מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 2

תזכורת :- תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A מסומנת ב- $P(A)$ והיא מוגדרת להיות $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

דוגמה :- $A = \{1,2,3\}$ אז
$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

תרגיל :- הוכיחו את הטענות הבאות :-

א. $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

ב. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

ג. $A \oplus C \subseteq (A \oplus B) \cup (B \oplus C)$.

ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

$A \oplus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
$= (A \cup C) \setminus (A \cap C)$

פתרון :- א. יהי $x \in (A \setminus B) \setminus C$ כלשהו. נראה ש- $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

$x \in (A \setminus B) \setminus C$ לכן $x \in A \setminus B$ וגם $x \notin C$.

$x \in A \setminus B$ ולכן $x \in A$ וגם $x \notin B$.

עד כה קיבלנו ש- $x \in A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \notin C$.

לכן $x \notin B \setminus C$ וגם $x \in A$. אזי $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

סה"כ $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

ב. כדי להראות שוויון בין שתי הקבוצות צריך להוכיח הכלה דו-כיוונית.

1. $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$:- יהי $x \in (A \cup B) \setminus C$. לכן $x \in A \cup B$ וגם $x \notin C$. כלומר, $x \in A$ או $x \in B$ וגם $x \notin C$.

(i) $x \in A$: אז נזכור ש- $x \notin C$ ולכן $x \in A \setminus C$.

על-כן, $x \in (A \setminus C) \cup T$ לכל קבוצה T בעולם. בפרט עבור

$T = B\setminus C$. כלומר $x\in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

(ii) $x\in B$: נזכור ש- $x\notin C$. לכן $x\in B\setminus C$. ולכן
$x\in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

ב. $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq(A\cup B)\setminus C$:- יהי $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ ←
$x\in A\setminus C$ או $x\in B\setminus C$.

(i) $x\in A\setminus C$:- לכן $x\in A$ וגם $x\notin C$. לכן $x\in A\cup B$ וגם $x\notin C$.
← $x\in(A\cup B)\setminus C$.

(ii) $x\in B\setminus C$: לכן $x\in B$ וגם $x\notin C$. לכן $x\in A\cup B$ וגם $x\notin C$.
← $x\in(A\cup B)\setminus C$.

סה"כ $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq(A\cup B)\setminus C$.

בכך נקבל שוויון כי הוכחנו הכלה דו-כיוונית.

ג. יהי $x\in A\oplus C$. לכן $x\in(A\setminus C)\cup(C\setminus A)$. זאת אומרת
$x\in A\setminus C$ או $x\in C\setminus A$.

(i) $x\in A\setminus C$:- לכן $x\in A$ וגם $x\notin C$

(1.i) $x\in B$: נזכור ש- $x\notin C$ ולכן $x\in B\oplus C$.
← $x\in(A\oplus B)\cup(B\oplus C)$.

(2.i) $x\notin B$: נזכור ש- $x\in A$ ולכן $x\in A\oplus B$
← $x\in(A\oplus B)\cup(B\oplus C)$

(ii) זהה למקרה (i). לא אעשה.

3. $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$:- יהי $X\in P(A\cap B)$ כלשהי. ולכן $X\subseteq A\cap B$
⟷ $X\subseteq A$ וגם $X\subseteq B$. ⟷ $X\in P(A)$ וגם $X\in P(B)$
⟷ $X\in P(A)\cap P(B)$.

הוכ׳ :- $P(A)\cap P(B) \subseteq P(A\cap B)$
$X \in P(A)\cap P(B) \Rightarrow X\in P(A)$ וגם $X\in P(B)$
$\Rightarrow X\subseteq A$ וגם $X \subseteq B \Rightarrow X\subseteq A\cap B \Rightarrow X\in P(A\cap B)$.

הגדרה :- תהיינה A,B קבוצות. נגדיר את המכפלה הקרטזית שלהן באופן הבא :-
$A\times B := \{\underbrace{(a,b)}_{\text{זוג סדור}} : a\in A$ וגם $b\in B\}$

דוגמה :- למשל אם $A=\{\phi,\{\phi\},\text{תפוח}\}$, $B=\{1,\{1\}\}$ אז
$A\times B = \{(\phi,1),(\phi,\{1\}),(\{\phi\},1),(\{\phi\},\{1\}),(\text{תפוח},1),(\text{תפוח},\{1\})\}$

הערה :- $\phi\times A = A\times\phi = \phi$.

