טכניון — מכון טכנולוגי לישראל אביב תשע"א

קומבינטוריקה למדעי המחשב 234141 — קובץ תרגילים

1 אינדוקציה

1. התבונן בהוכחה הבאה:

"לכל חיובי שלם n מתקיים $a^{n-1}=1$."
הוכחה:
בסיס: אם $n=1$ אז $a^{n-1}=a^{1-1}=a^0=1$.
להוכחת הצעד, נניח נכונות עבור $1\le n\le k$ ונקבל:

$$a^{(k+1)-1}=a^k=\frac{a^{k-1}\times a^{k-1}}{a^{k-2}}=\frac{1\times 1}{1}=1$$

ולכן הטענה נכונה גם לגבי $n=k+1$."

ללא ספק, משהו פגום בהוכחה. מצא את השגיאה.

2. הוכח את השוויונים הבאים באינדוקציה:

א. לכל שלם $n\ge 0$

$$\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$$

ב. $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ג. לכל שלם $n\ge 0$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ד. לכל שלם $n\ge 1$

$$\sum_{i=0}^{2n-1}\frac{(-1)^i}{i+1}=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$$

3. הוכח באינדוקציה שלכל שלם $n\ge 0$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n-1}i\cdot 2^{n-i-1}=2^n-n-1$$

4. הוכח באינדוקציה שלכל שלם $n\ge 10$ מתקיים $2^n>n^3$.

5. הוכח את השוויון $\sum_{i=1}^{n-1}i=\binom{n}{2}$:

א. באינדוקציה

ב. משיקולים קומבינטוריים

6. הוכח באינדוקציה, לכל $t,n\ge 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+t}{k}=\binom{t+n+1}{n}$$

2 קומבינטוריקה בסיסית

1. בקורס יש $2n$ סטודנטים ו־$5n$ סטודנטיות. המתרגל האחראי דורש שיגישו תרגילי בית בשביעיות, כאשר בכל שביעיה 2 סטודנטים ו־5 סטודנטיות. חשבו כמה אפשרויות יש לשדך את השביעיות, בהנחה שהסדר בין השביעיות אינו חשוב, וכך גם הסדר בתוך השביעיות.

2. א. כמה סדרות שונות באורך 1 או יותר ניתן להרכיב מהמספרים $1, 2, ..., n$ כך שבכל סדרה כל המספרים שונים זה מזה?

   ב. סדרת מספרים עולה הינה סדרה בה כל המספרים כתובים בסדר עולה.
   כמה סדרות לא עולות (כלומר, סדרות שאינן מקיימות את ההגדרה שלעיל) שונות באורך 1 או יותר ניתן להרכיב מהמספרים $1, 2, ..., n$ כך שבכל סדרה כל המספרים שונים זה מזה?

   ג. סדרת מספרים רצופה הינה סדרה בה כל מספר גדול ב־ 1 מהקודם לו.
   כמה סדרות רצופות שונות באורך 1 או יותר ניתן להרכיב מהמספרים $1, 2, ..., n$?

3. בכמה דרכים שונות ניתן לסדר $m+n$ רקדנים בשני מעגלים: מעגל בגודל m בו רוקדים "הורה כרוב" ומעגל בגודל n בו רוקדים "הורה תרד"?

4. בחנות ספרים ישנם $2n$ ספרי מתח שונים, $3n$ ספרי דרמה שונים ו־ $5n$ ספרי מדע בדיוני שונים.
בעל החנות החליט לחלק את כל ספרי החנות ל־ n חבילות, כך שבכל חבילה יהיו 2 ספרי מתח, 3 ספרי דרמה ו־ 5 ספרי מדע בדיוני. בכמה אפשרויות ניתן לבצע זאת?

5. רוצים לצבוע קוביות, כל פאה בצבע שונה:

   א. מהו מספר האפשרויות לצבוע קוביה ב־ 6 צבעים שונים?
   <u>הערה:</u> שימו לב, שלפני שמתחילים לצבוע, כל הפיאות זהות.

   ב. מהו מספר האפשרויות לצבוע 10 קוביות זהות ב־ 60 צבעים שונים?
   <u>הערה:</u> אין חשיבות לסדר בין הקוביות.

6. מהו מספר הוקטורים הטרנריים באורך n אשר בהם ההפרש בין שתי ספרות סמוכות הוא 1 בדיוק? וקטור טרנרי הוא סדרה של הספרות "0", "1", "2".

7. עבור השאלה: "מה מספר הוקטורים הבינאריים באורך n שבהם לפחות m אפסים?" ענה סטודנט את התשובה:

   "בוחרים m מקומות עבור האפסים, ואז בשאר המקומות ניתן לשים 0 או 1. לכן התשובה היא $2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$."

   מצא את השגיאה בתשובת הסטודנט.

8. בכמה אפשרויות ניתן לסדר 10 מבוגרים ו־60 ילדים (40 בנות ו־20 בנים) בשורה כך ש:

   א. ללא מגבלות

   ב. קודם (בצד הימני של השורה) עומדים המבוגרים, אחר כך הבנים ובסוף הבנות.

