נניח שאנחנו רוצים להוכיח טענה שהצורה הלוגית שלה היא "לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a \geq n$, מתקיים $P(n)$", כאשר $a$ הוא מספר טבעי ו $P(n)$ הוא פרדיקט. אנחנו יכולים להוכיח טענה כזו **בשיטת האינדוקציה**. זה אומר שאנחנו מוכיחים את שתי הטענות הבאות:

- טענת הבסיס: $P(a)$.
- טענת האינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a > n$, אם $P(n-1)$ אז $P(n)$.

שיטת האינדוקציה אומרת שאם הוכחנו את שתי הטענות האלה, זה מוכיח את הטענה המקורית ("לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a \geq n$, מתקיים $P(n)$").

**<u>אינדוקציה חזקה:</u> כדי להוכיח באינדוקציה חזקה, אנחנו בוחרים מספר טבעי $b$ כך ש $a \geq b$ ומוכיחים את שתי הטענות הבאות:**

- **טענות הבסיס: $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$.**
- **טענת האינדוקציה: לכל $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $b > k$, אם לכל $a \leq i < k$ מתקיים $P(i)$, אז מתקיים $P(k)$.**

**שיטת האינדוקציה החזקה אומרת שאם הוכחנו את שתי הטענות האלה, זה מוכיח את הטענה המקורית (`לכל $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $a \geq n$, מתקיים $P(n)$`).**

**עקרון שובך היונים**

הוכיחו באינדוקציה את הטענה הבאה: יהיו $X,Y$ קבוצות סופיות כך ש $|X| > |Y|$. אז כל פונקציה $f : X \to Y$ היא לא חד־חד־ערכית. הוכחה באינדוקציה על הגודל של $Y$.

## פתרון השאלה על עקרון שובך היונים

נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}^+$, אם $f : X \to Y$ היא פונקציה כך ש $|Y| = n$ ו $|X| > n$, אז $f$ היא לא חד־חד־ערכית.
נתחיל מלהוכיח את טענת הבסיס עבור $n = 1$: אם $|Y| = 1$, אז $f$ חייבת למפות את האיברים של $X$ לאיבר היחיד ב $Y$, ויש לפחות שני איברים כאלה של $X$. לכן $f$ היא לא חד־חד־ערכית.

נעבור להוכיח את טענת האינדוקציה. יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > 1$. נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$ ונוכיח שהיא מתקיימת עבור $n$. יהיו $X,Y$ קבוצות כך ש $|Y| = n$ ו $|X| > n$, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה. נוכיח ש $f$ היא לא חד־חד־ערכית.

יהי $x \in X$, ונסמן $y = f(x)$. אם קיים ל $y$ מקור $x' \in X$ ששונה מ $x$, אז הפונקציה $f$ היא לא חד־חד־ערכית, כנדרש.
נניח ש $x$ הוא המקור היחיד של $y$. נסמן $X' = X \setminus \{x\}$ ו $Y' = Y \setminus \{y\}$, ונסמן ב $f' : X' \to Y'$ את הפונקציה שמקיימת לכל $x \in X'$ ש $f'(x) = f(x)$. אז $|Y'| = n-1$ וגם

$$|X'| = |X| - 1 > n - 1$$

ולכן לפי הנחת האינדוקציה, הפונקציה $f'$ היא לא חד־חד־ערכית. מכאן נובע שקיימים $x_1, x_2 \in X'$ כך ש $x_1 \neq x_2$ וגם $f'(x_1) = f'(x_2)$. אבל במקרה הזה, $x_1, x_2$ הם גם איברים של $X$ שמקיימים $x_1 \neq x_2$ וגם $f(x_1) = f(x_2)$, ולכן $f$ היא לא חד־חד־ערכית, כנדרש.

## הבעיה עם בסיס לא נכון של אינדוקציה

בעית הסוסים שכולם באותו צבע (הספר של לינאל פרנס, פרק 3, עמוד 87).

__טענה:__ לכל $n$ סוסים אותו הצבע.

לא __הוכחה:__ (הוכחה שגויה)

נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n$

בסיס האינדוקציה: $n=1$, ברור שלסוס אחד יש צבע אחד.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל $n-1$, כלומר לכל $n-1$ סוסים יש אותו צבע. ונוכיח את הטענה ל $n$ סוסים.

