מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 17

תרגיל:- הוכיחו כי מספר האפשרויות לבחירת 3 תתי-קבוצות A,B,C מתוך קבוצה בת n איברים כך שאף אחת מבין הקבוצות $A\cap B$, $B\cap C$ ו- $C\cap A$ אינה ריקה הוא $8^n-3\cdot 6^n+3\cdot 5^n-4^n$.

פתרון:- תהי U קבוצת כל האפשרויות לבחירת 3 תתי-קבוצות A,B,C מתוך הקבוצה F שבה n איברים.

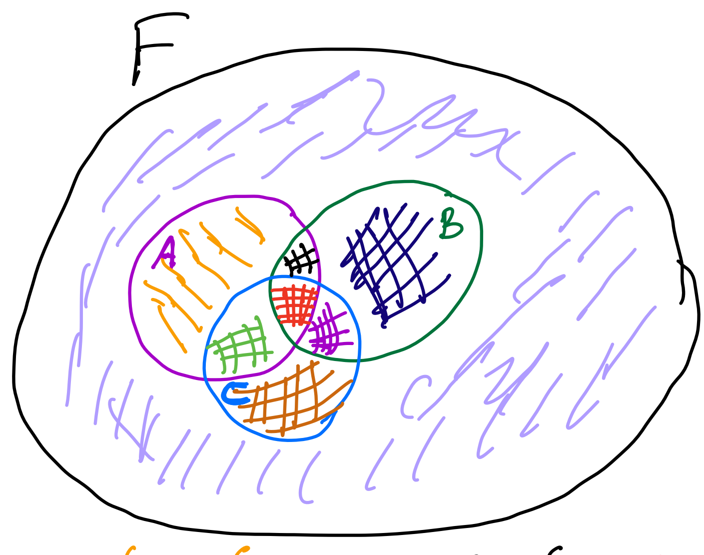
נסמן P קבוצת הבחירות שבהן $A\cap B=\emptyset$.

נסמן Q קבוצת הבחירות שבהן $B\cap C=\emptyset$.

" R " " " $C\cap A=\emptyset$.

$$|P^c\cap Q^c\cap R^c| = |U|-(|P|+|Q|+|R|)+(|P\cap Q|+|P\cap R|+|Q\cap R|)$$
$$-|P\cap Q\cap R|$$

נשים לב ששלושת הקבוצות מחלקות את F ל- 8 תחומים:



$A^c\cap B^c\cap C^c$, $A\cap B^c\cap C^c$, $A\cap B\cap C^c$, $A\cap B\cap C$, $A\cap B^c\cap C$

$A^c\cap B^c\cap C$, $A^c\cap B\cap C^c$, $A^c\cap B\cap C$

כמובן לכל $x\in F$ מתקיים x נמצא בדיוק באחת מבין 8 החלקים הנ"ל.

לכן $|U|=8^n$.

התנאי ש- $A\cap B=\phi$ הוא שלכל $x\in F$ חייב להתקיים $x\notin A\cap B\cap C^c$ וגם $x\notin A\cap B\cap C$. לכן לכל $x\in F$ יש 6 אפשרויות. לכן, סה"כ 6^n כלומר $|P|=6^n$.

באותו אופן $|R|=|Q|=6^n$

התנאי ש- $A\cap B=\phi=B\cap C$ הוא שלכל $x\in F$ מתקיים $x\notin A\cap B\cap C$ וגם $x\notin A\cap B\cap C^c$ וגם $A^c\cap B\cap C$.

לכן עבור כל x כזה יש 5 אפשרויות. סה"כ 5^n. כלומר $|P\cap Q|=5^n$.

באותו אופן בדיוק נקבל $|Q\cap R|=|P\cap R|=5^n$.

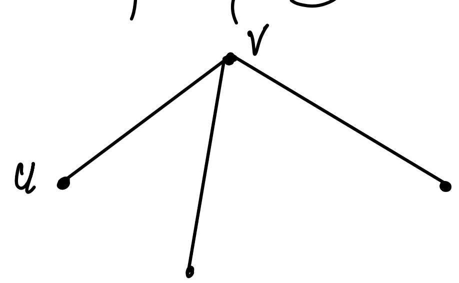
לבסוף, התנאי ש- $A\cap B=B\cap C=A\cap C=\phi$ הוא שלכל $x\in F$ מתקיים:- $x\notin A\cap B\cap C$ וגם $x\notin A\cap B\cap C^c$ וגם $x\notin A^c\cap B\cap C$ וגם $x\notin A\cap B^c\cap C$. לכן לכל x כזה יש 4 אפשרויות. סה"כ $|P\cap Q\cap R|=4^n$. לכן $|P^c\cap Q^c\cap R^c|=8^n-3\cdot 6^n+3\cdot 5^n-4^n$.

תורת הגרפים:-

תזכורת:- 1. גרף הוא $G=(V,E)$ כאשר V קבוצת קודקודים/צמתים ו- E הנו קבוצת קשתות כך ש:-

$$E\subseteq (V\times V)\setminus\Delta$$

כאשר $\Delta=\{(i,i)\mid i\in V\}$. במילים אחרות גרף הוא אוסף של קודקודים וקשתות/צלעות כך שאין צלע מקודקוד לעצמו (כלומר אין לולאות).



