מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 5

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: יחסי סדר.

יחסי סדר

הגדרה 1. יחס R מעל קבוצה A הוא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי חלש וטרנזיטיבי. הזוג (A, R) מהווה קבוצה סדורה חלקית (קס"ח, או באנגלית **Poset**).

הגדרה 2. יחס R מעל קבוצה A הוא יחס סדר חזק אם הוא אנטי-אפלקסיבי, אנטי-סימטרי חזק וטרנזיטיבי (כמו $<$).

הגדרה 3. יחס R מעל קבוצה A הוא יחס סדר מלא/לינארי אם הוא יחס סדר חלקי וגם לכל $A \ni b \neq a$ מתקיים $a \ R \ b$ או $b \ R \ a$. נאמר ש-(A, R) היא קבוצה סדורה לינארית (קס"ל).

תרגיל 1. בכל סעיף נתונה קבוצה A ויחס R מעליה - בדקו האם (A, R) קס"ח או קס"ל.

1. $A = \mathbb{N}^2$, לכל $(a, b), (c, d) \in A$ מתקיים $(a, b) \ R \ (c, d)$ אמ"מ $(a < c \land b < d) \lor (a = c \land b = d)$.
2. $A = \{0, 1\}^{10}$, לכל $x, y \in A$ מתקיים $x \ R \ y$ אמ"מ מספר ה-1-ים ב-x קטן ממש ממספר ה-1-ים ב-y.
3. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, לכל $X, Y \in A$ מתקיים $X \ R \ Y$ אמ"מ $X \subseteq Y$.
4. $A = \mathbb{R}$, לכל $\alpha, \beta \in A$ מתקיים $\alpha \ R \ \beta$ אמ"מ $\alpha = \beta$ או $\beta = 0$.

פתרון 1. **1.** קס"ח: נראה כי R הוא יחס סדר חלקי.

- R רפלקסיבי: לכל $(a, b) \in A$ מתקיים $a = a \land b = b$ ולכן $(a, b) \ R \ (a, b)$.

- R אנטי-סימטרי חלש: יהיו $(a,b),(c,d) \in A$ כך ש-$(a,b) \neq (c,d)$. אזי לא מתקיים $a=c \wedge b=d$. לכן, אם $(a,b)\ R\ (c,d)$ אז $a<c \wedge b<d$, וכך לא מתקיים $c<a$. לכן לא מתקיים $d<b \wedge a<c$ וגם לא מתקיים $c=a \wedge b=d$: $((c,d),(a,b)) \notin R$.
- R טרנזיטיבי: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ כך ש-R (c,d) $\wedge$ (c,d) R (a,b) (e,f). אם $a=c \wedge b=d$ או $c=e \wedge d=f$ ברור שמתקיים $(a,b)\ R\ (e,f)$. אחרת, מתקיים $(a<c \wedge b<d) \wedge (c<e \wedge d<f)$. מטרנזיטיביות של $<$ נקבל ש-$a<e \wedge b<f$, ולכן $(a,b)\ R\ (e,f)$.
- בנוסף, R אינו יחס סדר מלא: $((3,5),(5,3)) \notin R$ וגם $((5,3),(3,5)) \notin R$.

2. R אינו יחס סדר חלקי, מכיוון שאינו רפלקסיבי. בפרט, R אנטי-רפלקסיבי: לכל $x \in \{0,1\}^{10}$, מספר ה-1-ים ב-x שווה (ולכן לא קטן ממש) ממספר ה-1-ים ב-x, ולכן $(x,x) \notin R$.

3. קס"ח: נראה כי R הוא יחס סדר חלקי:

- R רפלקסיבי: לכל $X \in A$ מתקיים $X \subseteq X$ ולכן $X\ R\ X$.
- R אנטי-סימטרי חלש: יהיו $X,Y \in A$ כך ש-$X \neq Y$, אזי $Y \not\subseteq X$ או $X \not\subseteq Y$, ולכן $(X,Y) \notin R$ או $(Y,X) \notin R$.
- R טרנזיטיבי: יהיו $X,Y,Z \in A$ כך ש-$X\ R\ Y \wedge Y\ R\ Z$. אזי $X \subseteq Y$ וגם $Y \subseteq Z$. יהי $x \in X$. מהגדרת הכלה מתקיים $x \in Y$, ובאותו האופן $x \in Z$. מכאן $X \subseteq Z$ ומתקיים $X\ R\ Z$.
- בנוסף, R אינו יחס סדר מלא: $(\{1\},\{2\}) \notin R$ וגם $(\{2\},\{1\}) \notin R$.

