מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 10

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: גרפים 1.

גרף הוא אובייקט מהצורה $G = (V, E)$, כאשר V היא קבוצת צמתים ו-$E \subseteq V^2$ קבוצת צלעות. לרוב נדבר על גרפים פשוטים, שהם לא מכילים קשתות כפולות (ולכן E היא קבוצה, ולא מכילה מספר מופעים), או קשתות עצמיות, כלומר $E \subseteq V^2 \setminus \{(v,v) \mid v \in V\}$. לרוב נעסוק בגרפים לא מכוונים.

בגרף לא מכוון, הדרגה של קודקוד $u \in V$ היא מספר השכנים שלו:

$$\deg(u) := \left|\{v \in V \mid \{u,v\} \in E\}\right|.$$

בגרף מכוון, נפריד לדרגת כניסה (קשתות שנכנסות לתוך u) ודרגת יציאה (דרגות שיוצאות מ-u), ונגדיר

$$\text{in-deg}(u) = |(V \times \{u\}) \cap E|$$
$$\text{out-deg}(u) = |(\{u\} \times V) \cap E|$$

משפט 1. (לחיצת הידיים) יהי $G = (V, E)$ גרף. אזי,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

תרגיל 1. קבעו האם קיים גרף עם 6 קודקודים שדרגותיהם:

1. $1,2,3,4,5,5$.
2. $1,2,3,4,4,5$.
3. $1,2,3,3,4,5$.

פתרון 1. 1. לא קיים גרף כזה. מכיוון שקיימים שני קודקודים שדרגתם 5, הם מחוברים לכל הצמתים האחרים. לכן דרגת כל צומת אחר לפחות 2, ולא ייתכן שקיים צומת שדרגתו 1.

2. לא קיים גרף כזה. נשים לב שסכום הדרגות הוא 19, בסתירה למשפט לחיצת הידיים (סכום הדרגה הוא $2\left|E\right|$ ולכן זוגי).

3. קיים גרף כזה, למשל

הגדרה 1. יהי $G=(V,E)$ גרף. מסלול בגרף הוא סדרה $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,e_k,v_k$, כאשר $v_0,\ldots,v_k\in V$ ו-$e_i=(v_{i-1},v_i)$. ניתן לקצר ולהשמיט את הקשתות.

הגדרה 2. מסלול $v_0,\ldots,v_k$ הוא מסלול פשוט אם לכל $0\leq i\neq j\leq k$ מתקיים $v_i\neq v_j$ (כלומר קודקודים לא חוזרים על עצמם).

משפט 2. יהי $G=(V,E)$ גרף ויהיו $u,v\in V$. אם קיים מסלול $v\rightsquigarrow u$ אז קיים מסלול פשוט $v\rightsquigarrow u$.

הגדרה 3. מעגל הוא מסלול $v_0,\ldots,v_k$ כאשר $v_0=v_k$. במעגל פשוט כל שאר הקודקודים $v_1,\ldots,v_{k-1}$ ייחודיים.

תרגיל 2. יהי $G=(V,E)$ גרף כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\deg\left(v\right)\geq 2$. הוכיחו שקיים ב-G מעגל פשוט.

פתרון 2. יהי $G=(V,E)$ גרף. נבחר $v_0\in V$ שרירותי. נגדיר מסלול שמתחיל מ-v_0, ובו בכל צעד נבחר בקשת כלשהי שלא הגענו דרכה. כלומר, אם הצעד האחרון במסלול היה $u\to v$, נבחר קשת כלשהי מ-v פרט ל-$\{u,v\}$.

- המסלול יכול להמשיך עד שביקרנו בצומת כלשהו פעמיים, מכיוון שלאחר הביקור הראשון יש קשת שעוד לא עברנו דרכה (דרגת כל צומת לפחות 2).
- מכיוון שהגרף סופי, לאחר לכל היותר n צעדים נבקר בצומת כלשהו פעמיים. נסמן ב-v_i את הצומת שנבקר בה פעמיים ראשון. נכעת המסלול הוא

$$v_0,\ldots,\underbrace{v_i,\ldots,v_i}_{P}.$$

נשים לב שפרט לביקור האחרון המסלול פשוט, מכיוון שמבקרים בכל קודקוד פעם אחת. לכן P הינו מעגל פשוט.

