# מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 4 עם פתרון

**הגשה ליום חמישי, 22/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל**

סמסטר קיץ תשפ"ד

**שאלה 1.** בכל סעיף נתונה קבוצה ויחס מעליה. קבעו (והוכיחו) האם היחס הוא יחס שקילות, יחס סדר חלקי או יחס סדר מלא. במידה והיחס הוא יחס שקילות, מצאו את קבוצת המנה.

**א.** היחס $R$ מעל $A=\{1,\ldots,n\}^2$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $(a,b),(c,d)\in A$ מתקיים $(a,b)\ R\ (c,d) \iff a+b=c+d$.

**ב.** $A=\mathbb{N}^+$, $a\ S\ b$ אמ"מ השבר $a/b$ לאחר צמצום, מכיל מונה ומכנה אי-זוגיים (למשל, $80/48$ לאחר צמצום הוא $5/3$ ולכן $(80,48)\in S$, אבל $76/24$ הוא $19/6$ ולכן $(76,24)\notin S$).

**ג.** היחס $\alpha$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, בו לכל $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים $A\ \alpha\ B$ אמ"מ $A\triangle B$ סופית.

**ד.** היחס $\beta$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{P}(\mathbb{R})$, בו לכל $(A,B),(C,D)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $(A,B)\ \beta\ (C,D)$ אמ"מ $(A\triangle B)\cup(C\triangle D)$ סופית.

**ה.** היחס $R$ מעל $(\mathbb{N}^+\setminus\{1\})^2$, בו לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}^+\setminus\{1\}$ מתקיים $(a,b)\ R\ (c,d)$ אמ"מ $a\le c$ וגם $b\mid d$.

**ו.** היחס $R$ מעל $\{0,1\}^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u,v\in\{0,1\}^n$ מתקיים $u\ R\ v$ אמ"מ סכום האותיות ב-$u$ שווה לסכום האותיות ב-$v$.

**ז.** היחס $R$ מעל $\{0,1\}^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u,v\in\{0,1\}^n$ מתקיים $u\ R\ v$ אמ"מ מספר ה-0-ים ב-$u$ קטן ממש ממספר ה-0-ים ב-$v$.

**פתרון 1.** **א.** $R$ הוא יחס שקילות.

- $R$ רפלקסיבי: יהי $(a,b)\in A$, אזי $a+b=a+b$ ולכן $(a,b)\ R\ (a,b)$.
- $R$ סימטרי: יהיו $(a,b),(c,d)\in A$ כך ש-$(a,b)\ R\ (c,d)$. אזי $a+b=c+d$ ולכן $c+d=a+b$, וכך $(c,d)\ R\ (a,b)$.

- $R$ טרנזיטיבי: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ כך ש-$(a,b)\ R\ (c,d)$ וגם $(c,d)\ R\ (e,f)$. אזי $a+b=c+d$ וגם $c+d=e+f$, ולכן $a+b=e+f$ ומתקיים $(a,b)\ R\ (e,f)$.

נמצא את קבוצת המנה: נשים לב שכל הזוגות בעלי סכומים שווים שקולים זה לזה. לכן, ניתן להסתכל על הסכומים בלבד: הסכומים האפשריים הם $2,\ldots,2n$, וניתן לייצג את הקבוצה באופן הבא:

$$^{A}/_{R} = \left\{[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, \ldots, [(1,n)]_R, [(2,n)]_R, \ldots, [(n,n)]_R\right\}.$$

ב. ניתן לייצג כל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}^+$ באופן יחיד באמצעות $n = 2^a \cdot (2b+1)$, עבור $a,b \in \mathbb{N}$ כלשהם. נסמן את $a,b$ אלו ב-$a(n), b(n)$. נשים לב שעבור $x,y \in \mathbb{N}^+$, השבר $x/y$ לאחר צמצום מכיל מונה ומכנה אי-זוגיים אמ"מ המעריך בחזקה של 2 בייצוגים של $x,y$ שווה - כך יתבטלו כל הגורמים הזוגיים. כלומר, לכל $x,y \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $x\ S\ y$ אמ"מ $a(x)=a(y)$. לכן, קל להוכיח כי $S$ הוא יחס שקילות מכיוון ששוויון הוא יחס שקילות. מחלקת השקילות של איבר $x \in \mathbb{N}^+$ היא אוסף כל האיברים בעלי אותם $a(x)$, כלומר

$$[x]_S = \left\{2^{a(x)} \cdot (2y+1) \mid y \in \mathbb{N}\right\} \implies {}^{A}/_{S} = \left\{\left\{2^i \cdot (2j+1) \mid j \in \mathbb{N}\right\} \mid i \in \mathbb{N}\right\}.$$

ג. היחס $\alpha$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, בו לכל $A,B \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים $A\ \alpha\ B$ אמ"מ $A \triangle B$ סופית.