4. קס"ח: נראה כי R הוא יחס סדר חלקי:

- R רפלקסיבי: לכל $a \in A$ מתקיים $a=a$ ולכן $a\ R\ a$.
- R אנטי-סימטרי חלש: יהיו $a,b \in A$ כך ש-$a \neq b$ וגם $a\ R\ b$. אזי $b=0$. מכיוון ש-$a \neq b$ מתקיים $a \neq 0$, ולכן $(b,a) \notin R$.
- R טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c \in A$ כך ש-$a\ R\ b$ וגם $b\ R\ c$. אם $a=b$ ברור כי $a\ R\ c$. אחרת מתקיים $b=0$. במקרה זה, מהגדרת היחס תמיד מתקיים $c=0$ ולכן $b=c$ ו-$a\ R\ c$.
- בנוסף, R אינו יחס סדר מלא: $(1,2) \notin R$ וגם $(2,1) \notin R$.

הגדרה 4. תהי (A,R) קס"ח ויהיו $a,b \in A$. נאמר ש-

- a <u>קטן או שווה</u> ל-b, ו-b <u>גדול או שווה</u> ל-a אמ"מ $a\ R\ b$.

- אם בנוסף מתקיים $b \neq a$, נאמר ש-a <u>קטן ממש</u> מ-b, או b <u>גדול ממש</u> מ-a.
- a הוא איבר <u>מינימלי</u> אמ"מ לכל $b \in A$ מתקיים ש-b לא <u>קטן ממש</u> מ-a.
- a הוא **<u>מינימום</u>** אמ"מ לכל $b \in A$ מתקיים $a \mathrel{R} b$.
- a הוא איבר <u>מקסימלי</u> אמ"מ לכל $b \in A$ מתקיים ש-b לא <u>גדול ממש</u> מ-a.
- a הוא **<u>מקסימום</u>** אמ"מ לכל $b \in A$ מתקיים $b \mathrel{R} a$.

הגדרה 5. עבור יחס R מעל קבוצה A היחס ההופכי R^{-1} מוגדר להיות

$$R^{-1} := \left\{(y,x) \in A^2 \mid x \mathrel{R} y\right\}.$$

תרגיל 2. תהי (A,R) קס"ח. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. קיים $a \in A$ כך ש-a איבר מקסימלי ב-R או a איבר מינימלי ב-R.
2. אם קיימים $a \neq b \in A$ כך ש-a וגם b מינימליים, אז אין בקבוצה מינימום.
3. (A,R^{-1}) הוא קס"ח.
4. יהי S יחס סדר חלקי מעל A. אזי $R \cap S$ יחס סדר חלקי מעל A.
5. נניח כי R יחס סדר מלא, ויהי S יחס סדר מלא מעל A. אזי $(A, R \cap S)$ קס"ל.
6. קיים יחס סדר חלקי S מעל A כך ש-$R \subset S$.
7. יהיו $B,C \subseteq A$ כך ש-$\forall b \in B \exists c \in C : c \mathrel{R} b$, וגם $\forall c \in C \exists b \in B : b \mathrel{R} c$. אם B,C זרות אז לא קיים $m \in B$ כך שלא קיים $m \neq b \in B$ שמקיים $b \mathrel{R} m$.
8. אם קיים ל-R איבר מינימלי יחיד ב-A, הוא מינימום.

פתרון 2. **1.** הפרכה: נבחר $A = \mathbb{Z}$ ו-$R = \left\{(a,b) \in A^2 \mid a < b\right\}$. נניח בשלילה כי קיים $a \in A$ איבר מקסימלי ב-R. מהגדרת איבר מקסימלי, לכל $a \neq b \in A$ מתקיים $(a,b) \notin A$. עם זאת, ברור כי $(a,a+1) \notin A$ בסתירה. ההוכחה שב-R אין איבר מינימלי דומה.

2. הוכחה: יהיו $a \neq b \in A$ איברים מינימליים ב-R.

- a ו-b אינם מינימום: נראה בה"כ כי a אינו מינימום. מכיוון ש-b מינימלי, לא קיים $b \neq c \in A$ כך ש-$c \mathrel{R} b$. בפרט, לא מתקיים $a \mathrel{R} b$, ולכן a אינו מינימום.

