מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 6 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 29/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. תהיינה X, Y, Z, W קבוצות, $A, B \subseteq X$ תתי-קבוצות ותהיינה

$$f : X \to Y, \quad g : X \to Y, \quad h : W \to X, \quad k : Y \to Z$$

פונקציות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

א. $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

ב. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

ג. אם h היא על ו-$f \circ h = g \circ h$ אז $f = g$.

ד. אם h היא חח"ע ו-$f \circ h = g \circ h$ אז $f = g$.

ה. אם k היא על ו-$k \circ f = k \circ g$ אז $f = g$.

ו. אם k היא חח"ע ו-$k \circ f = k \circ g$ אז $f = g$.

פתרון 1. **א.** הפרכה: עבור $X = \{1, 2\}, Y = \{1\}$, $f(1) = 1, f(2) = 1$, נבחר $A = \{1\}, B = \{2\}$ ונקבל

$$f(A) = f(B) = \{1\} \implies f(A) \cap f(B) = \{1\}$$

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

והטענה אינה נכונה.

ב. הוכחה: יהיו $y \in f(A \cap B)$. אזי קיים $x \in A \cap B$ כך ש-$y = f(x)$. אזי עבור $x \in A$ מתקיים $y = f(x)$, ולכן $y \in f(A)$. באופן דומה מתקיים $y \in f(B)$ ולכן $y \in f(A) \cap f(B)$.

ג. הוכחה: יהי $x \in X$. מכיוון ש-$h : W \to X$ היא על, קיים $w \in W$ כך ש-$h(w) = x$. בנוסף, מכיוון ש-$f \circ h = g \circ h$ מתקיים

$$f \circ h(w) = g \circ h(w) \implies f(h(w)) = g(h(w)) \implies f(x) = g(x),$$

ולכן $f = g$.

ד. הפרכה: עבור $W = \{w\}, Y = \{a, b\}, X = \{1, 2\}$, $h(w) = 1$, $f(1) = g(1) = a$ ו-$f(2) = a, g(2) = b$ נקבל ש-$f \circ h = g \circ h$: $f \circ h(w) = a = g \circ h(w)$, לכן $f \circ h = g \circ h$, אבל $f \neq g$.

ה. הפרכה: נבחר $Z = \{z\}, Y = \{a, b\}, X = \{1\}$, $k(a) = k(b) = z$, $f(1) = a, g(1) = b$. נשים לב כי k על וגם $k \circ f(1) = z = k \circ g(1)$ ולכן $k \circ f = k \circ g$, אבל $f \neq g$.

ו. הוכחה: יהי $x \in X$. נשים לב ש-$k \circ f(x) = k \circ g(x)$, כלומר $k(f(x)) = k(g(x))$. מכיוון ש-k חח"ע נקבל ש-$f(x) = g(x)$. לכן $f = g$.

שאלה 2. תהיינה X, Y, Z קבוצות ו-$f : X \to Y, g : Y \to Z$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו-g הן על אז $g \circ f$ היא על.

ב. אם f ו-g הפיכות אז $g \circ f$ הפיכה, ומתקיים $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ג. f היא על אמ"מ לכל פונקציות <u>שונות</u> $g_1 : Y \to Z$ ו-$g_2 : Y \to Z$ מתקיים $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$.

פתרון 2. א. הוכחה: יהי $z \in Z$. מכיוון ש-g על, קיים $y \in Y$ כך ש-$g(y) = z$. מכיוון ש-f על, קיים $x \in X$ כך ש-$f(x) = y$. בסך הכל נקבל ש-

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

ולכן $g \circ f$ היא על.

ב. הוכחה: נניח ש-f ו-g הפיכות. יהיו $x \in X$ ו-$z \in Z$. נסמן $y = f(x) \in Y$. אזי,

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) = z &\iff g^{-1} \circ (g \circ f(x)) = z \\
&\iff \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f(x) = g^{-1}(z) \\
&\iff I_Y \circ f(x) = g^{-1}(z) \\
&\iff f(x) = g^{-1}(z) \\
&\iff f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(z) \\
&\iff I_X(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(z) \\
&\iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z).
\end{aligned}$$

לכן $g\circ f$ הפיכה ומתקיים $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

ג. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(i) ($\Longleftarrow$) נניח ש-f היא על, ותהיינה $g_1,g_2:Y\to Z$ פונקציות שונות. אזי קיים $y\in Y$ כך ש-$g_1(y)\neq g_2(y)$. מכיוון ש-f על, קיים $x\in X$ כך ש-$f(x)=y$. אזי $g_1\circ f(x)=g_1(y)\neq g_2(y)=g_2\circ f(x)$ ולכן $g_1\circ f\neq g_2\neq f$.

