אוניברסיטת חיפה

החוג למדעי המחשב

סיכומי הרצאות בקורס חדו"א 2

בר וייסמן

קיץ תשפ"ב

סיכומי ההרצאות של ד"ר יעל זפקוביץ', סמסטר קיץ, שנה"ל תשפ"ב.

תוכן עניינים

1 האינטגרל הלא מסוים

1.1 אינטגרלים מיידים

אינטגרל מסוים - שחזור פונקציה לפי נגזרתה. למשל:

$$\int x^3 dx = \boxed{\frac{x^4}{4}+c}$$

מדוע הקבוע $(+c)$? לפונקציה אחת פונקציות קדומות רבות. למשל הנגזרת של הפונקציות:

- x^2
- x^2-100
- x^2+100

היא $2x$, ולכן $\int 2x\ dx = x^2+c$, והפונקציה הקדומה היא כל אחת מהנ"ל. בנוסף, נתייחס לכל המשתנים האחרים מלבד למשתנה האינטגרל בתור קבועים, למשל:

$$\int x^3 dy = \boxed{x^3 y + c}$$

<u>מספר דוגמאות לאינטגרלים מיידים:</u>

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{7}{2\cdot\sqrt[3]{x^5}}\right)dx = \int\left(x^{-2}+5x^{-\frac{1}{2}}-\frac{7}{2}x^{-\frac{5}{3}}\right)dx = \frac{x^{-1}}{-1}+5\cdot\frac{x^{0.5}}{0.5}-\frac{7}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+c = \boxed{-\frac{1}{x}+10\sqrt{x}+\frac{21}{4\sqrt[3]{x^2}}+c}$$

$$\int\frac{1}{(5x-2)^2}dx = \int(5x-2)^{-2}\,dx = \frac{(5x-2)^{-1}}{-1\cdot 5}+c = \boxed{-\frac{1}{25x-10}+c}$$

ניתן להשתמש בטריק לעיל רק כאשר הנגזרת הפנימית של הביטוי בסוגריים <u>קבועה</u>. הדבר לא יעבוד בדוגמא הבאה:

$$\int\frac{1}{(5x^2-2)^2}dx$$

<u>הערה חשובה:</u>

נוסחאות אינטגרציה מיידיות נכונות גם עבור <u>ביטויים לינאריים</u>, כלומר גם עבור פונקציות מורכבות כאשר <u>הנגזרת הפנימית</u> של הביטוי היא <u>גודל קבוע</u>.

<u>דוגמא:</u>

$$\int(2x+10)^{30}\,dx = \boxed{\frac{(2x+10)^{31}}{31\cdot 2}+c}$$

<u>דוגמת נגד:</u>

$$\int\left(2x^2+10\right)^{30}dx \Longrightarrow \boxed{\text{not immediate}}$$

תזכורת:

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

דוגמא:

$$\int (\sin x + \sin 2x)\, dx = \boxed{-\cos x - \frac{\cos 2x}{2} + c}$$

$$\int \cos\left(x^2\right) dx \Longrightarrow \boxed{\text{not immediate}}$$

תזכורת:

$$\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x \; dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{F'(x)}{F(x)} dx = \ln|F(x)| + c$$

דוגמא:

$$\int \left(3^x + e^x + e^{2x}\right) dx = \boxed{\frac{3^x}{\ln 3} + e^x + \frac{e^{2x}}{2} + c}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + c}$$

1.2 שיטות אינטגרציה

1.2.1 אינטגרציה בחלקים

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

פיתוח - לפי נוסחת גזירת מכפלה:

$$\left(u(x)\, v(x)\right)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \quad \backslash \int$$

$$u(x)\, v(x) = \int u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\, dx \quad \backslash - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

<u>השיטה טובה</u> עבור אינטגרלים של מכפלת פונקציות, כאשר אחת הפונקציות הופכת לפשוטה יותר לאחר גזירה.
<u>דוגמא:</u>

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx$$

$$\begin{array}{c|c} u = x & v = \sin x \\ \downarrow \frac{d}{dx} & \uparrow \int \\ u' = 1 & v' = \cos x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x \cdot \cos x \; dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \; dx = x \sin x - (-\cos x) + c = \boxed{x \sin x + \cos x + c}$$

בדיקה:

$$(x \sin x + \cos x + c)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x + 0 = x \cos x$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx$$

$$\begin{array}{c|c} u = x^2 & v = \frac{e^{2x}}{2} \\ \downarrow \frac{d}{dx} & \uparrow \int \\ u' = 2x & v' = e^{2x} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int 2x \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

$$\left[\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + c \right]$$

$$\Longrightarrow \int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + c \right) = \boxed{\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + c}$$

תרגיל:

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx$$

$$\begin{array}{c|c} u = e^{3x} & v = -\cos x \\ \downarrow \frac{d}{dx} & \uparrow \int \\ u' = 3e^{3x} & v' = \sin x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int e^{3x} \sin x \ dx = -e^{3x} \cos x + 3 \int \underbrace{e^{3x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

$$\left[\int e^{3x} \cos x \ dx = e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \ dx + c\right]$$

$$\Longrightarrow \int e^{3x} \sin x \ dx = -e^{3x} \cos x + 3 \left(e^{3x} \sin x - 3 \int e^{3x} \sin x \ dx + c\right)$$

$$10 \int e^{3x} \sin x \ dx = -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \sin x + c$$

$$\Longrightarrow \int e^{3x} \sin x \ dx = \boxed{\frac{-e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \sin x}{10} + c}$$

שימוש נוסף לשיטת האינטגרציה בחלקים: פונקציות שאינן אינטגרל מיידי, אך אנו יודעים לגזור אותן.

תרגיל:

$$\int \ln(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \ dx = x \ln x - x + c$$

arctan היא הפונקציה ההפוכה לפונקציית tan.

$$\int \arctan x \ dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{u} dx$$

$$\begin{array}{c|c} u = \arctan x & v = x \\ \downarrow \frac{d}{dx} & \uparrow \int \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v' = 1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int 1 \cdot \arctan x \ dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot x}{1 + x^2} dx = \boxed{x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c}$$

1.2.2 שיטת ההצבה

<u>הרעיון:</u> נחליף את משתנה הפונקציה למשתנה עזר t, שעבורו נקבל מ־$f\left(t\right)$ אינטגרל מיידי.

<u>תרגיל:</u>

$$\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^{2}+5}}dx\underset{\left[\begin{array}{c}t=x^{2}+5\\dt=2x\ dx\end{array}\right]}{=}\int\frac{\cancel{2x}}{\sqrt[3]{t}}\cdot\frac{dt}{\cancel{2x}}=\int\frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt=\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$$

$$\Longrightarrow\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^{2}+5}}dx=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^{2}+5\right)^{2}}+c}$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int\frac{2e^{x}+4x}{\sqrt{e^{x}+x^{2}}}dx\underset{\left[\begin{array}{c}t=e^{x}+x^{2}\\dt=\left(e^{x}+2x\right)\ dx\end{array}\right]}{=}2\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\int t^{-\frac{1}{2}}dt=4\sqrt{t}+c=\boxed{4\sqrt{e^{x}+2x}+c}$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int e^{\sqrt{x}}dx\underset{\left[\begin{array}{c}t=\sqrt{x}\\dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{dx}{2t}\end{array}\right]}{=}\int e^{t}\cdot2t\ dt=2\int\underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{t}}_{v'}dt=2\left(te^{t}-\int1\cdot e^{t}dt\right)=2\left(te^{t}-e^{t}+c\right)$$

$$\Longrightarrow\int e^{\sqrt{x}}dx=\boxed{2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+c}$$

1.2.3 השלמה לריבוע

הרבה עבודה עם arctan.

המקרה הפרטי:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c$$

המקרה הכללי:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

תרגיל:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \underset{\begin{bmatrix} t=x-\frac{1}{2} \\ dt=dx \end{bmatrix}}{=} \int \frac{1}{t^2+\frac{\sqrt{3}}{2}}dt = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c}$$

תרגיל:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}dx = \int (x+2)^{-2}\,dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1\cdot 1}+c = \boxed{\frac{-1}{x+2}+c}$$

1.3 חלוקת פולינומים

בחלוקת פולינומים, אם חזקת המונה גדולה/שווה מחזקת המכנה ניתן לייצג את השבר באמצעות שלם + שארית.

$$\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2} = x^2-x+1+\frac{1}{x-2}$$

תרגיל:

$$\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2}dx = \int \left(x^2-x+1+\frac{1}{x-2}\right)dx = \boxed{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x-2|+c}$$

תרגיל:

$$\int \frac{8x^4-12x^3+4x}{2x-3}dx = \int \left(4x^3+2+\frac{6}{2x-3}\right)dx = \frac{4x^4}{4}+2x+\frac{6\ln|2x-3|}{2}+c = \boxed{x^4+2x+3\ln|2x-3|+c}$$

1.4 פירוק לשברים חלקיים

נפתור אינטגרלים בהם המכנה פריק לגורמים.

תרגיל:

$$\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}dx = \int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)}dx$$

$$\frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$$

משפט 1: בפירוק לשברים חלקיים, חזקת המונה של כל שבר חלקי קטנה ב־1 מחזקת הביטוי הבסיסי שנמצא במכנה.

$$x+13 = A(x+1) + B(x-5)$$

שיטה 1: השוואת מקדמים

$$x+13 = (A+B)x + (A-5B)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ 13 = A-5B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$

שיטה 2: הצבת ערכים

נציב שני ערכים לבחירתנו ונקבל 2 משוואות ב־2 נעלמים:

$$x=-1 \Longrightarrow 12 = (0)A + B(-1-6)$$

$$x=5 \Longrightarrow 18 = 6A + 0B$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$

בסך הכל, קיבלנו כי:

$$\frac{x+13}{(x-5)(x+1)} = \frac{3}{x-5} + \frac{-2}{x+1}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)}dx = 3\int \frac{1}{x-5}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx = \boxed{3\ln|x-5| - 2\ln|x+1| + c}$$

__תרגיל:__

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{2x-1}{(x-3)^2}dx$$

__**משפט 2:**__ בשברים מהצורה $\frac{f}{g^m}$ נפרק לשברים החלקיים: $\frac{A}{g^1}+\frac{B}{g^2}+\ldots+\frac{Z}{g^m}$.
במונה של כל אחד מהשברים מופיע ביטוי שלו חזקה אחת פחות מאשר הביטוי הבסיסי (של g ולא g^m!).

$$\frac{2x-1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

$$2x-1 = A(x-3)+B$$

$$2x-1 = Ax+(-3A+B)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx = 2\int \frac{1}{x-3}dx + 5\int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \boxed{2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3}+c}$$

__דרך נוספת לפתרון:__
ננסה להגיע במונה לנגזרת של המכנה.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{2x-6+5}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx + 5\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$$

$$= \ln|(x-3)^2| + 5\int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \boxed{2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3}+c}$$

__תרגיל:__

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow 1 = A\left(x^2+1\right)+x(Bx+C) \Longrightarrow 1 = (A+B)x^2+Cx+(A+C)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{x^3+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \boxed{\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c}$$

תרגיל:

$$\int \frac{x^4-x^3-x^2+4x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \left(x+\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{\left(x-1\right)^2}$$

$$3x+5 = A\left(x-1\right)^2+B\left(x+1\right)\left(x-1\right)+C\left(x+1\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^4-x^3-x^2+4x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx+4\int \frac{1}{\left(x-1\right)^2}dx$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|-\frac{4}{x-1}+c}$$

2 האינטגרל המסוים

<u>המשפט היסודי:</u> תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית לכל $a \le x \le b$, ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ יוגדר להיות ההפרש $F(b)-F(a)$, ויסומן כך:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left. F(x)\right|_a^b = F(b)-F(a)$$

הערה חשובה: ערכו של אינטגרל מסוים יכול להיות חיובי, שלילי או 0.

<u>תרגיל:</u>

$$\int_{-1}^{0} x^3\ dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} = \frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int_0^{2\pi} \sin x\ dx = \left.-\cos x\right|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1+1 = \boxed{0}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\int_2^3 \frac{1}{x\ln x}dx$$

תחילה נמצא את הפונקציה הקדומה:

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}dx \underset{\begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{bmatrix}}{=} \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t}\cdot x\ dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+c = \ln\ln x + c$$

$$\Longrightarrow \int_2^3 \frac{1}{x\ln x}dx = \left.\ln|\ln x|\right|_2^3 = \ln|\ln 3| - \ln|\ln 2| = \ln\left|\frac{\ln 3}{\ln 2}\right| = \boxed{\ln|\log_2 3|}$$

דרך נוספת לפתרון - לשנות את גבולות האינטגרל המקורי:

$$\int_2^3 \frac{1}{x\ln x}dx = \left.\ln|t|\right|_{t(2)}^{t(3)} = \left.\ln|t|\right|_{\ln 2}^{\ln 3}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\int_1^{2e} |\ln x - 1|\,dx$$

נרצה להפריד לתחומים לפי הסימן של $\ln x - 1$:

- $\ln x - 1 \ge 0 \Longleftarrow |\ln x - 1| = \ln x - 1$ עבור $x > e$
- $\ln x - 1 < 0 \Longleftarrow |\ln x - 1| = -(\ln x - 1)$ עבור $x < e$

$$\Longrightarrow \int_1^{2e} |\ln x - 1|\, dx = -\int_1^e (\ln x - 1)\, dx + \int_e^{2e} (\ln x - 1)\, dx = \int_1^e (1 - \ln x)\, dx + \int_e^{2e} (\ln x - 1)\, dx$$

$$\left[\int \ln x \; dx = x \ln x - x + c\right]$$

$$= \left(x - [x \ln x - x]\right)\Big|_1^e + \left(x \ln x - x - x\right)\Big|_e^{2e} = \left(2x - x \ln x\right)\Big|_1^e + \left(x \ln x - 2x\right)\Big|_e^{2e}$$

$$= (2e - e \ln e) - (2 - 1 \ln 1) + (2e \ln(2e) - 4e) - (e \ln e - 2e) = \boxed{2e \ln 2 - 2}$$

<u>דוגמא:</u>

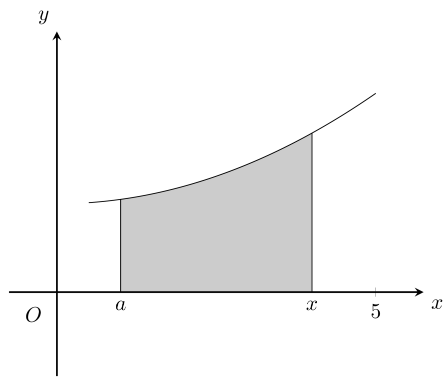
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \underset{\left[\begin{array}{c} t = e^x + 1 \\ dt = e^x dx \end{array}\right]}{=} \int_2^{e+1} \frac{1}{t} dt = \ln|t|\Big|_2^{e+1} = \ln(e+1) - \ln 2 = \boxed{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

2.1 האינטגרל המסוים ככלי לחישוב שטח

2.1.1 חישוב שטח המוגבל על ידי גרף פונקציה אי שלילית, ציר ה־x ושני ישרים המאונכים לו

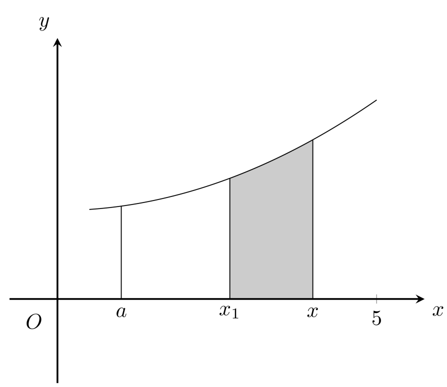
תהי $f(x)$ פונקציה בעלת פונקציה קדומה $F(x)$ המקבלת ערכים אי שליליים בקטע $[a,x]$. נרצה לחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה־x והישרים המאונכים לציר ה־x שעוברים בנקודות $(a,0),(x,0)$. נסמן את השטח הנ"ל בתור $S(x)$, a היא נקודה קבועה ו־x משתנה.

