מתמטיקה דיסקרטית

תרגול 16

עקרון שובך היונים:-

ניסוח של מקרה פשוט:- תהי $f: N \to K$ כך ש- $|N| = n$ ו- $|K| = k$
ו- $n > k$. אז: f לא יכולה להיות חח"ע.
אם מכניסים $n+1$ יונים בתוך n שובכים אז: בהכרח קיים שובך שבו יותר מיונה אחת.

תרגיל:- נתונים 12 מספרים דו-ספרתיים שונים. הוכיחו כי ניתן לבחור ביניהם שני מספרים כך שההפרש שלהם הוא מספר דו-ספרתי בעל שתי ספרות זהות.

פתרון:- נחלק את 12 המספרים ב- 11 עם שארית. נקבל בכך 12 שאריות. מתוכן יש לכל היותר 11 שאריות שונות. לכן לפי עקרון שובך היונים קיימים שני מספרים x, y הנמצאים בקבוצה שלנו שנותנים אותה שארית בחלוקה ב- 11. כלומר $x \bmod 11 = y \bmod 11$. $\Leftarrow$ $y - x = x - y = 0 \bmod 11$.
בה"כ נניח ש- $x > y$. כיוון ש- $x \neq y$ ו- x, y הם דו-ספרתיים ובנוסף
$x - y$ מתחלק ב- 11 אז: בוודאות $x - y$ מספר דו-ספרתי.
$x - y$ מתחלק ב- 11 והוא דו-ספרתי לכן יש לו שתי ספרות זהות.

תרגיל:- תהי $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. הוכיחו/הפריכו :-

א) אם בוחרים 51 מספרים מתוך הקבוצה A אז: בהכרח יש שני מספרים מתוכם שאחד מהם מחלק את השני.

ב) אם בוחרים 51 מספרים מתוך A אז: בהכרח יש שני מספרים מתוכם שהם זרים.

ג) כמו סעיף א' אבל במקום 51 בוחרים 50.

פתרון :- א. נכון. הוכחה :- ייצוג של מספר טבעי חיובי ניתן לרשום באופן הבא :- $n=2^{\alpha}\cdot\beta$ כאשר $\mathbb{N}\ni\alpha\geq 0$ ו- β אי-זוגי.

נכתוב את כל המספרים של A בצורה הזו ואז נקבל 50 אפשרויות ל- β כי ישנם 50 מספרים אי-זוגיים מ-1 ל-100.

לכן, לפי עקרון שובך היונים קיימים שני מספרים (מתוך ה-51) x,y שיש להם אותו β. כלומר

$$x=2^{\alpha_1}\cdot\beta$$
$$y=2^{\alpha_2}\cdot\beta$$

בה"כ $x>y$ אז: $\frac{x}{y}=2^{\alpha_1-\alpha_2}\in\mathbb{N}$. לכן y מחלק את x.

ב. הטענה נכונה. הוכחה :- נחלק את הקבוצה A ל- 50 קבוצות באופן הבא :- $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\dots,\{99,100\}$. כל קבוצה מבין 50 הקבוצות האלו מכילה רק מספרים זרים. לפי עקרון שובך היונים אם נבחר 51 מספרים אז בהכרח שניים מהם נלקחו מאותה קבוצה. בפרט הם זרים.

ג. לא נכון. למשל אם נבחר $B=\{51,52,53,\dots,100\}$ זו קבוצה של 50 מספרים שאף מספר בה מחלק מספר אחר.

עקרון שובך היונים המוכלל :- אם מכניסים $nk+1$ יונים לתוך k שובכים אז בהכרח קיים שובך המכיל לפחות $n+1$ יונים.

ניסוח לפי פונקציות :- תהיינה A,B קבוצות כך ש- $|A|=nk+1$, $|B|=k$ אז: לכל פונקציה $f:A\to B$ קיים $b\in B$ כך ש-

$$|\{a\in A \mid f(a)=b\}|\geq n+1$$

הוכחה :- אם בשלילה כל שובך מכיל לכל היותר n יונים אז יהיו לכל היותר $n\cdot k$ יונים. סתירה.