   ג. בין כל 2 מבוגרים בשורה יש בדיוק 6 ילדים (ניתן למקם ילדים גם בקצוות השורה).

   ד. בין כל 2 מבוגרים בשורה יש בדיוק 2 בנים ו־ 4 בנות (ניתן למקם ילדים גם בקצוות השורה).

9. כמה מספרי טלפון בני 7 ספרות, אשר מתחילים בספרה 8, ניתן ליצור על ידי חליפות (פרמוטציות) של הספרות 7,8,8,8,9,9,9.

10. רוצים לסדר $k \geq 0$ צריחים בלוח של n על n משבצות, כך שאף צריח לא יאיים על אף צריח (צריח מאיים על כל מי שנמצא באותה שורה או באותו טור כמוהו).

א. מהו ה $-k$ המקסימאלי שעבורו ניתן לעשות זאת? הוכיחו את תשובתכם.
רמז: שובך היונים.

ב. בהינתן k שעבורו ניתן לסדר את הצריחים כנדרש, כמה אפשרויות ניתן לעשות זאת?

11. ילד אחד מקבל במתנה ליום הולדתו השישי טלפון סלולרי כמה אפשרויות למספרי טלפון קיימות:

א. אם מספרי הטלפון של ספקית השרות מתחילים ב־052, ולאחריהן שש ספרות שאינן מתחילות ב־"0" ולא ב־"1"?

ב. אם מספר טלפון מכיל שש ספרות כלשהן בסדר עולה־ממש (כלומר, 014589 חוקי, אך 104589 וגם 245677 לא)?

ג. במספר שש ספרות בסדר לא עולה (כלומר, 977643 חוקי, אך 134144 לא)? (סדר לא עולה = אף סיפרה אינה עוקבת סיפרה קטנה ממנה).

ד. במספר שש ספרות כלשהן, אך הספרה "3" חייבת להופיע לפחות פעם אחת?

12. הוריו של הילד קראו מחקר על הקרינה של המכשירים הסלולריים. הם רוצים לראות את היום בו הילד יחגוג בר־מצווה, לכן הם לוקחים לו את הסלולרי וקונים לו קו טלפון רגיל עם מספר בן 7 ספרות. כדי שלא יהיה עצוב הם נותנים לו מספר "מגניב" - מספר בעל ספרות שונות בו הספרות עולות ממש עד לאיזושהי סיפרה מקסימלית (הסיפרה המגניבה) ואז יורדות ממש. למשל 3458762 הוא מגניב (עם הסיפרה המגניבה 8) אבל 2458762 ו 5421379 הן לא.

א. כמה מספרים יש אם הסיפרה המגניבה היא 8 , והיא נמצאת באמצע המספר (המקום הרביעי במספר)?

ב. אם הסיפרה המגניבה היא 8 אך היא יכולה להיות בכל מקום במספר?

ג. כמה מספרים מגניבים יש בכלל (בלי הגבלות)?

<u>הערה:</u> המספרים יכולים להתחיל ב־ 0, ובמספר מגניב כל סיפרה מופיעה פעם אחת לכל היותר

13. בכמה תמורות של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$ האיבר k גדול מכל המספרים שמשמאלו?
לדוגמה, עבור $k = 4$ ו־$n = 5$ התמורה 23415 חוקית, ואילו התמורה 54312 לא־חוקית.
נא לתת פתרון <u>ללא סכימה!</u>

14. בכמה אפשרויות ניתן לחלק את המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$:

א. לשתי קבוצות? (אין סדר בין הקבוצות, קבוצה יכולה להיות ריקה)

$\star$ ב. לשלוש קבוצות? (כנ"ל)

נא לתת פתרונות <u>ללא סכימה!</u>

15. 100 ילדים ניגשים לקנות שלגונים במזנון שבו שלגונים בארבעה טעמים: תות, לימון, בננה ומסטיק. במזנון יש 200 שלגונים מכל סוג. כמה אפשרויות יש לקניית השלגונים על ידי הילדים:

א. כאשר כל ילד קונה שלגון אחד בדיוק.

ב. כאשר כל ילד מחליט אם לקנות שלגון אחד, שניים או אף לא אחד.

ג. כאשר ידוע שכל ילד קנה שלגון אחד, ובדיוק 50 ילדים קנו שלגון בננה.

ד. כמה צירופים של שלגונים יכולים להשאר במזנון אם כל ילד קונה שלגון אחד בדיוק?

16. נתונים n כדורים הממוספרים $1,2,\ldots,n$. יש לסדרם ב־$5n$ תאים שונים הממוספרים $1,2,\ldots,5n$. בנוסף לכך בכל סעיפי שאלה זו אם הכדור ה־i נכנס לתא ה־j והכדור ה־$i+1$ נכנס לתא ה־k אזי $j \le k$.
בכל אחד מסעיפי השאלה הבאים מפורטות הגבלות נוספות על אופן סידור כדורים בתאים. המגבלות אינן מצטברות מסעיף לסעיף, אלא רק מתווספות למגבלה שתוארה לעיל.