איור 1: השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה־x והישרים באפור



ברור כי כאשר $x=a$ השטח שווה ל־0, ולכן $S(0)=0$. ננסה להבין את הנגזרת של S:
תהי x_1 נקודה קרובה ל־x, שגם דרכה עובר ישר המאונך לציר ה־x. נסתכל על הביטוי $\frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1}$.
המונה, $S(x)-S(x_1)$, הוא השטח המקווקו הנ"ל:

איור 2: ייצוג $S(x)-S(x_1)$ בגרף



$$f(x_1)(x-x_1)\leq S(x)-S(x_1)\leq f(x)(x-x_1)$$

$$f(x_1)\leq\frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1}\leq f(x)$$

$$f(x_1)\leq\lim_{x\to x_1}\frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1}\leq\lim_{x\to x_1}f(x)\overset{f\text{is continuous}}{=}f(x_1)$$

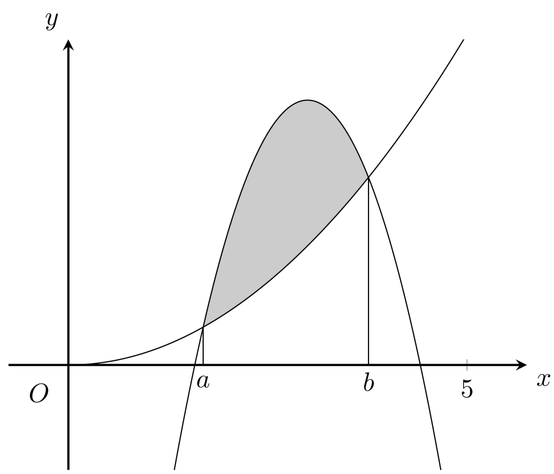
$$\Longrightarrow f(x)=S'(x)\Longrightarrow\boxed{S(x)=F(x)}$$

2.1.2 משפט עזר לחישוב שטחים במקרה הכללי

'עליונה פחות תחתונה': יהי S השטח המוגדר על ידי פונקציה f (העליונה) ועל ידי פונקציה g (התחתונה) בקטע $[a,b]$.
אזי, השטח הכלוא בין f,g והישרים $x=a, x=b$ הוא:

$$\int_a^b \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx$$

איור 3: השטח הכלוא בין f,g והישרים $x=a, x=b$



תרגיל:
חשב את השטח המוגבל על ידי הפונקציה x^2-5x+6 וציר ה־x.
פתרון־נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה־x:

$$x^2-5x+6=0 \Longrightarrow x=2,3$$

הפונקציה העליונה היא $y=0$, והתחתונה היא x^2-5x+6:

$$\Longrightarrow \int_2^3 \left(0-\left(x^2-5x+6\right)\right)dx=\int_2^3 \left(-x^2+5x-6\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right)\Big|_2^3=\boxed{\frac{1}{6}}$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה $y=e^x+2$.

1. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $x=1$.
2. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, וציר ה־y.
3. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, והישר $x=-1$.
4. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה־x ו־$x=-5$.

$$y(1)=e+2\Longrightarrow(1,e+2)$$
$$y'=e^x\Longrightarrow y'(1)=e$$

$$\Longrightarrow\boxed{y=ex+2}$$

הפונקציה העליונה היא e^x+2 והתחתונה היא המשיק:

$$S=\int_0^1\left[(e^x+2)-(ex+2)\right]dx=\int_0^1(e^x-ex)\,dx=\left(e^x-\frac{e}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\boxed{\frac{1}{2}e-1}$$

גם כאן, אך הגבולות שונים:

$$S=\int_{-1}^1\left[(e^x+2)-(ex+2)\right]dx=\int_{-1}^1(e^x-ex)\,dx=\left(e^x-\frac{e}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^1=\boxed{e-\frac{1}{e}}$$

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה־x של המשיק:

$$ex+2=0\Longrightarrow x=-\frac{2}{e}$$

$$S=\int_{-5}^{-\frac{2}{e}}(e^x+2)\,dx+\int_{-\frac{2}{e}}^1\left[(e^x+2)-(ex+2)\right]dx=S_1+S_2$$

תרגיל:

נסמן ב־A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $\sin x$ וציר ה־x בקטע $[0,2\pi]$. בנוסף:

$$B=\int_0^{2\pi}\sin x\ dx$$

האם $A=B$?

$$B=\int_0^{2\pi}\sin x\ dx=-\cos x|_0^{2\pi}=0$$

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\ dx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin x\ dx=-\cos x|_0^{\pi}+\cos x|_{\pi}^{2\pi}=4$$

$$\Longrightarrow\boxed{A\neq B}$$

3 אינטגרל מוכלל - אינטגרל לא אמיתי

אינטגרל מוכלל עונה על אחד או יותר מהתנאים הבאים:

- פונקציה שאינה רציפה באחת או יותר מהנקודות בקטע.
  - תהי f פונקציה מוגדרת לכל x בקטע $[a,b]$ בפרט לנקודה $c \in [a,b]$.
  - נחלק את הקטע לתתי קטעים כך שהבעיה בתחום ההגדרה לא שייכת לאף אחד מתתי הקטעים:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{d\to c^-}\int_{a}^{d} f(x)\,dx + \lim_{e\to c^+}\int_{e}^{b} f(x)\,dx$$

<u>דוגמאות:</u>

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx, \int_{1}^{5}\frac{1}{x^2-5x+6}dx, \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-1}dx$$

- הפונקציה רציפה, אך גבולות האינטגרציה הם אינסופיים:
  - תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$, כלומר: לכל $b>a$ f רציפה בקטע $[a,b]$.
  - נסמן: $I(b)=\int_a^b f(x)\,dx$, אם קיים הגבול $\lim_{b\to\infty} I(b)$ (סופי) אזי $I(b)$ הוא אינטגרל מוכלל מתכנס, ואחרת הוא מתבדר, כלומר:
  -

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

  - באופן דומה עבור הקטע $(-\infty,a]$.
  - אם שני הגבולות אינסופיים יש להפריד לשני אינטגרלים, על ידי בחירת נקודה שרירותית בקטע וחלוקה לתתי קטעים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$$

הערה חשובה: אינטגרל מוכלל נקרא מתכנס רק האינטגרלים של <u>כל אחד</u> מתתי הקטעים מתכנס בעצמו.
<u>דוגמאות:</u>

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_{1}^{a}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right) = \boxed{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x|_a^0\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan x|_0^b\right] = \lim_{a\to-\infty}[\arctan 0 - \arctan a] + \lim_{b\to\infty}[\arctan b - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

- שילוב של שני הסוגים הקודמים: פונקציה שאינה רציפה באחת או יותר מהנקודות בקטע וגם אחד או יותר מקצוות הקטע הם אינסופיים.
  - נחלק לתתי קטעים כך שכל תת קטע יטפל בתת בעיה אחד בלבד.

תרגיל:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a}\frac{1}{x}dx+\lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{a\to 0^-}\left[\ln|x||_{-1}^{a}\right]+\lim_{b\to 0^+}\left[\ln|x||_{b}^{1}\right]$$

$$=\lim_{a\to 0^-}\left[\ln|a|-\ln|-1|\right]+\lim_{b\to 0^+}\left[\ln|1|-\ln|b|\right]=\boxed{\infty}$$

כלומר האינטגרל מתבדר.

תרגיל:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

נשים לב כי הבעיה בתחום ההגדרה מחוץ לגבולות האינטגרל, ולכן נטפל רק בקצה האינסופי:

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{1}{(x+1)^2}dx=\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}(x+1)^{-2}\,dx=\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{x+1}\Big|_{0}^{a}=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a+1}-\frac{-1}{0+1}\right)=\boxed{1}$$

כלומר האינטגרל מתכנס ל-1.

תרגיל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{a}^{0}\right)+\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{0}^{b}\right)$$

נבחן את תת הקטע השמאלי:

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|1|-\frac{1}{2}\ln\left|a^2+1\right|\right)=\boxed{-\infty}$$

קיבלנו שבתת קטע אחד האינטגרל מתבדר ולכן האינטגרל כולו מתבדר.

תרגיל:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx$$

בעיה בתחום ההגדרה - בנקודה $x=\frac{1}{2}$. נפריד לתחומים:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=\lim_{a\to\frac{1}{2}^+}\int_{a}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=\lim_{a\to\frac{1}{2}^+}\int_{a}^{2}\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}dx=\lim_{a\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x-1}\Big|_{a}^{2}=\lim_{a\to\frac{1}{2}^+}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2a-1}\right)=\boxed{\sqrt{3}}$$

כלומר האינטגרל מתכנס ל-$\sqrt{3}$.

תרגיל:

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=\lim_{a\to 0^-}\int_{-2}^{a}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx+\lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{2}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=\lim_{a\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}\Big|_{-2}^{a}+\lim_{b\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}\Big|_{b}^{2}=$$

$$\lim_{a\to 0^-}\left(e^{-\frac{1}{a}}-e^{\frac{1}{2}}\right)+\lim_{b\to 0^+}\left(e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{b}}\right)=\infty-0=\boxed{\infty}$$

כלומר האינטגרל מתבדר.

4 טורים

הגדרה:
תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{b\to\infty} \sum_{n=1}^{b} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

נקרא טור אינסופי ו־a_n נקרא האיבר הכללי של הטור. נבנה מהטור הנ"ל סדרה של סכומים חלקיים:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

סדרה זו נקראת סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n.
הגדרה:
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתכנס אם קיים גבול סופי S לסדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

אם $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים או אינסופי הטור מתבדר.
דוגמאות:

$$a_n = 7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 + 7 + \cdots$$

ולכן הטור מתבדר.

$$a_n = (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1 + 1 - 1 + 1 + \cdots = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -1 & n = 2k-1 \end{cases}$$

ולכן הטור מתבדר.
הערה חשובה: טור מתכנס $\Longleftrightarrow$ לסדרת הסכומים החלקיים שלו קיים גבול יחיד S.

4.1 טורים מוכרים

1. טור α: $S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{\alpha}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

מתכנס אמ"מ $\alpha>1$. למשל: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt[5]{n}}$ מתכנס.

2. טור הנדסי/גיאומטרי:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

מתכנס אמ"מ $|q|<1, q\neq 0$ וסכומו יהיה:

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

3. טור טלסקופי:
טור אשר בעזרת הצגה אלגברית מתאימה ניתן לצמצם את רוב האיברים ולהישאר עם מספר סופי של איברים. במקרים רבים נפרק לשברים חלקיים את האיבר המקורי של הטור בכדי שאיברי הטור יתצמצמו.
דוגמאות לטורים טלסקופיים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right]+\left[\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right]+\cdots+\left[\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\boxed{1}$$

הסכום סופי ולכן הטור מתכנס.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+3n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{3}{2}-\cancel{\frac{3}{3}}\right]+\left[\cancel{\frac{3}{3}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right]+\cdots+\left[\cancel{\frac{3}{n+1}}-\frac{3}{n+2}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{n+2}\right]=\boxed{\frac{3}{2}}$$

הסכום סופי ולכן הטור מתכנס.

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\cancel{\ln 2}-\ln 1\right]+\left[\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2}\right]+\cdots+\left[\ln\left(n+1\right)-\cancel{\ln\left(n\right)}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln 1+\ln\left(n+1\right)\right)=\boxed{\infty}$$

הסכום אינסופי ולכן הטור מתבדר.

4.2 קריטריון קושי להתכנסות טורים

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתכנס אמ"מ:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\forall n>n_0,\forall p\in\mathbb{N}:$$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots a_{n+p}|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_n\right|=|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

<u>במילים אחרות:</u> הטור מתכנס אמ"מ לכל p איברים ב'זנב' הטור סכום p האיברים קטן מ־ε.

<u>תרגיל:</u>

הוכח על פי קריטריון קושי שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הוא טור מתבדר.

עבור $p=n$, נסתכל על ההפרש $|S_{2n}-S_n|$:

$$|S_{2n}-S_n|=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ times}}=n\cdot\frac{1}{2n}\boxed{=\frac{1}{2}}$$

כלומר־קריטריון קושי אינו מתקיים ולכן הטור מתבדר.

<u>תרגיל:</u>

הוכח על פי קריטריון קושי את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2^n)}{n^2}$.

יהי $\varepsilon>0$. אזי:

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|=\left|\frac{\cos\left(2^{n+1}\right)}{(n+1)^2}+\frac{\cos\left(2^{n+2}\right)}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\cos\left(2^{n+p}\right)}{(n+p)^2}\right|\leq\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right]+\left[\cancel{\frac{1}{n+2}}-\cancel{\frac{1}{n+3}}\right]+\cdots+\left[\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}\right]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\boxed{<\varepsilon}$$

נפטרנו מהערך המוחלט מכיוון שאנו סוכמים ערכים חיוביים, בנוסף הקטנו את המכנים ובכך הגדלנו את השברים ואת הסכום.

4.3 תנאי הכרחי להתכנסות טורים

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז בהכרח האיבר הכללי שלו שואף ל־0.

<u>כלומר:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ converges}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

- בכיוון ההפוך התנאי <u>לא מתקיים</u>. כלומר, מהעובדה שאיבר כללי של טור שואף ל־0 לא ניתן להסיק דבר על התכנסות הטור. למשל, האיבר הכללי של הטור ההרמוני $\frac{1}{n}$ שואף ל־0, אך הטור מתבדר.
- ניתן להסיק כי:

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ diverges}$$

4.4 אלגוריתם לבדיקת התכנסות טורים

בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

- נבדוק את האיבר הכללי $\lim_{n\to\infty}a_n$.
  - אם $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$ הטור מתבדר.
  - אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ נבדוק התכנסות לפי אחת מהשיטות המתאימות.

4.5 משפטים בסייסים על טורים

בהינתן טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

1. הורדת מספר סופי של איברים מהטור אינה משנה את התכנסות/התבדרות הטור.
2. הכפלת הטור בקבוע־$\sum_{n=1}^{\infty}[c \cdot a_n]$ אינה משנה את התכנסות/התבדרות הטור.
3. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \begin{array}{c}+\\-\\\cdot\\/\end{array} b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{array}{c}+\\-\\\cdot\\/\end{array} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

עבור חילוק נדרש כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq 0$.

<u>דוגמא:</u>
בדוק התכנסות של הטור הבא, במידה ומתכנס חשב את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\boxed{1\frac{2}{3}}$$

4.6 טורים חיוביים

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא חיובי/אי שלילי אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \geq 0$.
לדוגמא, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n)-7]$ הוא טור חיובי: הכל ממקום מסוים כל האיברים חיוביים.

4.7 מבחני התכנסות לטורים חיוביים

4.7.1 מבחן ההשוואה לטורים חיוביים

בהינתן שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \leq b_n$ אזי:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.
   (א) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges.

<u>דוגמאות:</u>

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$
נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+3}=\boxed{0}\ ,\ a_n=\frac{1}{n^2+3}\boxed{\leq\frac{1}{n^2}}$$

בנוסף, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן על פי מבחן ההשוואה הטור הנבדק מתכנס.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+2}=\boxed{0}\ ,\ a_n=\frac{1}{2^n+2}\boxed{\leq\frac{1}{2^n}}$$

בנוסף, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ הוא טור הנדסי בו $0 \neq |q| < 1$ כלומר מתכנס, ולכן על פי מבחן ההשוואה הטור הנבדק מתכנס.

