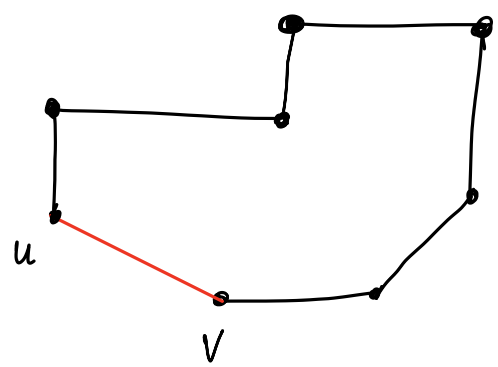
מתמטיקה דיסקרטית
הרצאה 19

הגדרה :- יהי $G=(V,E)$ גרף. מסלול אוילר הוא מסלול שכל קשת מופיעה בו פעם אחת בדיוק (כל הקשתות של G חייבות להופיע).

הערה :- כל מעגל הוא מסלול, לכן כל מעגל אוילר הוא בפרט מסלול אוילר.

טענה :- בגרף קשיר יש מסלול אוילר אם ורק אם מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית שווה ל-0 או 2.

הוכחה :- $(\Leftarrow)$ נניח שיש מסלול אוילר. אם המסלול הזה הוא מעגל אז כל דרגה של קודקוד מסוים היא זוגית (כי זה מעגל אוילר ולפי משפט בגרף יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ לכל $v\in V$, $\deg v=2k$).
מכאן נקבל שמספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא 0.
אחרת המסלול נראה כך :-



נוסיף את הקשת (u,v) לגרף ואז נקבל מעגל אוילר $G\cup\{(u,v)\}$ לכן לפי אותו משפט מקודם דרגות כל הקודקודים ב-$G\cup\{(u,v)\}$ היא זוגית. לכן ב-G המקורי דרגות כל הקודקודים חוץ מ-u,v היא זוגית. בנוסף, דרגות u,v ב-G היא אי-זוגית לכן מספר הקודקודים שדרגתם אי-זוגית ב-G הוא 2.

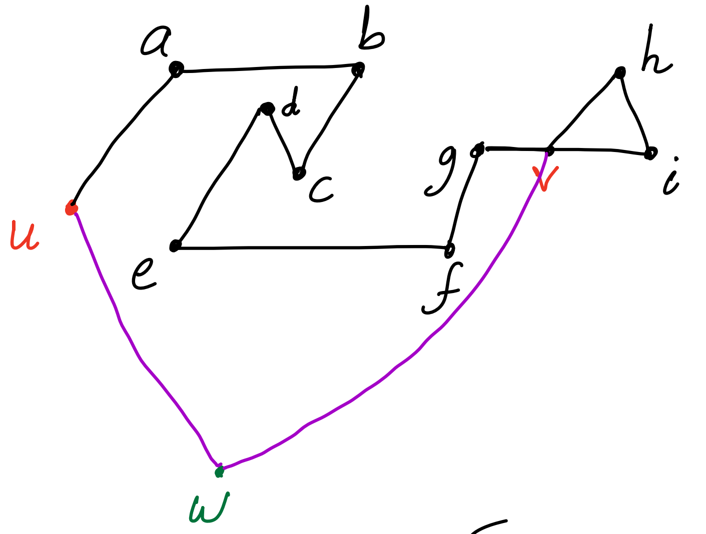
$(\Rightarrow)$ נניח שמספר הקודקודים ב-G בעלי דרגה אי-זוגית הוא 0 או 2.

נראה שקיים מסלול אוילר ב-G.

אם 0 :- אז לפי המשפט יש מעגל אוילר ב-G ובפרט יש מסלול אוילר.

אם 2 :- נניח ש- u,v שני קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

נוסיף קודקוד חדש לגרף שנקרא לו w ונחבר אותו עם u,v בלבד.



נקבל בכך גרף שבו כל קודקוד בעל דרגה זוגית. לכן יש בגרף החדש מעגל אוילר. נניח שהמעגל הוא

gvhivwuabcdefg

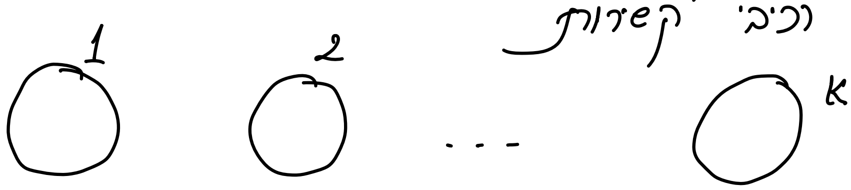
אז מסלול אוילר הוא uabcdefgvhiv

ובכך נסיים.

