מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 18

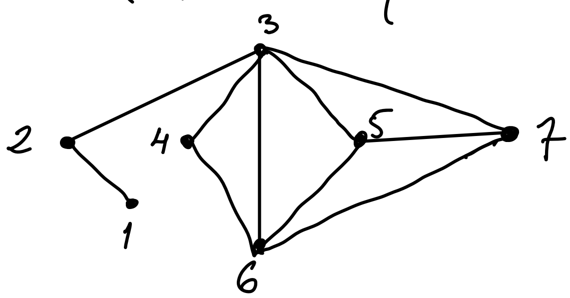
הגדרות:- יהי $G=(V,E)$ גרף :-

1. יהי $v\in V$. נסמן קבוצת השכנים של v ב- $N(v)$. כלומר
$$N(v)=\{u\in V \mid (u,v)\in E\}$$

2. יהיו $u,v\in V$. המרחק בין u ו- v מוגדר להיות:-
$$dist(u,v):=\begin{cases}\infty & \text{אין מסלול מ-}u\text{ ל-}v\\ n & \text{הוא האורך של המסלול הכי קצר מ-}u\text{ ל-}v\text{, } n\end{cases}$$

3. הקוטר של G מוגדר להיות המרחק המקסימלי בין זוגות קודקודים
$$diam(G):=\max\{dist(u,v)\mid u,v\in V\}$$

למשל:-



$$dist(1,5)=3\ ,\ dist(5,4)=2$$

$$diam(G)=3$$

4. G נקרא גרף קשיר אם יש לו רכיב קשירות אחד בלבד. או באופן שקול, G נקרא קשיר אם לכל $u,v\in V$ קיים מסלול מ- u ל- v.

טענה:- G קשיר $\iff$ $diam(G)<\infty$. מסלול

הוכחה:- $(\Leftarrow)$ נתון G קשיר לכן יש מסילה בין כל שני קודקודים. בפרט $dist(u,v)<\infty$ לכל $u,v\in V$. נגדיר קבוצה $A=\{dist(u,v)\mid u,v\in V\}$. לכל $x\in A$ מתקיים $x\in\mathbb{N}$. בנוסף ישנו מספר סופי של קודקודים ב- G. לכן $A\subseteq\mathbb{N}$ סופית. לכן יש לה מקסימום נסמנו ב- $m=\max A$. אזי

ב-N $m = \max A = \max\{dist(u,v) \mid u,v\in V\} = diam(G)$

קיבלנו $diam(G)\in N$ בפרט $diam(G)<\infty$.

($\Longrightarrow$) $diam(G)<\infty$ לכן לכל $u,v\in V$ מתקיים $dist(u,v)<\infty$ לכן יש מסלול בין u ו-v. בפרט G קשיר.

תרגיל: יהי $G=(V,E)$ גרף כך ש-$|V|=n$. נניח שלכל $v\in V$ מתקיים $|N(v)|\geq \frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי $diam(G)\leq 2$.

פתרון: יהיו $u,v\in V$ נראה כי $dist(u,v)\leq 2$.

אם u,v שכנים אז $dist(u,v)=1\leq 2$.

אם u,v אינם שכנים. נראה כי יש להם שכן משותף בפרט נסיק $dist(u,v)=2$. נניח בשלילה שאין להם שכן משותף. כלומר $N(v)\cap N(u)=\emptyset$

לכן בגרף יש לפחות $|N(v)\cup N(u)\cup\{u,v\}|$ קודקודים.

אבל

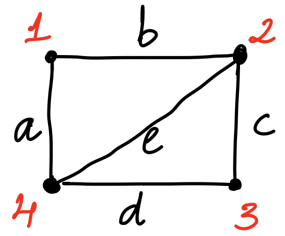
$$|N(v)\cup N(u)\cup\{u,v\}| \underset{\text{האיחוד זר}}{=} |N(v)|+|N(u)|+|\{u,v\}| \underset{\text{הנחה}}{\geq} \frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+2 = n+1$$

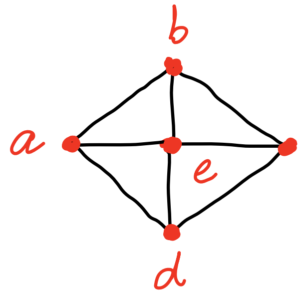
בסתירה לכך ש-$|V|=n$. לכן $N(u)\cap N(v)\neq\emptyset$. בפרט $dist(u,v)=2$. לכן $diam(G)\leq 2$.