(ג) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=\boxed{0}\ ,\ a_n=\frac{1}{n-1}\boxed{\geq\frac{1}{n}}$$

בנוסף, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר (טור הרמוני), ולכן על פי מבחן ההשוואה הטור הנבדק מתבדר.

4.7.2 מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים

בהינתן שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסתכל על הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

1. אם $L > 0$ וקיים אז הטורים מתנהגים באותו אופן, כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converges} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converges}$$

2. אם $L = 0$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

3. אם הגבול אינו קיים וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

<u>דוגמאות:</u>

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3}$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-3} = \boxed{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-3} = \boxed{1}$$

$$L = 1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converges} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3} \text{ converges}}$$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n-2} = \boxed{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-2}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-2} = \boxed{1}$$

$$L = 1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converges} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-2} \text{ converges}}$$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n-6}{n^5+n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-6}{n^5+n} = \boxed{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+5n-6}{n^5+n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+5n^4-6n^3}{n^5+n} = \boxed{1}$$

$$L = 1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ converges} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ converges}}$$

4.7.3 מבחן המנה של דלמבר

בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

אזי:

- $L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges
- $L > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges
- אם $L = 1$ אין מספיק מידע

הערה: טורים עם עצרת מגיבים טוב למבחן המנה.

תרגיל:

בדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \boxed{0}$$

$$L = 0 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ converges}}$$

תרגיל:

בדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$:

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n\,(n+1)\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = \boxed{0}$$

$$L = 0 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \text{ converges}}$$

תרגיל:

בהינתן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\alpha^n}{n^n}$:

קבע לאילו ערכי α הטור מתכנס/מתבדר, ולאילו ערכי α מבחן המנה אינו מספק תשובה.

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\alpha^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}\cancel{\alpha^n}\alpha}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\cancel{\alpha^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \boxed{\frac{\alpha}{e}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha < e & \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\alpha^n}{n^n} \text{ converges} \\ \alpha > e & \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\alpha^n}{n^n} \text{ diverges} \\ \alpha = e & \Longrightarrow \text{not enough information} \end{cases}}$$

4.7.4 מבחן השורש של קושי

ניסוח מקורי:

בהינתן טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם החל ממקום מסוים איברי הטור מקיימים:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a_n} \le q < 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converges} \\ \sqrt[n]{a_n} \ge 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverges} \end{cases}$$

ניסוח גבולי (יותר נוח לשימוש):

בהינתן טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם קיים הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- אם $L < 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$מתבדר.
- אם $L = 1$ אז מבחן השורש אינו נותן תשובה.

הערה: טורים בהם ביטוי בחזקת n מגיבים טוב למבחן המנה.

גבולות נפוצים:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$$

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$L < 1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \text{ converges}}$$

נוכל לפתור גם עם מבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$L < 1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \text{ converges}}$$

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$$

שני הטורים ההנדסיים מתכנסים ולכן גם הטור הנבדק מתכנס. נוכל לפתור גם עם מבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 5}}{3} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{6}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$L < 1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5}{3^n} \text{ converges}}$$

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n}$$

נפתור עם מבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \boxed{\infty}$$

$$L < 1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n} \text{ diverges}}$$

4.7.5 מבחן האינטגרל

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ותהי f הפונקציה המגדירה את איברי הסדרה a_n ($f(n) = a_n$). אם f:

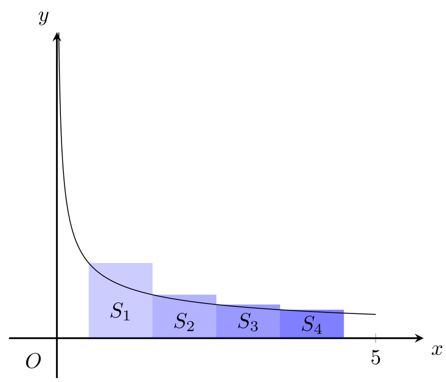
1. רציפה בתחום $[1,\infty)$
2. חיובית בתחום $[1,\infty)$
3. יורדת בתחום $[1,\infty)$

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ מתנהגים באותו אופן. כלומר הטור מתכנס אמ"מ האינטגרל סופי.

הערה: אם הטור מתחיל מאינדקס p, כלומר הטור הוא $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ אז האינטגרל ודרישותיו הם בתחום $[p,\infty)$.

הסבר אינטואיטיבי:

איור 4: נחלק לבלוקים ברוחב 1 וכך שטח המלבן יהיה שווה לגובה המתאים



הערה: טורים מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ נפתרים בדרך כלל על ידי מבחן האינטגרל.

דוגמא:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

נגדיר פונקציה $f:[2,\infty) \to \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

נבדוק את תנאי המבחן: רציפות, חיוביות וירידה בקטע $[2,\infty)$.

- רציפות: הבעיות היחידות בתחום ההגדרה מחוץ לתחום $[2,\infty)$ ולכן הפונקציה רציפה.
- חיוביות: בתחום כל רכיבי הפונקציה: $1, x, \ln x$ חיוביים ולכן f חיובית בתחום $[2,\infty)$.
- ירידה: ניתן להוכיח כי הנגזרת שלילית בכל התחום, בנוסף:

$$f(x+m) \le \frac{1}{(x+m)\ln(x+m)} < \frac{1}{x \ln x} = f(x)$$

כלומר f יורדת בתחום.

הראנו כי תנאי המבחן מתקיימים, כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \lim_{a\to\infty} \ln|\ln x||_2^a = \lim_{a\to\infty} (\ln|\ln a| - \ln|\ln 2|) = \boxed{\infty}$$

$$\Longrightarrow \int_2^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverges} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \text{ diverges}}$$

4.7.6 תרגילים נוספים בנושא טורים חיוביים

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}\pi}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\cdot n^{\frac{n}{2}}$$

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\cdot n^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\sqrt{n}=\boxed{\infty}$$

ולכן הטור מתבדר.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n}\pi}{4}\right)^n$$

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\sqrt[n]{n}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

ולכן הטור מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{e^n}\right)^n$$

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{e^n}e}\cdot\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{n!}}=\boxed{\infty}$$

ולכן הטור מתבדר.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+5n+6}{n^7+6n+4}$$

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, האיבר הכללי שואף ל־0 ובנוסף הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ מתכנס.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+5n+6}{n^7+6n+4}}{\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+5n^5+6n^4}{n^7+6n+4}=\boxed{1}$$

ולכן הטורים מתנהגים באותו האופן, והטור מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$$

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, האיבר הכללי שואף ל־0 ובנוסף הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{2n^3-1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln n}{2n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-\frac{1}{n^2}}=\boxed{0}$$

ולכן הטור מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1}$$

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי, האיבר הכללי שואף ל־0 ובנוסף הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2\sqrt{n}}{2n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2-\frac{1}{n^3}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ולכן הטורים מתנהגים באותו האופן, והטור מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

נגדיר $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, ונבדוק את התנאים:

- רציפות: תחום ההגדרה הוא $0\neq x>1$ ולכן f רציפה בתחום $[2,\infty)$.
- חיוביות: כל רכיבי הפונקציה $(1,x,\sqrt{\ln x})$ חיוביים ולכן f חיובית בתחום $[2,\infty)$.
- ירידה: f היא מכפלת שתי פונקציות יורדות $(\frac{1}{x},\frac{1}{\sqrt{\ln x}})$ בתחום ולכן גם היא יורדת בתחום $[2,\infty)$.

כלומר f מתאימה למבחן האינטגרל, כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^{a}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx\underset{\left[\begin{array}{c}t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{array}\right]}{=}\lim_{a\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln a}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\lim_{a\to\infty}2\sqrt{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln a}=\lim_{a\to\infty}\left(2\sqrt{\ln a}-2\sqrt{\ln 2}\right)=\boxed{\infty}$$

כלומר האינטגרל מתבדר, ולכן הטור מתבדר.

4.8 טורים כלליים

טור בו אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים הוא <u>טור כללי</u>.

<u>דוגמאות:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+5} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n n!}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin n \quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos n$$

<u>הערות חשובות:</u>

- כל <u>5 המבחנים</u> להתכנסות טורים חיוביים <u>אינם רלוונטיים</u> לגבי טורים כלליים.
- התנאי ההכרחי להתכנס טורים <u>נכון גם לטורים כלליים</u>: טור מתכנס $\Longleftarrow$ האיבר הכללי שואף ל-0.

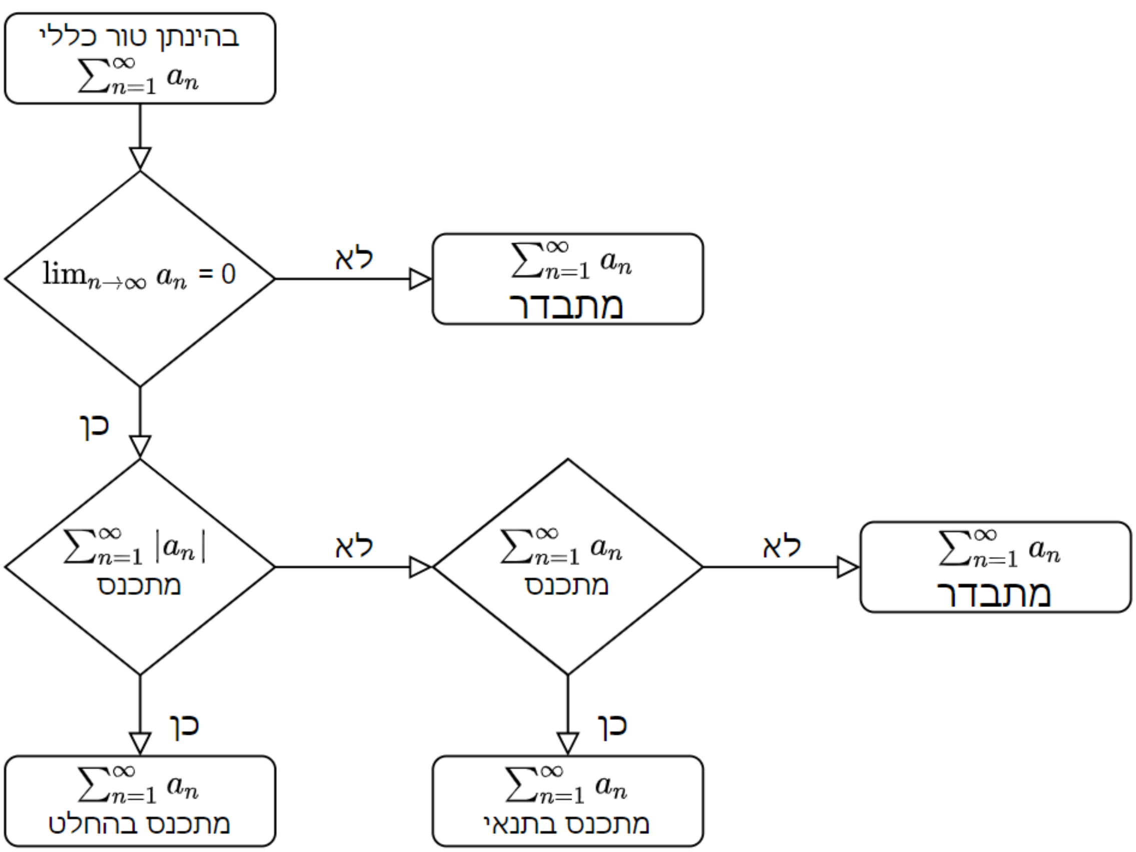
4.8.1 התכנסות טורים כלליים

מספר הגדרות:

- טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא **<u>מתכנס בהחלט</u>** אם טור הערכים המוחלטים שלו $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ <u>מתכנס</u>.
- טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא **<u>מתכנס בתנאי</u>** אם טור הערכים המוחלטים שלו $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ <u>מתבדר</u>, אבל הוא עצמו <u>מתכנס</u>.
- טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא **<u>מתבדר</u>** אם הוא אינו מתכנס בהחלט ואינו מתכנס בתנאי.

הערה: טור כללי שהוא מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס.

איור 5: תרשים זרימה לבדיקת התכנסות טור כללי



__דוגמאות:__

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\boxed{0}$$

האיבר הכללי שואף ל־0. בנוסף, טור הערכים המוחלטים הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, מתכנס. כלומר הטור מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^2\boxed{\neq 0}$$

האיבר הכללי אינו שואף ל־0 ולכן הטור <u>מתבדר</u>.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{n\ln^2 n}$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n\ln^2 n}=\underbrace{\cos n}_{|\cos n|\,\le\,1}\cdot\underbrace{\frac{1}{n\ln^2 n}}_{\to 0}=\boxed{0}$$

האיבר הכללי שואף ל־0. נבדוק את טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\cos n|}{|n\ln^2 n|}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$$

נשתמש במבחן האינטגרל לבדיקת התכנסות הטור, נגדיר $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. נבדוק את התנאים למבחן:

- רציפות: תחום ההגדרה של f הוא $0\neq x>1$, כלומר f רציפה ב־$[2,\infty)$.
- חיוביות: כל רכיבי f חיוביים $(1,x,\ln^2 x)$ בתחום ולכן f חיובית ב־$[2,\infty)$.
- ירידה: f היא מכפלה של שתי פונקציות יורדות - $\frac{1}{x},\frac{1}{\ln^2 x}$ ולכן גם היא יורדת ב־$[2,\infty)$.

תנאי המבחן מתקיימים, כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_2^{\infty}f(x)\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^a\frac{1}{x\ln^2 x}dx\underset{\begin{bmatrix}t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{bmatrix}}{=}\lim_{a\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln a}\frac{1}{t^2}dt=\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln a}=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$$

האינטגרל מתכנס ולכן $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ מתכנס. ולכן $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, כלומר הטור המקורי <u>מתכנס בהחלט</u> ובפרט <u>מתכנס</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)\boxed{\neq 0}$$

האיבר הכללי אינו שואף ל־0 ולכן הטור <u>מתבדר</u>.
<u>**הגדרה:**</u> טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא <u>טור מתחלף</u> אם לכל n מתקיים:

$$a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$$

כלומר בטורים מסוג זה סימני האיברים <u>מתחלפים לסירוגין</u>.
צורות מקובלות לכתיבת טור מתחלף (עבור $a_n \geq 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^{n+1}}a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}_{(-1)^{n+1}}a_n$$

4.8.2 משפט לייבניץ להתכנסות טורים כלליים מתחלפים

בהינתן טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$, נסתכל על הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. אם התנאים הבאים מתקיימים:

- a_n מונוטונית יורדת.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ - האיבר הכללי שואף ל-0.

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ <u>מתכנס</u>.

<u>דוגמאות:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \boxed{0}$$

נבדוק את טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \boxed{\infty}$$

טור הערכים המוחלטים מתבדר. נבדוק את הטור המקורי עם כלל לייבניץ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$$

נסתכל על הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$:

- הסדרה מונוטונית יורדת: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \Longleftarrow \boxed{a_{n+1} < a_n}$.
- הסדרה שואפת ל-0: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \boxed{0}$.

ולכן לפי כלל לייבניץ <u>הטור מתכנס</u>. בנוסף, <u>טור הערכים המוחלטים מתבדר</u> ולכן בסך הכל הטור <u>מתכנס בתנאי</u>.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n \ln n}$$

נבדוק את האיבר הכללי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos(\pi n)}_{|\cos(\pi n)|\le 1} \underbrace{\frac{1}{n \ln n}}_{\to 0} = \boxed{0}$$

נבדוק את טור הערכים המוחלטים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(\pi n)}{n \ln n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

נשתמש במבחן האינטגרל לבדיקת התכנסות הטור, נגדיר $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. נבדוק את התנאים למבחן:

- רציפות: תחום ההגדרה של f הוא $x > 1$,$0 \neq$ כלומר f רציפה ב־$[2, \infty)$.
- חיוביות: כל רכיבי f חיוביים $(1, x, \ln x)$ בתחום ולכן f חיובית ב־$[2, \infty)$.
- ירידה: f היא מכפלה של שתי פונקציות יורדות - $\frac{1}{x}, \frac{1}{\ln x}$ ולכן גם היא יורדת ב־$[2, \infty)$.