- נניח בשלילה שקיים $c \in A \setminus \{a, b\}$ מינימום. מכיוון ש-a מינימלי, לא קיים $a \neq x \in A$ כך ש-$x \ R \ a$, ולכן בפרט לא מתקיים $c \ R \ a$, בסתירה לכך ש-c מינימום.
- מכאן, הראנו כי לכל $x \in A$ מתקיים ש-x אינו מינימום, וכך ב-A אין מינימום.

3. הוכחה: נניח כי R הוא יחס סדר חלקי, ונוכיח כי R^{-1} הוא יחס סדר חלקי.

- R^{-1} רפלקסיבי: לכל $x \in A$ מתקיים $(x, x) \in R$ מרפלקסיביות של R, ולכן $(x, x) \in R^{-1}$.
- R^{-1} אנטי-סימטרי חלש: יהיו $x \neq y \in A$ כך ש-$(x, y) \in R^{-1}$. אזי $(y, x) \in R$. מכיוון ש-R אנטי-סימטרי חלש מתקיים $(x, y) \notin R$, ולכן $(y, x) \notin R^{-1}$.
- R^{-1} טרנזיטיבי: יהיו $x, y, z \in A$ כך ש-$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1}$. אזי $(y, x) \in R \wedge (z, y) \in R$. מכיוון ש-$R$ טרנזיטיבי מתקיים $(z, x) \in R$, וכך $(x, z) \in R^{-1}$.

4. הוכחה: תהי A קבוצה, ויהיו R, S יחסי סדר חלקיים מעליה.

- $R \cap S$ רפלקסיבי: יהי $x \in A$. מרפלקסיביות S ו-R מתקיים $(x, x) \in R \wedge (x, x) \in S$, ולכן $(x, x) \in R \cap S$.
- $R \cap S$ אנטי-סימטרי חלש: יהיו $x \neq y \in A$ כך ש-$(x, y) \in R \cap S$. אזי $(x, y) \in R$. מכיוון ש-R אנטי-סימטרי חלש מתקיים $(y, x) \notin R$, ולכן $(y, x) \notin R \cap S$.
- $R \cap S$ טרנזיטיבי: יהיו $x, y, z \in A$ כך ש-$(x, y), (y, z) \in R \cap S$. אזי $(x, y), (y, z) \in R$, ומטרנזיטיביות R מתקיים $(x, z) \in R$. באופן דומה מתקיים $(x, z) \in S$, ולכן $(x, z) \in R \cap S$.

5. הפרכה: נבחר $A = \{1, 2, 3\}$, ואת היחסים

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$$
$$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (3,2), (3,1)\}$$

קל לראות כי R, S יחסי סדר מלאים. עם זאת,

$$R \cap S = \{(1,1), (2,2), (3,3)\},$$

וזהו לא יחס סדר מלא - למשל $(1, 2), (2, 1) \notin R \cap S$.

6. הפרכה: נבחר $A = \{1, 2, 3\}$ ו-R בתור היחס $\leq$, כלומר

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}.$$

נניח בשלילה שקיים יחס סדר חלקי S מעל A כך ש-$R \subset S$. מכיוון ש-R רפלקסיבי, קיימים $a \neq b \in A$ כך ש-$(a, b) \in S \setminus R$. מכיוון ש-R יחס סדר מלא (לכל $a, b \in A$ מתקיים $b \leq a$ או $a \leq b$), נקבל ש-$(b, a) \in R$. לכן גם $(b, a) \in S$, בסתירה לכך ש-S אנטי-סימטרי חלש. [ההפרכה תעבוד לכל קס"ל (A, R)]

7. **הוכחה:** יהיו $B, C \subseteq A$ כך ש-$\forall b \in B \exists c \in C : c\ R\ b$, $\forall c \in C \exists b \in B : b\ R\ c$, וגם B, C זרות. נרצה להוכיח שלא קיים $m \in B$ כך שלכל $m \neq b \in B$ מתקיים $(b, m) \notin R$. כלומר, להוכיח שלכל $m \in B$ קיים $m \neq b \in B$ כך ש-$(b, m) \in R$. יהי $m \in B$.

- מהגדרת B ו-C, קיים $c \in C$ כך ש-$c\ R\ m$. בנוסף, קיים $b \in B$ כך ש-$b\ R\ c$.
- מכיוון ש-B, C זרות מתקיים $b \neq c$. לכן, מכיוון ש-R אנטי-סימטרי חלש מתקיים $b \neq m$.
- בנוסף, מכיוון ש-R טרנזיטיבי, ומתקיים $b\ R\ c \wedge c\ R\ m$, נקבל ש-$b\ R\ m$, והוכחנו את הטענה.