מה מספר האפשרויות לחלק את n הכדורים ב־$5n$ התאים, כאשר:

א. אין חשיבות לסדר בתוך התאים?

ב. בכל תא יש לכל היותר כדור אחד?

ג. הכדור הראשון נמצא באחד מ־n התאים הראשונים. כמוכן, אם הכדור ה־i, $1 \le i \le n-1$, נמצא בתא ה־j אזי הכדור ה־$i+1$ נמצא או בתא ה־$j+1$ או בתא ה־$j+2$.

⋆ ד. לכל i, $1 \le i \le n$ הכדור ה־i נמצא באחד מחמשת התאים הבאים:

$$i, n+i, 2n+i, 3n+i, 4n+i \quad ?$$

17. נתון מספר בילתי מוגבל של כדורים זהים ושלם k חיובי. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק כדורים כאלו ל־n תאים שונים $(n > 10)$ הממוספרים $1,2,\ldots,n$ במגבלות הבאות:

א. לכל i, $1 \le i < n$, בתא ה־i יש יותר כדורים מאשר בתא ה־$i+1$, בכל תא אין יותר מ־k כדורים?

ב. לכל i, $1 \le i < n$, בתא ה־$i+1$ אין יותר כדורים מאשר בתא ה־i, בכל תא אין יותר מ־k כדורים?

ג. ההפרש בערך מוחלט בין מספר הכדורים בתאים עוקבים הוא לכל היותר 2 ובתא הראשון יש יותר מ־n^2 כדורים ופחות מ־n^3 כדורים?

18. עבור השאלה "מה מספר האפשרויות השונות לבחור שלושה כדורים מתוך עשר ערימות שמכילות כדורים בצבעים שונים?", ענה סטודנט את התשובה:

> "נפתור תחילה כבעית בחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרות. לכל כדור (ראשון, שני, שלישי) יש 10 אפשרויות לבחור צבע. לכן יש סה"כ 10^3 אפשרויות. כעת נבטל את הסדר שהכנסנו בין הכדורים ע"י חלוקת מספר האפשרויות ב $3!$."

מצא את השגיאה בתשובת הסטודנט בשתי דרכים :

א. הראה בחירה שנספרת רק פעם אחת, ולכן אין לחלקה ב־ $3!$.

ב. חשב מספרית את תשובת הסטודנט, והסבר מדוע היא אינה יכולה להיות נכונה.

19. נתון המשולש הבא, בו ההתקדמות מותרת רק בכוון ימינה או למטה:

```
D - I - S - C - R - E - T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
I - S - C - R - E - T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
S - C - R - E - T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
C - R - E - T - E - ◇ - M - A - T -[H]
|   |   |   |   |   |   |   |   |
R - E - T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |   |   |
E - T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |   |
T - E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |   |
E - ◇ - M - A - T - H
|   |   |   |   |
◇ - M - A - T - H
|   |   |   |
M - A - T - H
|   |   |
A - T - H
|   |
T - H
|
H
```

א. בכמה דרכים ניתן להגיע מה"D" בשורה העליונה משמאל עד ל־"H" המסומנת?

ב. כמה מסלולים מובילים מה"D" בשורה העליונה משמאל ועד ל־"H" כלשהי?

20. נתונים n ו־ k שלמים חיוביים.
עבור כל אחת מהמשוואות בסעיפים הבאים ה־ X_i־ים הינם משתנים המקבלים ערכים שלמים בלבד.

א. כמה פתרונות שונים יש למשוואה:
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$$
כאשר לכל i, $1 \leq X_i$

ב. כמה פתרונות שונים יש למשוואה:
$$|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_k| = n$$
כאשר לכל i, $1 \leq |X_i|$

ג. כמה פתרונות שונים יש למשוואה:
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$$
כאשר לכל i, $0 \leq X_i$
וכמו כן בדיוק r מהמשתנים $(X_1, .., X_k)$ שוים ל־ 0.

ד. כמה פתרונות שונים יש לאי השויון:
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq n$$
כאשר לכל i, $0 \leq X_i$

ה. כמה פתרונות שונים יש לאי השויון:
$$|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_k| \leq n$$

21. נתונים n כדורים שחורים זהים, ו־n כדורים לבנים הממוספרים מ־1 ועד n. כמה אפשרויות יש לבחור n כדורים מתוך $2n$ הכדורים הנ"ל:

א. כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה של הכדורים?

ב. כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה של הכדורים?

22. במשך שישה ערבים רצופים, פו מזמין אחד מבין חבריו איה, כריסטוף וחזרזיר לארוחת ערב. בכל ערב מוזמן חבר יחיד ופו הבטיח שאף אחד לא יוזמן יותר מאשר שלוש פעמים. מה מספר האפשרויות של פו להזמין חברים? בחר בתשובה הנכונה, ונמק בחירתך.