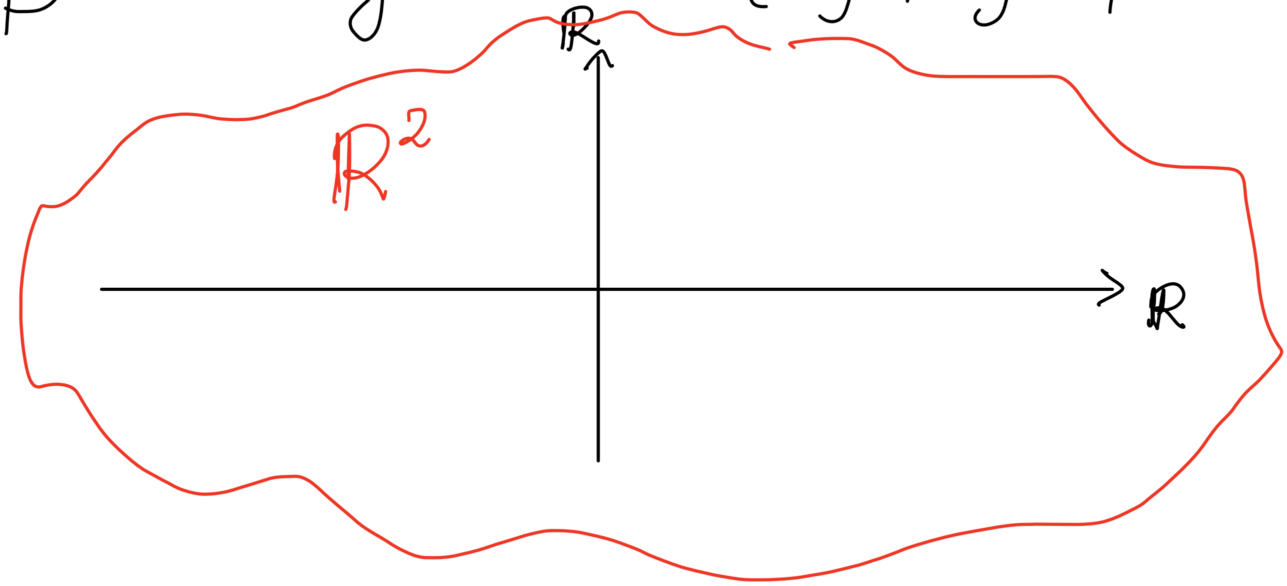
סימונים לתרגיל הבית :-

1. $\wedge$ וגם.
2. $\vee$ או.
3. $\leftarrow$ אם צד ימין, אז צד שמאל.
4. $\rightarrow$ אם צד שמאל, אז צד ימין.
5. $\leftrightarrow$ אם ורק אם. כלומר שילוב של 3 ו-4 ביחד.
6. $\forall$ לכל.
7. $\exists$ קיים

