מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 9 עם פתרון

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. מצאו את מספר הדרכים לחלק את $[n] = \{1, \ldots, n\}$ ל-3 קבוצות (אין סדר בין הקבוצות, וקבוצה יכולה להיות ריקה).

פתרון 1. תחילה, יש 3^n דרכים לחלק את האיברים לקבוצות סדורות. כעת, נרצה לחלק בסדר הפנימי. כאשר הקבוצות שונות אחת מהשנייה, נכון יהיה לחלק ב-$3! = 6$. לעומת זאת, יש מקרה בודד יש שוויון בין חלק מהקבוצות: כאשר קבוצה אחת מכילה את כל האיברים ושתי הקבוצות האחרות ריקות - מקרה זה נספר 3 פעמים (3 אופציות עבור הקבוצה המלאה). לכן, ב-$3^n - 3$ מהמקרים נחלק ב-6, ואת מקרה הקצה נספור פעם אחת. בסך הכל:

$$\frac{3^n - 3}{6} + 1.$$

שאלה 2. יהיו $k, n \in \mathbb{N}^+$ כך ש-$n \geq k$. מצא את מספר הפתרונות ה<u>שלמים</u> של המשוואה

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = k,$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $|x_i| \geq 1$.

פתרון 2. לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר $y_i = |x_i| - 1$. אזי המשוואה שקולה ל-

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i + 1) = k \iff \sum_{i=1}^{n} y_i = k - n,$$

והתנאי לכל $1 \leq i \leq n$ הוא $y_i \geq 0$. למשוואה לעיל יש $\binom{(k-n)+n-1}{n-1}$ פתרונות. כעת, לכל y_i מתאימים שני ערכים אפשריים של x_i: שלילי וחיובי (תמיד לא 0). לכן, בסך הכל, מספר הפתרונות הוא

$$\binom{k-1}{n-1} \cdot 2^n.$$

שאלה 3. הוכח באופן קומבינטורי את הזהויות הבאות:

א. לכל $2 \leq k \in \mathbb{N}$:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} k^{n-i} (k-1)^i .$$

ב. לכל $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n+(k-r)-1}{n} = \binom{k+(n-k)-1}{n-k}.$$

ג. לכל $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}.$$

ד. אם $n > m$ אז

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

פתרון 3. א. בעיה: נתונים $n-1$ אנשים, ועלינו לחלק לכל אדם צבע, המיוצג על ידי מספר בין 1 ו-k, עבור $k \geq 2$, כך שכל האנשים יקבלו את אותו הצבע.

- גישה א': ברור שקיימות בדיוק k אפשרויות.
- גישה ב': הכלה והדחה. נסתכל על הקבוצה ה-i, בה קיימים לפחות i אנשים שלא קיבלנו את הצבע ה-j עבור $1 \leq j \leq k$ כלשהו. תחילה, נבחר i אנשים מתוך $n-1$ ואת הצבע j. כעת, i האנשים האלו יכולים לקבל כל צבע פרט ל-j ($(k-1)^i$ אפשרויות), ואין הגבלה על שאר האנשים. לכן מספר הדרכים הוא

$$\binom{n-1}{i} \cdot k \cdot (k-1)^i \cdot k^{n-1-i},$$

וכך מהכלה והדחה ונקבל שמספר הסידורים הטובים הוא

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} k^{n-i} (k-1)^i .$$

ב. בעיה: מספר הפתרונות השלמים למשוואה

$$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad \forall 1 \leq i \leq k : x_i > 0.$$

- גישה א': כפי שראינו בתרגול, לכל $1 \leq i \leq k$ נגדיר $y_i = x_i - 1$, ונקבל שהמשוואה שקולה ל-$\sum_{i=1}^{k} y_i = n - k$. לכן מספר הפתרונות הוא

$$\binom{(n-k)+k-1}{n-k}.$$

- גישה ב': הכלה והדחה. נסתכל על המשוואה כאשר הדרישות הן $x_i \geq 0$, ונפסול את הפתרונות הרעים. נסתכל על מספר הפתרונות כאשר קיימים לפחות r אינדקסים $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ כך ש-$x_{i_j} = 0$ לכל $1 \leq j \leq r$. תחילה, נבחר את I: $\binom{k}{r}$ אפשרויות. כעת המשוואה שקולה למשוואה

$$\sum_{i \notin I} x_i = n, \quad \forall i \notin I : x_i \geq 0.$$

נשים לב שמספר הנסכמים הוא $k - r$. לכן, מספר הפתרונות של המשוואה הוא $\binom{n+(k-r)-1}{n}$. בסך הכל, מספר הפתרונות התקינים הוא

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n+(k-r)-1}{n}.$$

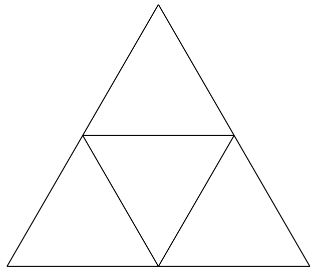
ג. בעיה: בחירת 2 אנשים מתוך $n+1$ אנשים.