א.
$$\frac{6!}{3!2!1!} + \frac{6!}{2!2!2!}$$

ב.
$$3^6 - 3 \cdot \binom{6}{4} \cdot 2^2$$

ג.
$$3 \cdot \frac{6!}{3!3!} + 3! \cdot \frac{6!}{3!2!1!} + \frac{6!}{2^3}$$

23. הוכח משיקולים קומבינטורים:

א.

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

ב.

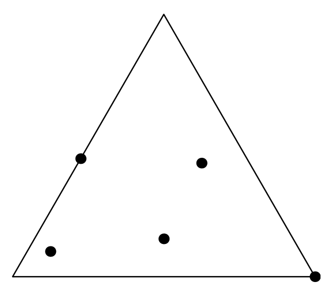
$$\sum_{i=0}^{n-r} \binom{r+i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

24. נתונות 5 נקודות P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 על המישור הממשי כולן בעלות קואורדינטות (x_i, y_i) שלמות $(i = 1, \ldots, 5)$. הוכח שקיימות ביניהן שתי נקודות P_r, P_s, כך שקואורדינטות של מרכז הקטע (P_r, P_s) הינן מספרים שלמים.

25. א. הראה כי במסיבה של $n \geq 2$ איש, ישנם 2 אנשים שיש להם אותו מספר חברים.
רמז: עיקרון שובך היונים.

⋆ ב. כעת נתון שיש במסיבה הנ"ל בדיוק שני אנשים עם אותו מספר חברים. מהו מספר זה אם ידוע שאין במסיבה מישהו בלי חברים?

26. נתון משולש שווה צלעות שאורך צלעו 1. הראו כי עבור כל בחירה אפשרית של 5 נקודות במשולש (כולל צלעותיו), בהכרח יהיו ביניהן שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן או שווה ל־ $\frac{1}{2}$.
דוגמא לבחירה אפשרית של נקודות במשולש:



רמז: היעזרו בעיקרון שובך היונים.

⋆ 27. הוכיחי כי בכל מסיבה של 10 אנשים מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים:

- יש 3 חברים (כל אחד מהשלושה חבר של כל אחד מהשלושה).
- יש 4 אנשים שהם זרים לחלוטין (כל שניים מהם אינם חברים).

הערה: חברות היא יחס סימטרי, כלומר אם א' חבר של ב', אז ב' חבר של א'.

28. במסיבה יש 8 בחורים ו־13 בחורות. כל בחור מכיר לפחות 5 בחורות. הוכח כי יש בחורה שמכירה לפחות 4 מהבחורים.

29. כמה תוצאות שונות אפשריות בהטלת 12 קוביות משחק לבנות זהות ו־ 23 קוביות משחק הצבועות ב־ 23 צבעים שונים (כל קוביה צבועה בצבע אחר, וכולן אינן לבנות), בתנאים הבאים:

א. ללא מגבלות נוספות.

ב. הקוביות מוטלות על פני שני שולחנות שונים (שולחן מרובע ושולחן עגול), כאשר כל הקוביות הלבנות מוטלות על פני אותו שולחן.

ג. הקוביות מוטלות על פני 35 שולחנות שונים, כאשר בכל שולחן מוטלת קוביה אחת בדיוק.

ד. הקוביות מוטלות על פני 35 שולחנות זהים, כאשר בכל שולחן מוטלת קוביה אחת בדיוק.

30. א. מה מספר הסדרות הטרנאריות באורך n מעל $\{0,1,2\}$ בהן מספר האפסים שווה למספר האחדים?

ב. מה מספר הסדרות הטרנאריות באורך n מעל $\{0,1,2\}$ בהן מספר האפסים גדול ממספר האחדים?

ג. מה מספר הסדרות הטרנאריות באורך n מעל $\{0,1,2\}$ בהן יש k אחדים בדיוק,אך לא כל k האחדים מופיעים במקומות רצופים?

31. נתונים $2n$ כדורים הממוספרים $1,2,\ldots,2n$. יש לסדרם ב־ $2n$ תאים שונים (שגם הם ממוספרים $1,2,\ldots,2n$), כך שבכל תא ימצא בדיוק כדור אחד. חשבו את מספר האפשרויות לסידור הכדורים בתאים תחת המגבלות הנתונות בכל סעיף (כל סעיף עומד בפני עצמו ־ המגבלות אינן נצברות מסעיף לסעיף).

א. הכדורים $1,2,\ldots,n$ מפוזרים בתאים שמספרם $1,2,\ldots,n$ בסדר כלשהו, כלומר לכל i, $1 \le i \le n$, הכדור ה־ i נמצא באחד מ־ n התאים הראשונים.

ב. לפחות כדור אחד שמספרו זוגי נמצא בתא שמספרו זוגי (אך לא בהכרח בתא שמספרו תואם למספר הכדור).

ג. בדיוק כדור אחד שמספרו זוגי נמצא בתא שמספרו זוגי (אך לא בהכרח בתא שמספרו תואם למספר הכדור).