תזכורת :- יהי G גרף קשיר מישורי בעל m קודקודים, n צלעות ו-f פאות אז מתקיים $m-n+f=2$.

תרגיל :- יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי בעל m קודקודים, n קשתות ו-f פאות. מצאו את מספר רכיבי הקשירות של G.

פתרון :- נניח שיש K רכיבי קשירות



כל רכיב הקשירות הנו גרף קשיר מישורי לכן הוא חייב לקיים את משפט אוילר (בהקצפורת). כלומר לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $m_i - n_i + f_i = 2$.
נסכום על פני כל ה-i האפשריים ונקבל

$$m-n+\sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i - n_i + f_i) = 2k$$

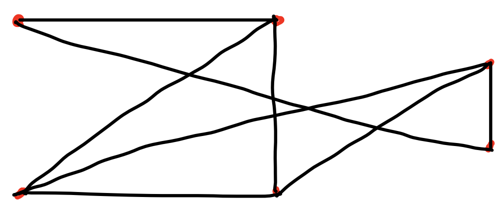
מצד שני, הפאה החיצונית משותפת לכל רכיבי הקשירות לכן בסכום $\sum_{i=1}^{k} f_i$ ספרנו אותה בדיוק $k-1$ פעמים יותר מדי:
לכן $\sum_{i=1}^{k} f_i = f + (k-1)$. לכן נקבל

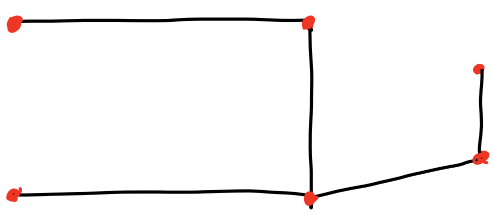
$$m-n+f+(k-1) = 2k \Longrightarrow k = m-n+f-1$$

הגדרה:- יהי $G=(V,E)$ גרף. תת-גרף $T=(V',E')$ של G נקרא עץ פורש אם $V'=V$ ובנוסף T הוא עץ. במילים אחרות, T הוא עץ פורש של G אם T הוא עץ ב-G שמכיל את כל הקודקודים של G.

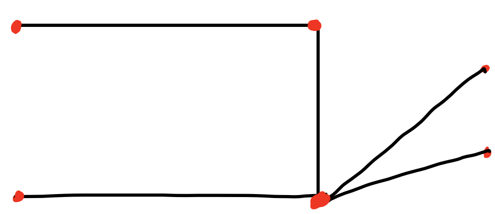
לדוגמה:-

G





עץ פורש



גם עץ פורש

הערות:- 1) בגרף לא קשיר לא קיים עץ פורש.
2) יתכן ויש יותר מעץ פורש אחד בגרף קשיר.
3) אם G הוא עץ אז עץ פורש ב-G הוא G עצמו.

תרגיל:- הוכיחו שבכל גרף קשיר קיים עץ פורש.

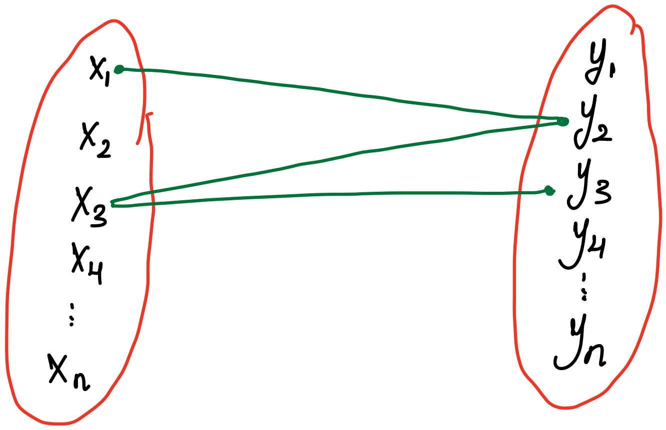
פתרון:- נתון ש-G קשיר. יתכנו שני מקרים:-
1. G חסר מעגלים. 2. ב-G יש מעגלים.

1. אם G חסר מעגלים אז G עץ לכן הוא עץ פורש של עצמו.

