מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 13

משפט 1 :- תהיינה K, N שתי קבוצות כך ש- $|N|=n$, $|K|=k$.
אזי $|N^K|=n^k$ כאשר N^K הוא קבוצת כל הפונקציות מ- K ל- N.
(בחירה עם חזרות עם חשיבות לסדר).

משפט 2 :- תהיינה K, N כמו במשפט קודם. אזי מספר הפונקציות החח"ע מ- K ל- N בתנאי ש-$(n \geq k)$ הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$

מקרה פרטי של משפט 2 :- אם $n=k$ אזי נקבל שמספר הפונקציות החח"ע מ- K ל- N הוא $n!$.

משפט 3 :- תהי F קבוצת כל הפונקציות החח"ע מ- K ל- N. נגדיר יחס על F באופן הבא :-

$$\forall f,g \in F: \quad f \sim g \iff \exists \pi \in S_k: \quad g = f \circ \pi$$

במילים :- f,g הן ביחס אם קיימת תמורה $\pi: K \to K$ כך ש- $g=f\circ\pi$. כלומר לכל $t \in K$ מתקיים $g(t)=(f\circ\pi)(t)=f(\pi(t))$. ראינו בהרצאות שזה יחס שקילות. בנוסף, ראינו שבכל מחלקת שקילות יש $k!$ איברים. לכן, מספר מחלקות השקילות הוא

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

משפט 4 :- תהי G קבוצת כל הפונקציות מ- K ל- N. ונגדיר אותו יחס שהיה במשפט 3 על איברי G. אזי מספר מחלקות השקילות הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$ או באופן שקול $\underline{=}$ $\binom{n+k-1}{k}$

סה"כ נקבל טבלה :-

בחירת k איברים מתוך n איברים :-

סדר/חזרות	אין חזרות	יש חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$

שימו לב, טבלה זו שקולה לטבלה הבאה :-

בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים ל-t תאים? $(k \le t)$

	כדורים שונים	כדורים זהים
בכל תא יש מקום לכדור אחד בלבד	$\frac{t!}{(t-k)!}$	$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!\cdot(t-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	t^k	$\binom{k+t-1}{k} = \binom{k+t-1}{t-1}$

דוגמה ליחס שבמשפטים 3 ו-4 :-

$K = \{x,y\}$, $N = \{1,2,3\}$ לפי משפט 1 : $|G| = |N^K| = 3^2 = 9$

$f_1(x) = f_1(y) = 1$

$f_2(x) = f_2(y) = 2$

$f_3(x) = f_3(y) = 3$

ביחס $\left\{ \begin{array}{l} f_4(x) = 1 \ , \ f_4(y) = 2 \\ f_5(x) = 2 \ , \ f_5(y) = 1 \end{array} \right.$

ביחס $\left\{ \begin{array}{l} f_6(x) = 2 \ , \ f_6(y) = 3 \\ f_7(x) = 3 \ , \ f_7(y) = 2 \end{array} \right.$

ביחס $\left\{ \begin{array}{l} f_8(x) = 1 \ , \ f_8(y) = 3 \\ f_9(x) = 3 \ , \ f_9(y) = 1 \end{array} \right.$

$g \sim f \iff$ קיימת $\pi : K \to K$ כך ש- $g = f \circ \pi$

לכן מחלקות השקילות הן:

$$\underbrace{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3\}, \{f_4, f_5\}, \{f_6, f_7\}, \{f_8, f_9\}}_{\text{ישנן 6 מחלקות שקילות}}$$

ואם נסתכל על משפט 4 אנחנו צריכים לקבל:-

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{3+2-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$$

תרגיל:- כמה מספרים בני 6 ספרות המורכבים מהספרות 2,3,9 מתחלקים:-

א. ב-2. ב. ב-3. ג. ב-6. ד. ב-9.

פתרון: - א'. תנאי ההתחלקות ב- 2 הוא שספרת האחדות תהיה זוגית. במקרה שלנו הוא חייבת להיות 2.

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{שלוש אפשרויות בכל מקום.}}\ \underline{2}$$

נקבל $3^5=243$ מספרים כדרוש.