תהי $H=\{h_1,h_2,\dots,h_n\}$ קבוצה כלשהי של $n$ סוסים נגדיר את הקבוצות הבאות, שבכל אחת מהן $n-1$ סוסים:

$A=\{h_1,h_2,\dots,h_{n-1}\}$ $\quad$ $B=\{h_2,h_3,\dots,h_n\}$

לפי הנחת האינדוקציה, כל הסוסים ב $A$ הם מאותו צבע, וכל האיברים ב $B$ הם באותו צבע. נשים לב ש $h_2 \in A$ וגם $h_2 \in B$, לכן $h_2 \in A \cap B$

לכן כל הסוסים ב $A$ וב $B$ אותו צבע והוא הצבע של $h_2$

אנו מסיקים כי לכל הסוסים בקב' $H$ הם באותו צבע.
לכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל קב' ו בת $n$ סוסים.

**כמסקנה אפשר להסיק:**
**לכל הסוסים בעולם יש צבע אחד.**

## איפה הטעות בהוכחה?

לא הוכחנו את שלב האינדוקציה לכל $n \geq 1$, מאחר שאם $H=\{h_1,h_2\}$ אזי $A=\{h_1\}$ $B=\{h_2\}$ ולכן $A \cap B = \emptyset$ $h_2 \notin$ בניגוד למה שהסקנו קודם.

כלומר הוכח שהטענה נכונה עבור $n=1$, ואיננה גוררת נכונות עבור $n=2$

**תאים טובים במטריצה**

תהי $M$ מטריצה $m \times n$ שבכל התאים בה יש 0־ים או 1־ים (אבל לא מספרים אחרים). אנחנו אומרים שהתא ה $(i,j)$ הוא **טוב** אם ורק אם הוא מכיל 1 (כלומר $M_{i,j}=1$) ומתקיים לפחות אחד משלושת התנאים הבאים:

- התא נמצא בשורה הראשונה (כלומר $i=1$).
- התא נמצא בעמודה הראשונה (כלומר $j=1$).
- מתקיים $i>1, j>1$, והתאים מעל ומשמאל לתא מכילים 0 (כלומר $M_{i-1,j}=0$ וגם $M_{i,j-1}=0$).

הוכיחו שאם התא ה $(m,n)$ מכיל 1 (כלומר $M_{m,n}=1$), אז קיים במטריצה $M$ תא טוב.

**תשובה:** הפתרון הוא באינדוקציה על $m+n$.

## פתרון השאלה על תאים טובים במטריצה

נוכיח באינדוקציה שלכל $s \in \mathbb{N}$ כך ש $s \geq 2$, אם $M$ היא מטריצה $m \times n$ כמו בשאלה כך ש $s = m+n$ אז קיים תא טוב במטריצה". נתחיל מלהוכיח את טענת הבסיס עבור $s=2$: תהי $M$ מטריצה $m \times n$ כמו בשאלה כך ש $m+n=2$. אז בהכרח $m=n=1$. אז $M_{m,n}=1$ והוא תא טוב כי $m=1$, כנדרש.

נעבור להוכיח את טענת האינדוקציה: יהי $s \in \mathbb{N}$ כך ש $s>2$. נניח שהטענה נכונה עבור $s-1$ ונוכיח אותה עבור $s$. תהי $M$ מטריצה $m \times n$ כמו בשאלה כך ש $s=m+n$. אם התא $(m,n)$ הוא תא טוב, אז סיימנו. אחרת, אנחנו יודעים ש $M_{m,n}=1$, ומכיוון שהתא לא טוב בהכרח מתקיים $m,n>1$ וגם מתקיים $M_{m-1,n}=1$ או $M_{m,n-1}=1$.

נניח ש $M_{m-1,n}=1$ (אם $M_{m,n-1}=1$ ההוכחה דומה). תהי $M'$ המטריצה שנקבל אם נמחק מ $M$ את השורה ה $m$. אז $M'$ היא מטריצה $(m-1)\times n$, מתקיים $(m-1)+n=s-1$, ומתקיים

$$M'_{m-1,n}=M_{m-1,n}=1$$

ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיים ב $M'$ תא טוב $(i,j)$. אז התא $(i,j)$ הוא בהכרח תא טוב של $M$ (כי כל הדרישות שמתקיימות ב $M'$ בהכרח מתקיימות גם ב $M$).