2. נניח שיש ב-G מעגלים (פשוטים) $C_1, ..., C_k$. נזכור שאם נוריד קשת ממעגל פשוט שנמצא בגרף קשיר נקבל גרף קשיר. לכן אם נוריד קשת מ-C_1 נקבל גרף קשיר. אם הגרף המתקבל חסר מעגלים אז כמו ב-1 נסיק שהוא עץ פורש ב-G. אחרת, נמשיך בתהליך הזה ובשלב האחרון נקבל גרף קשיר ללא מעגלים בפרט עץ פורש.

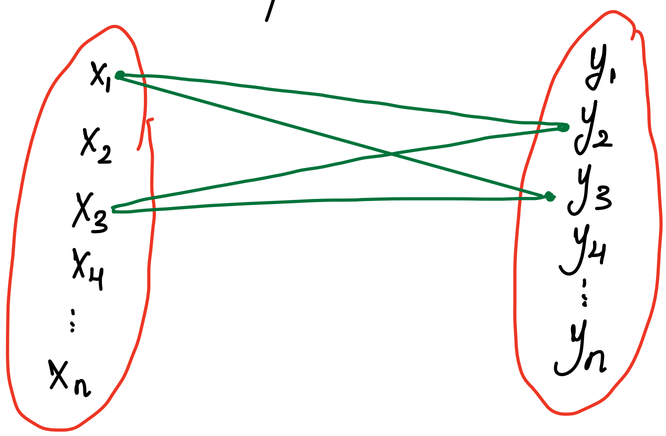
תרגיל:- יהי G גרף דו-צדדי עם n קודקודים כך שכל קודקוד בצד שמאל הוא שכן של כל קודקוד בצד ימין. כמה מעגלים פשוטים באורך 4 יש ב-G?

פתרון:- נתחיל מלספור כמה מסלולים פשוטים יש מאורך 3 ב-G.
כדי לבחור מסלול, נבחר את הקודקוד הראשון (יש $2n$ אפשרויות לעשות זאת), נבחר את הקודקוד השני להיות שכן לקודקוד הראשון (יש n אפשרויות), נבחר קודקוד שלישי להיות שכן של קודקוד שני (חוץ מהקודקוד הראשון) לשם כך יש $n-1$ אפשרויות. לבסוף, נבחר קודקוד רביעי להיות שכן של קודקוד שלישי (ישנן $n-1$ אפשרויות).
בסך הכל ישנם $2n^2(n-1)^2$ מסלולים פשוטים מאורך 3.



נשים שכל מעגל פשוט מאורך 4 מתקבל ע"י מסלול פשוט מאורך 3 ותוספת הקודקוד הראשון לסוף המסלול.

אבל צריך לשים לב שכל מעגל כזה יכול להתקבל מ-8 מסלולים פשוטים מאורך 3. הסבר :-



במעגל הזה יכול להתקבל מ-8 מסלולים פשוטים שונים מאורך 3 והם:

$x_1y_2x_3y_3$, $x_1y_3x_3y_2$, $x_3y_3x_1y_2$, $x_3y_2x_1y_3$, $y_2x_1y_3x_3$, $y_2x_3y_3x_1$, $y_3x_3y_2x_1$, $y_3x_1y_2x_3$

הסבר קומבינטורי:- יש לנו 4 אפשרויות להתחיל במסלול (כי יש 4 קודקודים). לאחר מכן יש 2 אפשרויות עבור לשכן מהצד השני. אחר כך יש לנו אפשרות אחת ויחידה להמשיך במסלול. סך הכל $4\cdot 2=8$ מסלולים.

סה"כ ישנם $\frac{2n^2(n-1)^2}{8}$ מעגלים פשוטים מאורך 4.

פתרון אחר וקל יותר:- מעגל פשוט מאורך 4 ב-G ניתן לקבל בעזרת בחירת 2 קודקודים מכל צד יש מעגל אחד ויחיד מאורך 4 שקודקודיו הם בדיוק

4 הקודקודים שנבחרו. לכן ישנם $\binom{n}{2}\binom{n}{2}$ מעגלים פשוטים מאורך 4.

שימו לב:

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot\frac{n!}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{2n^2(n-1)^2}{8}$$

הגדרות של המרצה מקובל השאלות כמודל :-

טיול = מסלול

מסלול = מותר לחזור על קודקוד מס"פ אך אסור לחזור על אותה הקשת יותר מפעם אחת.

מסלול פשוט = אותה הגדרה כמו של אלק.