מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 4

תזכורת :- תהי A קבוצה. ויהי $R \subseteq A \times A$ (יחס). אומרים ש-R יחס שקילות אם ורק אם הוא :-

1. רפלקסיבי
2. סימטרי
3. טרנזיטיבי

הגדרה :- תהי A קבוצה ו-R יחס שקילות על A, ויהי $a \in A$.
מחלקת השקילות של a היא הקבוצה הבאה :-

$$[a]_R := \{ b \in A \mid aRb \}$$

ולבסוף הגדרנו קבוצת מנה :-

$$A/R := \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

ראינו שיחס שקילות מחלק את הקבוצה A לאוסף של תתי-קבוצות שלה כך ש:-

1. איחודן שווה ל-A.
2. כל שתי קבוצות שונות זרות.
3. אף קבוצה לא ריקה.

הגדרה :- תהי A קבוצה לא ריקה. חלוקה של A היא קבוצה של אוסף תתי-קבוצות של A כך ש:-

1) איחודן הוא כל הקבוצה A.
2) כל שתיים מהן זרות.
3) אף קבוצה מבין תתי-הקבוצות היא ריקה.

משפט :- כל יחס שקילות משרה חלוקה של A, וכל חלוקה של A משרה יחס שקילות.

תרגיל:- תארו את כל יחסי השקילות על הקבוצה $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

פתרון:- ע"פ המשפט האחרון מספיק לתאר את כל החלוקות של A.

נתאר את החלוקות של A:-

$$\{\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}\}$$

$$\{\{\alpha,\beta\},\{\gamma\}\}$$
$$\{\{\alpha,\gamma\},\{\beta\}\}$$
$$\{\{\gamma,\beta\},\{\alpha\}\}$$
$$\{\{\alpha,\beta,\gamma\}\}$$

אלו כל החלוקות של A כלומר יש לנו 5 יחסי שקילות על A.

תרגיל:- במקרים הבאים R הוא יחס שקילות על A (אין צורך להוכיח)

תארו את קבוצת המנה $A/_R$:-

א. $A=\mathbb{N}^+$. $kRl \iff (k-\pi)(l-\pi)>0$.

ב. $A=\mathbb{N}^+$. $kRl \iff k-l$ מתחלק ב-4.

ג. $A=\mathbb{N}^+$. $kRl \iff [k-l$ מתחלק ב-4 או $k\cdot l$ אי-זוגי$]$

ד. $A=\mathbb{R}$. $xRy \iff x^2=y^2$.

ה. $A=(\mathbb{N}^+)^2$. $(k_1,k_2)R(l_1,l_2) \iff k_1\cdot l_2=k_2\cdot l_1$.

פתרון:- א. נשים לב שאם $1\le k,l\le 3$ אז kRl כי $(k-\pi)\cdot(l-\pi)>0$.

בנוסף, אם $k,l>3$ אז $(k-\pi)\cdot(l-\pi)>0$. לכן קבוצת המנה היא:-

$$A/_R=\{\{1,2,3\},\{4,5,6,7,\dots\}\}$$

ב. ראינו משהו דומה בהרצאות. מחלקות השקילות הן:-

$$[1]_R=\{1,5,9,13,17,\dots\}$$

$$[2]_R = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}$$

$$[3]_R = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots\}$$

$$[4]_R = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

סה"כ קבוצת המנה היא

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R\}$$

הערה :- אם נתון יחס על הקבוצה $\mathbb{Z}$ שהוא $kRl \Leftrightarrow$ $k-l$ מתחלק ב-n כאשר $n \in \mathbb{N}^+$. אז קבוצת המנה יהיו בדיוק n מחלקות שקילות והן :-

$$A/R = \{\{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{nk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \dots, \{nk+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$$

ב. נשים לב אם k,l הם אי-זוגיים אז מתקיים כי kRl כי $k \cdot l$ הוא מספר אי-זוגי.
ואם k זוגי ו- l אי-זוגי אז $k-l$ אי-זוגי בפרט לא מתחלק ב- 4. בנוסף, $k \cdot l$ זוגי ולכן k,l אינם ביחס R.
כעת, אם k,l זוגיים אז $k \cdot l$ זוגי. לכן נותר לבדוק מתי $k-l$ מתחלק ב- 4. $k-l$ מתחלק ב-4 אם ורק אם $k \bmod 4 = l \bmod 4$. לכן נקבל ע"פ זה שתי מחלקות שקילות שהן

$$[2]_R = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, \dots\}$$

$$[4]_R = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$$

סה"כ יש לנו 3 מחלקות שקילות. לכן קבוצת המנה היא :

$$A/R = \{\{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}^+\}, \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\}, \{4, 8, 12, 16, \dots\}\}$$

3. נשים לב $x^2=y^2 \iff x=\pm y$. לכן מחלקת השקילות של x היא
$$[x]_R=\{x,-x\}$$
$$A/_R=\{\{x,-x\}\mid 0\le x\in\mathbb{R}\}$$

ה. $(k_1,k_2)\,R\,(l_1,l_2) \iff k_1\cdot l_2=k_2\cdot l_1 \iff \frac{k_1}{k_2}=\frac{l_1}{l_2}$.