ב'. תנאי ההתחלקות ב-3 הוא שסכום הספרות יתחלק ב-3. במקרה שלנו מספר הספרה 2 חייב להופיע או 0 פעמים או 3 פעמים או 6 פעמים.

$$\underbrace{2^6}_{\text{2 לא מופיע במספר}} + \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{בוחרים את המקומות של 2}} \cdot \underbrace{2^3}_{\text{בשאר המקומות נשים 3 או 9}} + \underbrace{1}_{\text{המספר מורכב רק מהספרה 2}} = 225$$

ג'. תנאי ההתחלקות ב-6 הוא שהמספר יתחלק ב- 2 וגם ב- 3. לכן ספרת האחדות חייבת להיות 2. בנוסף, כדי שהמספר יתחלק ב-3 אז הספרה 2 צריכה להופיע עוד פעמיים או חמש פעמים (חוץ מבספרת האחדות)

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}\ \underline{2}$$

$$\underbrace{1}_{\text{המספר מורכב רק מ-2}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{נבחר מקומות לספרה 2 ממה שנשאר}} \cdot \underbrace{2^3}_{\text{בשאר המקומות נשים 3 או 9}} = 81$$

ב. תנאי ההתחלקות ב-9 הוא סכום הספרות מתחלק ב-9.
נשים לב שאם הספרה 2 מופיעה במספר אז כ"א צריכה להופיע 3 פעמים. בנוסף הספרה 3 צריכה להופיע פעם אחת והספרה 9 תופיע פעמיים.

בנוסף אם הספרה 2 לא מופיעה אז ישנם 3 דרכים לכך שהמספר יתחלק ב-9:-

1) המספר מורכב מ-9-יות
2) המספר מורכב מ-3-יות.
3) הספרה 3 תופיע שלוש פעמים והספרה 9 תופיע 3 פעמים.

סה"כ

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{מקומות של 2}}\cdot\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{מקום של 3}}+\underbrace{1+1}_{\text{המספר מורכב מאותה ספרה 3 או 9}}+\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{מקומות ל-3}}=82$$

תזכורת:- אם $|A|=|B|$ והעוצמות סופיות. אזי בהינתן פונקציה $f:A\to B$ אזי f חח"ע $\Longleftrightarrow$ f על.

תרגיל:- כמה פונקציות על יש מקבוצה A לקבוצה B כאשר $|B|=n$ ו-$|A|$ הוא:-

א. n.

ב. $n+1$.

ג. $n+2$.

פתרון:- א. אם $|A|=|B|=n$ אז $f:A\to B$ על $\Longleftrightarrow$ f חח"ע. וישנן $n!$ פונקציות חח"ע מ-A ל-B.

ב. כיוון שישנם n+1 איברים ב-A והפונקציה על אז ישנם בדיוק שני איברים ב-A שעוברים לאותו איבר ב-B. ולכן, התשובה

$$\underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\text{בוחרים 2 איברים שילכו לאותו איבר ב-B}} \underbrace{n!}_{\text{ואז יהיו n איברים שנעביר אותם באופן חח"ע ועל ל-B}}$$

ג. במקרה $|A| = n+2$ ייתכנו שני מקרים:

1) שלושה איברים עוברים לאותו איבר.

2) שני זוגות של איברים שכל שניים מהם עוברים לאותו איבר ב-B. ולכן

$$\binom{n+2}{3} n! + \frac{1}{2} \cdot \binom{n+2}{2}\binom{n}{2} n!$$

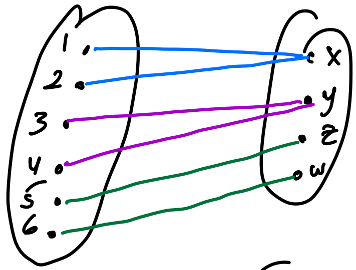
צריך לחלק ב-2 כי יש מקרים שחוזרים על עצמם פעמיים (*)

הסבר ל-(*): נניח ש- $|A|=6$, $|B|=4$. למשל

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{x,y,z,w\}$

בוחרים שני איברים מתוך A למשל 1,2. ואז בוחרים עוד שני איברים נגיד 3,4. ואז הפונקציה



את הפונקציה הזו היינו יכולים לקבל מבחירת 3,4 בהתחלה ואז את 1,2 משאר הקבוצה. לכן צריך להכפיל ב- $\frac{1}{2}$.

תזכורת:- בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים ל- t תאים? $(k \le t)$

	כדורים שונים	כדורים זהים
בכל תא יש מקום לכדור אחד בלבד	$\frac{t!}{(t-k)!}$	$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!\cdot(t-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	t^k	$\binom{k+t-1}{k} = \binom{k+t-1}{t-1}$

תרגיל:- בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו- n כדורים צבעוניים באופן הבא:-

א) ל- $3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא.

ב) ל- $3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא.

ג) ל- n תאים, כדור לבן אחד לפחות בכל תא.

פתרון:- בתרגול הקרוב.