תרגיל: יהי $G=(V,E)$ גרף. נגדיר גרף חדש $G'=(E,E')$ כך ש: הקודקודים של G' הם הקשתות של G. בנוסף שתי קשתות $e_1,e_2\in E$ מחוברות ב-G' אם ורק אם יש להן נקודת קצה משותפת.
במילים אחרות, קבוצת הקודקודים של G' היא E ולכל $e_1=(a,b)$, $e_2=(c,d)\in E$ שונות מתקיים $(e_1,e_2)\in E'$ אם ורק אם $a=c$ או $a=d$ או $b=c$ או $b=d$. להלן דוגמה ל-G

ו-G' :

G





G'

הוכיחו כי אם G קשיר אז גם G' קשיר.

פתרון :- יהיו G,G' כמו בשאלה. נוכיח כי G' קשיר. יהיו $e_1,e_2\in E$ (קודקודים ב-G' שהם בעצם קשתות ב-G) נוכיח כי יש מסלול ב-G' מ-e_1 ל-e_2. נסמן ב-u_1,v_1 נקודות הקצה של e_1 וב-u_2,v_2 נקודות הקצה של e_2. כלומר $e_1=(u_1,v_1)$ ו-$e_2=(u_2,v_2)$. נתון $G-e$ קשיר לכן קיים מסלול מ-u_1 ל-u_2 ונאמר $w_1,w_2,w_3,\dots,w_k$ כלומר $w_1=u_1$ ו-$w_k=u_2$. הסדרה הבאה של קשתות ב-G היא מסלול ב-G' מ-e_1 ל-e_2 : $e_1,(w_1,w_2),(w_2,w_3),\dots,(w_{k-1},w_k),e_2$

כלומר $(u_1,v_1),(u_1,w_2),(w_2,w_3),\dots,(w_{k-1},u_2),(u_2,v_2)$

$u_1=w_1$ $\qquad$ $u_2=w_k$

זה מסלול ב-G' כי u_1 מופיע ב-(u_1,w_2) ו-(u_1,v_1), בנוסף לכל $2\le i\le k-1$ מתקיים w_i מופיע ב-$(w_{i-1},w_i),(w_i,w_{i+1})$ ובנוסף u_2 מופיע ב-(w_{k-1},u_2) ו-(u_2,v_2). לכן באמת זה מסלול ב-G' מ-e_1 ל-e_2. מכאן G' קשיר.

תזכורת :- יהי G גרף קשיר ו-e קשת ב-G. אזי $G\setminus\{e\}$ קשיר $\Longleftrightarrow$ e נמצאת על מעגל פשוט ב-G.

משפט אוילר :- בגרף קשיר יש מעגל אוילר (מעגל שעובר בכל קשת פעם אחת בדיוק) אמ"ם דרגת כל הקודקודים היא זוגית.

תרגיל :- יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר כך שדרגת כל קודקוד היא 2.
הוכיחו שלא קיימת קשת $e\in E$ כך ש- $G\setminus\{e\}$ לא קשיר.

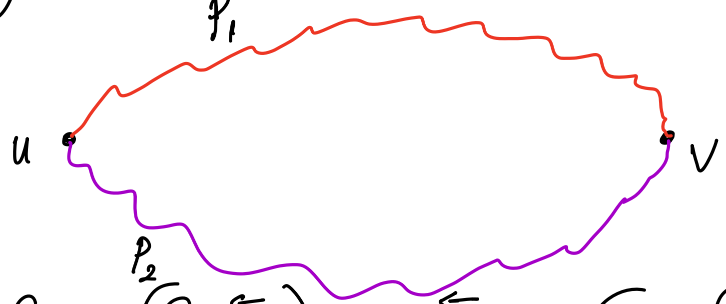
הוכחה :- יהי $G=(V,E)$ כמו בשאלה. נניח שלכל $e\in E$ הגרף $G\setminus\{e\}$ קשיר. תהי $e\in E$. לפי התכונה $G\setminus\{e\}$ קשיר $\iff$ e נמצאת על מעגל ב- G. נתון שלכל $v\in V$, $deg(v)=2$ לכן לפי משפט אוילר יש מעגל אוילר בגרף. בפרט מעגל זה עובר דרך e. כלומר e נמצאת על מעגל ב- G. לכן לפי התכונה $G\setminus\{e\}$ קשיר.