עקרון ההכלה וההדחה :-

נוסחת ההכלה וההדחה :-

בהינתן עולם U ותתי-קבוצות שלו $A_1, A_2, \dots, A_r$. אז:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1\le i\ne j\le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i\ne j\ne k\le r} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$- \left(\text{סכום חיתוכים של 4}\right) + \dots + (-1)^{r} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_r|$$

נוסחה יותר שימושית :-

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_r^c| = |U| - \sum_{i=1}^{r} |A_i| + \sum_{1\le i\ne j\le r} |A_i \cap A_j| - \dots$$

$$+ (-1)^{r} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|$$

תזכורת :- בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים ל-t תאים? $(k \le t)$

	כדורים שונים	כדורים זהים
בכל תא יש מקום לכדור אחד בלבד	$\frac{t!}{(t-k)!}$	$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!\cdot(t-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	t^k	$\binom{k+t-1}{k} = \binom{k+t-1}{t-1}$

תרגיל :- בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים זהים ל-5 תאים כך שבאף תא לא יהיו יותר מ-24 כדורים.

פתרון :- תהי U קבוצת כל האפשרויות לחלק 80 כדורים זהים ל-5 תאים. לכל $1 \le i \le 5$ תהי A_i קבוצת כל הדרכים בהן התא ה-i מכיל

יותר מ-24 כדורים. אז: צריך לחשב את

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_5^c| = |U| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1\le i\ne j\le 5}|A_i\cap A_j|$$

לפי הנוסחה

$$-\sum_{1\le i\ne j\ne k\le 5}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \text{סכום חיתוכי 4} - \text{סכום חיתוכי 5}$$

$$= \binom{80+5-1}{5-1} - 5\binom{55+5-1}{5-1} + \binom{5}{2}\binom{30+5-1}{5-1} - \binom{5}{3}\cdot\binom{5+5-1}{5-1}$$

לפי הטבלה

$$5 = \binom{5}{1}$$

בוחרים תא ושמים בו 25 כדורים. את

שאר 55 הכדורים שנשארו נחלק ל-5 תאים בלי שום הגבלה

בוחרים 2 תאים ושמים 25 כדורים בכל תא

מחלקים את 30 הכדורים שנותרו.

בוחרים 3 תאים ושמים בכל אחד 25 כדורים

מחלקים את 5 הכדורים שנשארו

$$+0-0$$

לא ייתכן שיש 4 תאים או יותר המכילים יותר מ-24 כדורים כי ישנם רק 80 כדורים.

תרגיל:- בכמה תמורות של המספרים 1,2,3,...,9 לא נמצאים זה לצד זה אף אחד מהזוגות 1,2 ; 3,4 ; 4,5.

פתרון:- תהיינה U קבוצת כל התמורות על הקבוצה $\{1,2,...,9\}$. נסמן ב- $A_{1,2}$ את קבוצת כל התמורות בהן 1,2 נמצאים זה לצד זה. $A_{3,4}$ ו- $A_{4,5}$ מוגדרים באופן דומה ל- $A_{1,2}$. אז:

$$|A_{1,2}^c \cap A_{3,4}^c \cap A_{4,5}^c| = |U| - (|A_{1,2}| + |A_{3,4}| + |A_{4,5}|)$$
$$+ (|A_{1,2}\cap A_{3,4}| + |A_{1,2}\cap A_{4,5}| + |A_{3,4}\cap A_{4,5}|)$$
$$- |A_{1,2}\cap A_{3,4}\cap A_{4,5}|$$

$$= 9! - 3\cdot\underbrace{(8!\cdot 2)} + \left(\underbrace{7!\cdot 2!\cdot 2!} + \underbrace{7!\cdot 2!\cdot 2!} + 7!\cdot 2\right) - 6!\cdot 2\cdot 2$$

למשל עבור $A_{1,2}$ נתייחס ל- 1,2 כגוש אחד ואז יהיו 8 איברים שצריך לסדר בשורה לשם כך יש 8! אפשרויות. נכפיל בסוף בסידור הפנימי של 1,2 שהוא 2!=2

ב- $A_{1,2}\cap A_{3,4}$ מתייחסים ל- 1,2 כגוש וגם 3,4 כגוש אחד. לכן יהיו 7 איברים שצריך לסדר בשורה לשם כך יש 7! אפשרויות. נכפול בסידור הפנימי של 3,4 ו- 1,2 - !

אותו הסבר

ההבדל בין מקרה זה לשני המקרים האחרונים הוא ש- 4 חייב להיות באמצע. ואז הסידור הפנימי הוא 345 או 543.

כמו מקודם מתייחסים ל- 1,2 כגוש ו- 3,4,5 כגוש ואז יהיו 6 איברים שצריך לסדר. לשם כך יש 6! אפשרויות. נכפיל בסידור הפנימי של 1,2 ושל 3,4,5 (4 חייב להיות באמצע) ונקבל 2·2. סה"כ $6!\cdot 2\cdot 2$.