(i) $\alpha$ רפלקסיבי: לכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים $A \triangle A = \emptyset$ ולכן $(A,A) \in \alpha$.

(ii) $\alpha$ סימטרי: לכל $A,B \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ כך ש-$(A,B) \in \alpha$ מתקיים ש-$A \triangle B$ סופית. מקומוטטיביות $\triangle$ נקבל ש-$B \triangle A = A \triangle B$ סופית ולכן $(B,A) \in \alpha$.

(iii) $\alpha$ טרנזיטיבי: יהיו $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ כך ש-$A \triangle B$ סופית וגם $B \triangle C$ סופית. אזי,

$$\begin{aligned}
A \triangle C &= (A \triangle C) \triangle \emptyset \\
&= A \triangle (C \triangle \emptyset) \\
&= A \triangle (\emptyset \triangle C) \\
&= A \triangle ((B \triangle B) \triangle C) \\
&= (A \triangle B) \triangle (B \triangle C) \\
&\subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C).
\end{aligned}$$

מכיוון ש-$A \triangle B, B \triangle C$ סופיות נקבל שאיחודן סופי. לכן, מכיוון ש-$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ נקבל ש-$A \triangle C$ סופית ו-$(A,C) \in \alpha$.

נמצא את קבוצת המנה: נשים לב שכל שתי קבוצות סופיות ביחס אחת עם השנייה, ולכן כולן נמצאות במחלקת שקילות אחת. בנוסף, מחלקת שקילות זו לא מכילה אף קבוצה אינסופית - תהי $A$ קבוצה סופית, ונניח בשלילה שקיימת $B$ אינסופית כך ש-$A \ \alpha \ B$, אזי $B \triangle A = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$ סופית. מכיוון ש-$A \cap B$ סופית נקבל שגם $B \cup A$ סופית - בסתירה לכך ש-$B$ אינסופית. עבור קבוצה אינסופית $A$, כל קבוצה (אינסופית) שביחס איתה היא מהצורה $(A \cup B) \setminus C$ עבור קבוצות סופיות $B, C$ כלשהן. לכן,

$$\begin{aligned} {}^{A}/_{R} &= \{X \subseteq \mathbb{Q} \mid \text{סופית } X\} \cup \{\{(A \cup B) \setminus C \mid \text{סופיות } B, C \subseteq \mathbb{Q}\} \mid \text{אינסופית } A \subseteq \mathbb{Q}\} \\ &= \{\{(A \cup B) \setminus C \mid \text{סופיות } B, C \subseteq \mathbb{Q}\} \mid A \subseteq \mathbb{Q}\} . \end{aligned}$$

ד. היחס $\beta$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$, בו לכל $(A, B), (C, D) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $(A, B) \ \beta \ (C, D)$ אמ"מ $(A \triangle B) \cup (C \triangle D)$ סופית.

- $\beta$ אינו רפלקסיבי: עבור $(\mathbb{N}, \emptyset) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים ש-$(\mathbb{N} \triangle \emptyset) \cup (\mathbb{N} \triangle \emptyset) = \mathbb{N}$ ולכן $((\mathbb{N}, \emptyset), (\mathbb{N}, \emptyset)) \notin \beta$.
- לכן $\beta$ אינו יחס שקילות או יחס סדר חלקי (ולכן בפרט אינו יחס סדר מלא).

ה. היחס $R$ מעל $(\mathbb{N}^{+} \setminus \{1\})^{2}$, בו לכל $(a, b), (c, d) \in (\mathbb{N}^{+} \setminus \{1\})^{2}$ מתקיים $(a, b) \ R \ (c, d)$ אמ"מ $a \leq c$ וגם $b \mid d$.

