תרגיל מספר 1.

מגישים: מריה טטבוסוב 212231096
אויסלום חסמייה 206858334

שאלה 1. יהיו p,q,r פסוקים, הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות בסעיפים הבאים. עבור הוכחה, עשו זאת בשתי דרכים: הן באמצעות טבלת אמת, והן הוכחה באמצעות זהויות.

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

ד. $q \to (r \wedge \neg p) \equiv r \to (p \to q)$

ה. $\neg (p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

תשובה:

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

I.

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T

טבלאות האמת זהות, ולכן הפסוקים שקולים.

II.

$p \to (q \to r) \overset{\text{זהות}}{\Longleftrightarrow} p \to (\neg q \vee r) \overset{\text{זהות}}{\Longleftrightarrow} \neg p \vee (\neg q \vee r) \overset{\text{אסוציאטיביות של או}}{\Longleftrightarrow} (\neg p \vee \neg q) \vee r \overset{\text{דה מורגן}}{\Longleftrightarrow} \neg (p \wedge q) \vee r \Longleftrightarrow$

$\overset{\text{זהות}}{\Longleftrightarrow} \boxed{(p \wedge q) \to r}$

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

I.

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge q \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p\to r)\vee(q\to r)$
F	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T

טבלאות האמת זהות, לכן הפסוקים שקולים.

II.

$$(p\to r)\vee(q\to r) \xLeftrightarrow{\text{זהות}} (\neg p \vee r)\vee(\neg q \vee r) \xLeftrightarrow{\text{אסוציאטיביות של "או"}} (\neg p \vee \neg q)\vee r \xLeftrightarrow{\text{דה מורגן}} \neg(p\wedge q)\vee r \xLeftrightarrow{\text{זהות}} \boxed{p\wedge q \to r}$$

■ מש"ל

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

I.

p	q	$\neg p$	$(\neg p)\to q$	$((\neg p)\to q)\to p$	$p\vee\neg p$
F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T

טבלאות האמת של הפסוקים אינן זהות, ולכן הם <u>אינם</u> שקולים.

II.

נראה הצבה בה הפסוקים לא מקבלים את אותו ערך.

יהיו: $p=T \quad q=F$

אזי: $((\neg p)\to q)\to p = F$

אולם: $p\vee\neg p = T$

מש"ל ∎

ד. $q \to (r \land \neg p) \equiv r \to (p \to q)$

I.

q	r	p	$\neg p$	$r \land \neg p$	$q \to (r \land \neg p)$	$p \to q$	$r \to (p \to q)$
F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T

II.

טבלאות האמת של הפסוקים אינן זהות, ולכן הם אינם שקולים.

נראה הצבה בה הפסוקים לא מקבלים את אותו ערך.

יהיו: $q=F \quad r=T \quad p=T$

אזי: $q \to (r \land \neg p) = T$

אבל: $r \to (p \to q) = F$

מש"ל ∎

ה. $\neg(p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

I.

p	q	r	$\neg p$	$\neg(p\to q)$	$\neg(p\to q)\vee r$	$r\vee q$	$\neg p\wedge(r\vee q)$
F	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	T	F	F	T	T	F

טבלאות האמת של הפסוקים אינן זהות, ולכן הם אינם שקולים.

II.

נראה השמה בה הפסוקים לא מקבלים את אותו ערך.

יהיו: $p=T \quad q=F \quad r=F$

אזי: $\neg(p\to q)\vee r = T$

אבל: $\neg p\wedge(r\vee q) = F$

משל $\blacksquare$

שאלה 2. נגדיר קשר בינארי חדש בשם XOR (eXclusive OR, נסמן ב-$p \oplus q$) באמצעות טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

א. הביעו את $\oplus$ באמצעות $\wedge, \vee$ ו-$\neg$.

ב. הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת־אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל p, q, r מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)\,.$$

ג. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q, r מתקיים

$$p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge r) \oplus (p \wedge q)\,.$$

תשובה :

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

א. הביעו את $\oplus$ באמצעות $\wedge, \vee$ ו-$\neg$.

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

ב. הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת־אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל p, q, r מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)\,.$$

I.

p	q	r	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \oplus r$	$q \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F
T	T	T	F	T	F	T

טבלאות האמת של הפסוקים זהות, ולכן הם שקולים.

טבלת עזר:

$$(p\oplus q)\equiv(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$$
$$(q\oplus r)\equiv(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$$
$$\neg(p\oplus q)\equiv(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$
$$q\oplus r\equiv(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$$

II.