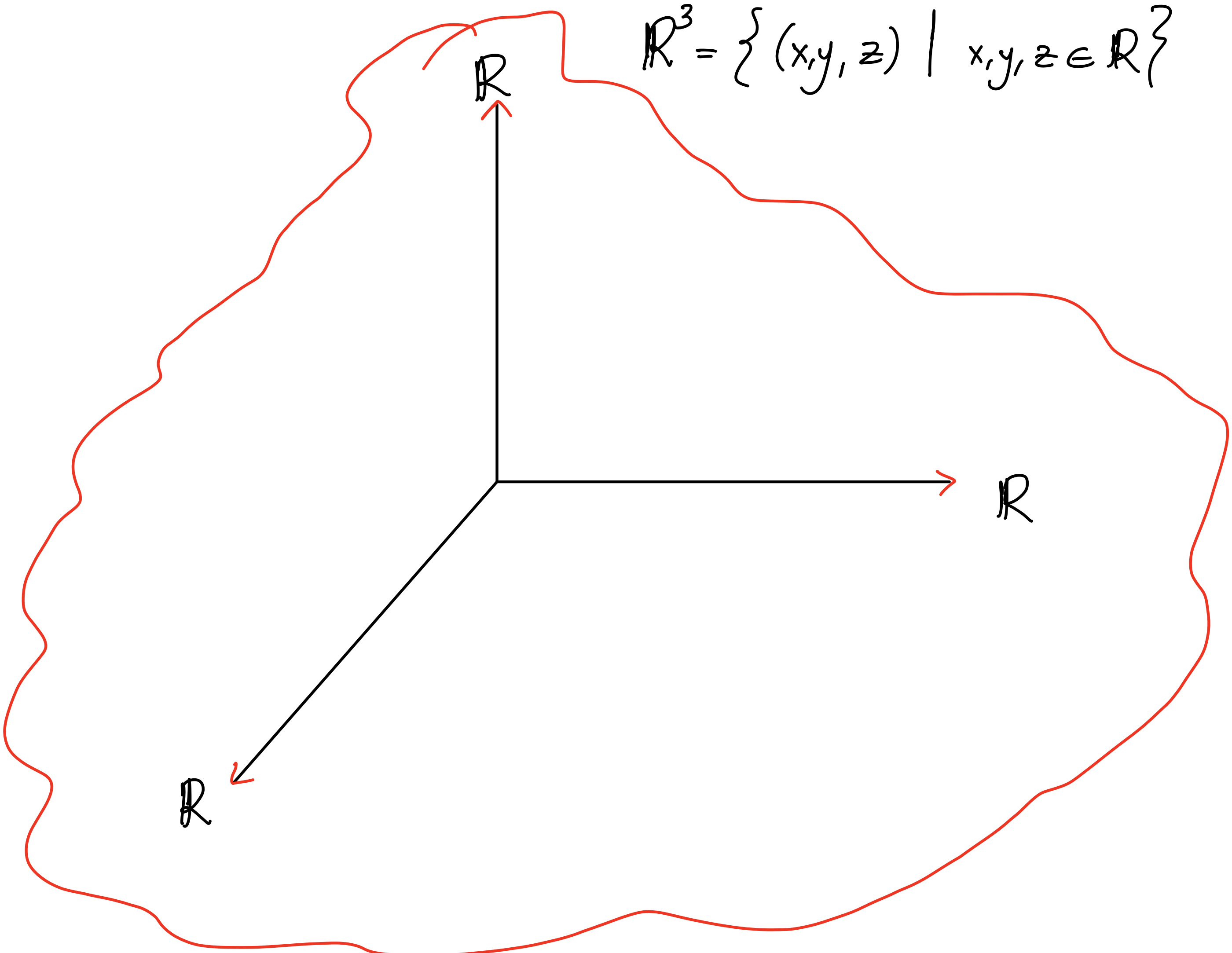
* באופן כללי אם $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות אז
$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n = \{\underbrace{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}_{\text{n-יה סדורה}} : a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\}$$
$$\| $$
$\prod_{i=1}^{n} A_i$ סימון אחר

* אם $A=A_1=A_2=\ldots=A_n$ אז
$$\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n-פעמים}} = A^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1,a_2,\ldots,a_n\in A\}$$

דוגמה :- $\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ המישור xy שמכירים מהתיכון.



$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$



זה המרחב התלת-מימדי שאנו חיים בו.

תרגיל :- תהיינה $A=\{1,2,\{2\}\}$, $B=\{2,\{1,2\}\}$. מצאו את

1. $P(A)\cap B$.
2. $P(A)\cap P(B)$.
3. $P(B\setminus(A\times A))$.

פתרון :- 1. $P(A)$ זו קבוצה של קבוצות. כדי ש- $X\in P(A)\cap B$ חייב ש- X תהיה קבוצה לפחות. אבל איברי B הם $2,\{1,2\}$. לכן המועמד היחידי לכך שיהיה ב- $P(A)\cap B$ הוא רק $\{1,2\}$!
ואכן $\{1,2\}\subseteq A$. סה"כ $P(A)\cap B=\{\{1,2\}\}$.

2. $$P(A)\cap P(B) \underset{\text{ראינו}}{=} P(A\cap B) = P(\{2\}) = \{\phi,\{2\}\}$$

3. $$P(B\setminus(A\times A)) = P(B) = \{\phi,\{2\},\{\{1,2\}\},\{2,\{1,2\}\}\}$$

הגדרה :- תהיינה $A_1, A_2, \ldots$ קבוצות. נאמר ש- $x\in A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots$ אם קיים $i\in\mathbb{N}^+$ כך ש- $x\in A_i$. $\mathbb{N}^+=\{1,2,3,4,\ldots\}$

הגדרה :- תהיינה $A_1, A_2, \ldots$ קבוצות. נאמר ש- $x\in A_1\cap A_2\cap\ldots$ אם לכל $i\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $x\in A_i$.

נהוג לקצר :-
$$A_1\cup A_2\cup\ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$$
$$A_1\cap A_2\cap\ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$$

תרגיל :- לכל $n\in\mathbb{N}^+$ נתונה הקבוצה $A_n=(0,\frac{1}{n})$ (זה קטע פתוח ולא זוג סדור). מצאו את $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} A_n$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n = A_1 = (0,1) \longrightarrow \text{קטע פתוח}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = \emptyset$$