- $R$ רפלקסיבי: לכל $(a, b) \in (\mathbb{N}^{+} \setminus \{1\})^{2}$ מתקיים $a \leq a$ ולכן $(a, b) \ R \ (a, b)$.
- $R$ אנטי-סימטרי חלש: יהיו $(a, b), (c, d) \in (\mathbb{N}^{+} \setminus \{1\})^{2}$ כך ש-$(a, b) \ R \ (c, d)$ וגם $(c, d) \ R \ (a, b)$. אזי $a \leq c$ וגם $b \mid d$ וגם $c \leq a$ וגם $d \mid b$. אזי $a = c \wedge b = d$ ולכן $(a, b) = (c, d)$.
- $R$ טרנזיטיבי: יהיו $(a, b), (c, d) \in (\mathbb{N}^{+} \setminus \{1\})^{2}$ כך ש-$(a, b) \ R \ (c, d)$ וגם $(c, d) \ R \ (e, f)$. אזי $a \leq c \wedge b \mid d$ וגם $c \leq e \wedge d \mid f$. מטרנזיטיביות $\leq$ וחלוקה ונקבל ש-$a \leq e$ וגם $b \mid f$, ולכן $(a, b) \ R \ (e, f)$.

בסך הכל, $R$ יחס סדר חלקי. בנוסף, $R$ אינו יחס סדר מלא: עבור $(1, 2), (1, 3)$ נקבל ש-$3 \nmid 2$ וגם $2 \nmid 3$, ולכן $((1, 2), (1, 3)), ((1, 3), (1, 2)) \notin R$.

ו. היחס $R$ מעל $\{0, 1\}^{n}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u, v \in \{0, 1\}^{n}$ מתקיים $u \ R \ v$ אמ"מ סכום האותיות ב-$u$ שווה לסכום האותיות ב-$v$.

- קל להוכיח ש-$R$ הוא יחס שקילות - נובע ישירות מכך ששוויון הוא יחס שקילות.
- נמצא את קבוצת המנה: תהי $w \in \{0, 1\}^{n}$ מילה כלשהי. כל מילה $u \in \{0, 1\}^{n}$ שביחס עם $w$ מקיימת שמספר ה-1-ים ב-$w$ שווה למספר ה-1-ים ב-$u$. נסמן ב-$t$

את מספר ה-1-ים ב-$w$, אזי עבור $v = \left(\underbrace{1,\ldots,1}_{t\ \text{פעמים}},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-t\ \text{פעמים}}\right) = 1^t0^{n-t}$ נקבל $(v,w)\in R$. לכן,

$$\{0,1\}^n/R = \left\{\left[1^t0^{n-t}\right]_R \mid 0\le t\le n\right\}.$$

ז. היחס $R$ מעל $\{0,1\}^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, בו לכל $u,v\in\{0,1\}^n$ מתקיים $u\ R\ v$ אמ"מ מספר ה-0-ים ב-$u$ קטן ממש ממספר ה-0-ים ב-$v$.

$R$ אנטי-רפלקסיבי: לכל מילה $u\in\{0,1\}^n$ מתקיים שמספר ה-0-ים ב-$u$ לא קטן ממש ממספר ה-0-ים ב-$u$. לכן בפרט $R$ אינו רפלקסיבי. לכן $R$ אינו יחס שקילות, סדר חלקי או סדר מלא.

**שאלה 2.** הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. תהי $A$ קבוצה, ויהיו $R,S$ יחסי שקילות מעל $A$. מתרגיל בית **3** ניתן להסיק כי גם $T=R\cap S$ הוא יחס שקילות מעל $A$. אזי, לכל מחלקת שקילות $K$ של $T$, קיימות מחלת שקילות $L$ של $R$ ומחלקת שקילות $M$ של $S$ ש-$K\subseteq L\cap M$.

ב. תהי $A$ קבוצה, ויהי $R$ יחס שקילות מעל $A$. אזי מתקיים

$$R=\bigcup_{K\in A/R} K^2.$$

**פתרון 2.** א. הוכחה: תהי $A$ קבוצה ויהיו $R,S$ יחסי שקילות מעל $A$. תהי $K$ מחלקת שקילות של יחס השקילות $T=R\cap S$. יהי $a\in A$ כך ש-$[a]_T=K$. אזי,

$$K=[a]_T=\{b\in A\mid (b,a)\in T\}.$$

נגדיר $L=[a]_R$ ו-$M=[a]_S$. יהי $b\in K$, אזי $(b,a)\in T$ ולכן $(b,a)\in R$ וגם $(b,a)\in S$. אזי $b\in[a]_R=L$ וגם $b\in[a]_S=M$, ולכן $b\in L\cap M$. לכן $K\subseteq L\cap M$ והוכחנו את הטענה.

ב. הוכחה: באמצעות הכלה דו-כיוונית.