- גישה א': ברור כי מספר האפשרויות הוא $\binom{n+1}{2}$.
- גישה ב': נמספר את האנשים מ-0 עד n (כולל).
  - נניח שאנו בוחרים תחילה את האדם עם המספר הגדול יותר.
  - כאשר בחרנו בהתחלה את המספר ה-k, יש בדיוק k אנשים לפניו, ולכן יש k אפשרויות לבחירת זוג איברים כאשר k הוא האיבר הגדול יותר.
  - לכן, מספר האפשרויות הוא $\sum_{k=1}^{n} k$ (0 לא יכול להיבחר להיות הגדול).

ד. בעיה: נתונים n אנשים ושתי כיתות. נרצה לבחור m אנשים מתוכם ולחלק אותם באופן כלשהו לשתי הכיתות.

- גישה א': נבחר את m האנשים ($\binom{n}{m}$), ועל כל אדם להשתבץ לכיתה: 2 אפשרויות לאחד. בסך הכל $2^m \binom{n}{m}$.
- גישה ב': נניח שבחרנו k אנשים לכיתה הראשונה. כעת, נותרו $n-k$ אנשים, ואנו רוצים לבחור מהם $m-k$ אנשים לכיתה השנייה. בסך הכל, עבור כל ערכי ה-k האפשריים (כלל הסכום):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$



איור 0.1: משולש שווה-צלעות.

שאלה 4. נתון משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 1. הוכיחו כי לכל בחירה אפשרית של 5 נקודות במשולש (כולל נקודות על הצלעות), קיימות שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $1/2$.

פתרון 4. נסתכל על המשולש והבנייה באיור 0.1. נשים לב שכל אחד מארבעת המשולשים הקטנים הוא משולש שווה-צלעות עם אורך צלע 0.5, ולכן המרחק המקסימלי בין שתי נקודות בו הוא 0.5. מעיקרון שובך היונים קיימות שתי נקודות שנמצאות באותו תת-משולש, ולכן המרחק בין שתי אלו הוא לכל היותר 0.5.

שאלה 5. נתונים n כדורים זהים, ויהי $k \leq n$. הוכיחו כי מספר החלוקות השונות של הכדורים ללכל היותר k מחלקות לא-ריקות שווה למספר החלוקות בהן בכל קבוצה יש לכל היותר k כדורים.

פתרון 5. נגדיר מיפוי הפיך מאחת לשנייה. נסמן ב-A את אוסף החלוקות הנ"ל ללכל היותר k מחלקות לא-ריקות, וב-B את אוסף החלוקות הנ"ל בהן בכל קבוצה יש לכל היותר k כדורים. נגדיר $f : A \to B$ באופן הבא: לכל $A \ni a = a_1 + \cdots + a_l$, ולכל $1 \leq j \leq l$, נגדיר

$$b_j = \left|\{1 \leq i \leq l \mid a_i \geq j\}\right|.$$

באופן אחר, נייצג את החלוקה בתור שורות של כדורים הממוינות מגדול לקטן. למשל, נייצג את $8 = 3 + 2 + 2 + 1$ באמצעות

☻ ☻ ☻
☻ ☻
☻ ☻
☻

המיפוי יהיה פעולת שחלוף של המטריצה: נחליף את השורות והעמודות. למשל עבור החלוקה לעיל:

☻ ☻ ☻ ☻
☻ ☻ ☻
☻

מספר הכדורים הגדול ביותר בחלוקה הוא רוחב הטבלה, ומספר הקבוצות הוא גובה הטבלה. לכן, לאחר שחלוף חלוקה בה היו לכל היותר k כדורים בקבוצה, נקבל חלוקה עם לכל היותר k קבוצות, ולהיפך. בנוסף, נשים לב שהפעלת המיפוי פעמיים הוא הזהות, ולכן מיפוי זה הוא אינבולוציה (ההופכי של עצמו), והוא הפיך. מצאנו מיפוי הפיך מאוסף החלוקות עם לכל היותר k מחלקות ואוסף החלוקות בהן בכל קבוצה יש לכל היותר k כדורים, ולכן הקבוצות שוות גודל.