תנאי המבחן מתקיימים, כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_2^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x \ln x} dx \underset{\left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array}\right]}{=} \lim_{a\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{1}{t} dt = \lim_{a\to\infty} \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{\ln a} = \lim_{a\to\infty} \left(\ln|\ln a| - \ln|\ln 2|\right) = \boxed{\infty}$$

טור הערכים המוחלטים מתבדר. נבדוק את הטור המקורי עם כלל לייבניץ:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n \ln n}}_{a_n}$$

נסתכל על הסדרה $a_n = \frac{1}{n \ln n}$:

- הסדרה מונוטונית יורדת: $a_n = \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1} \Longleftarrow \boxed{a_{n+1} < a_n}$.
- הסדרה שואפת ל־0: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \boxed{0}$.

ולכן לפי כלל לייבניץ <u>הטור מתכנס</u>. בנוסף, <u>טור הערכים המוחלטים מתבדר</u> ולכן בסך הכל הטור <u>מתכנס בתנאי</u>.

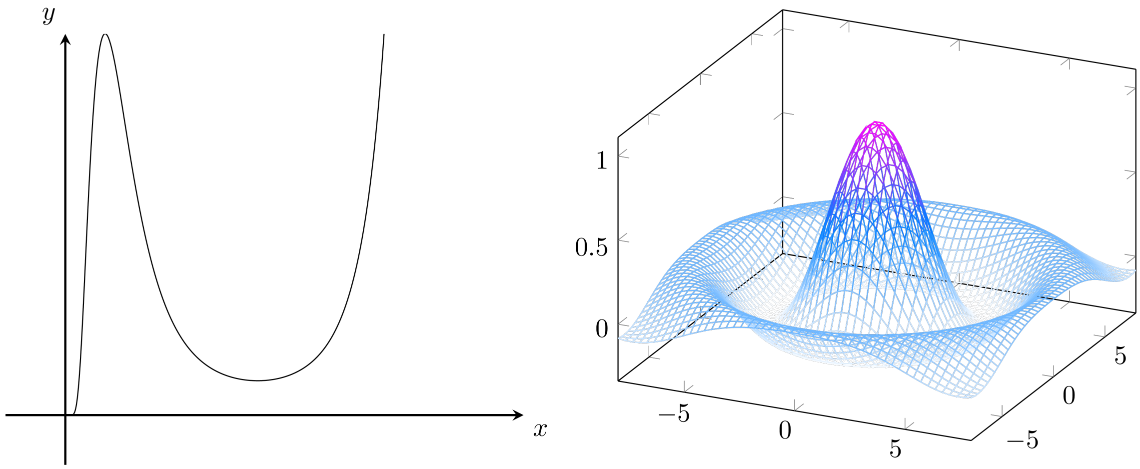
<u>נכון/לא נכון:</u>

לפניך הטענות הבאות. קבע עבור כל אחת האם היא נכונה/לא נכונה.

1. טור מתבדר $\Longleftarrow$ האיבר הכללי שלו לא שואף ל־0. (לא נכון, למשל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)
2. טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + (-1)^n\right]$ בהכרח מתכנס. (לא נכון, למשל $a_n = 0$)
3. טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ בהכרח מתכנס. (נכון, נובע ממבחן ההשוואה)
4. טור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ בהכרח מתכנס. (לא נכון, למשל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$)

5 פונקציות במספר משתנים

איור 6: משמאל, פונקציה במשתנה יחיד $y=f(x)$ המתוארת ב־$\mathbb{R}^2$, ומימין, פונקציה בשני משתנים $z=f(x,y)$, מתוארת ב־$\mathbb{R}^3$.



• פונקציה ב־n משתנים: $w=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, מתוארת ב־$\mathbb{R}^{n+1}$.

תחום הגדרה של פונקציה במספר משתנים:

$$z(x,y)=\ln(x-y)$$

נדרוש שארגומנט ה־$\ln$ יהיה חיובי, כפי שהיינו עושים בפונקציה במשתנה יחיד:

$$x-y>0 \Longrightarrow \boxed{x>y}$$

$$z(x,y)=\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{9-y^2}$$

גם כאן, כרגיל־ תחום ההגדרה עבור כל שורש בנפרד:

$$1-x^2\geq 0\wedge 9-y^2\geq 0$$

$$(1-x)(1+x)\geq 0\wedge(3-y)(3+y)\geq 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{-1\leq x\leq 1\wedge -3\leq y\leq 3}$$

$$w(x,y,z)=\log x+\sqrt{5-y}+\log\left(\frac{x}{z}\right)$$

ושוב, תחום ההגדרה עבור כל חלק בנפרד:

$$x>0\wedge 5-y\geq 0\wedge \frac{x}{z}>0$$

$$\overset{x>0}{\Longrightarrow} \boxed{x>0\wedge y\geq 5\wedge z>0}$$

5.1 פונקציות במספר משתנים - גבולות

5.1.1 הגדרת הגבול

תהי $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, פרט אולי לנקודה עצמה.
נאמר ש-L הוא גבול הפונקציה u כאשר $(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ אם:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid M \to M_0 : 0 < \underbrace{d(M, M_0)}_{\text{distance between } M, M_0} < \delta \implies |f(M) - L| < \varepsilon$$

$$M = (x_1, x_2, \ldots x_n), M_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right), d(M, M_0) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$$

<u>מסקנות הנובעות מהגדרת הגבול:</u>

1. אם קיים לפונקציה גבול בנקודה אזי הוא <u>יחיד</u> <u>ואינו תלוי</u> במסלול בו מתקרבים לנקודה.
2. אם התקרבות לנקודה לאורך <u>מסלולים שונים</u> נותנת <u>ערכים שונים</u> של הגבול אזי לפונקציה <u>אין גבול</u> בנקודה.

<u>דוגמאות:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2 - xy}{x^2 + 2y^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{check a general line} \\ \text{who goes thru } (0,0)}}{=} \lim_{\substack{y = kx \\ x \to 0}} \frac{x^3 + k^2x^2 - x \cdot kx}{x^2 + 2k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(x + k^2 - k\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + 2k^2\right)} = \boxed{\frac{k^2 - k}{1 + 2k^2}}$$

קיבלנו ביטוי שתלוי ב-k, ולכן נקבל ערכי גבול שונים עבור ערכי k שונים, כלומר לפונקציה <u>אין גבול</u> בנקודה.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \underset{\substack{\downarrow \\ y = kx}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot k^2x^2}{x^2 + k^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{xk^2}{1 + k^4x^2} = 0$$

גם אם היינו מנסים את הקשר $y = kx^2$ היינו מקבלים תשובה שאינה תלויה ב-k. ננסה לבחור מסלול בו התשובה תהיה תלויה:
נתקרב לנקודה $(0,0)$ לאורך מסלול מהצורה $x = ky^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \underset{\substack{\downarrow \\ x = ky^2}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{ky^2 \cdot y^2}{k^2y^4 + y^4} = \boxed{\frac{k}{k^2 + 1}}$$

תוצאת הגבול תלויה ב-k ולכן לפונקציה <u>אין גבול</u> בנקודה.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^6}{x^2 + y^{12}} \underset{\substack{\downarrow \\ x = ky^6}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{ky^6 \cdot y^6}{k^2y^{12} + y^{12}} = \boxed{\frac{k}{k^2 + 1}}$$

תוצאת הגבול תלויה ב-k ולכן לפונקציה <u>אין גבול</u> בנקודה.

משפט: יהיו $f\left(x_1,\dots x_n\right),g\left(x_1,\dots x_n\right)$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה $M_0=\left(x_1,\dots,x_n\right)$, פרט אולי לנקודה עצמה. נניח שקיימים הגבולות ל־2 הפונקציות ב־M_0, ונסמן:

$$\lim_{M\to M_0}f\left(M\right)=F\ ,\ \lim_{M\to M_0}g\left(M\right)=G$$

אזי:

$$\lim_{M\to M_0}\left[f\left(M\right)\ \begin{matrix}+\\-\\\cdot\\/\end{matrix}\ g\left(M\right)\right]=\lim_{M\to M_0}f\left(M\right)\ \begin{matrix}+\\-\\\cdot\\/\end{matrix}\ \lim_{M\to M_0}g\left(M\right)=F\ \begin{matrix}+\\-\\\cdot\\/\end{matrix}\ G$$

עבור חילוק יש לדרוש $G\neq0$.

5.1.2 שיטות להוכחת קיום גבול

משפט הסנדוויץ': נחסום את הביטוי מלמעלה ומלמטה בביטויים אותו הגבול וכך לביטוי המקורי גם אותו הגבול.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left[\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$\begin{cases}0\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|\leq|x|\to0\\0\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\leq\left|\frac{y^3}{y^2}\right|\leq|y|\to0\\0\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\leq\left|\frac{z^3}{z^2}\right|\leq|z|\to0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}+\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}+\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}=\boxed{0}$$

חסומה · שואפת ל־0: הגבול של מכפלת ביטוי חסום בביטוי ששואף ל־0 הוא 0.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\underbrace{y}_{\to0}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{\left|\sin\frac{1}{x-1}\right|\leq1}=\boxed{0}$$

שימוש בגבולות ידועים: ניעזר בגבולות מוכרים, למשל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=e\qquad\lim\frac{\sin x}{x}=0$$

תרגיל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\to0}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{|\sin t|\leq1}=\boxed{0}$$

ניתן לפתור גם כך:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{\frac{\sin t}{t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0}=\boxed{0}$$

5.2 פונקציות במספר משתנים - רציפות

כזכור מחדו"א 1, פונקציה במשתנה יחיד $y=f(x)$ רציפה בנקודה אם הגבול בנקודה קיים ושווה לערך הפונקציה בנקודה. כלומר:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=L$$

כעת עבור מספר משתנים:
הפונקציה $f(x_1,\ldots,x_n)$ רציפה בנקודה $M_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ אם קיים לה גבול בנקודה והוא שווה לערך הפונקציה בנקודה:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=L$$

הערה: הדרישות למושג הרציפות הן:

- קיום גבול בנקודה.
- קיום ערך הפונקציה בנקודה.
- שוויון בין הגבול לערך הפונקציה בנקודה.

תרגיל:
קבע האם הפונקציה הבאה רציפה בכל נקודה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq 0\\ 1 & (x,y,z)=0\end{cases}$$

לפי תרגיל קודם:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=\boxed{0\neq 1}$$

כלומר הגבול בנקודה שונה מערך הפונקציה בנקודה, ולכן הפונקציה לא רציפה ב-$(0,0,0)$, וכך גם לא בכל נקודה.

אם היה מתקיים $f(0,0,0)=0$ אז הפונקציה הייתה רציפה בכל נקודה (x,y,z).

תרגיל:
קבע האם קיים ערך של A עבורו הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\pi\sin\left(x^2+y^2\right)}{ex^2+ey^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ A & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נמצא את גבול הפונקציה בנקודה $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\pi\sin\left(x^2+y^2\right)}{ex^2+ey^2}=\frac{\pi}{e}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\boxed{\frac{\pi}{e}}$$

עבור $A=\frac{\pi}{e}$ הפונקציה רציפה ב-$(0,0)$.

תרגיל:
קבע האם קיים ערך של A עבורו הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ A & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נמצא את גבול הפונקציה בנקודה $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}\underset{y=kx}{\overset{=}{\downarrow}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3+k^3x^3}{x^2+k^2x^2}=\boxed{\frac{1}{1+k^2}}$$

ערך הגבול תלוי ב-k ולכן אין לפונקציה גבול בנקודה, כלומר לא קיים ערך של A עבורו הפונקציה רציפה ב-$(0,0)$.

5.3 פונקציות במספר משתנים - נגזרות

עבור פונקציה במשתנה יחיד $f(x)$ הנגזרת מסמלת את שיפוע הישר המשיק בנקודה x_0 לפונקציה, ומוגדרת כך:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{df}{dx}$$

5.3.1 הגדרת הנגזרת עבור פונקציה ב־2 משתנים

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D, ותהי $(x_0,y_0)\in D$ נקודה. הנגזרת החלקית של f ביחס למשתנה x מסומנת על ידי:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x(x_0,y_0)$$

ומוגדרת להיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

באופן דומה, הנגזרת של f ביחס למשתנה y היא:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

באופן שקול ניתן להגדיר עבור פונקציה ב־n משתנים את נגזרתה לפי כל אחד ממשתניה.

הערות חשובות:

- כאשר גוזרים פונקציה במספר משתנים לפי אחד מהמשתנים שלה, מתייחסים לשאר המשתנים בתור קבועים.
- עבור נקודות שאינן בעייתיות נשתמש בחוקי גזירה על מנת לגזור, עבור הבעייתיות־נשתמש ישירות בהגדרת הנגזרת.

דוגמאות:

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+\underbrace{0}_{y\text{ is constant}}=\boxed{2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\underbrace{0}_{x\text{ is constant}}+2y=\boxed{2y}$$

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^3}=x^2y^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot y^{-3}=\boxed{\frac{2x}{y^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cdot(-3)\,y^{-4}=\boxed{\frac{-3x^2}{y^4}}$$

$$f\left(x,y,z\right)=x^2e^y+\ln\left(z^2+1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot e^y+0=\boxed{2xe^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2e^y\cdot\frac{dy}{dy}+0=\boxed{x^2e^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+\frac{2z}{z^2+1}=\boxed{\frac{2z}{z^2+1}}$$

$$f\left(x,y\right)=5^x\cos\left(x^2y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln\left(5\right)5^x\cos\left(x^2y\right)+5^x\cdot 2x\left(-\sin\left(x^2y\right)\right)=\boxed{5^x\left(\ln\left(5\right)\cos\left(x^2y\right)-2x\sin\left(x^2y\right)\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=5^xx^2\cdot\left(-\sin\left(x^2y\right)\right)=\boxed{-5^xx^2\sin\left(x^2y\right)}$$

$$f\left(x,y,z\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2+1}=\frac{1}{z^2+1}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}=\boxed{\frac{x}{\left(z^2+1\right)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}=\boxed{\frac{y}{\left(z^2+1\right)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\boxed{-\frac{2z}{\left(z^2+1\right)^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

דוגמאות בהן יש לגזור לפי הגדרת הנגזרת:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq 0\\ 0 & \left(x,y\right)=0\end{cases}$$

עבור נקודות שאינן בעייתיות, בהן $(x,y)\neq(0,0)$, נגזור על פי כללי הגזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\boxed{\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{0-x^32y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\boxed{-\frac{2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

כעת נגזור עבור הנקודה הבעייתית - $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\boxed{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0,0+h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{0+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\boxed{0}$$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

עבור נקודות שאינן בעייתיות, בהן $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$, נגזור על פי כללי הגזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\left(x^2+y^2\right)-2x\left(xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\boxed{\frac{-x^2y+y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\left(x^2+y^2\right)-2y\left(xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\boxed{\frac{-y^2x+x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}}$$

כעת נגזור עבור הנקודה הבעייתית - $\left(0,0\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0,0+h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\boxed{0}$$

<u>הערה חשובה:</u> בשונה מפונקציות במשתנה יחיד, קיום נגזרות חלקיות <u>אינו</u> גורר רציפות.

5.3.2 נגזרות מסדר גבוה

עבור פונקציה $f\left(x,y\right)$ קיימות 4 נגזרות מסדר שני:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, נגזרת ראשונה לפי x ושנייה לפי x.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, נגזרת ראשונה לפי x ושנייה לפי y.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, נגזרת ראשונה לפי y ושנייה לפי x.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, נגזרת ראשונה לפי y ושנייה לפי y.