**(i)** יהי $(a,b)\in R$, אזי $a\in[b]_R$. מכיוון ש-$R$ רפלקסיבי מתקיים $b\in[b]_R$, ולכן $(a,b)\in[b]_R^2$. לכן קיימת מחלקת שקילות $K\in A/R$ כך ש-$(a,b)\in K^2$, ולכן $(a,b)\in\bigcup_{K\in A/R}K^2$.

**(ii)** יהי $(a,b)\in\bigcup_{K\in A/R}K^2$, אזי קיים $K\in A/R$ כך ש-$(a,b)\in K^2$, ולכן $a,b\in K$ ומתקיים $K=[a]_R=[b]_R$. לכן, מכיוון ש-$a\in[b]_R$ מתקיים $(a,b)\in R$.

**משפט 1.** תהי $A$ קבוצה ותהי $\mathcal{F}$ חלוקה של $A$. אזי קיים יחס שקילות $R$ מעל $A$ כך ש-$\mathcal{F} = {}^{A}/_{R}$.

**שאלה 3.**

א. הוכיחו את משפט 1.

ב. הוכיחו את הכיוון ההפוך של משפט 1: לכל קבוצה $A$ ויחס שקילות $R$ מעליה, קיימת חלוקה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ כך ש-$\mathcal{F} = {}^{A}/_{R}$.

**פתרון 3.** א. תהי $A$ קבוצה ותהי $\mathcal{F}$ חלוקה של $A$. נגדיר יחס שקילות $R$ באופן הבא:

$$R = \left\{ (a,b) \in A^2 \mid \text{באותה מחלקה ב-}\mathcal{F}\text{ } b \text{-ו } a \right\}.$$

תחילה, נוכיח כי $R$ הוא יחס שקילות:

- $R$ רפלקסיבי: לכל $a \in A$ מתקיים ש-$a$ באותה מחלקה ב-$\mathcal{F}$, ולכן $(a,a) \in R$.
- $R$ סימטרי: יהיו $a, b \in A$ כך ש-$(a,b) \in R$. אזי $a$ ו-$b$ באותה מחלקה ב-$\mathcal{F}$, ולכן $b$ ו-$a$ באותה מחלקה ב-$\mathcal{F}$ ומתקיים $(b,a) \in R$.
- $R$ טרנזיטיבי: יהיו $a, b, c \in A$ כך ש-$(a,b) \in R$ וגם $(b,c) \in R$. אזי המחלקות של $a$ ו-$b$ ב-$\mathcal{F}$ שוות והמחלקות של $b$ ו-$c$ ב-$\mathcal{F}$ שוות. מטרנזיטיביות שוויון נקבל שהמחלקות של $a$ ו-$c$ ב-$\mathcal{F}$ שוות ולכן $(a,c) \in \mathcal{F}$.

כעת, נתבונן בקבוצת המנה ${}^{A}/_{R}$: לכל $a \in A$, $[a]_R$ מכיל את אוסף האיברים שבאותה מחלקה כמו $a$ ב-$\mathcal{F}$, כלומר בסך הכל את המחלקה של $a$ ב-$\mathcal{F}$. מכאן, אוסף כל מחלקות השקילות הוא בדיוק אוסף כל המחלקות בחלוקה $\mathcal{F}$, כלומר $\mathcal{F}$ עצמה.

ב. תהי $A$ קבוצה ו-$R$ יחס שקילות מעליה. נגדיר $\mathcal{F} = {}^{A}/_{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$, ונוכיח כי $\mathcal{F}$ היא חלוקה:

- לכל $S \in \mathcal{F}$ קיים $a \in A$ כך ש-$S = [a]_R$. לכן, מרפלקסיביות $R$ נקבל ש-$S = [a]_R \ni a$ ולכן $S \neq \emptyset$.
- יהי $a \in A$. מרפלקסיביות $R$ נקבל ש-$a \in [a]_R$, ולכן עבור $S = [a]_R \in \mathcal{F}$ מתקיים $a \in A$. לכן $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S = A$.
- יהיו $S \neq T \in \mathcal{F}$. נסמן ב-$a, b \in A$ איברים כך ש-$S = [a]_R$ ו-$T = [b]_R$. נניח בשלילה שקיים $c \in S \cap T$, אזי $c \in [a]_R$ וגם $c \in [b]_R$. לכן, בנוסף לכך ש-$R$ סימטרי, נקבל ש-$(a,c) \in R$ וגם $(c,b) \in R$. מטרנזיטיביות $R$ נקבל ש-$(a,b) \in R$, ולכן $[a]_R = [b]_R$, בסתירה לכך ש-$S \neq T$ - לכן $S \cap T = \emptyset$.