ד. לכל i, $1 \le i \le n$, צמד הכדורים שמספריהם $2i-1, 2i$ נמצאים בתאים סמוכים.

$\star$ 32. נתונים n כדורים זהים אותם יש לחלק לקבוצות (אין סדר בין הקבוצות, ואין קבוצות ריקות). הוכיחי כי מספר האפשרויות לחלק את הכדורים לקבוצות כך שמספר הקבוצות הוא לכל היותר k שווה למספר האפשרויות לחלק את הכדורים לקבוצות כך שבכל קבוצה יש לכל היותר k כדורים.
רמז ־ התאמה חח"ע.

לדוגמה, יש 7 דרכים לחלק 5 כדורים לקבוצות:
$\{5\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,1,3\},\{1,2,2\},\{1,1,1,2\},\{1,1,1,1,1\}$
עבור $k=3$ בדיוק 5 מהחלוקות מקיימות את אחד התנאים בשאלה.

33. לקורס קומבינטוריקה למדעי המחשב רשומים 140 סטודנטים. משום מה החליטו הסטודנטים שמבחן מועד ב' יהיה בלתי פתיר ולכן כולם באו להבחן במועד א'. למרבה הצער הקצו למבחן 4 כיתות בלבד (אולמן 304, 303, 302, 301) שבכל אחת 30 מקומות בלבד. לפיכך היה צורך לשלוח 20 סטודנטים הביתה.

א. בכמה אופנים שונים ניתן לבחור את הסטודנטים שישלחו הביתה ?

ב. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק את הסטודנטים שיבחנו (אלו שלא נשלחו הביתה) ל־4 הכיתות ?

ג. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב את הסטודנטים בכיתות, לאחר שחולקו אליהן?

ד. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק ציונים (בין 0 ל־100) לסטודנטים שנבחנו?

ה. המרצה המשוגע הכין מראש ערמה של כל ההיסטוגרמות האפשריות של הציונים בהן רשום כמה סטודנטים קיבלו כל ציון. כמה היסטוגרמות שונות היה עליו להכין?

ו. במועד ב' נבחנו 20 סטודנטים. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק להם ציונים אם ידוע כי הפרש הציונים בין כל שני סטודנטים הוא לפחות 4 נקודות ?

34. הוכיחו קומבינטורית כי בהנתן ש־ $n > m$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$$

35. יהיו $1 \leq k \leq n$ שלמים. בכמה תמורות של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$ מתקיים כי המספר במקום ה־ k גדול מכל המספרים במקומות $1, 2, \ldots, k-1$ (התנאי ריק עבור $k = 1$)?
לדוגמה, עבור $k = 3$ ו־ $n = 7$ התמורה 3241576 חוקית, ואילו התמורה 1436572 לא־חוקית.
נא לתת פתרון ללא סכימה!

36. כמה סדרות טרנאריות (מעל $\{0, 1, 2\}$) באורך 10 קיימות, כך שאף סימן אינו מופיע פעמיים ברצף?

37. בכמה אופנים ניתן לסדר את אותיות המילה **קומבינטוריקה** כך שהאות 'ק' הראשונה תופיע לפני האות 'ו' הראשונה?
שימו לב: במילה קומבינטוריקה יש 12 אותיות, ומתוכן 'ק', 'ו', ו־'י' מופיעות פעמיים. לכל אות אחרת מופע יחיד.

38. נתונים n סוגים של אותיות, ומכל סוג יש ברשותינו 4 אותיות)כלומר, סה"כ $4n$ אותיות(.

א. בכמה אופנים ניתן לסדר את האותיות כסדרה באורך $4n$?
ב. בכמה אופנים ניתן לסדר את האותיות כסדרה באורך $4n$, כך שכל אות נמצאת בסמיכות לאות מאותו סוג? כלומר, עבור כל אות יש משמאלה ו/או מימינה אות נוספת מאותו סוג.
ג. בכמה אופנים ניתן לסדר את האותיות כסדרה באורך $4n$, כך שלא כל האותיות נמצאות בסמיכות לאות מאותו סוג? כלומר, קיימת לפחות אות אחת שהאותיות שמשמאלה ומימינה שתיהן מסוג שונה ממנה.

39. קבוצה "מיוחדת" היא קבוצה בת $2n$ איברים, אשר n מתוכם זהים ו־n מתוכם שונים. לדוגמה, הקבוצה: $A = \{1, 2, 3, 8, 8, 8\}$ היא קבוצה "מיוחדת" עבור $n = 3$. תת קבוצה של קבוצה מיוחדת היא אוסף של איברים שניתן להרחיב אותם לקבוצה מיוחדת. לדוגמה, הקבוצות: $A_4 = \{8, 8, 8\}$ $A_3 = \{1, 2, 3, 8\}$ $A_2 = \{\}$ $A_1 = \{1, 2, 8, 8\}$, הן כולן תתי־קבוצות של הקבוצה המיוחדת A. תהא S קבוצה מיוחדת. כמה תתי קבוצות בגודל n יש ל־S?
נסו להגיע לתשובה ללא סכימה...

