מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 4

הגשה ליום חמישי, 22/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. בכל סעיף נתונה קבוצה ויחס מעליה. קבעו (והוכיחו) האם היחס הוא יחס שקילות, יחס סדר חלקי או יחס סדר מלא. במידה והיחס הוא יחס שקילות, מצאו את קבוצת המנה.

א. היחס R מעל $A = \{1, \ldots, n\}^2$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $(a,b), (c,d) \in A$ מתקיים $(a,b) \; R \; (c,d) \iff a + b = c + d$.

ב. $A = \mathbb{N}^+$, $a \; S \; b$ אמ"מ השבר a/b לאחר צמצום, מכיל מונה ומכנה אי-זוגיים (למשל, $80/48$ לאחר צמצום הוא $5/3$ ולכן $(80,48) \in S$, אבל $76/24$ הוא $19/6$ ולכן $(76,24) \notin S$).

ג. היחס α מעל $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, בו לכל $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים $A \; \alpha \; B$ אמ"מ $A \triangle B$ סופית.

ד. היחס β מעל $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$, בו לכל $(A,B), (C,D) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $(A,B) \; \beta \; (C,D)$ אמ"מ $(A \triangle B) \cup (C \triangle D)$ סופית.

ה. היחס R מעל $(\mathbb{N}^+ \setminus \{1\})^2$, בו לכל $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ מתקיים $(a,b) \; R \; (c,d)$ אמ"מ $a \leq c$ וגם $b \mid d$.

ו. היחס R מעל $\{0,1\}^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u, v \in \{0,1\}^n$ מתקיים $u \; R \; v$ אמ"מ סכום האותיות ב-u שווה לסכום האותיות ב-v.

ז. היחס R מעל $\{0,1\}^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u, v \in \{0,1\}^n$ מתקיים $u \; R \; v$ אמ"מ מספר ה-0-ים ב-u קטן ממש ממספר ה-0-ים ב-v.

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. תהי A קבוצה, ויהיו R, S יחסי שקילות מעל A. מתרגיל בית 3 ניתן להסיק כי גם $T = R \cap S$ הוא יחס שקילות מעל A. אזי, לכל מחלקת שקילות K של T, קיימות מחלת שקילות L של R ומחלקת שקילות M של S ש-$K \subseteq L \cap M$.

ב. תהי A קבוצה, ויהי R יחס שקילות מעל A. אזי מתקיים

$$R = \bigcup_{K \in A/R} K^2.$$

משפט 1. תהי A קבוצה ותהי $\mathcal{F}$ חלוקה של A. אזי קיים יחס שקילות R מעל A כך ש-$\mathcal{F} = A/R$.

שאלה 3.

א. הוכיחו את משפט 1.

ב. הוכיחו את הכיוון ההפוך של משפט 1: לכל קבוצה A ויחס שקילות R מעליה, קיימת חלוקה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ כך ש-$\mathcal{F} = A/R$.