<u>משפט:</u> עבור פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ ובנקודה עצמה, הנגזרות המעורבות שוות:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

<u>תרגיל:</u>

חשב נגזרות חלקיות מסדר שני של הפונקציה הבאה.

$$f\left(x,y\right)=\sin\left(xy^2\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2\cos\left(xy^2\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xy\cos\left(xy^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\boxed{-y^4\sin\left(xy^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \boxed{2y\cos\left(xy^2\right) - 2xy^3\sin\left(xy^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{2x\cos\left(xy^2\right) - 4x^2y^2\sin\left(xy^2\right)}$$

<u>תרגיל:</u>

בהינתן הפונקציה $f(x,y) = \ln\left(x^2 + ay^2\right)$, ו־$a > 0$. נתון כי לכל נקודה (x,y) בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplace's equation)}$$

מהו הערך של a?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + ay^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2\left(x^2 + ay^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + ay^2\right)^2} = \boxed{\frac{-2x^2 + 2ay^2}{\left(x^2 + ay^2\right)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2ay}{x^2 + ay^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2a\left(x^2 + a\right) - 2ay \cdot 2ay}{\left(x^2 + ay^2\right)^2} = \boxed{\frac{2ax^2 - 2a^2y^2}{\left(x^2 + ay^2\right)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 2ay^2 + 2ax^2 - 2a^2y^2 = 0$$

$$(1-a)\left(-x^2 + ay^2\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^3 + mxy^2$. מצא את ערכו של m אם ידוע כי לכל נקודה (x,y) הפונקציה מקיימת:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + my^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{6x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2mxy \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{2mx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow 6x + 2mx = 0 \Longrightarrow x(3+m) = 0 \Longrightarrow \boxed{m = -3}$$

5.3.3 נגזרת הרכבה ־ כלל השרשרת

גזירת הרכבת פונקציות של משתנה יחיד מתבצעת כך:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

למשל:

$$y = (\sin x)^{10} = \left(\lambda x.\ x^{10}\right) \circ (\lambda x.\ \sin x) \Longrightarrow y' = 10(\sin x)^9 \cdot \cos x$$

בפונקציות במספר משתנים התהליך דומה, אך אנחנו מרכיבים פונקציות במספר משתנים עם פונקציות במספר משתנים.

דוגמא:

בהינתן הפונקציות הבאות:

$$u(x,y) = x^y$$

$$x(t) = t^2 + 2t + 5$$

$$y(t) = \sin t$$

חשב את $\frac{du}{dt}$.

דרך א' ־ הצבה: נציב את ערכי x, y כתלות ב־t ונקבל פונקציה במשתנה יחיד $u(t)$:

$$u(t) = \left(t^2 + 2t + 5\right)^{\sin t}$$

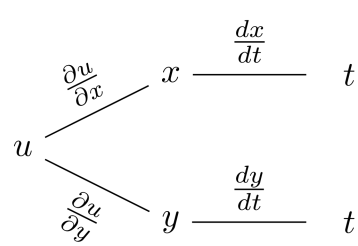
$$\ln u = \sin(t) \ln\left(t^2 + 2t + 5\right) \quad \backslash \frac{d}{dt}$$

$$\frac{u'}{u} = \cos(t) \ln\left(t^2 + 2t + 5\right) + \sin(t) \frac{2t+2}{t^2 + 2t + 5} \quad \backslash \cdot \left(u = \left(t^2 + 2t + 5\right)^{\sin t}\right)$$

$$\Longrightarrow u'(t) = \boxed{\left(t^2 + 2t + 5\right)^{\sin t} \cdot \left[\cos(t) \ln\left(t^2 + 2t + 5\right) + \sin(t) \frac{2t+2}{t^2 + 2t + 5}\right]}$$

דרך ב' ־ עץ נגזרות:

איור 7: עץ הנגזרות



- מטיילים על העץ בכל מסלול מ־u ל־t, כאשר לאורך אותו מסלול כופלים בין הנגזרות, ובין מסלולים־מחברים.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}\ , \frac{dx}{dt} = 2t + 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(y)\, x^y\ , \frac{dy}{dt} = \cos(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt} = \left(yx^{y-1}\right)(2t+2) + \ln(y)\, x^y \cos(t)$$

- כעת נציב לקבלת פונקציה במשתנה יחיד־t:

$$\frac{du}{dt} = \boxed{\left(\sin(t)\left(t^2 + 2t + 5\right)^{\sin(t)-1}\right)(2t+2) + \ln(\sin t)\left(t^2 + 2t + 5\right)^{\sin t} \cos(t)}$$

תרגיל:

$z=f\left(x,y\right)$, f פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות המקיימות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(-3,6\right)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(-3,6\right)=1$$

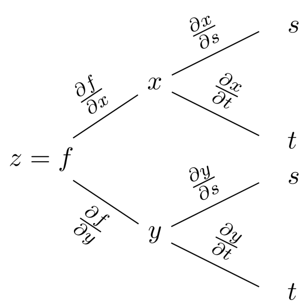
נגדיר:

$$x=s^{2}-t^{2},\ y=3s^{2}t$$

חשב בנקודה $\left(s,t\right)=\left(1,2\right)$ את ערך הביטוי:

$$\frac{\partial z}{\partial t}\left(1,2\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\left(1,2\right)$$

איור 8: עץ הנגזרות



בנוסף:

$$\left(x\left(1,2\right),y\left(1,2\right)\right)=\left(-3,6\right)$$

נעבור על מסלולי העץ מ־z ל־t:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=2\left(-2t\right)+1\left(3s^{2}\right)=3\left(1\right)^{2}-4\left(2\right)=\boxed{-5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=2\left(2s\right)+1\left(6ts\right)=4\left(1\right)+6\left(1\right)\left(2\right)=\boxed{16}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\frac{\partial z}{\partial t}\left(1,2\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\left(1,2\right)=11}$$

תרגיל:

תהי f פונקציה גזירה במשתנה יחיד. נגדיר:

$$g\left(x,y,z\right)=f\left(x^{2}z-yz\right)$$

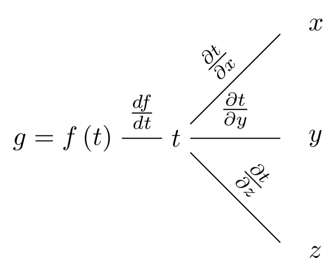
חשב את A כאשר:

$$A=x\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+2y\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-2z\cdot\frac{\partial g}{\partial z}$$

ננסח את השאלה באופן יותר נוח: נגדיר פונקציה $f\left(t\right)$ כאשר:

$$t\left(x,y,z\right)=x^{2}z-yz$$

איור 9: עץ הנגזרות



$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{df}{dt}\cdot\left(2xz\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{df}{dt}\cdot\left(-z\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{df}{dt}\cdot\left(x^{2}-y\right)$$

$$\Longrightarrow A=x\cdot\frac{df}{dt}\cdot\left(2xz\right)+2y\cdot\frac{df}{dt}\cdot\left(-z\right)-2z\cdot\frac{df}{dt}\cdot\left(x^{2}-y\right)$$

$$\Longrightarrow A=\frac{df}{dt}\cdot\left[2x^{2}z-2yz-2z\left(x^{2}-y\right)\right]=\frac{df}{dt}\cdot\left[2x^{2}z-2yz-2zx^{2}+2yz\right]=\boxed{0}$$

תרגיל:

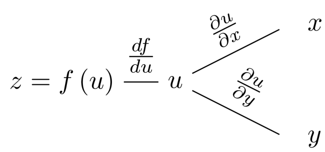
תהי $f\left(u\right)$ פונקציה לא קבועה. נגדיר:

$$z\left(x,y\right)=f\left(u\right)=f\left(x^{2}+y^{2}\right)=f\circ\left(\lambda x,y.\ x^{2}+y^{2}\right)$$

מצא את ערכו של a אם לכל $\left(x,y\right)$ מתקיים:

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=3ax\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

איור 10: עץ הנגזרות



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\left(2x\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\left(2y\right)$$

$$\Longrightarrow y\cdot\left[\frac{df}{du}\cdot\left(2x\right)\right]=3ax\cdot\left[\frac{df}{du}\cdot\left(2y\right)\right]\quad\backslash:\frac{df}{du}\neq0\ \text{(f is not constant)}$$

$$\Longrightarrow 2xy=6xy\Longrightarrow\boxed{a=\frac{1}{3}}$$

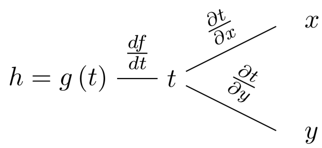
תרגיל:

תהי $z\left(x,y\right)=xy+g\left(\frac{y}{x}\right)$ כאשר $g\left(1\right)=0$ חשב ב־$\left(x,y\right)=\left(1,1\right)$ את הערך של A כאשר:

$$A=x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

נסמן: $h\left(x,y\right)=g\left(t\right)$, $t\left(x,y\right)=\frac{y}{x}$.

איור 11: עץ הנגזרות



$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+1\cdot g\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\frac{\partial h}{\partial x}=y+g\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=y+g\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\frac{dg}{dt}\cdot\frac{-y}{x^2}=y+g\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{dg}{dt}\cdot\frac{y}{x}$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,1\right)=1+2-\frac{dg}{dt}\cdot\frac{1}{1}=\boxed{3-\frac{dg}{dt}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\cdot\frac{\partial h}{\partial y}=x+x\cdot\left[\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}\right]=x+x\cdot\left[\frac{dg}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right]=x+\frac{dg}{dt}$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial y}\left(1,1\right)=\boxed{1+\frac{dg}{dt}}$$

$$\Longrightarrow A=1\cdot\left(3-\frac{dg}{dt}\right)+1\cdot\left(1+\frac{dg}{dt}\right)=\boxed{4}$$

5.4 פונקציות במספר משתנים ־ נגזרת מכוונת

חזרה קצרה על וקטורים

וקטור דו מימדי ־ $\bar{a}=(a_1,a_2)=a_1\cdot i+a_2\cdot j$. אורכו (נורמה) הוא:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

θ היא הזווית שיוצר הוקטור $\bar{a}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה־x: $\tan\theta=\frac{a_2}{a_1}$.

וקטור מנורמל הוא וקטור שאורכו 1, כאשר מנרמלים וקטור משמרים על כיוונו על מקורי ומשנים את אורכו ל־1:

$$\text{norm}\left(\bar{a}\right)=\frac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$$

תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה ו־$\left(x_0,y_0\right)$ נקודה בה f רציפה וגזירה.
הנגזרת המכוונת של f ב־$\left(x_0,y_0\right)$ בכיוון הוקטור המנורמל $\bar{u}=\left(u_1,u_2\right)$ היא:

$$D_{\bar{u}}f\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot u_1+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot u_2$$

הערה חשובה: הנוסחא נכונה עבור וקטור מנורמל בלבד (שאורכו 1), במידה וקיבלנו וקטור שאינו מנורמל יש לנרמל אותו.

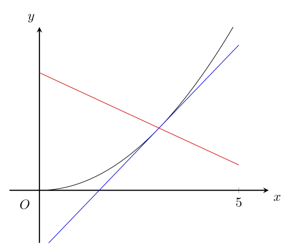
באופן שקול עבור n מימדים: בהינתן פונקציה $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ ונקודה $M_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ בה f רציפה וגזירה, הנגזרת המכוונת של f ב־M_0 בכיוון הוקטור המנורמל $\bar{u}=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ היא:

$$D_{\bar{u}}f\left(M_0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(M_0\right)\cdot u_k$$

5.4.1 גרדיאנט

עבור בפונקציה במשתנה יחיד $y=f\left(x\right)$, ישר המאונך למשיק לפונקציה העובר בנקודת ההשקה נקרא נורמל לפונקציה.

איור 12: גרף הפונקציה בשחור, המשיק בכחול והנורמל באדום



גרדיאנט הוא הוקטור הנורמל (הניצב) למשטח הגובה העובר דרך הנקודה הנתונה בפונקציה הנתונה. הגרדיאנט מוגדר להיות וקטור שרכיביו הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה. כלומר: תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה רציפה בגזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, אזי:

$$\text{nabla}\rightarrow\nabla f\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\right)$$

תכונות חשובות של גרדיאנט:

1. נגזרת מכוונת מקבלת את ערכה המקסימלי כאשר היא מחושבת בכיוון וקטור הגרדיאנט.
2. נגזרת מכוונת מקבלת את ערכה המינימלי כאשר היא מחושבת בכיוון הנגדי לכיוון הגראדיאנט.
3. כדי לחשב נגזרת מכוונת מקסימלית אין צורך להשתמש בנוסחא־הנגזרת המכוונת המקסימלית שווה לאורך הוקטור הגרדיאנט המקורי (ללא נרמול).

תרגיל:

נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=6-3x^{2}-y^{2}$.

1. חשב בנקודה $\left(1,2\right)$ את הנגזרת המכוונת של f בכיוון $\bar{a}=\left(1,3\right)$.
2. מצא את הכיוון בו f גדלה בקצב מקסימלי בנקודה $\left(1,2\right)$.
3. חשב את ערך הנגזרת המכוונת המקסימלית בנקודה $\left(1,2\right)$.

תחילה, נחשב את הנגזרות החלקיות של f בנקודה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-6x\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,2\right)=-6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,2\right)=-4$$

ננרמל את הוקטור $\bar{a}$:

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{1^{2}+3^{2}}=\sqrt{10}\Longrightarrow\text{norm}\left(\bar{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left(1,3\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\Longrightarrow D_{\bar{a}}f\left(1,2\right)=-6\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+-4\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\boxed{-\frac{18}{\sqrt{10}}}$$

f גדלה בקצב מקסימלי כאשר הנגזרת המכוונת שלה מקסימלית, כלומר כאשר היא מחושבת בכיוון הגרדיאנט:

$$\nabla f\left(1,2\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,2\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,2\right)\right)=\boxed{\left(-6,-4\right)}$$

ערך הנגזרת המכוונת המקסימלית הוא אורך הגרדיאנט (ניתן גם לחשב ישירות לפי הנוסחא):

$$\left|\nabla f\left(1,2\right)\right|=\sqrt{\left(-6\right)^{2}+\left(-4\right)^{2}}=\boxed{\sqrt{52}}$$

סימונים ומושגים באלגברה לינארית

- בהינתן מטריצה ריבועית A, מינור ראשי שלה הוא דטרמיננטה של תת מטריצה ריבועית שמכילה את האיבר הראשון $a_{1,1}$.
  למשל:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\Delta_{1}=\left|a_{11}\right|\\ \Delta_{2}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\\ \Delta_{3}=\left|A\right|\end{cases}$$

- מטריצה ריבועית היא מטריצה המגדירה תבנית ריבועית חיובית אם כל המינורים הראשיים חיוביים.
- מטריצה ריבועית היא מטריצה המגדירה תבנית ריבועית שלילית אם כל המינורים הראשיים מחליפים סימן לסירוגין, החל משלילי.
  כלומר:

$$\Delta_{1}<0,\Delta_{2}>0,\Delta_{3}<0,\ldots$$

- תבנית שאינה תבנית חיובית ואינה תבנית שלילית היא תבנית מעורבת.

5.5 פונקציות במספר משתנים - מציאת אקסטרמום

נרצה למצוא נקודות קיצון (אקסטרמום מקומי) לפונקציה במספר משתנים. הגדרת נקודת אקסטרמום מקומי:
תהי $u = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ פונקציה ב־n משתנים המוגדרת בתחום D, ותהי $M_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$.