40. נתונות k קוביות **זהות**. כל קוביה בעלת d פאות, ממוספרות ב־ $1, 2, 3, \ldots, d$.

א. מה מספר ההטלות השונות של k הקוביות הנ"ל?
ב. בסעיף זה נניח כי $k \geq d$. הטלה של k הקוביות הנ"ל נחשבת ל"מעולה" אם לכל $1 \leq r \leq d$, אם הופיע המספר r אז מופיעים גם כל המספרים $1, 2, 3, \ldots r-1$. כמה הטלות "מעולות" שונות של k הקוביות הנ"ל קיימות?

41. נתונים k כדורים **שונים**, ו־n תאים:

א. מה מספר האפשרויות לחלק את k הכדורים ל־n התאים, אם נתון כי התאים **שונים, הסדר בתוך התאים חשוב, ובכל התאים אותו מספר כדורים**.
ב. מה מספר האפשרויות לחלק את k הכדורים ל־n התאים, אם נתון כי התאים **שונים, הסדר בתוך התאים חשוב, ואין אף תא ריק**.
שימו לב: יכול להיות מספר כדורים שונה בכל תא.

42. הוכיחו כי במסיבה של 6 אנשים מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים:

- קיימים 3 אנשים שמכירים זה את זה.
- קיימים 3 אנשים שלא מכירים זה את זה.

⋆ 43. נתונות $n \geq 1$ קוביות זהות. זלמן מעוניין לבנות סדרה של מגדלים כאשר בכל מגדל יש לפחות קובייה אחת. מגדל מתאפיין אך ורק במספר הקוביות מהן הוא בנוי. שימו לב: יש סדר בין המגדלים אבל אין סדר בין הקוביות בכל מגדל.
מהו מספר סדרות המגדלים השונות אותן יכול זלמן לבנות מ־$n \geq 1$?

רמז: נסו למצוא העתקה חח"ע ועל בין סדרות של מגדלים לסוג מסויים של מילים בינאריות.

44. מה מספר האפשרויות לבחור r מספרים שונים מתוך $\{1, 2, \ldots, n\}$ כך שאין בינם זוג של מספרים עוקבים? לדוגמא: הקבוצה $\{1, 3, 6\}$ היא חוקית והקבוצה $\{1, 4, 5\}$ אינה חוקית.

45. א. כמה מחרוזות בינאריות יש כך שבכל מחרוזת n אחדים, $2n$ אפסים וכל 1 מופיע עם 0 משמאלו ומימינו (010)?
ב. כמה מחרוזות בינאריות יש כך שבכל מחרוזת בדיוק n אפסים, m אחדים ו־k רצפים (לא ריקים) של אפסים?
ג. כמה מחרוזות בינאריות באורך n יש כך שבכל מחרוזת ה־1 ה־k משמאל מופיע בדיוק לאחר m אפסים המופיעים משמאלו?
הערה: מספר האחדים אינו קטן מk. כמו כן, אנו מניחים כי $n \geq m + k$

3 מקדמים בינומיים ומשולש פסקל

1. נבחין כי גזירת הנוסחה

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

מובילה ל:

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} x^{i-1}$$

גזור את הנוסחה המתקבלת שנית, ובעזרת שתי הנגזרות וההצבה $x=1$ חשב את הסכום

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\binom{n}{i}$$

2. א. מהו המקדם של x^6 בפיתוח של $\left(x^2-2x^{-1}\right)^8$?

ב. מהו המקדם של x^0 (מקדם חופשי) בפיתוח של $\left(x^a+2+x^{-a}\right)^b$?

3. השתמשו בנוסחת הבינום ובנגזרותיה כדי לחשב את הסכומים הבאים:

א.

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

ב.

$$\sum_{k=0}^{n} 5^k\binom{n}{k}$$

ג.

$$\sum_{k=0}^{n} (3k-3)\binom{n}{k}$$

ד.

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)(k-3)\binom{n}{k}$$

4. מהו המקדם של x^{12} בפיתוח לטור של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+x+2}{(1-x^2)^3}$?

5. שאלה זאת עוסקת בשימושי הבינום.

א. השתמש בזהות:

$$\sum_{k=0}^{t} \binom{n+k}{r} = \binom{n+t+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}$$

בצע (במקביל) את ההצבות $n \leftarrow r$, וגם $t \leftarrow N-r$ ע"מ לקבל ביטוי עבור $\sum_{l=r}^{N}\binom{l}{r}$.

ב. השתמש בביטוי שקיבלת ע"מ לחשב את הסכום $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+(n-2)(n-1)n$. צורתו הכללית של הסכום היא:

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(i-1)i$$

6. הוכח (אלגברית) כי מספר האפשרויות לבחור מספר זוגי (כולל אפס) של עצמים מתוך n עצמים שונים ($n>0$) שווה למספר האפשרויות לבחור מספר אי זוגי של עצמים מתוכם.