(ii) ($\Longrightarrow$) נניח ש-f אינה על, לכן קיים $y_0\in Y$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f(x)\neq y_0$. אם ב-Z אין יותר מאיבר אחד, כל שתי פונקציות מ-Y ל-Z שוות והטענה מתקיימת באופן ריק. אחרת, יהיו $z_1\neq z_2\in Z$. נגדיר פונקציות $g_1,g_2:Y\to Z$ כך ש-

$$\forall y\in Y: g_1(y)=z_1,\quad g_2(y)=\begin{cases}z_1 & y\neq y_0\\ z_2 & y=y_0\end{cases}.$$

יהי $x\in X$. אזי $f(x)\neq y_0$ ולכן $g_1\circ f(x)=g_2\circ f(x)=z_1$. לכן $g_1\circ f=g_2\circ f$ בעוד ש-$g_1\neq g_2$.

שאלה 3.

א. נגדיר פונקציה $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}^+$ באופן הבא:

$$\forall (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: g(a,b)=2^a\cdot(2b+1).$$

הוכיחו כי g הפיכה. **רמז:** בדקו את המקורות של $3,5,6,16,17,24,30\in\mathbb{N}^+$ (למה יש בדיוק מקור יחיד?) הסיקו מכך דרך כללית לבחור את המקור.

ב. מצאו פונקציה הפיכה מ-$\{1/n\mid n\geq 1\}$ ל-$\{1/n\mid n\geq 2\}$.

ג. מצאו פונקציה הפיכה מ-$[0,1]$ ל-$[0,1)$. **רמז:** קיימת קבוצה S כך ש-

$$[0,1]=\{1/n\mid n\geq 1\}\cup S.$$

פתרון 3. א. נוכיח כי g היא חח"ע ועל.

- g חח"ע: יהיו $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כך ש-$g(a,b)=g(c,d)$. אזי $2^a(2b+1)=2^c(2d+1)$. נשים לב ש-$2b+1$ ו-$2d+1$ אי-זוגיים, ולכן 2 אינו גורם בפירוק לראשוניים שלהם. לכן נקבל שמספר המופעים של 2 בפירוק לראשוניים של $2^a(2b+1)$ שווה לשל 2^a, ובאותו האופן עבור $2^c(2d+1)$ ו-2^c. לכן, מכיוון ש-$g(a,b)=g(c,d)$ נקבל ש-$a=c$. אזי $2^a=2^c$, ולכן $2b+1=2d+1$ ומתקיים $b=d$. בסך הכל קיבלנו ש-$(a,b)=(c,d)$.

- g על: יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן ב-a את מספר המופעים של 2 בפירוק לגורמים ראשוניים של n. אזי קיים מספר אי-זוגי k כך ש-$n = k \cdot 2^a$. נסמן $k = 2b+1$ עבור $b \in \mathbb{N}$ ונקבל ש-$n = (2b+1) \cdot 2^a$, ולכן $g(a,b) = n$.

ב. אינטואיטיבית, נרצה למפות $1/2 \to 1$, $1/3 \to 1/2$ וכן הלאה. נסמן $A = \{1/n \mid n \geq 1\}$ ו-$B = \{1/n \mid n \geq 2\}$. נגדיר $f : A \to B$ כך ש-

$$\forall x \in A : f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1},$$

ונוכיח כי f היא חח"ע ועל.

- f היא חח"ע: יהיו $x, x' \in A$ כך ש-$f(x) = f(x')$. אזי,

$$\frac{1}{1/x+1} = \frac{1}{1/x'+1} \iff \frac{1}{x}+1 = \frac{1}{x'}+1 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \iff x = x'.$$

- f היא על: יהי $b \in B$, אזי קיים $2 \leq n \in \mathbb{N}$ כך ש-$b = 1/n$. עבור $a = \frac{1}{n-1} \in A$ מתקיים

$$f(a) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}}+1} = \frac{1}{(n-1)+1} = b.$$

ג. נסמן $S = [0,1] \setminus \{1/n \mid n \geq 1\}$. נגדיר פונקציה $f : [0,1] \to [0,1)$ באופן הבא:

$$\forall x \in [0,1] : f(x) = \begin{cases} x & x \in S \\ (1+1/x)^{-1} & x \notin S \end{cases}.$$

נשים לב שלכל $x \in S$ מתקיים $f(x) \in S$, וגם לכל $x \notin S$ מתקיים $f(x) \notin S$ (מסעיף קודם). נוכיח כי f היא חח"ע ועל.