שאלה 6. נתונות $n \in \mathbb{N}^+$ אבני לגו זהות. שני מגדלי לגו שונים זה מזה אמ"מ מספר האבנים מהם הם בנויים שונה. בכמה דרכים ניתן להרכיב מגדלי לגו **מסודרים** על ידי שימוש בכל אבני הלגו, כך שאף מגדל אינו ריק.

פתרון 6. מכיוון שיש סדר בין המגדלים השונים, והסדר בתוך מגדל לא משנה, יהיה שקול להסתכל על מספר האבנים במגדל במקום המגדל עצמו. כעת נקבל שאנו סופרים בדיוק את מספר הצירופים של n, ולכן (ראינו בתרגיל הבית) מספר הסידורים האפשריים הוא 2^{n-1}.

שאלה 7. גרף $G = (V, E)$ הוא מעגל פלוס אם קיימת קשת יחידה $e \in E$ כך ש-$G' = (V, E \setminus \{e\})$ הוא מעגל פשוט.

א. מצא את מספר הגרפים שהם מעגל פלוס בעלי n צמתים שונים.

ב. הוכח כי $G = (V, E)$ הוא מעגל פלוס אמ"מ קיימים $u \neq v \in V$ כך ש-$\deg(u) = \deg(v) = 3$, לכל $w \in V \setminus \{v, u\}$ מתקיים $\deg(w) = 2$, $\{u, v\} \in E$ וגם $G' = (V, E \setminus \{u, v\})$ הינו קשיר.

פתרון 7. א. תחילה נסדר את הצמתים במעגל, ונחבר קשת בין כל שני צמתים סמוכים ($(n-1)!$ אפשרויות). כעת, נבחר זוג צמתים שאינם שכנים ונחבר ביניהם קשת: נבחר צומת $v \in V$ (n אפשרויות), וצומת נוסף שאינו שכן של v במעגל ($n-3$ אפשרויות). לבסוף, נחלק בסדר הפנימי ($2!$) ונקבל שמספר הגרפים הוא

$$(n-1)! \cdot \frac{n(n-3)}{2}.$$

ב. נוכיח את שני כיווני הטענה:

- ($\Longleftarrow$) יהי $G = (V, E)$ מעגל פלוס. נסמן ב-$e = \{u, v\} \in E$ את הקשת היחידה שמקיימת ש-$G' = G \setminus \{e\}$ הוא מעגל פשוט. מכיוון ש-G' הוא מעגל פשוט, הוא קשיר ודרגה של כל צומת בו היא 2. לכן, הדרגה ב-G של כל צומת $w \notin \{u, v\}$ היא 2, ושל u, v היא 3 (נוספה הקשת e לשניהם).
- ($\Longrightarrow$) יהי $G = (V, E)$ גרף. נניח שקיימים $u \neq v \in V$ כך ש-$\deg(u) = \deg(v) = 3$, לכל $w \in V \setminus \{v, u\}$ מתקיים $\deg(w) = 2$, $\{u, v\} \in E$ וגם $G' = G \setminus \{e\}$ הינו קשיר. קל להוכיח שמכיוון שדרגת כל הצמתים ב-G' היא 2 ו-G' קשיר, מתקיים ש-G' הוא מעגל פשוט (למשל באינדוקציה). לכן G מורכב מהמעגל הפשוט G' ועוד קשת אחת (e), ולכן הוא מעגל פלוס.

שאלה 8. תהי $x_1,\dots,x_{11}$ סדרת שלמים. הוכיחו שקיימים $1 \le i \le j \le 11$ כך ש-

$$\sum_{k=i}^{j} x_k \equiv 0 \mod 10.$$

פתרון 8. נסתכל על הסכומים הבאים:

$$\begin{gathered} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_{11} \end{gathered}$$

אלו 11 סכומים אפשריים. נסתכל על שארית החלוקה ב-10 של כל אחד מהם. לפי עיקרון שובך היונים, קיימים $i < j$ כך ש-

$$x_1 + \cdots + x_i \equiv x_1 + \cdots + x_j \mod 10,$$

ולכן מתקיים

$$\sum_{k=i+1}^{j} x_k \equiv 0 \mod 10.$$

שאלה 9. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}^+$ המורכב מהספרות 0 ו-7 בלבד כך ש-$n \equiv 0 \mod 359$.

פתרון 9. נסתכל על המספרים $a_k = \underbrace{77\cdots7}_{\text{פעמים } k}$, לכל $1 \le k \le 360$. נסתכל על שאריות החלוקה ב-359 של כל אחד מהמספרים. מכיוון שיש 360 מספרים, מעיקרון שובך היונים קיימים $i < j$ כך ש-$a_i \equiv a_j \mod 359$. לכן, המספר $a_j - a_i$, שמכיל את הספרות 0 ו-7 בלבד, מתחלק ב-359 ללא שארית.