7. הוכח כי לכל $n,k,m\geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

א. באינדוקציה.

ב. בשיטת הבינום.

ג. באמצעות הוכחה קומבינטורית.

8. א. הוכח את הזהות:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$$

באמצעות שיקולים קומבינטוריים.

⋆ ב. הוכח את הזהות:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

באמצעות שיקולים קומבינטוריים.

<u>הדרכה:</u> מצאו בעייה שפתרונה הוא אגף שמאל. אחר־כך מצאו לבעייה זו פתרון אחר, ופשטו אותו עד לקבלת אגף ימין.

9. הוכיחו קומבינטורית את השוויון הבא ממשולש פסקל:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

10. הוכיחו קומבינטורית את השוויון הבא ממשולש פסקל:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=0$$

11. מהו המספר הדו־ספרתי הגדול ביותר המופיע במשולש פסקל מספר אי־זוגי של פעמים? נמקו.

4 הכלה והפרדה

1. במאורת עכברים מתגוררים עכברים שכולם אוהבים גבינה. ישנם שני סוגי גבינה. לכל עכבר יש זנב, שיכול להיות ארוך או קצר. ידוע גם כי:

   - 10 עכברים הם בעלי זנב ארוך.
   - 9 עכברים אוהבים גבינה רכה.
   - 7 בעלי זנב ארוך אוהבים גבינה רכה.
   - 5 עכברים אוהבים גבינה קשה.
   - 4 בעלי זנב ארוך אוהבים גבינה קשה.
   - 2 עכברים אוהבים את שני סוגי הגבינות.

   השתמשו בשיטת "ההכלה וההפרדה" ע"מ לענות על השאלות הבאות:

   א. כמה בעלי זנב ארוך אוהבים את שני סוגי הגבינות?
   ב. כמה בעלי זנב קצר אוהבים את שני סוגי הגבינות?
   ג. כמה עכברים במאורה?

   תשובות אינטואיטיביות לא תתקבלנה! יש להשתמש בנוסחאות שנלמדו בכיתה.

2. בקבוצה יש סטודנטים שמתגוררים או בחיפה או בתל־אביב. ידוע כי מתוכם:

   - 16 סטודנטים מתגוררים בחיפה.
   - 15 סטודנטים לומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב.
   - 12 סטודנטים לומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב ומתגוררים בחיפה.
   - 10 סטודנטים לומדים אלגברה א'.
   - 7 סטודנטים לומדים אלגברה א' ומתגוררים בחיפה.
   - 5 סטודנטים לומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'.

   כל סטודנט לומד לפחות אחד מבין קומבינטוריקה למדעי המחשב ואלגברה א'.

   א. כמה סטודנטים מתגוררים בחיפה ולומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'?
   ב. כמה סטודנטים מתגוררים בתל אביב ולומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א'?
   ג. כמה סטודנטים יש בקבוצה?

3. לפו הדוב יש שמונה חברים: כריסטופר רובין, איה, שפן, קנגה, רו, ינשוף, נמיר, ושלגיה. בכל ערב הוא מזמין בדיוק ארבעה חברים לארוחת ערב. פו הבטיח שכל חבר יוזמן לפחות פעם אחת. בכמה דרכים יכול פו להזמין את חבריו לארוחות ערב במשך שבעה ערבים רצופים, ועדיין לקיים את הבטחתו?

4. במכונית מדגם "חיפושית" יכולים לשבת, כידוע, עד שמונה פילים בנוחות. נתונות 5 מכוניות "חיפושית" שונות, ושמונה פילים, שכולם יודעים לנהוג. הפילים רוצים לנסוע לבקר את דודם. בכמה דרכים שונות ניתן להושיב את הפילים במכוניות, תחת ההגבלה שבכל מכונית חייב לשבת לפחות פיל אחד:

   א. בהנחה שהפילים שונים זה מזה?
   ב. אם הפילים כולם זהים?

5. כמה פרמוטציות שונות של 22 אותיות הא"ב העברי קיימות, שבהן לא מופיעה אף אחת מהמחרוזות "אין", "גדולה", "כמו", "ביתר""? לדוגמא, הפרמוטציה: "גטביתרצל..." אינה חוקית.

6. כמה מספרים קטנים מ־ n מתחלקים בשנים מבין המספרים הבאים: $11, 17, 19$?

7. מטילים 9 קוביות משחק שונות.

א. בכמה מההטלות האפשריות ישנן בדיוק 3 קוביות שמראות את המספר 6?

ב. בכמה מההטלות האפשריות לא קיים אף מספר כך ש־ 3 קוביות בדיוק מראות אותו? נמקו את תשובתכם.

ג. בכמה מההטלות האפשריות יש לפחות מספר אחד כך ש־3 קוביות בדיוק מראות אותו?