תרגיל 3. יהי $G=(V,E)$ גרף, ותהי δ הדרגה המינימלית בגרף. אם $\delta\geq 1$, אז בגרף יש מסלול פשוט מאורך לפחות δ. האם בהכרח יש מעגל פשוט בגרף?

פתרון 3. נוכיח את הטענה באינדוקציה על δ.

- בסיס: עבור $\delta=1$, יהי $v\in V$ צומת כלשהו. מכיוון שדרגת v לפחות 1, יש לו שכן u בגרף, והמסלול v,u הוא מסלול פשוט באורך 1.

- נניח את נכונות הטענה עבור $\delta - 1 \geq 1$, ונוכיח עבור δ. יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון שהדרגה המינימלית בו היא δ.
  - יהי $v_0 \in V$ צומת כלשהו. נגדיר גרף $G' = (V', E')$ כך ש-
  $$V' = V \setminus \{v_0\}$$
  $$E' = E \setminus \{\{u, v_0\} \mid u \in V\}$$
  - נשים לב שהורדנו לכל היותר קשת אחת מכל קודקוד שאינו v_0, ולכן הדרגה המינימלית ב-G' היא $\delta - 1$.
  - מהנחת באינדוקציה, קיים ב-G' מסלול פשוט באורך $\delta - 1$ לפחות, נסמנו ב-$u_0, \dots, u_{\delta-1}$.
  - אם $\{u_0, v_0\} \in E$, אז המסלול $v_0, u_0, \dots, u_{\delta-1}$ הוא מסלול פשוט באורך δ ב-G.
  - אם $\{u_0, v_0\} \notin E$, נקבל שדרגת u_0 ב-G' שווה לדרגת u_0 ב-G. לכן, דרגת u_0 היא לפחות δ, וקיים $v \in V \setminus \{u_1, \dots, u_{\delta-1}\}$ כך ש-$\{v, u_0\} \in E$. לכן המסלול $v, u_0, \dots, u_{\delta-1}$ הוא מסלול פשוט באורך δ בגרף.

הגדרה 4. גרף G נקרא קשיר אם לכל $u, v \in V$ קיים מסלול $v \rightsquigarrow u$.

הגדרה 5. יהי גרף G. נגדיר חלוקה $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(V)$ של הקודקודים לרכיבי קשירות, כך שלכל $u, v \in V$, u ו-v באותה מחלקה ב-$\mathcal{F}$ אם קיים מסלול $v \rightsquigarrow u$.

הערה 1. במידה והגרף הקשיר נקבל ש-$\mathcal{F} = \{V\}$.

הגדרה 6. עבור גרף $G = (V, E)$, הגרף המשלים של G יסומן ב-$\bar{G} = \left(V, \bar{E}\right)$, כך שלכל $u \neq v \in V$, $\{u, v\} \in \bar{E}$ אמ"מ $\{u, v\} \notin E$.

תרגיל 4. יהי $G = (V, E)$ גרף לא קשיר, אזי $\overline{G}$ קשיר.

פתרון 4. נוכיח שלכל $u, v \in V$ קיים מסלול $v \rightsquigarrow u$ ב-$\overline{G}$.

- אם $\{u, v\} \notin E$, ברור כי $\{u, v\} \in \overline{E}$ ולכן קיים מסלול $v \rightsquigarrow u$ ב-$\overline{G}$.
- אם $\{u, v\} \in E$: נשים לב שהדבר גורר ש-$|V| > 2$, אחרת הגרף היה קשיר.
  - מכיוון ש-G אינו קשיר, יש לו לפחות שני רכיבי קשירות שונים.
  - בנוסף, מכיוון ש-$\{u, v\} \in E$, u ו-v באותו רכיב קשירות ב-G.
  - יהי w צומת מרכיב קשירות אחר ב-G. אזי $\{u, w\}, \{v, w\} \notin E$ ולכן $\{u, w\}, \{v, w\} \in \overline{E}$, וקיים מסלול $v \rightsquigarrow u$ ב-$\overline{G}$.