נשים לב אם $0<q\in\mathbb{Q}$ אז קיימים $(m_1,n_1)\in(\mathbb{N}^+)^2$ כך ש- $\frac{m_1}{n_1}=q$.
לכן בעצם ניתן לתאר את כל מחלקות השקילות בעזרת המספרים הרציונליים החיוביים. למשל מחלקת השקילות של $(1,2)\in(\mathbb{N}^+)^2$ היא
$$S_{\frac{1}{2}}=[(1,2)]_R=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\ldots\}$$
$$=\{(x,2x)\mid x\in\mathbb{N}^+\}$$
לכן קבוצת המנה היא
$$A/_R=\{S_q : 0<q\in\mathbb{Q}\}$$

פונקציות:-

הגדרה:- תהיינה A,B קבוצות. פונקציה מ- A ל- B מסומנת ב- f, והיא פעולה שלוקחת כל איבר מ- A לאיבר אחד ויחיד ב- B.
באופן שקול:- פונקציה f היא תת-קבוצה של $A\times B$. כאשר לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש- $(a,b)\in f$ שקול לאמר "$f(a)=b$".

הגדרה:- תהי $f:A\to B$ פונקציה. נאמר ש- f היא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם לכל $a_1\neq a_2$ ב- A מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$ (אין שני איברים שונים ב- A שעוברים תחת f לאותו איבר ב- B).
הגדרה שקולה:- אם $f(a_1)=f(a_2)$ אז $a_1=a_2$.
הגדרה:- תהי $f:A\to B$ פונקציה. f נקראת על אם לכל $b\in B$

קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

הגדרה: יהי X קבוצה. פונקציית הזהות על X היא הפונקציה $id_X : X\to X$ שמוגדרת ע"י לכל $x\in X$ מתקיים $id_X(x)=x$.

הערה חשובה: אם $X\subseteq Y$ אז ניתן להגדיר פונקציה "הכלה" מ-X ל-Y ע"י לכל $x\in X$, $f(x)=x\in Y$.

הערה: לפעמים במקום לרשום $f(x)=x^2$ רושמים $x\longmapsto x^2$.

הרכבת פונקציות: תהיינה $f: A\to B$, $g: B\to C$ שתי פונקציות. ההרכבה של g על f היא הפונקציה $g\circ f : A\to C$ והיא מוגדרת ע"י

$$\forall a\in A : (g\circ f)(a)=g(f(a))$$

הגדרה: תהי $f: X\to Y$ פונקציה. f נקראת הפיכה אם קיימת $g: Y\to X$ כך ש:
1. $g\circ f = id_X$.
2. $f\circ g = id_Y$.

(מסמנים $g=f^{-1}$)

משפט: f הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

תרגיל: עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם היא חח"ע, על. אם הפונקציה הפיכה, מצאו את ההופכית שלה.

א. $f: (0,\infty)\to(0,1)$ המוגדרת ע"י: $\forall x\in(0,\infty) : f(x)=\frac{1}{1+x}$

ב. $g: (0,\infty)\to(0,\infty)$ המוגדרת ע"י: $\forall x\in(0,\infty) : g(x)=x+\frac{1}{x}$

ג. $h: P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י: $\forall A\in P(\mathbb{R}) : h(A)=A\cup\mathbb{N}$

פתרון: א. f חח"ע: יהי $x,y\in(0,\infty)$ כך ש- $f(x)=f(y)$. צ"ל $x=y$.
$f(x)=f(y)$. לכן $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+y}$. $x,y\in(0,\infty)$ ולכן $x\neq -1\neq y$. לכן

$(1+x)(1+y)\neq 0$. נכפול את המשוואה ב- $(1+x)(1+y)$ ונקבל :-

$y=x \Longleftarrow 1+y=1+x$. סה"כ f חח"ע.

f על :- יהי $y\in(0,1)$ ונראה שקיים $x\in(0,\infty)$ כך ש- $f(x)=y$.

כלומר מחפשים $x\in(0,\infty)$ כך ש- $\frac{1}{1+x}=y$. נחלץ את x :-

$x\in(0,\infty)$ לכן בהכרח $1+x\neq 0$. נכפול ב- $1+x$ ונקבל

$$1=y(1+x)$$

$y\in(0,1)$ לכן $y\neq 0$. נחלק ב- y ונקבל $x=\frac{1}{y}-1 \Longleftarrow \frac{1}{y}=1+x$

$y\in(0,1)$ לכן $\frac{1}{y}>1$ לכן $x=\frac{1}{y}-1\in(0,\infty)$ ומתקיים

$$f(x)=f\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}-1\right)}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y$$

סה"כ מצאנו מקור ל-y כלומר f על. סה"כ לפי המשפט f הפיכה. נמצא את f^{-1} :-

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

מסמנים $y=f(x)$. נקבל $y=\frac{1}{1+x}$. מחלצים את x ומקבלים כמו קודם $x=\frac{1}{y}-1$.

כעת מסמנים $f^{-1}(y)=x$. בכך נקבל

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{y}-1$$

ב. g לא חח"ע :- כי $g(2)=g(\frac{1}{2})$ למרות ש- $2\neq\frac{1}{2}$.

g לא על :- כי לכל $0<x$ מתקיים $x+\frac{1}{x}\geq\max\{x,\frac{1}{x}\}\geq 1$

לכן עבור $\frac{1}{2}\in(0,\infty)$ אין מקור.

ב. h לא חח"ע כי $\{1,2\}, \{2,3\} \in P(\mathbb{R})$ שונות. אבל

$$\left.\begin{aligned} h(\{1,2\}) &= \{1,2\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N} \\ h(\{2,3\}) &= \{2,3\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N} \end{aligned}\right\} =$$

לכן h לא חח"ע.

h לא על כי $\phi \in P(\mathbb{R})$ "בטווח" אין לה מקור "בתחום"

כי לכל $A \in P(\mathbb{R})$ $h(A) = A \cup \mathbb{N} \neq \phi$.