צריך להוכיח: $(p\oplus q)\oplus r\equiv p\oplus(q\oplus r)$

$$(p\oplus q)\oplus r \overset{\text{הצבה מטבלת אמת}}{\Leftrightarrow} [(p\oplus q)\wedge\neg r]\vee[\neg(p\oplus q)\wedge r] \overset{\text{הצבה מטבלת אמת}}{\Leftrightarrow} [((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\wedge\neg r]\vee[((\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q))\wedge r]\Leftrightarrow$$

פילוג

$$\Leftrightarrow [(\neg r\wedge(p\wedge\neg q))\vee(\neg r\wedge(\neg p\wedge q))]\vee[(r\wedge(\neg p\wedge\neg q))\vee(r\wedge(p\wedge q))]\Leftrightarrow$$

אסוציאטיבי' וגם ביזור

$$\Leftrightarrow [(p\wedge(\neg q\wedge\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\wedge\neg r))]\vee[(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\vee(p\wedge(r\wedge q))]\Leftrightarrow$$

אסוציאטיביות או

$$\Leftrightarrow (p\wedge(\neg q\wedge\neg r))\vee(p\wedge(r\wedge q))\vee(\neg p\wedge(q\wedge\neg r))\vee(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\Leftrightarrow$$

חוק הפילוג

$$\Leftrightarrow [p\wedge((\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge q))]\vee(\neg p\wedge[(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)])\Leftrightarrow$$

לפי מה שהוכח קודם.

$$\Leftrightarrow [p\wedge\neg(q\oplus r)]\vee(\neg p\wedge(q\oplus r))\Leftrightarrow \boxed{p\oplus(q\oplus r)}$$

$$(p\oplus q)\oplus r\equiv p\oplus(q\oplus r)$$

.d.e.N $\blacksquare$

III.

ג. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q, r מתקיים

$$p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge r) \oplus (p \wedge q)\,.$$

p	q	r	$q \oplus r$	$p \wedge (q \oplus r)$	$p \wedge r$	$p \wedge q$	$(p \wedge r) \oplus (p \wedge q)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F

IV.

ד. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus p \equiv q.$$

p	q	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \oplus p$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	F
T	T	F	T

טבלאות האמת זהות,
לכן זה שקול.

שאלה 3. עבור כל אחת מהטענות הבאות:

- כתבו את הטענה בשפה מתמטית.
- כתבו את שלילת הטענה לאחר פישוט.

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.
ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.
ג. לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש-p לא מחלק את n.
ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.
ה. קיימים מספרים ממשיים α, β כך ש-$\alpha > \beta$, $\alpha^2 < \beta^2$ וגם $\alpha^3 > \beta^3$.

תשובה:

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.

דרך א':

נגדיר: $S = \{$סטודנטים$\}$

$H(s) =$ עשה שיעורי בית

$P(s) =$ הצליח במבחן

טענה: $\neg \exists s \in S : P(s) \wedge \neg H(s)$

שלילת הטענה: $\exists s \in S : P(s) \wedge \neg H(s)$

דרך ב':

נגדיר: $S = \{$קבוצת סטודנטים מצליחים$\}$

$H(x) =$ סטודנט שעשה שיעורי בית

טענה: $\boxed{\forall s \in S : H(s)}$

שלילת הטענה: $\boxed{\exists s \in S : \neg H(s)}$

ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.

נגדיר: $L = \{$אנשים$\}$

$D(x) =$ אוהב מתמ' דיסקרטית

$G(x) =$ אוהב גלידה

טענה: $\boxed{\forall x \in L : D(x) \rightarrow G(x)}$

שלילת הטענה: $\boxed{\exists x \in L : D(x) \wedge \neg G(x)}$

ג. לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש-p לא מחלק את n.

נגדיר: $P=\{x\in\mathbb{Z} \mid \forall[(y\in\mathbb{N})\wedge(1<y<x)] : y\nmid x\}$

טענה: $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\ \forall p\in P : p\nmid n}$

שלילת הטענה: $\boxed{\exists n\in\mathbb{Z}\ \exists p\in P : p\mid n}$

ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.

דרך א':

נגדיר: $B=\{$בניינים$\}$

$H(B)=$ בניין בן 100 קומות ומעלה

$U(B)=$ לא נמצא באוניברסיטה

טענה: $\exists b\in B: H(B)\wedge\neg U(B)$

שלילת הטענה: $\forall b\in B: H(B)\wedge U(B)$

דרך ב':

$U=\{$בניינים באוניברסיטה$\}$

$B=$ בניין 100+ קומות

טענה: $\exists B\notin U$

שלילת טענה: $\forall B\in U$

$\mathbb{R}$

ה. קיימים מספרים ממשיים α,β כך ש-$\alpha>\beta$, $\alpha^2<\beta^2$ וגם $\alpha^3>\beta^3$.

טענה: $\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R} : (\alpha>\beta)\wedge(\alpha^2<\beta^2)\wedge\alpha^3>\beta^3}$

שלילת הטענה: $\boxed{\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R} : (\alpha\le\beta)\vee(\alpha^2\ge\beta^2)\vee(\alpha^3\le\beta^3)}$

שאלה 4. יהיו $x,y \in \mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a=b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a \geq b$.

ב. $y > x$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2.

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x.

ד. $a=b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a \leq b$.

תשובה?

שאלה 4. יהיו $x,y \in \mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a=b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a \geq b$.

I. $(a=b) \to (a \geq b)$

II. $\neg(a \geq b) \to \neg(a=b) \Leftrightarrow (a<b) \to (a \neq b)$

ב. $y > x$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2.

נגדיר:
קבוצת זוגיים E

I. $(x \in E \wedge x>2) \to (x>y)$

II. $(x \leq y) \to (x \notin E \wedge x \leq 2)$

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x.

נגדיר:
$K = \{$מספרים ראשונים$\}$

I. $y<x \to y \in K$

II. $y>x \to y \notin K$

ד. $a=b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a \leq b$.

I. $(a \leq b) \to (a=b)$

II. $(a \neq b) \to (a>b)$