מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 12

תרגיל :- הוכיחו בצורה אלגברית וקומבינטורית את השוויון הבא :-

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$$

פתרון קומבינטורי :- נרצה לספור כמה תמורות על קבוצה בת $n+1$ איברים
נאמר $A=\{1,2,\dots,n+1\}$ יש כך שלפחות אחד האיברים לא עובר לעצמו.
מצד אחד, ברור שאלו כל התמורות חוץ מתמורת הזהות. לכן יש
$(n+1)!-1$ תמורות כאלו.
מצד שני, ניתן לחשוב על בעיה זו בצורה הבאה :- לכל $0\le k\le n$
נבדוק כמה תמורות יש על הקבוצה $\{1,2,\dots,n+1\}$ כך שהמספר $k+1$
הוא המספר הכי גדול שאינו עובר לעצמו תחת תמורות אלו.
נעיר ש $k+1$ חייב לעבור לאיבר קטן ממש ממנו (לשם כך יש לו
k אפשרויות) כי: אם $f(k+1)=t>k+1$ אז $f(t)\neq t$ כי f חח"ע.
ועכשיו נותר לטפל באיברים $1,\dots,k$. אותם נעביר באופן חח"ע ועל
לקבוצה $\{1,\dots,k+1\}\setminus\{f(k+1)\}$. לשם כך יש $k!$ אפשרויות. נסכום
על פני כל ה-k האפשריים ונקבל

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k!$$

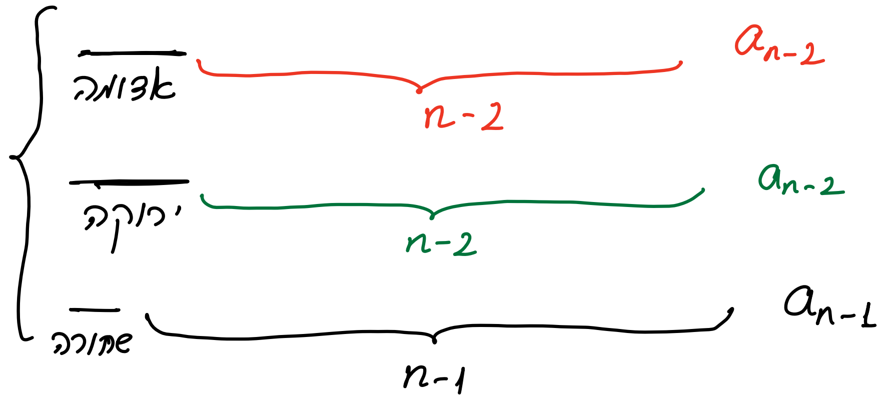
לכן מיחידות הפתרון נקבל $\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$.

רקורסיה/כלל נסיגה :-

תרגיל :- בכמה דרכים ניתן לרצף שביל באורך n ע"י שימוש במרצפות אדומות באורך 2, ירוקות באורך 2 ושחורות באורך 1.

פתרון :- נסמן מספר האפשרויות ב- a_n

ישנם 3 דרכים להתחיל ברצוף :-



לכן, כלל נסיגה הוא $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1 \Rightarrow$ רק שחורה

תרגיל :- לכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו נוסחה רקורסיבית עבור a_n = מספר הסדרות הבינאריות (כלומר מורכבות מ- 0,1) באורך n שלא מופיע בהן הרצף המצוין בכל סעיף :-

א) 11.

ב) 111.

ג) 110.

ד) 1100.

ה) 011.

ו) 101.

פתרון :- א)

$$
\begin{cases}
0\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1} & a_{n-1} \\
10\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-2} & a_{n-2}
\end{cases}
$$

אם מתחילים ב-0 אז מותר להשלים את הסדרה בכל סדרה חוקית מאורך n-1. לעומת זאת, אם מתחילים ב-1 אז חייבים לשים 0 ואז נשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-2.

לכן כלל נסיגה הוא $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ עם תנאי התחלה: $a_0 = 1, a_1 = 2$

ב)

$$
\begin{cases}
0\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} & a_{n-1} \\
10\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} & a_{n-2} \\
110\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} & a_{n-3}
\end{cases}
$$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$$

כמו מקודם, אם מתחילים ב-0 אז מותר להשלים בכל סדרה חוקית מאורך n-1. לעומת זאת, אם מתחילים ב-1 אז נפצל לשני מקרים:-

1) הסדרה תתחיל ב- 10. ואז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-2.

2) הסדרה תתחיל ב- 11. אז: חייבים לשים 0 אחרי 11. אחר כך נשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-3.

לכן כלל נסיגה הוא $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

ב) 110

$$\begin{cases} 0\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-1} & a_{n-1} \\ 1\,1\,111111\ldots1 & 1 \\ 10\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-2} & a_{n-2} \end{cases}$$

אם מתחילים ב-0 אז ישאר לנו n-1 מקומות אותם נוכל להשלים כל סדרה חוקית מאורך n-1.

אם נתחיל ב-1 אז נפצל לשני מקרים:-

1) ההתחלה היא 10. ואז נוכל להשלים כל סדרה חוקית מאורך n-2.

2) ההתחלה היא 11. אז את הסדרה הזו אנחנו חייבים להשלים אותה רק ע"י שימוש באחדים.