רוב הזמן נעסוק בגרפים לא מכוונים.

V תמיד קבוצה סופית.

הגדרה:- יהי $G=(V,E)$ גרף. יהי $v\in V$. נסמן ב- $N(v)$ את קבוצת כל השכנים של קודקוד v. כלומר
$$N(v)=\{u\in V \mid (u,v)\in E\}$$

הגדרה:- יהי $G=(V,E)$ גרף ויהי $v\in V$. נגדיר את הדרגה של v להיות $deg(v):=|N(v)|$.

משפט:- יהי $G=(V,E)$ גרף. אז $\sum_{v\in V} deg(v)=2\cdot|E|$.

תרגיל:- קבעו אם קיים גרף בן 6 קודקודים שדרגותיהם:-

א. $1,2,3,4,5,5$.

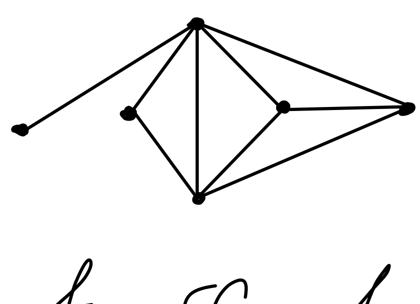
ב. $1,2,3,4,4,5$.

ג. $1,2,3,3,4,5$.

פתרון:- א. אי-אפשר כי אם ישנם שני קודקודים עם דרגה 5 אז הם מחוברים לכל שאר הקודקודים. בפרט לא ייתכן קיום קודקוד בעל דרגה 1.

ב. אי אפשר כי סכום הדרגות הוא 19 כלומר אי-זוגי וזה לא ייתכן לפי המשפט.

ג. כן אפשרי, למשל:-



הגדרה:- יהי $G=(V,E)$ גרף. מסלול בגרף הוא
$$V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, e_k, V_k$$
כאשר $V_0,\dots,V_k\in V$ ו- $e_i=(V_{i-1},V_i)$.

נהוג לקצר את הכתיבה ב- $V_0,V_1,\dots,V_k$.

הגדרה :- מסלול $v_0,\dots,v_k$ נקרא מסלול פשוט אם לכל $0\le i\ne j\le k$ מתקיים $v_i\ne v_j$.

משפט :- אם בגרף G יש מסלול בין u,v אז יש מסלול פשוט בין u,v.

הגדרה :- מעגל הוא מסלול $v_0,\dots,v_k$ כאשר $v_0=v_k$.
מעגל פשוט הוא מעגל כך שלכל $1\le i\ne j\le k-1$ $v_i\ne v_j$.

תרגיל :- יהי $G=(V,E)$ גרף כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\deg(v)\ge 2$.
הוכיחו שבגרף G יש מעגל פשוט.

פתרון :- נבחר $v_0\in V$ כלשהו. נצא ממנו לאחד השכנים שלו. מכאן נצא למסלול רנדומלי כך שאם הולכים מ-u ל-v אז הצעד הבא לא יהיה מ-v ל-u (זה אפשרי כי $\deg(v)\ge 2$ לכל $v\in V$).
כיוון שיש מספר סופי של קודקודים אז באיזשהו שלב נחזור לקודקוד שהיינו בו. בפעם הראשונה שנחזור לקודקוד שהיינו בו נעצור וכך נקבל מסלול
$v_0,v_1,v_2,\dots,v_k$
כאשר $v_k=v_j$ עבור איזשהו $0\le j\le k-2$
ואז המסלול $v_j,v_{j+1},\dots,v_k$ הוא מעגל פשוט.

הערה :- ניתן להוכיח שאלה זו בהסתמך על מסקנה שראינו בהרצאות :-
אם ב-G על n קודקודים יש לפחות n קשתות אז יש ב-G מעגל פשוט.

תרגיל :- יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן $\delta_G:=\min\{\deg(v)\mid v\in V\}$ (δ_G הוא הדרגה המינימלית שיש בגרף G). נניח כי $\delta_G\ge 1$. הוכיחו שבגרף יש מסלול פשוט מאורך לפחות δ_G.
האם בגרף יש מעגל פשוט?

פתרון:- יהי $v_1, v_2, \ldots, v_k$ מסלול פשוט מאורך מקסימלי. ברור שמתקיים $deg(v_1) \geq \delta_G$. נטען שכל השכנים של v_1 נמצאים במסלול זה. כי אחרת אם אחד השכנים של קודקוד v_1 אינו נמצא במסלול זה אז ניתן להוסיף אותו לתחילת המסלול ואז נקבל מסלול ארוך יותר מהמסלול הזה בסתירה למקסימליות האורך של המסלול הכי ארוך. לכן כל השכנים של v_1 נמצאים במסלול זה לכן האורך של מסלול זה $\geq deg(v_1) \geq \delta_G$. קיבלנו את הדרוש.

לא בהכרח קיים מעגל פשוט למשל בגרף הבא:-