

מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 6

הגשה ליום חמישי, 5/9 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. תהיינה X, Y, Z, W קבוצות, $A, B \subseteq X$ תתי-קבוצות ותהיינה

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : X \rightarrow Y, \quad h : W \rightarrow X, \quad k : Y \rightarrow Z$$

פונקציות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

א. $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

ב. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

ג. אם h היא על- h ו- $f \circ h = g \circ h$ אז $f = g$.

ד. אם h היא חח"ע ו- $f \circ h = g \circ h$ אז $f = g$.

ה. אם k היא על- g ו- $k \circ f = k \circ g$ אז $f = g$.

ו. אם k היא חח"ע ו- $k \circ f = k \circ g$ אז $f = g$.

שאלה 2. תהיינה X, Y, Z קבוצות ו- $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g הן על אז $g \circ f$ היא על.

ב. אם f ו- g הפיכות אז $g \circ f$ הפיכה, ומתקיים $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ג. f היא על אמ"מ לכל פונקציות שונות $g_1 : Y \rightarrow Z$ ו- $g_2 : Y \rightarrow Z$ מתקיים $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$.

שאלה 3.

א. נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ באופן הבא:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : g(a, b) = 2^a \cdot (2b + 1).$$

הוכיחו כי g הפיכה. רמז: בדקו את המקורות של $3, 5, 6, 16, 17, 24, 30 \in \mathbb{N}^+$ (למה יש בדיוק מקור יחיד?) הסיקו מכך דרך כללית לבחור את המקור.

ב. מצאו פונקציה הפיכה מ- $\{1/n \mid n \geq 1\}$ ל- $\{1/n \mid n \geq 2\}$.
 ג. מצאו פונקציה הפיכה מ- $[0, 1]$ ל- $[0, 1)$. רמז: קיימת קבוצה S כך ש-

$$[0, 1] = \{1/n \mid n \geq 1\} \cup S.$$

שאלה 4.

א. תהיינה A, B, C, D קבוצות. הוכיחו כי אם $|A| = |C|$ וגם $|B| = |D|$ אז

$$|A \times B| = |C \times D|.$$

ב. עבור קבוצות A, B , נסמן ש- $|A| < |B|$ אם "מ" $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$.
 הוכיחו שלכל שלוש קבוצות A, B, C , אם $|A| < |B|$ וגם $|B| \leq |C|$, אז
 $|A| < |C|$.