- ל־u יש מקסימום מקומי ב־M_0 אם קיימת סביבה של M_0 כך שלכל נקודה M בסביבה מתקיים $f\left(M_0\right) \geq f\left(M\right)$. כלומר:

$$\exists \varepsilon > 0 : \text{distance}\left(M, M_0\right) \leq \varepsilon \Longrightarrow f\left(M_0\right) \geq f\left(M\right)$$

- ל־u יש מינימום מקומי ב־M_0 אם קיימת סביבה של M_0 כך שלכל נקודה M בסביבה מתקיים $f\left(M_0\right) \leq f\left(M\right)$. כלומר:

$$\exists \varepsilon > 0 : \text{distance}\left(M, M_0\right) \leq \varepsilon \Longrightarrow f\left(M_0\right) \leq f\left(M\right)$$

5.5.1 מציאת נקודות קריטיות (חשודות לקיצון)

1. גוזרים את הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים ומשווים את הנגזרות החלקיות ל־0. נקבל נקודות שמאפסות את הנגזרות החלקיות, ונמצא נקודות שמאפסות את כל הנגזרות החלקיות.
2. נקודות בהן הנגזרות החלקיות אינן מוגדרות אך הפונקציה עצמה כן מוגדרת.

5.5.2 מיון נקודות קיצון

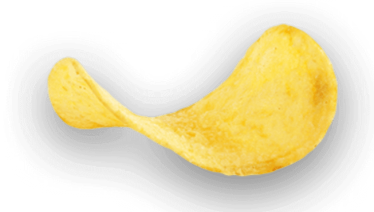
נבנה הסיאן - מטריצה הבנויה מהנגזרות מסדר של של הפונקציה הנתונה. עבור פונקציה ב־2 משתנים:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

נחשב את המינורים הראשיים למטריצת ההסיאן ונקבע את סוג התבנית המתקבלת.

- אם התבנית חיובית בנקודה הקריטית (עבור פונקציה ב־2 משתנים $H_1 > 0, H_2 > 0$) הנקודה היא נקודת מינימום מקומית.
- אם התבנית שלילית בנקודה הקריטית (עבור פונקציה ב־2 משתנים $H_1 < 0, H_2 > 0$) הנקודה היא נקודת מקסימום מקומית.
- אם קיבלנו תבנית מעורבת:
  - אם הפונקציה רציפה וגזירה בנקודה, היא לא אקסטרמום.
  - אחרת, שיטה זו לא קובעת דבר.
- מקרה נוסף - רק עבור פונקציה ב־2 משתנים:
  - אם $H_2 < 0$ (ללא תלות בסימן H_1) זו לא נקודת קיצון, אלא נקודת אוכף (Saddle Point): בחתך אחד זו נקודת מקסימום, ובאחר נקודת מינימום. להמחשה:

איור 13: פרינגלס



דוגמא:

מצא ומיין את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^{2}-xy+y^{2}$:

תחילה נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 2x-y=0\\ 2y-x=0 \end{cases}\Longrightarrow\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$$

נמיין את הנקודה על ידי בניית הסיאן:

$$H=\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2 & -1\\ -1 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=2\\ H_{2}=3 \end{cases}$$

כלומר התבנית הריבועית היא חיובית, ולכן נקודת הקיצון של f היא:

$$\boxed{\left(0,0\right)\min}$$

דוגמא:

מצא ומיין את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^{3}+y^{3}-3x-12y+30$:

תחילה נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^{2}-3,\frac{\partial f}{\partial y}=3y^{2}-12$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 3x^{2}-3=0\\ 3y^{2}-12=0 \end{cases}\Longrightarrow\left(x,y\right)\in\left\{ \left(1,2\right),\left(1,-2\right),\left(-1,2\right),\left(-1,-2\right)\right\}$$

נמיין את הנקודה על ידי בניית הסיאן:

$$H=\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2}f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 6x & 0\\ 0 & 6y \end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=6x\\ H_{2}=36xy \end{cases}$$

- $\left(x,y\right)=\left(1,2\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=6\\ H_{2}=72 \end{cases}\Longrightarrow\text{positive pattern}\Longrightarrow\boxed{\left(1,2\right)\min}$
- $\left(x,y\right)=\left(1,-2\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=6\\ H_{2}=-72 \end{cases}\Longrightarrow\text{mixed pattern, }H_{2}<0\Longrightarrow\boxed{\left(1,-2\right)\text{saddle point}}$
- $\left(x,y\right)=\left(-1,2\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=-6\\ H_{2}=-72 \end{cases}\Longrightarrow\text{mixed pattern, }H_{2}<0\Longrightarrow\boxed{\left(-1,2\right)\text{saddle point}}$
- $\left(x,y\right)=\left(-1,-2\right)\Longrightarrow\begin{cases} H_{1}=-6\\ H_{2}=72 \end{cases}\Longrightarrow\text{negative pattern}\Longrightarrow\boxed{\left(-1,-2\right)\max}$

דוגמא:

מצא ומיין את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה $f\left(x,y\right)=xy$:

תחילה נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\frac{\partial f}{\partial y}=x\Longrightarrow\begin{cases} y=0\\ x=0 \end{cases}\Longrightarrow\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$$

נמיין את הנקודה על ידי בניית הסיאן:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}H_1=0\\ H_2=-1\end{cases}$$

כלומר התבנית הריבועית היא מעורבת. בנוסף $H_2<0$, ולכן ל־f אין נקודות קיצון וב־$\boxed{(0,0)\,\text{saddle point}}$.

אקסטרמום בפונקציות ב־3 משתנים

בהינתן פונקציה $f(x,y,z)$, ההסיאן של f הוא:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}$$

- אם קיבלנו תבנית חיובית ($H_1,H_2,H_3>0$) הנקודה היא מינימום מקומי.
- אם קיבלנו תבנית שלילית ($H_1>0,H_2<0,H_3>0$) הנקודה היא מקסימום מקומי.
- אחרת־קיבלנו תבנית מעורבת והנקודה אינה נקודת קיצון.

דוגמא:

$$f(x,y,z)=3x+2y-z-x^2-3y^2-z^2$$

תחילה נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3-2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2-6y,\frac{\partial f}{\partial z}=-1-2z\Longrightarrow\begin{cases}3-2x=0\\ 2-6y=0\\ -1-2z=0\end{cases}\Longrightarrow(x,y,z)=\left(1.5,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$$

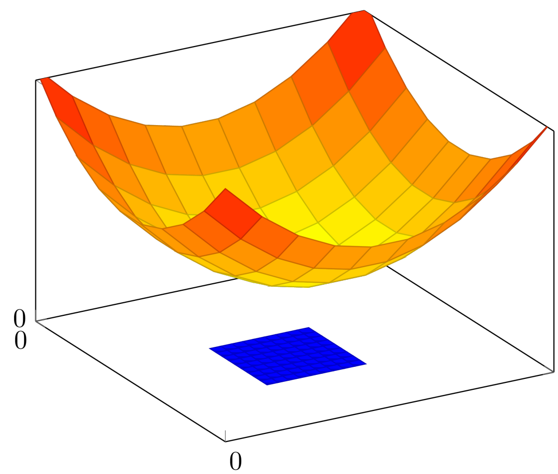
נמיין את הנקודה על ידי בניית הסיאן:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{cases}H_1=-2\\ H_2=12\\ H_3=-24\end{cases}\Longrightarrow\text{negative pattern}\Longrightarrow\boxed{\left(1.5,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)\max}$$

5.5.3 אקסטרמום מוחלט בתחום חסום וסגור

בפונקציה במשתנה יחיד, בכדי למצוא נקודות קיצון מוחלטות בתחום חסום וסגור נוסיף את נקודות הקצה של התחום לנקודות הקריטיות, נמיין את הנקודות החשודות ולבסוף נבחר את נקודות הקיצון המוחלטות. כאשר נחפש אקסטרמום מוחלט של פונקציה $f(x,y)$ בתחום חסום וסגור $\bar{D}$, נחפש נקודות ב־$\bar{D}$ הנקודה קטנה/גדולה מכל שאר הנקודות בתחום.

איור 14: הפונקציה f בתחום $\bar{D}$ (בכחול)



נקודות קיצון מוחלט יכולות להיות:

- נקודות חשודות כקיצון מקומי:
  - נקודות שמאפסות את הנגזרות החלקיות.
  - נקודות בהן הנגזרות החלקיות אינן מוגדרות והפונקציה מוגדרת.
- נקודות על קצה התחום.
- נקודות חוד־נקודות מפגש של שפות התחום.

לאחר מציאת הנקודות הקריטיות נציב את הערכים בפונקציה ונשווה למציאת המינימום/מקסימום המוחלטים.

שלבים למציאת נקודות קיצון מוחלט

1. אוספים את הנקודות החשודות כקיצון מוחלט.
   (א) מוצאים את הנקודות החשודות כקיצון מקומי.
   (ב) ביחס לכל אחת מהשפות (קצוות התחום), מוצאים נקודות חשודות של הפונקציה שמקיימת את משוואת השפה:
      i. שיטת ההצבה: עבור שפות בהן ניתן לבודד את אחד המשתנים: מציבים בפונקציה המקורית לקבלת פונקציה במשתנה יחיד, לאחר מכן גוזרים למציאת נקודות קיצון על השפה.
      ii. שיטת כופלי לגראנז': עבור שפות בהן לא ניתן לבודד את אחד המשתנים.
   (ג) נקודות חוד: מוצאים את נקודות החיתוך של השפות.
2. משווים בין כל ערכי הנקודות למציאת המינימום/המקסימום המוחלטים.

תרגיל:

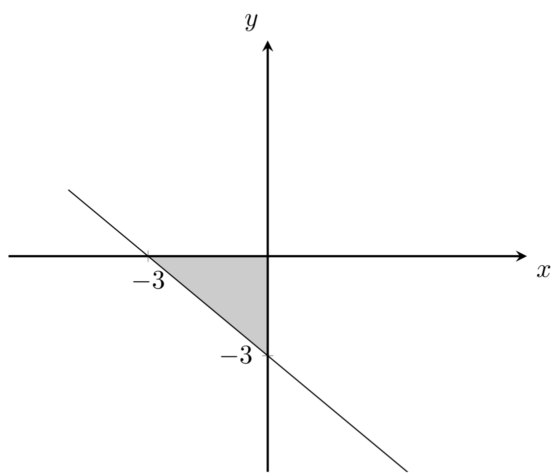
$$f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}-xy+x+y$$

מצא אקסטרמומים מוחלטים של f בתחום:

$$\bar{D}=\left\{ \left(x,y\right)|x+y\geq-3,x\leq0,y\leq0\right\}$$

תחילה, נשרטט את התחום:

איור 15: התחום $\bar{D}$ באפור



כעת נמצא את החשודות לקיצון מקומי:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1,\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x+1\Longrightarrow\begin{cases} 2x-y+1=0\\ 2y-x+1=0 \end{cases}\Longrightarrow\left(x,y\right)=\boxed{\left(-1,-1\right)}$$

נשים לב כי הנקודה שמצאנו בתחום־כל התנאים מתקיימים. כעת נמצא את הנקודות החשודות על השפות:

- על השפה $y=0$:

$$f\left(x,0\right)=x^{2}+x\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,0\right)=0\Longrightarrow2x+1=0\Longrightarrow x=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\boxed{\left(-\frac{1}{2},0\right)}$$

- על השפה $x=0$:

$$f\left(0,y\right)=y^{2}+y\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,y\right)=0\Longrightarrow2y+1=0\Longrightarrow y=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\boxed{\left(0,-\frac{1}{2}\right)}$$

- על השפה $y=-x-3$:

$$f\left(x,-x-3\right)=x^{2}+\left(-x-3\right)^{2}-x\left(-x-3\right)+x+\left(-x-3\right)=3x^{2}+9x+6$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,-x-3\right)=6x+9\Longrightarrow6x+9=0\Longrightarrow x=-\frac{3}{2}\Longrightarrow\boxed{\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)}$$

הנקודות החשודות בתחום, ולכן לא נפסול אותן.

נקודות החוד הן $(0,0)\,,(0,-3)\,,(-3,0)$. בסך הכל, הנקודות החשודות הן:

$$(0,0)\,,(-3,0)\,,(0,-3)\,,\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(0,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right),(-1,-1)$$

נשווה בין ערכי הפונקציה:

$$\begin{array}{lll} f(0,0)=0 & f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4} & f(-1,-1)=-1 \\ f(-3,0)=6 & f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4} & \\ f(0,-3)=6 & f\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4} & \end{array}$$

בסך הכל:

$$\boxed{(-1,-1,-1)\min,(0,-3,6)\max,(-3,0,6)\max}$$

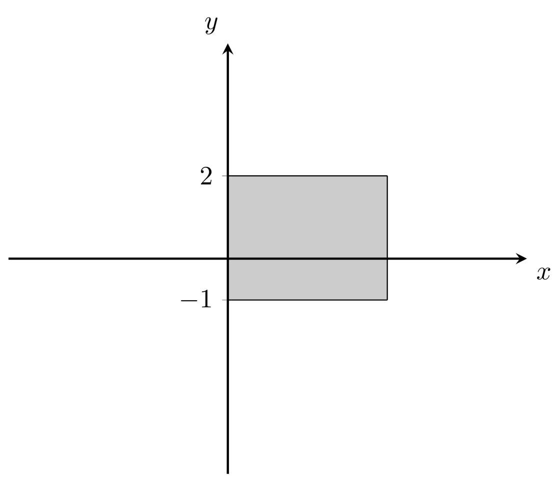
תרגיל:

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$. נסמן:

$$M=\max_{(x_0,y_0)\in\bar{D}} f(x_0,y_0)\,,K=\min_{(x_0,y_0)\in\bar{D}} f(x_0,y_0)$$

מצא את הערך של $M+K$ כאשר $\bar{D}=\{(x,y)\,|0\le x\le 2,-1\le y\le 2\}$.
תחילה, נשרטט את התחום:

איור 16: התחום $\bar{D}$ באפור



כעת נמצא את החשודות לקיצון מקומי:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y,\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{array}\right.\Longrightarrow\boxed{(x,y)\in\{(0,0)\,,(1,1)\}}$$

נשים לב כי הנקודות שמצאנו בתחום־כל התנאים מתקיימים. כעת נמצא את הנקודות החשודות על השפות:

- על השפה $y = -1$:

$$f(x,-1) = x^3 + 3x - 1 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 3x^2 + 3 \Longrightarrow 3x^3 + 3 = 0 \Longrightarrow \cancel{x^2 = -1}$$

- על השפה $x = 0$:

$$f(0,y) = y^3 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 3y^2 \Longrightarrow 3y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow \boxed{(0,0)}$$

- על השפה $y = 2$:

$$f(x,2) = x^3 - 6x + 8 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,2) = 3x^2 - 6 \Longrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{\left(\sqrt{2},2\right)}$$

- על השפה $x = 2$:

$$f(2,y) = y^3 - 6y + 8 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,y) = 3y^2 - 6 \Longrightarrow 3y^2 - 6 = 0 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{\left(2,\sqrt{2}\right)}$$

- הנקודות החשודות בתחום, ולכן לא נפסול אותן.

נקודות החוד הן $(2,2), (2,-1), (0,2), (0,-1)$. בסך הכל, הנקודות החשודות הן:

$$(0,0), (1,1), \left(2,\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2},2\right), (0,-1), (0,2), (2,-1), (2,2)$$

נשווה בין ערכי הפונקציה:

$$\begin{array}{cccc} f(0,0) = 0 & f\left(2,\sqrt{2}\right) \approx 2.34 & f(0,-1) = -1 & f(2,-1) = 13 \\ f(1,1) = -1 & f\left(\sqrt{2},2\right) \approx 2.34 & f(0,2) = 8 & f(2,2) = 4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow M = 13, K = -1 \Longrightarrow \boxed{M + K = 12}$$

5.6 כופלי לגראנז'

כאשר לא ניתן, או מסובך אלגברית להוריד משתנה במשוואת האילוץ (בשפות)־ בדרך כלל במשוואות מעגלים ואליפסות, ניתן להשתמש בשיטת כופלי לגראנז':

בהינתן פונקציה $f\left(x,y\right)$ ואילוץ המוגדר כפונקציה $g\left(x,y\right)$ נבנה פונקציית לגראנז' המוגדרת על ידי:

$$L\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)+\lambda\cdot g\left(x,y\right)\ \ (\lambda\text{ - Lagrange multiplier})$$

משפט: נקודות האקסטרמום של f עם האילוץ של $g=0$ שוות לנקודות האקסטרמום של L.