- f היא חח"ע: יהיו $x, x' \in A$ כך ש-$f(x) = f(x')$. נפריד למקרים:
  - $f(x) \in S$ - אזי $x, x' \in S$: במקרה זה $x = f(x) = f(x') = x'$.
  - $f(x) \notin S$ - אזי $x, x' \notin S$: במקרה זה $(1+1/x)^{-1} = (1+1/x')^{-1}$ ולכן $x = x'$.
- f היא על: יהי $y \in [0,1)$. נפריד למקרים:
  - אם $y \in S$, נקבל שעבור $y \in [0,1]$ מתקיים $f(y) = y$.

- אם $y \notin S$, אזי קיים $n \in \mathbb{N}^+$ כך ש-$y = 1/n$. בנוסף, מכיוון ש-$y \neq 1$ מתקיים $n \neq 1$. עבור $x = 1/(n-1) \in [0,1)$ מתקיים

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{n-1}}\right)^{-1} = \frac{1}{n} = y.$$

שאלה 4.

א. תהיינה A, B, C, D קבוצות. הוכיחו כי אם $|A| = |C|$ וגם $|B| = |D|$ אז

$$|A \times B| = |C \times D|.$$

ב. עבור קבוצות A, B, נסמן ש-$|A| < |B|$ אמ"מ $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$.
הוכיחו שלכל שלוש קבוצות A, B, C, אם $|A| < |B|$ וגם $|B| \leq |C|$, אז $|A| < |C|$.

פתרון 4. **א.** מכיוון ש-$|A| = |C|$ קיימת פונקציה הפיכה $f : A \to C$, ומכיוון ש-$|B| = |D|$ קיימת פונקציה הפיכה $g : B \to D$. נגדיר פונקציה $h : A \times B \to C \times D$ כך ש-

$$\forall (a,b) \in A \times B : h(a,b) = (f(a), g(b)).$$

בנוסף, נגדיר $k : C \times D \to A \times B$ כך שלכל $(c,d) \in C \times D$ מתקיים $k(c,d) = (f^{-1}(c), g^{-1}(d))$. k היא הפונקציה ההופכית של h: יהיו $(a,b) \in A \times B$ ו-$(c,d) \in C \times D$. אזי,

$$\begin{aligned} h(a,b) = (c,d) &\iff (f(a), g(b)) = (c,d) \\ &\iff f(a) = c \wedge g(b) = d \\ &\iff a = f^{-1}(c) \wedge b = g^{-1}(d) \\ &\iff (a,b) = \left(f^{-1}(c), g^{-1}(d)\right) \\ &\iff (a,b) = k(c,d). \end{aligned}$$

לכן קיימת ל-h פונקציה הופכית והיא הפיכה. מכאן קיימת פונקציה הפיכה מ-$A \times B$ ל-$C \times D$ ולכן $|A \times B| = |C \times D|$.

ב. תהיינה A, B, C קבוצות כך ש-$|A| < |B|$ וגם $|B| \leq |C|$.

- $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |C|$, ומטרנזיטיביות אי-שוויון עוצמות מתקיים $|A| \leq |C|$.
- נניח בשלילה שקיימת פונקציה על $f : A \to C$.

- מכיוון ש-$|C| \leq |B|$, קיימת פונקציה חח"ע $g : B \to C$. יהי $b_0 \in B$ שרירותי, נגדיר פונקציה $h : C \to B$ כך ש-

$$\forall c \in C : h\left(c\right) = \begin{cases} c & \exists b \in B : g\left(b\right) = c \\ b_0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

נשים לב ש-h על: לכל $b \in B$, מהגדרת h מתקיים $h\left(g\left(b\right)\right) = b$.

- הפונקציה $h \circ f : A \to B$ היא הרכבה של פונקציות על ולכן היא על, ולכן קיימת פונקציה על מ-A ל-B, בסתירה לכך ש-$|A| < |B|$.