מתמטיקה בדידה
תרגול 6

עוצמות:-

הגדרה:- תהיינה A,B קבוצות. נאמר כי A שקולת עוצמה ל-B אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע ועל. אזי נסמן $A \sim B$ או $|A| = |B|$.

הגדרה:- קבוצה A נקראת קבוצה סופית אם $A = \phi$ או קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $|A| = n$. (באופן שקול, קיימת פונקציה חח"ע ועל מ-A לקבוצה $\{1,2,3,\dots,n\}$)

תרגיל:- הראו כי $(0,1) \sim (-1,1)$.

פתרון:- נגדיר פונקציה $f: (0,1) \to (0,2)$ ע"י $f(x) = 2x$.
כעת, נגדיר פונקציה $g: (0,2) \to (-1,1)$ ע"י $g(x) = x-1$.
f,g הפיכות. לכן $g \circ f: (0,1) \to (-1,1)$ הפיכה. סה"כ $(0,1) \sim (-1,1)$.

תרגיל:- הראו כי $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

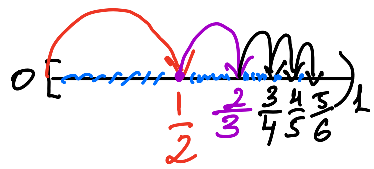
פתרון:- כמו בשאלה קודמת ניתן להראות ש- $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ע"י $f: (0,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ המוגדרת ע"י $f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$.
כעת, הפונקציה $g: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x) = tg(x)$ היא חח"ע ועל. לכן $g \circ f$ חח"ע ועל מ-$(0,1)$ ל-$\mathbb{R}$.

הערה:- $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ חח"ע כי היא מונוטונית עולה ממש.
בנוסף לכל קו אופקי $y \in \mathbb{R}$ הקו הזה חותך את הגרף של tg לכן ל-y יש מקור ב-$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

תרגיל :- הראו ש- $(0,1)\sim[0,1)$.

פתרון :- נגדיר $f:[0,1)\to(0,1)$ ע"י :-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & x=\frac{n-1}{n},\ n\in\mathbb{N}^+\\ x & \text{אחרת}\end{cases}$$



f חח"ע ועל תמונתו.

תרגיל :- הראו ש- $2\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

פתרון :- נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to2\mathbb{N}$ ע"י $f(x)=2x$. קל להוכיח שהיא הפיכה.

תרגיל :- תהיינה X_1,Y_1 קבוצות זרות $(X_1\cap Y_1=\emptyset)$ ו- X_2,Y_2 קבוצות זרות. הוכיחו שאם $X_1\sim X_2$ ו- $Y_1\sim Y_2$ אז $X_1\cup Y_1\sim X_2\cup Y_2$.

פתרון :- $X_1\sim X_2$ לכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:X_1\to X_2$.
$Y_1\sim Y_2$ לכן קיימת פו' חח"ע ועל $g:Y_1\to Y_2$.
נגדיר פונקציה $h:X_1\cup Y_1\to X_2\cup Y_2$ ע"י

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in X_1\\ g(x) & x\in Y_1\end{cases}$$

h חח"ע כי אם $x_1,x_2\in X_1$ אז $h(x_1)=f(x_1)$ וגם $h(x_2)=f(x_2)$
אבל f חח"ע לכן אם $x_1\neq x_2$ אז $h(x_1)=f(x_1)\neq f(x_2)=h(x_2)$
באופן דומה, אם $x_1\neq x_2\in Y_1$ אז $h(x_1)=g(x_1)\neq g(x_2)=h(x_2)$
לבסוף, אם $x_1\in X_1$ ו- $x_2\in Y_1$ אז $h(x_1)\neq h(x_2)$ (כי $X_2\cap Y_2=\emptyset$)

h על: כי אם ניקח $t\in X_2\cup Y_2$ אז :-

1) אם $t\in X_2$ אז נזכור ש- $f:X_1\to X_2$ על לכן קיים $m\in X_1$ כך ש- $f(m)=t$. אבל $h(m)\underset{m\in X_1}{=}f(m)=t$.

2) אם $t\in Y_2$ אז באופן דומה, קיים $n\in Y_1$ כך ש- $h(n)=g(n)=t$.

תרגיל:- הראו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

פתרון:- נרשום את $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:-

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\underbrace{\{(0,0)\}}_{\text{סכום שווה }0}\cup\underbrace{\{(1,0),(0,1)\}}_{\text{סכום שווה }1}\cup\underbrace{\{(2,0),(1,1),(0,2)\}}_{\text{סכום שווה }2}$$

$$\cup\{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}\cup\{(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)\}$$

$$\cup\ldots$$

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ע"י

$$f(0)=(0,0)$$
$$f(1)=(1,0)$$
$$f(2)=(0,1)$$
$$f(3)=(2,0)$$
$$f(4)=(1,1)$$
$$f(5)=(0,2)$$
$$f(6)=(3,0)$$
$$f(7)=(2,1)$$
$$\vdots$$

f חח"ע מעצם הבנייה.