- נגזור נגזרות חלקיות ונשווה ל־0: $\frac{\partial L}{\partial x}=0,\frac{\partial L}{\partial y}=0,\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$, וכך נקבל את הנקודות החשודות על השפות.

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}+2x-2y$. מצא נקודות אקסטרמום בתחום:

$$\bar{D}=\left\{ \left(x,y\right)\left|x^{2}+y^{2}\leq4\right.\right\}$$

התחום הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 2. תחילה נמצא את הנקודות החשודות כקיצון מקומי:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2\Longrightarrow2x+2=0\Longrightarrow x=-1,\frac{\partial f}{\partial y}=2y-2\Longrightarrow2y-2=0\Longrightarrow y=1\Longrightarrow\boxed{\left(-1,1\right)}$$

כעת נמצא את הנקודות החשודות על השפה, נשתמש בשיטת כופלי לגראנז':

$$L\left(x,y,\lambda\right)=\underbrace{x^{2}+y^{2}+2x-2y}_{f\left(x,y\right)}+\lambda\cdot\underbrace{\left(x^{2}+y^{2}-4\right)}_{g\left(x,y\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2+2\lambda x\Longrightarrow2x+2+2\lambda x=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y-2+2\lambda y\Longrightarrow2y-2+2\lambda y=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{y-1}{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=x^{2}+y^{2}-4\Longrightarrow x^{2}+y^{2}-4=0\overset{\left[\frac{-x-1}{x}=\frac{1-y}{y}\Longrightarrow x=-y\right]}{\Longrightarrow}\left(-y\right)^{2}+y^{2}-4=0\Longrightarrow y^{2}=2\Longrightarrow\boxed{y=\pm\sqrt{2}}$$

אין להציב $y=\pm\sqrt{2}$ במשוואה $x^{2}+y^{2}-4=0$! כך נקבל 4 פתרונות שונים. ראינו כי $x=-y$, ולכן הנקודות הן:

$$\boxed{\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)}$$

מכיוון שהתחום מעגלי אין נקודות חוד. כעת נמיין את הנקודות:

$$f\left(-1,1\right)=-2$$

$$f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=4+4\sqrt{2}$$

$$f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=4-4\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},4+4\sqrt{2}\right)\max,\left(-1,1-2\right)\min}$$

- במידה והיו מבקשים מאיתנו נקודות אקסטמרום המקיימות $x^{2}+y^{2}=4$, היינו מתייחסים רק לנקודות שעל השפה־ $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ וממיינים בהתאם.

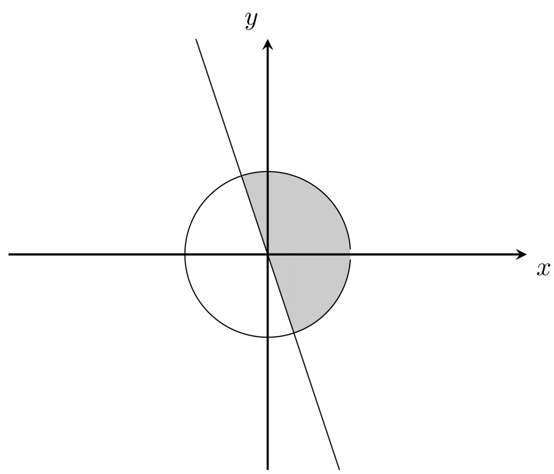
תרגיל:

מצא ערך מינימלי ומקסימלי של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום:

$$\bar{D}=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2\le 1, 3x\ge -y\right.\right\}$$

פתרון:

איור 17: התחום $\bar{D}$ באפור



נמצא את נקודות הקיצון הפנימיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-12\Longrightarrow 2x-12=0\Longrightarrow x=6,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+16\Longrightarrow 2y+16=0\Longrightarrow y=-8\Longrightarrow \boxed{(6,-8)}$$

הנקודה החשודה לא בתחום, ולכן נפסול אותה. נמשיך למציאת הנקודות החשודות על השפות:

$$f(x,-3x)=x^2+(-3x)^2-12x+16(-3x)=10x^2-60x$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,-3x)=20x-60\Longrightarrow 20x-60=0\Longrightarrow x=3,y=-9\Longrightarrow \boxed{\cancel{(3,-9)}}$$

$$g(x,y)=x^2+y^2-1\Longrightarrow L(x,y,\lambda)=\left(x^2+y^2-12x+16y\right)+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-12+2\lambda x\Longrightarrow 2x-12+2\lambda x=0\Longrightarrow \lambda=\frac{6-x}{x}\ (x\ne 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+16+2\lambda y\Longrightarrow 2y+16+2\lambda y=0\Longrightarrow \lambda=\frac{-y-8}{y}\ (y\ne 0)$$

$$\Longrightarrow \frac{6-x}{x}=\frac{-y-8}{y}\Longrightarrow y=-\frac{4}{3}x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2-1=0\Longrightarrow x^2=\frac{9}{25}\Longrightarrow \boxed{x=\pm\frac{3}{5}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right),\cancel{\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}}$$

הנקודה $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ נפסלה משום שהיא לא מקיימת את התנאי $y\leq -3x$. כעת נמצא את נקודות החוד:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-3x \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

נותר למיין את הנקודות לפי ערך הפונקציה:

$$f\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)\approx -19, f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\approx -17.9, f\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\approx 12.2$$

כלומר הערך המינימלי שמקבלת f בתחום הוא $\boxed{\approx -19}$, והמקסימלי הוא $\boxed{\approx 12.2}$.

6 אינטגרלים כפולים

בדומה לנגזרות חלקיות, כאשר עושים אינטגרציה לפי אחד המשתנים מתייחס לשאר המשתנים כקבועים. למשל:

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c, \int x\ dy = xy + c, \int xy\ dx = \frac{x^2y}{2} + c, \int xy\ dy = \frac{xy^2}{2} + c$$

$$\int \left(xe^y + \sin\left(x\right)\ln\left(y\right)\right)dx = \frac{x^2e^y}{2} - \cos\left(x\right)\ln\left(y\right) + c$$

$$\int \left(xe^y + \sin\left(x\right)\ln\left(y\right)\right)dy = xe^y \sin\left(x\right)\left[y\ln\left(y\right) - y\right] + c$$

אינטגרלים כפולים הם על תחומים, אופן חישוב האינטגרל נקבע על פי סוג התחום.

6.1 תחומים פשוטים

1. תחום פשוט לגמרי: בתחום פשוט לגמרי (מלבן) סדר האינטגרציה לא משנה, $a \le x \le b, c \le y \le d$:

$$\underline{\int_c^d \underline{\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy}} = \underline{\int_a^b \underline{\int_c^d f\left(x,y\right)dydx}}$$

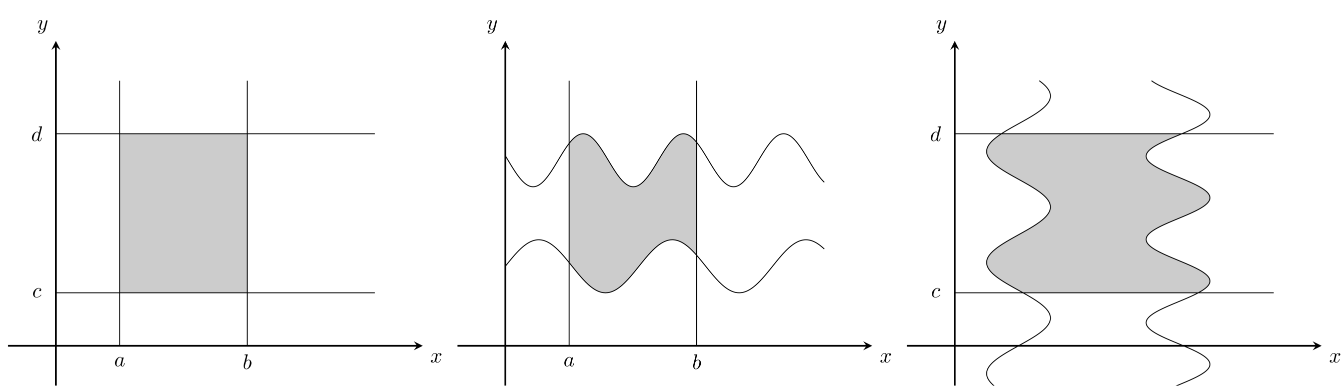
2. תחום פשוט אנכית: מחשבים תחילה כל את החלק שאינו פשוט, $a \le x \le b, f_2\left(x\right) \le y \le f_1\left(x\right)$:

$$\underline{\int_a^b \underline{\int_c^d f\left(x,y\right)dydx}}$$

3. תחום פשוט אופקית: מחשבים תחילה כל את החלק שאינו פשוט, $f_2\left(y\right) \le x \le f_1\left(y\right), c \le y \le d$:

$$\underline{\int_c^d \underline{\int_{f_2(y)}^{f_1(y)} f\left(x,y\right)dxdy}}$$

איור 18: משמאל לימין: תחום פשוט לגמרי, תחום פשוט אנכית, תחום פשוט אופקית



תרגיל:
חשב בתחום $\bar{D}=\{(x,y)\,|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$ את האינטגרל:

$$\iint_{\bar{D}}\left(x^2+xy\right)dxdy$$

התחום $\bar{D}$ הוא פשוט לגמרי, ניתן לחשב $dxdy$ או $dydx$, ניתן לכתוב בקיצור dA.

$$\int_0^2\int_0^1\left(x^2+xy\right)dxdy=\int_0^2 \frac{x^3}{3}+\frac{yx^2}{2}\bigg|_0^1 dy=\int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)dy=\left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\bigg|_0^2=\boxed{\frac{5}{3}}$$

כאמור היה ניתן לחשב את האינטגרל בסדר ההפוך, $dy\ dx$, תוך כדי שינוי הגבולות.

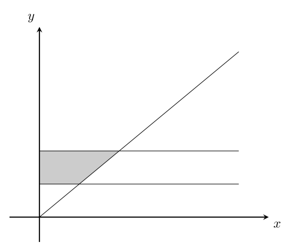
- אינטגרל כפול על פונקציה אי שלילית f בתחום $\bar{D}$ מבטא את נפח הגוף החסום על ידי f וצלעות התחום המקבילות לציר ה־z.

תרגיל:
חשב בתחום $\bar{D}$ החסום על ידי $y=1, y=2, x=0, x=y$ את האינטגרל:

$$\iint_{\bar{D}}\left(x^2y^2\right)dA$$

התחום $\bar{D}$ הוא פשוט אופקית, נשרטט את התחום:

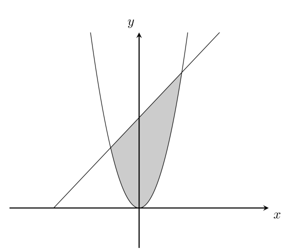
איור 19: התחום $\bar{D}$ באפור



$$\int_1^2\int_0^y\left(x^2y^2\right)dxdy=\int_1^2 \frac{x^3y^2}{3}\bigg|_0^y dy=\int_1^2\left(\frac{y^5}{3}\right)dy=\frac{y^6}{18}\bigg|_1^2=\boxed{\frac{63}{18}}$$

תרגיל:
חשב בתחום $\bar{D}$ החסום על ידי $y=x^2, y=x+6$ את האינטגרל $\iint_{\bar{D}} x\ dA$:
התחום $\bar{D}$ הוא פשוט אנכית, נשרטט את התחום:

איור 20: התחום $\bar{D}$ באפור



$$\int_{-2}^3\int_{x^2}^{x+6} x\ dydx=\int_{-2}^3 xy|_{x^2}^{x+6}dx=\int_{-2}^3\left(x^2+6x-x^3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x^2-\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_{-2}^3=\boxed{\frac{125}{12}}$$

6.2 שינוי סדר אינטגרציה

בהינתן סדר אינטגרציה מסוים שלא ניתן לחישוב נהפוך את הסדר ונחשב בקלות:

- פשוט אופקית $\longleftarrow$ פשוט אנכית
- פשוט אנכית $\longleftarrow$ פשוט אופקית

לאחר ההמרה נשנה את הגבולות בהתאמה ונפתור.

<u>דוגמא:</u>

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx$$

אנחנו לא יכולים לחשב את $\int e^{y^2} dy$, לכן ננסה לשנות את סדר האינטגרציה:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2y \end{cases}$$

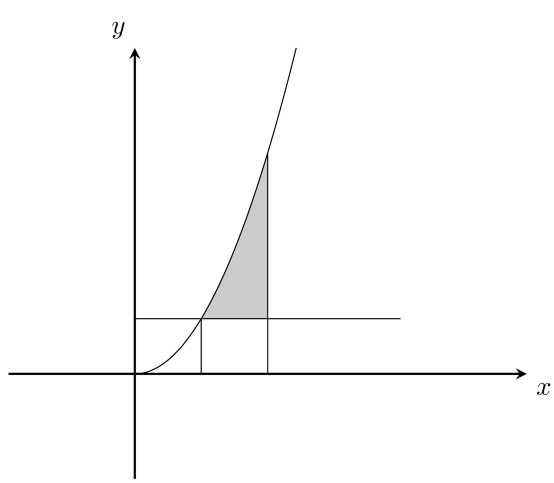
כעת התחום הומר מפשוט אנכית לפשוט אופקית:

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dxdy = \int_0^2 e^{y^2} x\Big|_0^{2y} dy = \int_0^2 2y \cdot e^{y^2} dy = e^{y^2}\Big|_0^2 = \boxed{e^4 - 1}$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dxdy$$

איור 21: התחום באפור



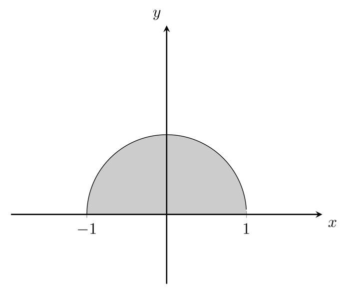
נשנה את הסדר:

$$\int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dydx = \int_1^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) y\Big|_1^{x^2} dx = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx = \cos\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2 = \boxed{0}$$

תרגיל:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$$

איור 22: התחום באפור



נשנה את הסדר:

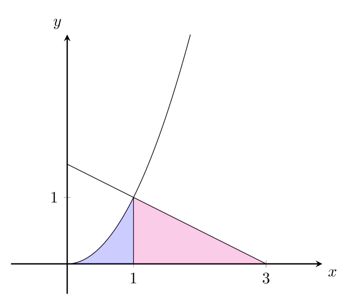
$$\begin{cases} 0\le y\le\sqrt{1-x^2} \\ -1\le x\le 1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0\le y\le 1 \\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\left(x,y\right)dxdy}$$

תרגיל:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} f\left(x,y\right)dydx+\int_{1}^{3}\int_{0}^{\frac{3-x}{2}} f\left(x,y\right)dydx$$

$$\Longrightarrow D_1=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\right\}, D_2=\left\{\left(x,y\right)\middle|1\le x\le 3, 0\le y\le\frac{3-x}{2}\right\}$$

איור 23: התחום D_1 בכחול, D_2 בורוד



נשנה את הסדר:

$$\Longrightarrow\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ \sqrt{y}\le x\le 3-2y\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f\left(x,y\right)dxdy}$$

