובפרט $S' \cap T' \neq \emptyset$.
- מהגדרת $\mathcal{G}$ נקבל ש-$S' \cap T' \in \mathcal{G}$, ולכן מהגדרת איחוד נקבל ש-$S' \cap T' \subseteq \bigcup_{L \in \mathcal{G}} L$.
- מהגדרת הכלה נקבל ש-$x \in \bigcup_{L \in \mathcal{G}} L$.

2. כעת נוכיח שאין חיתוך בין מחלקות שונות: נוכיח שלכל $M, K \in \mathcal{G}$ כך ש-$M \neq K$ מתקיים $M \cap K = \emptyset$.

- נניח בשלילה שקיימים $M, K \in \mathcal{G}$ כך ש-$M \neq K$ וגם $M \cap K \neq \emptyset$.
- מכיוון ש-$M, K \in \mathcal{G}$, מהגדרת $\mathcal{G}$ קיימות קבוצות $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_1$ ו-$T_1, T_2 \in \mathcal{F}_2$ כך ש-
$$M = S_1 \cap T_1, \quad K = S_2 \cap T_2.$$
- מכיוון ש-$M \cap K \neq \emptyset$, קיים x כך ש-$x \in M \cap K$, ומהגדרת חיתוך מתקיים $x \in M$ וגם $x \in K$.
- מכיוון ש-$M = S_1 \cap T_1$ ו-$K = S_2 \cap T_2$, מהגדרת חיתוך נקבל ש-
$$x \in S_1 \wedge x \in S_2 \wedge x \in T_1 \wedge x \in T_2.$$
- מהגדרת חיתוך נקבל ש-$x \in S_1 \cap S_2$ וגם $x \in T_1 \cap T_2$, ולכן נקבל ש-$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ וגם $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.
- מכיוון ש-$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ חלוקות נקבל ש-$S_1 = S_2$ (אחרת $S_1 \cap S_2 = \emptyset$) וגם $T_1 = T_2$, ומכאן נובע ש-
$$M = S_1 \cap T_1 = S_2 \cap T_2 = K,$$
בסתירה לכך ש-$M \neq K$.

3. לבסוף, נוכיח כי לכל $L \in \mathcal{G}$, $L \neq \emptyset$.

- מהגדרת $\mathcal{G}$, קיימות $S \in \mathcal{F}_1$ ו-$T \in \mathcal{F}_2$ כך ש-$S \cap T \neq \emptyset$ ו-$L = S \cap T$.
- מכאן נקבל ש-$L \neq \emptyset$.

יחסים

הגדרה 4. תהי A קבוצה. יחס בינארי R על A הוא תת-קבוצה של $A \times A$ (אוסף של זוגות סדורים). לכל $(a, b) \in R$ נאמר ש-<u>a הוא ביחס R עם b</u>, ונסמן $a \; R \; b$ או $(a, b) \in R$.

הגדרה 5. תהי A קבוצה ויהי R יחס מעל A (כלומר $R \subseteq A^2$).

1. R רפלקסיבי אם לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \in R$.
2. R אנטי-רפלקסיבי אם לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \notin R$.
3. R סימטרי אם לכל $a,b \in A$ מתקיים

$$(a,b) \in R \to (b,a) \in R.$$

4. R אנטי-סימטרי חלש אם לכל $a,b \in A$ מתקיים

$$(a \; R \; b \wedge b \; R \; a) \to a = b.$$

5. R אנטי-סימטרי חזק אם לכל $a,b \in A$ מתקיים

$$a \; R \; b \to \neg \left(b \; R \; a \right).$$

6. R טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c \in A$ מתקיים

$$(a \; R \; b \wedge b \; R \; c) \to a \; R \; c.$$

תרגיל 4. עבור כל אחד מהיחסים הבאים, בדקו אילו תכונות היחס מקיים.

1. $R = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$, מעל $\{1,2,3\}$.
2. $(x,y) \in S$ אמ"מ $x \cdot y = 2$, מעל $\mathbb{Z}$.

פתרון 4.

1.
   - R אנטי-רפלקסיבי: $(1,1),(2,2),(3,3) \notin R$, ולכן בפרט לא רפלקסיבי.
   - R סימטרי: $(1,2),(2,1) \in R$, $(1,3),(3,1) \in R$ ואף זוג אחר לא ביחס.
   - R לא אנטי-סימטרי חלש: $1 \neq 2$ אבל $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R$.
     - ניתן להסיק מאותה הדוגמא הנגדית ש-R אינו אנטי-סימטרי חזק.
   - R לא טרנזיטיבי: $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R$ אבל $(1,1) \notin R$.
2.
   - S אנטי-רפלקסיבי:
     - נניח בשלילה שקיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x \cdot x = 2$, אזי $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ והגענו לסתירה.
     - מכאן S בפרט אינו רפלקסיבי.
   - S סימטרי: נובע מקומוטטיביות הכפל. לכל $x,y \in \mathbb{Z}$,

$$x \; S \; y \iff x \cdot y = 2 \iff y \cdot x = 2 \iff y \; S \; x.$$

- S אינו אנטי-סימטרי חלש: $(1,2) \in S$ וגם $(2,1) \in S$ אבל $2 \neq 1$.

  - ניתן להסיק מאותה הדוגמא הנגדית ש-R אינו אנטי-סימטרי חזק.

- S לא טרנזיטיבי: $(2,1) \in S \wedge (1,2) \in S$ אבל $(2,2) \notin S$.