לכן כלל נסיגה הוא $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

ג) 1100

$$\begin{cases} 0\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-1} & a_{n-1} \\ 1\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-1} & a_{n-1} \\ -1\underbrace{100\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n-4}}_{n-1} & a_{n-4} \end{cases}$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-4}$$

אם מתחילים ב-0 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1.

אם מתחילים עם 1 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1 פרט לסדרות החוקיות מאורך n-1 המתחילות עם 100

ישנן a_{n-4} סדרות חוקיות מאורך n-1 המתחילות עם 100.

לכן כלל הנסיגה הוא $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-4}$

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$a_3 = 8$$

ה) 011 :-

$$\begin{cases} 1\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1} & a_{n-1} \\ 0\underbrace{\qquad\qquad\qquad} & a_{n-1} \\ -011\underbrace{\qquad\qquad\qquad} & a_{n-3} \end{cases}$$

בדיוק כמו בסעיף קודם, אם מתחילים עם 1 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1.
אם מתחילים עם 0 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1 פרט לאלו שמתחילות עם 11. לכן כלל נסיגה הוא

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$$
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$

ו) 101

$$\begin{cases} 0\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1} & a_{n-1} \\ 1\underbrace{\qquad\qquad\qquad} & a_{n-1} \end{cases}$$

אם מתחילים עם 0 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1.
אם מתחילים עם 1 אז מותר להשלים עם כל סדרה חוקית מאורך n-1 פרט לאלו שמתחילות עם הרצף 01.

מספר הסדרות החוקיות מאורך n-1 המתחילות עם הרצף 01 הוא בדיוק מספר הסדרות החוקיות מאורך n-1 המתחילות עם 0 פרט לאלו שמתחילות עם 00.

סדרה חוקית מאורך n-1 המתחילה עם 0 ניתן להשלים אותה עם כל סדרה חוקית מאורך n-2. ונחסר את כל הסדרות מאורך n-1 המתחילות עם 00 שמספרם הוא a_{n-3}

לכן כלל הנסיגה הוא $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} - (a_{n-2} - a_{n-3})$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

תרגיל:- מצאו נוסחת נסיגה למספר הדרכים לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.

פתרון:- ניקח איזשהו איש בקבוצה. הוא יכול להיות לבד או מזווג
אם הוא לבד אז את n-1 האנשים האחרים ניתן לחלק ב- a_{n-1} אפשרויות לזוגות ובודדים.

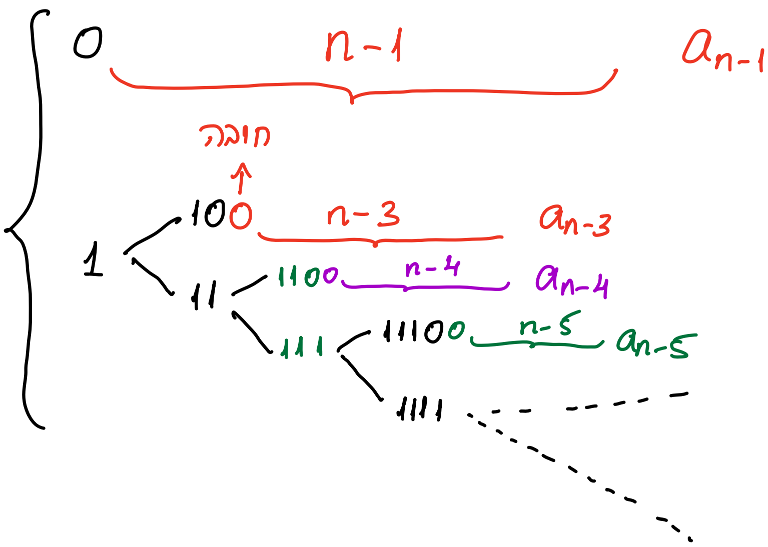
אם הוא מזווג אז יש n-1 אפשרויות לבחור לו בן זוג.
ואת n-2 האנשים האחרים ניתן לחלק ב- a_{n-2} אפשרויות לזוגות ובודדים.

לכן כלל הנסיגה הוא $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

פתרון אחר לסעיף ! :- 101



נמשיך כך ונקבל

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + \underbrace{a_1 + a_0 + 2}$$

הסבר :-

1111 .... 1 | ? | ? | ?

אם החלטנו לשים 0
אז מקום אחרי חייב להיות 0
ואז למקום האחרון אפשר להשלים ב- a_1
אפשרויות

111 .... 1 | 1 | |

יכול להיות 0 או 1

אם שמנו 0 אז למקום האחרון יש רק האפשרות
אחת שהיא 0 כלומר a_0
ואם נשים 1 אז למקום האחרון יהיו שתי אפשרויות
1 או 0 לכן מכאן מופיע ה 2 שיש בנוסחה למעלה.

סה"כ:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_1 + a_0 + 2$$

נכתוב את הנוסחה גם עבור $n-1$ ונקבל

$$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_1 + a_0 + \underbrace{a_{-1}}_{\text{שווה ל-0}} + 2$$

לכן,

$$-\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_1 + a_0 + 2 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_1 + a_0 + 2 \end{cases}$$

נחסיר משוואה שניה מהראשונה ונקבל:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$$

שזו בדיוק הנוסחה שקיבלנו בפתרון הראשון.