6.3 החלפת משתנים

6.3.1 היעקוביאן

בהינתן אינטגרל כפול המחושב על פונקציה $f(x,y)$ ביחס לתחום D המובע על ידי x,y, נרצה לבצע החלפת משתנים למשתנים החדשים u,v, כך שנייצג באמצעותם את $f(x,y)$ ואת D:

$$f^*(u,v), \bar{D}^*(u,v)$$

$$\Longrightarrow \iint_{D(x,y)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*(u,v)} f^*(u,v)\,|J|\,dudv$$

כאשר:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

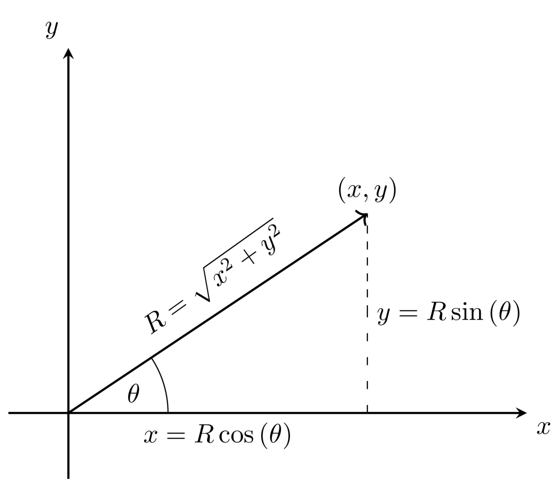
- $|J|$ מסמל את הערך המוחלט של היעקוביאן

6.3.2 החלפת משתנים פולארית

בתחומים מעגליים, חלקי מעגל וטבעות נחליף את המשתנים (x,y) במשתנים (R,θ) על ידי הקשר הבא:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ R = \sqrt{x^2+y^2} \\ J = R \end{cases}$$

איור 24: המחשה



היעקוביאן בהצגה פולארית תמיד שווה ל־R:

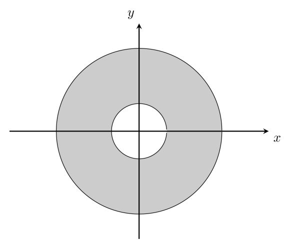
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} = R\cos^2\theta - \left(-R\sin^2\theta\right) = R\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = \boxed{R}$$

תרגיל:

חשב את האינטגרל: $D = \left\{(x,y)\,\middle|4 \le x^2+y^2 \le 9, y \ge 0\right\}$ כאשר

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

איור 25: התחום D באפור



נחליף משתנים להצגה פולארית:

$$R = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow 2 \le R \le 3, 0 \le \theta \le \pi$$

קיבלנו תחום פשוט לגמרי, כעת נחשב את האינטגרל:

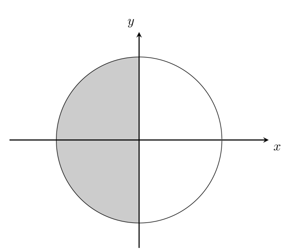
$$\int_0^\pi \int_2^3 R \cdot \underbrace{R}_{|J|} dRd\theta = \int_0^\pi \left.\frac{R^3}{3}\right|_2^3 d\theta = \int_0^\pi \frac{19}{3}d\theta = \left.\frac{19\theta}{3}\right|_0^\pi = \boxed{\frac{19\pi}{3}}$$

תרגיל:

חשב את האינטגרל: $D = \left\{(x,y)\,\middle|x^2+y^2 \le 4, x \le 0\right\}$ כאשר

$$\iint_D \left(4-x^2-y^2\right) dxdy$$

איור 26: התחום D באפור



נחליף משתנים להצגה פולארית:

$$R = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow 0 \le R \le 2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$$

קיבלנו תחום פשוט לגמרי, כעת נחשב את האינטגרל:

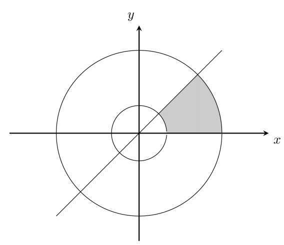
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^2 \left(4-R^2\right) \cdot \underbrace{R}_{|J|} dRd\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left. 2R^2 - \frac{R^4}{4}\right|_0^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \; d\theta = 4\theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boxed{4\pi}$$

תרגיל:

כאשר $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2\le 9, 0\le y\le x\right\}$ חשב את האינטגרל:

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dydx$$

איור 27: התחום D באפור



נחליף משתנים להצגה פולארית:

$$R=\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow 1\le R\le 3, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

קיבלנו תחום פשוט לגמרי, בנוסף:

$$\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta}=\arctan\left(\tan\theta\right)=\theta$$

כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^3\theta\cdot\underbrace{R}_{|J|}\,dRd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left.\frac{\theta R^2}{2}\right|_1^3d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\theta\ d\theta=\left.2\theta^2\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

6.3.3 החלפת משתנים כללית

נציב במקום המשתנים הישנים (x,y) את החדשים (u,v), נשנה את הגבולות ונכפיל ביעקוביאן.

- לאחר ההצבה התחום החדש צריך להיות תחום פשוט לגמרי

תרגיל:

כאשר D הוא התחום החסום על ידי $x+y=2,x+y=4,x-y=0,x-y=1$, חשב את האינטגרל:

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}dxdy$$

המשתנים החדשים יהיו $u=x+y, v=x-y$. התחום החדש הוא:

$$D^*=\{(u,v)\,|2\leq u\leq 4, 0\leq v\leq 1\}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}$$

כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^1\int_2^4\frac{u}{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{|J|}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\ln u|_2^4\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\ln 2\ dv=\frac{\ln 2}{2}\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^1=\boxed{\frac{\ln 2}{4}}$$

תרגיל:

כאשר D הוא התחום החסום על ידי $x+2y=5,x+2y=4,x-2y=\frac{\pi}{2},x-2y=\frac{\pi}{3}$, חשב את האינטגרל:

$$\iint_D (x+2y)\sin(x-2y)\,dxdy$$

המשתנים החדשים יהיו $u=x+2y, v=x-2y$. התחום החדש הוא:

$$D^*=\left\{(u,v)\,\middle|4\leq u\leq 5, \frac{\pi}{3}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=-\frac{1}{4}$$

כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_4^5 u\sin(v)\cdot\underbrace{\frac{1}{4}}_{|J|}dudv=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{u^2\sin(v)}{2}\right|_4^5 dv=\frac{9}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(v)\,dv=\frac{9}{8}\left(-\cos(v)\right)|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{9}{16}}$$

7 שאלות לתרגול נוסף

השאלות

1. כאשר D הוא התחום החסום על ידי $y=16x^3, y=4x^3, x+y=4, x+y=1$ חשב את האינטגרל:

$$\iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dxdy$$

2. החלף את סדר המשתנים באינטגרל הבא:

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx$$

3. החלף את סדר המשתנים באינטגרל הבא:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx$$

4. חשב את האינטגרל הבא:

$$\int_{0}^{8} \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{y^4+1} dydx$$

5. כאשר D הוא התחום החסום על ידי $y^2=x^2-3, y^2=x^2-4, y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}$ חשב את האינטגרל:

$$\iint_D \left(x^4-y^4\right) e^{xy} dxdy$$

6. החלף את סדר המשתנים באינטגרל הבא:

$$\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dxdy$$

7. כאשר D הוא התחום החסום על ידי $x^2+y^2 \le 9, x \le 0, y \le 0$ חשב את האינטגרל הבא:

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dxdy$$

8. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\right)^2$ מתכנס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ב) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot a_n$ מתבדר אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם $A=\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$ אז $A \ge 0$.

(ב) אם (x_0,y_0,z_0) נקודת מינימום מקומי של $f(x,y,z)$ אשר רציפה ורציפה בכל נקודה אז $H_1+H_2+H_3>0$ (סכום המינורים חיובי).

(ג) אם $H_1+H_2+H_3>0$ ב־(x_0,y_0,x_0) אז היא נקודת מינימום של f.

10. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$ מתבדר.

(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי המקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הוא בהכרח מתכנס.

(ג) אם $f(x,y)$ פונקציה אי שלילית מעל התחום החסום והסגור D אז $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ הוא אי שלילי.

11. נתונה הפונקציה $f(u,v)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות לכל (u,v). נתון כי $\frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = -3, \frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = 2$.
נגדיר $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ כאשר $u = x + y^2, v = 2x - y$. חשב את ערך הביטוי:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$$

12. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים/מתבדרים:

(א)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

(ב)

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin^4(n)}{n^4 + 1}$$

13. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים/מתבדרים:

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7n^2 + 1}{n^2 + \ln n}$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

14. נתונה הפונקציה $f(x,y) = 4x + 2y + 2\sqrt{x^2 y}$. מהו הערך של הנגזרת המכוונת המקסימלית בנקודה $(3,1)$?

הפתרונות

1. נבצע החלפת משתנים: $u=x+y, v=\frac{y}{x^3}$. כעת התחום הוא $\{(u,v)\ 1\le u\le 4, 4\le v\le 16\}$, נחשב את היעקוביאן:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{-3y}{x^4} & \frac{1}{x^3}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{1}{x^3}-\left(-\frac{-3y}{x^4}\right)}=\frac{1}{\frac{x+3y}{x^4}}$$

$$\Longrightarrow \int_1^4\int_4^{16}\cancel{\frac{x+3y}{x^4}}\cdot e^v\cdot\underbrace{\cancel{\frac{1}{\frac{x+3y}{x^4}}}}_{|J|}dvdu=\int_1^4\int_4^{16}e^v dvdu=\int_1^4 e^v|_4^{16}du=\left(e^{16}-e^4\right)\int_1^4 1du=\left(e^{16}-e^4\right)u|_1^4=\boxed{3\left(e^{16}-e^4\right)}$$

2. התחום הוא $\left\{(x,y)\,\middle|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$. נרצה להביע את תחום ה־$x$ כתלות ב־y:

$$\left\{\begin{array}{c}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0\le y\le 1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0\le y\le 1\end{array}\right.\Longrightarrow\boxed{\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dxdy}$$

3. התחום הוא $\left\{(x,y)\,\middle|-1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$. נרצה להביע את תחום ה־$x$ כתלות ב־y:

$$\left\{\begin{array}{c}-1\le x\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ -1\le y\le 1\end{array}\right.\Longrightarrow\boxed{\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dxdy}$$

4. תחילה נשנה את סדר האינטגרציה:

$$\left\{\begin{array}{c}0\le x\le 8\\ \sqrt[3]{x}\le y\le 2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}0\le x\le y^3\\ 0\le y\le 2\end{array}\right.\Longrightarrow\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{y^4+1}dydx=\int_0^2\int_0^{y^3}\frac{1}{y^4+1}dxdy$$

$$\Longrightarrow\int\frac{x}{y^4+1}\bigg|_0^{y^3}dy=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{4y^3}{y^4+1}dy=\frac{1}{4}\ln|\,y^4+1|\Big|_0^2=\boxed{\frac{1}{4}\ln 17}$$

5. נבצע החלפת משתנים: $u=x^2-y^2, v=xy$. כעת התחום הוא $\{(u,v)\,|3\le u\le 4, 1\le v\le 3\}$, נחשב את היעקוביאן:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{1}{2x^2-(-2y^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow\int_3^4\int_1^3\cancel{\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2-y^2\right)\cdot e^v\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cancel{\frac{1}{x^2+y^2}}}_{|J|}dvdu=\frac{1}{2}\int_3^4\int_1^3 u\cdot e^v dvdu$$

$$=\frac{1}{2}\int_3^4 u\,e^v|_1^3\,du=\frac{1}{2}\left(e^3-e\right)\int_3^4 u\,du=\frac{1}{2}\left(e^3-e\right)\frac{u^2}{2}\bigg|_3^4=\boxed{\frac{7}{4}\left(e^3-e\right)}$$

6. התחום הוא $\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y\right\}$. נרצה להביע את תחום ה־$x$ כתלות ב־y:

$$\left\{\begin{array}{c}0\le y\le 1\\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}0\le y\le \sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 0\end{array}\right. , \quad \begin{array}{c}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dydx}$$

7. נבצע החלפת משתנים פולרית. כעת התחום הוא $\left\{(R,\theta)\,\middle|\,0\le R\le 3, \pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\right\}$, נחשב את האינטגרל:

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{3}\sqrt{9-R^2}\cdot\underbrace{R}_{|J|}\,dRd\theta = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left.\frac{\left(9-R^2\right)^{1.5}}{1.5}\right|_{0}^{3} d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 9d\theta = 9\theta|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$$

8. טענה א' אינה נכונה, טענה ב' אינה נכונה:

(א) הטענה אינה נכונה, למשל עבור $a_n=\frac{1}{n}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

(ב) הטענה אינה נכונה, למשל עבור $a_n=n$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot a_n=\sum_{n=1}^{\infty}3n$ מתבדר ובנוסף $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

9. טענה א' אינה נכונה, טענה ב' אינה נכונה וטענה ג' נכונה:

(א) הטענה אינה נכונה, למשל עבור כל פונקציה שלילית.

(ב) הטענה נכונה, הנקודה היא מינימום מקומי ולכן כל המינורים חיוביים, ולכן גם הסכום שלהם חיובי.

(ג) הטענה אינה נכונה, במידה והתבנית המוגדרת על ידי ההסיאן היא שלילית או מעורבת סכום המינורים יכול להיות חיובי אך הנקודה אינה מינימום מקומי.

10. טענה א' נכונה, טענה ב' אינה נכונה וטענה ג' נכונה:

(א) הטענה נכונה, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, כלומר $\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=1$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$ מתבדר.

(ב) הטענה אינה נכונה, למשל עבור $a_n=\frac{1}{n}$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ אך $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

(ג) הטענה נכונה, האינטגרל מבטא את נפח הגוף החסום בין הפונקציה והמקצועות המקבילות לציר ה־z.

11. תחילה, $u(1,1)=2, v(1,1)=1\Longrightarrow g(1,1)=f(2,1)$.

$$\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)+\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}(2,1)\frac{\partial u}{\partial x}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial u}(2,1)\frac{\partial u}{\partial y}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}(2,1)=(-3+4)+(-6-2)=\boxed{-7}$$

12. טור A מתבדר וטור B מתכנס:

(א) נסתכל על האיבר הכללי $\frac{n^n}{n!}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots 1}>0\Longrightarrow\boxed{A\text{ diverges}}$$

(ב) נסתכל על הטור B:

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^4(n)}{n^4+1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

בנוסף הטור $\frac{1}{n^3}$ הוא טור α עבור $\alpha=3$ ולכן מתכנס. ולכן לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים הטור B מתכנס.

13. טור א' <u>מתכנס</u>, טור ב' <u>מתכנס</u>, טור ג' <u>מתכנס</u> וטור ד' <u>מתבדר</u>.

(א) נבדוק את האיבר הכללי של הטור:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+1}{n^2+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{\ln n}{n^2}}=\boxed{7}\Longrightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^2+1}{n^2+\ln n}\text{ diverges}}$$

(ב) נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}<1\Longrightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\text{ converges}}$$

(ג) זהו טור הנדסי שמנתו $\frac{4}{5}<1$, כלומר הטור <u>מתכנס</u>.

(ד) זהו טור הנדסי שמנתו $\frac{5}{4}>1$, כלומר הטור <u>מתבדר</u>.

14. ערך הנגזרת המכוונת המקסימלית הוא אורך הגרדיאנט:

$$\nabla f=\left(4+2\sqrt{y},2+\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2y}}\right)=\left(4+2\sqrt{y},2+\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\Longrightarrow\nabla f\left(3,1\right)=\left(6,5\right)\Longrightarrow\left|\nabla f\left(3,1\right)\right|=\sqrt{6^2+5^2}=\boxed{\sqrt{61}}$$