מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 14

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: קומבינטוריקה **3/3**.

תרגיל 1. מצא את מספר הפתרונות של המשוואה

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 0, \qquad \forall 1 \le i \le k : x_i \in \{0,1\}.$$

פתרון 1. כדי שיהיה פתרון, נצטרך שיהיה מספר שווה של 1-ים ו-(-1)-ים שייסכמו. לכן, אם k זוגי אין פתרונות למשוואה. אחרת, נצטרך לבחור את המקומות בהם $x_i = 1$ - יש בדיוק $k/2$ כאלה, ולכן מספר הפתרונות הוא $\binom{k}{k/2}$.

תרגיל 2.

1. תהי A קבוצה בת 11 מספרים שלמים. הוכח שקיימים ב-A שני שלמים שונים שההפרש ביניהם מתחלק ב-10.
2. תהי A קבוצה בת 5 מספרים שלמים, כך שאף אחד מהם לא מתחלק ב-5. הוכח שקיימים ב-A שני שלמים שונים שההפרש ביניהם מתחלק ב-10, או שקיימים שני שלמים שונים ב-A שסכומם מתחלק ב-10.

פתרון 2.

1. נחלק את A ל-10 קבוצות $X_0, \ldots, X_9$, כך שלכל $0 \le i \le 9$ מתקיים

$$X_i = \{a \in A \mid a \equiv i \mod 10\}.$$

נשים לב כי כל איבר ב-A נמצא בקבוצה כלשהי: לכל $a \in A$ מתקיים $a \in X_{a \text{mod} 10}$. לכן, יש 11 מספרים שמתחלקים ל-10 קבוצות. לכן, לפי עיקרון שובך היונים קיים i כך ש-$|X_i| \ge 2$. יהיו $x_1 \neq x_2 \in X_i$. אזי $x_1 - x_2 \equiv 0 \mod 10$, ולכן ההפרש של x_1, x_2 מתחלק ב-10.

2. נניח שב-A אין זוג איברים שונים שההפרש שלהם מתחלק ב-10. לכן, ספרת האחדות של כל שני מספרים שונים ב-A היא שונה. נסתכל על הקבוצות

$$\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}.$$

לכל $a \in A$, מכיוון ש-a אינו מתחלק ב-5 נקבל שספרת האחדות של a אינה ב-$\{0,5\}$. לכן נמפה את a לאחת מהקבוצות לעיל, לפי ספרת האחדות שלו. מכיוון שמיפינו 5 איברים ל-4 קבוצות, לפי עיקרון שובך היונים קיימים שני מספרים שממופים לאותה קבוצה. מכיוון שאין שני איברים בעלי ספרת אחדות זהה, נקבל שספרת האחדות של אחד היא k ושל השני $10-k$, ולכן סכומם מתחלק ב-10.

תרגיל 3. תהי $X \subseteq [2n]$ כך ש-$|X| = n+1$. הוכח/הפרך כי קיימים $x_1, x_2 \in X$ כך ש-x_1, x_2 זרים.

פתרון 3. באופן דומה לתרגיל הקודם, נסתכל על המשפחה

$$\{\{k,k+1\} \mid \exists 0 \le l \le n : k = 2l+1\}.$$

יש במשפחה n קבוצות, וכל קבוצה בה מכילה מספרים זרים $(*)$. לפי עיקרון שובך היונים, קיימים ב-X שני מספרים שונים הממופים לאותה הקבוצה, ושני אלה זרים. כעת, נראה ש-$k, k+1$ זרים: יהי $\alpha > 1$ מחלק של k. אזי $k = \alpha \cdot c$ עבור c טבעי כלשהו. המספר הקטן ביותר שגדול מ-k ומתחלק ב-α הוא

$$\alpha \cdot (c+1) = \alpha \cdot c + \alpha > k+1,$$

ולכן $k+1$ לא מתחלק ב-α. באופן דומה ניתן להראות שכל מחלק שגדול מ-1 של $k+1$ אינו מחלק של k.

תרגיל 4. מצא את מספר המטריצות $2 \times n$, כך שכל אחד מאיברי המטריצה ב-$[2n]$ ומופיע פעם אחת לפחות, כך ש:

1. ללא הגבלות נוספות.
2. אין עמודה שמופיעים בה שני מספרים ב-$[n]$.
3. אין עמודה ששני מספריה הם $\{j, n+j\}$ לכל $1 \le j \le n$.
4. השורה השנייה היא סדרה עולה ממש.
5. אין מספר זוגי המופיע בעמודה זוגית.

פתרון 4. 1. הדבר שקול למספר התמורות על $2n$ מספרים, ולכן יש $(2n)!$ דרכים.

2. בכל עמודה מופיע מספר אחד מ-$\{1,\dots,n\}$, והשני מ-$\{n+1,\dots,2n\}$. נסתכל על כל סידור של $\{1,\dots,n\}$ ו-$\{n+1,\dots,2n\}$. כעת, נבחר את העמודה ה-i להיות האיברים ה-i משני הסידורים, יש 2 דרכים לכל עמודה. בסך הכל:

$$\underbrace{n!}_{\{1,\dots,n\}\text{ורדסי}} \cdot \underbrace{n!}_{\{n+1,\dots,2n\}\text{ סידור}} \cdot \underbrace{2^n}_{\text{סדר פנימי בכל עמודה}} .$$

3. נפתור באמצעות הכלה והדחה, על מספר העמודות שמכילות $\{j,n+j\}$ עבור $1 \le j \le n$ כלשהו.

- מספר הסידורים ללא הגבלה הוא $(2n)!$.
- נניח שקיימות r עמודות שמכילות $\{j,n+j\}$. תחילה, נבחר את העמודות ואת ערכי ה-j: $\binom{n}{r}^2$. יש $r!\cdot 2^r$ דרכים לחלק את הזוגות על עמודות אלה. כעת, נותרנו עם $2n-2r$ איברים ללא הגבלה נוספת. לכן, מספר האפשרויות הוא

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 \cdot r! \cdot 2^r \cdot (2n-2r)!.$$

4. השורה השנייה היא סדרה עולה ממש, ולכן מכילה רישא עולה ממש של מספרים מ-$\{1,\dots,n\}$, ולאחר מכן אחת מ-$\{n+1,\dots,2n\}$. נניח שבחרנו k איברים מ-$[n]$ לשורה השנייה ($\binom{n}{k}$ דרכים) - יש דרך אחת לסדר אותן. עלינו לבחור $n-k$ איברים מ-$\{n+1,\dots,2n\}$, ויש דרך אחת לסדר אותם גם כן. כעת נותרו n מספרים שנוכל לסדר ללא הגבלה. בסך הכל, מספר הדרכים הוא

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} \cdot n!.$$

באופן שקול (הוכחנו זהות שקולה בתרגול הקודם), נבחר n מתוך $2n$ איברים לשורה השנייה. יש דרך אחת לסדר את השורה השנייה, ואין הגבלות על סידור השורה הראשונה. בסך הכל:

$$\binom{2n}{n} \cdot n!.$$

5. אם n זוגי, יש n מקומות זוגיים ו-n מקומות אי-זוגיים. לכן, $n!$ דרכים לחלוקת הזוגיים ו-$n!$ עבור האי-זוגיים. בסך הכל

$$(n!)^2 .$$

כאשר n אי-זוגי, יש $n-1$ מקומות בעמודות זוגיות, ו-$(n+1)$ בעמודות אי-זוגיות. תחילה, נבחר את המקום בו הזוגיים לא נמצאים בו בעמודות האי-זוגיות: $(n+1)$ אפשרויות.

$$(n!)^2 \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)!.$$