הגדרה 7. יהי $G=(V,E)$ גרף, ויהיו $u,v\in V$. המרחק בין u ו-vלהיות

$$\text{dist}\left(u,v\right):=\begin{cases} l & u\rightsquigarrow v \text{ הוא אורך המסלול הקצר ביותר } l \\ \infty & u\rightsquigarrow v \text{ אין מסלול } \end{cases}.$$

בנוסף, הקוטר של G מוגדר להיות המרחק המקסימלי בין זוגות קודקודים:

$$\text{diam}\left(G\right)=\max\left\{\text{dist}\left(u,v\right)\mid u,v\in V\right\}.$$

תרגיל 5. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו כי G קשיר אמ"מ $\text{diam}\left(G\right)<\infty$.

פתרון 5. נוכיח את שני כיווני הטענה.

- **(** $\Longleftarrow$ **)** מכיוון ש-G קשיר, קיים מסלול בין כל זוג צמתים. לכן בפרט קיים מסלול פשוט בין כל זוג צמתים, ולכל $u,v\in V$ מתקיים $\text{dist}\left(u,v\right)\leq n$. לכן $\text{diam}\left(G\right)\leq n<\infty$.
- **(** $\Longrightarrow$ **)** נסמן $d=\text{diam}\left(G\right)<\infty$. אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\text{dist}\left(u,v\right)\leq d<\infty$, ולכן מהגדרת מרחק קיים מסלול $u\rightsquigarrow v$. מכאן G קשיר.

תרגיל 6. יהי $G=(V,E)$ גרף כך ש-$n=|V|$. הוכיחו כי אם לכל $v\in V$ מתקיים $\deg\left(v\right)\geq\left(n-1\right)/2$, אז $\text{diam}\left(G\right)\leq 2$.

פתרון 6. נוכיח כי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\text{dist}\left(u,v\right)\leq 2$. יהיו $u,v\in V$.

- אם u,v שכנים, נקבל ש-$\text{dist}\left(u,v\right)=1$ וסיימנו.
- אחרת, נוכיח כי יש להם שכן משותף: קיים $w\in V$ כך ש-u,w וגם w,v שכנים. נניח בשלילה שאין ל-u,v שכן משותף.

- נסמן ב-$\Gamma\left(v\right)$ את אוסף השכנים של v, וב-$\Gamma\left(u\right)$ את של u. אזי $\Gamma\left(v\right)\cap\Gamma\left(u\right)=\emptyset$.
- בנוסף u,v אינם שכנים, ולכן בגרף יש לפחות $|\Gamma\left(v\right)|+|\Gamma\left(u\right)|+|\{u,v\}|$ קודקודים. אזי,

$$\begin{aligned}|V| &\geq|\Gamma\left(v\right)|+|\Gamma\left(u\right)|+|\{u,v\}|\\ &\geq\deg\left(v\right)+\deg\left(u\right)+2\\ &\geq\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+2\\ &=n+1,\end{aligned}$$

והגענו לסתירה לכך ש-$n=|V|$.

תרגיל 7. יהי $G=(V,E)$ גרף. נגדיר גרף חדש $G'=(E,E')$ כך שקודקודי G' הם הקשתות של G. בנוסף, יש קשת בין $e_1,e_2\in E$ ב-G' אמ"מ יש להן צומת משותפת. כלומר,

$$E'=\left\{\{e_1,e_2\}\in E^2 \mid e_1\neq e_2\wedge e_1\cap e_2\neq\emptyset\right\}.$$

הוכיחו כי אם G קשיר אז G' קשיר.

פתרון 7. נניח ש-G קשיר ונוכיח ש-G' קשיר. תהיינה $e_1,e_2\in E$, נוכיח כי קיים מסלול $e_1\rightsquigarrow e_2$ ב-G'.

- נסמן $e_1=\{u_1,v_1\}$ ו-$e_2=\{u_2,v_2\}$. מכיוון ש-G קשיר קיים מסלול $u_1\rightsquigarrow u_2$, נסמנו ב-$w_1,\dots,w_k$ (כלומר $w_1=u_1$ ו-$w_k=u_2$).
- לכן, סדרה הקשתות $e_1,\{w_1,w_2\},\{w_2,w_3\},\dots,\{w_{k-1},w_k\},e_2$ היא מסלול $e_1\rightsquigarrow e_2$ ב-G', מכיוון שלכל זוג קשתות סמוכות יש נקודת קצה משותפת.
- לכן קיים מסלול $e_1\rightsquigarrow e_2$ ב-G', ו-G'.