הגדרה :- יהי $G=(V,E)$ גרף. G יקרא עץ אם G קשיר ואין בו מעגלים.

טענה :- בעץ יש מסלול פשוט אחד ויחיד בין כל שני קודקודים.

הוכחה :- יהי $T=(V,E)$ עץ ויהיו $u,v\in T$. כיוון ש-T עץ אז הוא קשיר. בפרט יש מסלול מ-u ל-v. לכן יש מסלול פשוט מ-u ל-v (הרצאות). נניח בשלילה שיש עוד מסלול פשוט מ-u ל-v. אזי יתכנו שני מקרים :-

1.



במקרה זה נקבל מעגל $P_1\overleftarrow{P_2}$ ($\overleftarrow{P_2}$ מסלול מ-v ל-u) בסתירה לכך ש-T עץ.

2.

שוב נקבל מעגל $u\to w\to u$ ושוב סתירה לכך ש-T עץ.

תרגיל :- יהי $T=(V,E)$ עץ ותהי e קשת שלא נמצאת ב-T.
נסמן ב-G את הגרף המתקבל מ-T ע"י הוספת הקשת e אליו.
הוכיחו שקיים ב-G מעגל פשוט יחיד.

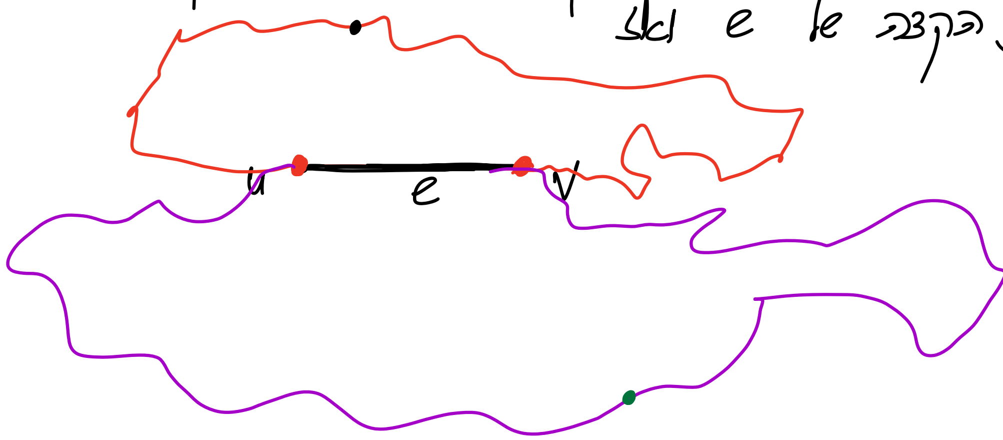
פתרון :- יהי T,G,e כמו בשאלה, צ"ל שני דברים :-

1) קיים ב-G מעגל.

2) לא קיים ב-G שני מעגלים.

1. נשים לב שהעץ T הוא $G\setminus\{e\}$. כלומר $G\setminus\{e\}$ עץ בפרט קשיר. לכן e נמצאת על מעגל פשוט ב-G. לכן קיים מעגל פשוט ב-G.

2. נניח בשלילה שקיימים שני מעגלים פשוטים שונים, נסמן אותם ב-C_1 ו-C_2. מעגלים אלו חייבים לעבור דרך הקשת e אחרת שני המעגלים נמצאים ב-T וזו סתירה לכך ש-T עץ. נסמן ב- v,u את נקודות הקצה של e ואז



אם נוריד את הקשת e נקבל שני מסלולים פשוטים שונים מ-u ל-v ב-T. וזו סתירה לתרגיל קודם.