f על כי המקור של $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ הוא

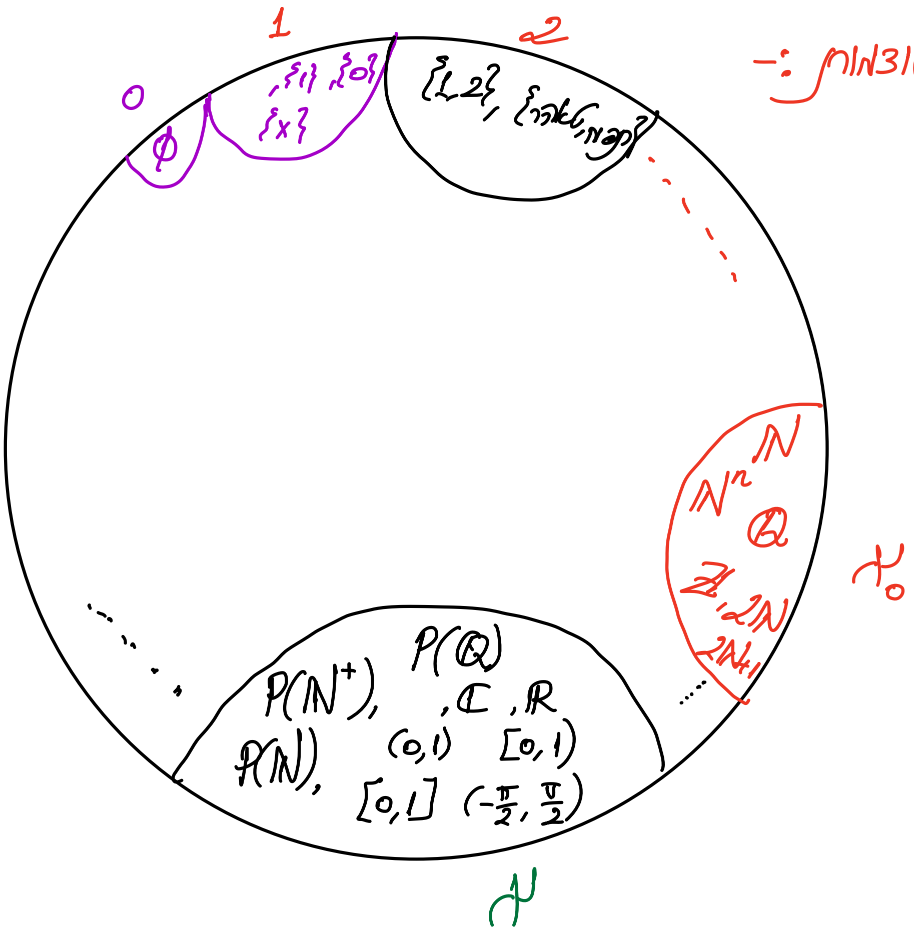
$$\mathbb{N}\ni t=\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m+n-1}(k+1)\right)}+\underbrace{n+1}$$

מספר האיברים שיש בקבוצות שהיו לפני הקבוצה שסכום איבריה הוא $m+n$.

מספר הצעדים שאנחנו צריכים לעשות בקבוצה שהסכום של כל זוג סדור בה הוא $m+n$ כדי להגיע לאבר (m,n).

הערה: אפשר להראות באינדוקציה על n שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^n$.

סימונים של עוצמות:



הגדרה: אומרים $|A|\le|B|$ אם קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע.

ואומרים ש- $|A|<|B|$ אם:

1) $|A|\le|B|$ 2) לא קיימת פונקציה על מ- A ל- B.

תזכורת:- ראינו גם שלכל קבוצה A בעולם מתקיים $|A|<|P(A)|$.

הערה:- נובע מהתזכורת: אינסוף עוצמות אינסופיות שונות

הגדרה:- נגדיר את הקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} := \{(a_0,a_1,a_2,\dots) \mid \forall i,\ a_i\in\mathbb{N}\}$

זו קבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים.

תרגיל:- הראו כי: $|\mathbb{N}|<|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

פתרון:- 1. נראה שקיימת פונקציה חח"ע $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

נגדיר את f להיות $\forall n\in\mathbb{N}: f(n)=(n,n,n,\dots)$

f חח"ע כי: אם $k\neq n\in\mathbb{N}$ אז $f(n)=(n,n,n,\dots)\neq(k,k,k,\dots)=f(k)$

$\Leftarrow$ f חח"ע.

כדי להראות שלא קיימת פונקציה על $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נצטרך להשתמש בשיטת האלכסון של קנטור.

נניח בשלילה שקיימת פונקציה $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ על.

$$\begin{array}{ll}
g(0) & a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots \\
g(1) & b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots \\
g(2) & c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots \\
g(3) & d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ \dots \\
\vdots &
\end{array}$$

נגדיר סדרה חדשה $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ באופן הבא:-

$$\psi_k=(g(k))_k+1$$

$$\psi_0=a_0+1\ ,\quad \psi_3=(g(3))_3+1=d_3+1$$

הסדרה ψ_n שונה מכל הסדרות $g(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן
$\psi_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ אולם לכל $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \neq g(n)$. וזו סתירה לכך שהפונקציה על.
סה״כ $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.