8. כמה פתרונות שלמים יש למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, כאשר:

א. לכל i, $x_i \geq 0$, וגם: $x_4 \leq 21, x_3 \leq 15, x_2 \leq 10, x_1 \leq 5$

ב. לכל i, מתקיים: $-10 \leq x_i \leq 20$

9. כמה פתרונות שלמים יש למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, כאשר:

א. לכל i, $x_i \geq 0$, וגם: $x_4 \leq 18, x_3 \leq 12, x_2 \leq 10, x_1 \leq 5$

ב. לכל i, מתקיים: $-10 \leq x_i \leq 15$

10. הוכח משיקולים קומבינטוריים, כי:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n = n!$$

11. תן הוכחה קומבינטורית מלאה לנוסחה הבאה (אין לבצע פישוטים אלגבריים). לכל $k \geq 2$, k שלם:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} k^{n-i} (k-1)^i$$

12. בכמה אופנים ניתן להושיב n זוגות אנשים סביב שולחן עגול כך שאף אחד לא ישב ליד בן זוג שלו?

13. בתור לכרטיסי צילום עומדים n סטודנטים. בעודם מחכים, עזרו לסטודנטים למצוא את מספר האפשרויות לסדר אותם הסטודנטים בתור לתעודת סטודנט, כך ששום סטודנט לא יראה מיד לפניו את אותו סטודנט שהוא רואה עכשיו.

14. במסיבה n אנשים. במהלך המסיבה התרחשו r לחיצות ידיים, תחת התנאים הבאים:

- כל לחיצת ידיים מתבצעת בין שני אנשים.
- אין שני אנשים הלוחצים זה את ידו של זה יותר מפעם אחת.
- סדר לחיצת הידיים אינו חשוב.

א. מהו מספר האפשרויות לביצוע לחיצות הידיים, על פי תנאים אלו?
הבהרה: שתי אפשרויות נחשבות כשונות אם קיים לפחות זוג אחד של אנשים הלוחצים ידיים זה לזה באפשרות אחת, ואינם לוחצים ידיים זה לזה באפשרות האחרת.

ב. מהו מספר האפשרויות לביצוע לחיצות הידיים על פי התנאים שהוגדרו, אם בנוסף ידוע שכל אחד מ־n הנוכחים לוחץ יד לפחות פעם אחת?

15. נתונה ערכה של $2k$ כדורים, המורכבת מ:

- k כדורים אדומים זהים זה לזה.
- k כדורים כחולים שונים זה מזה, הממוספרים במספרים: $1, 2, \dots, k$.

כמו כן נתונים n תאים שונים זה מזה, ומוסכם שאין חשיבות לסדר בין הכדורים שנופלים לאותו תא.

א. בכמה דרכים שונות ניתן לפזר את $2k$ הכדורים ב־n התאים השונים כך שבכל תא יש לפחות כדור אדום אחד ולפחות כדור כחול אחד?

ב. בכמה דרכים שונות ניתן לפזר את $2k$ הכדורים ב־n התאים השונים כך שאף תא אינו ריק?

16. תן הוכחה קומבינטורית לנוסחא הבאה (אסור לבצע פישוטים אלגבריים):

$$1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$$

17. 60 ילדים נוסעים ברכבת הרים, שבה 20 קרונות שונים בני 4 מושבים כל אחד. בכמה אפשרויות ניתן להושיב את הילדים ברכבת, כאשר סדר הישיבה בקרונות חשוב, כך ש :

א. אין קרון מלא ?

ב. בדיוק m קרונות מלאים ?

ג. לפחות אחד מבין ארבעת הקרונות הראשונים מלא ?

18. טיל אוילנשפיגל עלה לגג בית ובידו n זוגות נעליים שונות של n תושבי העיירה. הוא זרק את הנעליים לרחוב, ו־n האנשים התנפלו עליהן. כל אחד לקח נעל ימנית ונעל שמאלית.

א. כמה אפשרויות יש בהן אף אחד לא יקבל זוג תואם (לא בהכרח שלו)?

ב. כמה אפשרויות יש בהן אף אחד לא יקבל נעל ששייכת לו?

ג. כמה אפשרויות יש בהן אף אחד לא יקבל את שתי נעליו?

19. בחוג לריקודי עם משתתפים n בנים ו־n בנות. המדריך חילק אותם ל־n זוגות מעורבים (בן־בת) לריקוד זוגות.
k מתוך n הזוגות סירבו לרקוד עם בן הזוג שנקבע להם.
כעת, על המדריך לחלק שנית את $2n$ הרקדנים ל־n זוגות מעורבים, כך שאף זוג מאותם k זוגות סרבנים לא יהיה יחד. מה מס' האפשרויות לעשות חלוקה כזאת?

20. זורקים 7 קוביות שונות. מהו מספר האפשרויות בהן לפחות 3 מבין הקוביות נפלו על פאות זוגיות ? יש לפתור באמצעות הכלה והפרדה, כאשר התכונה ה־ i הינה שהקוביה ה־ i נפלה על פאה זוגית (7 תכונות בסך הכל).

21. בכמה דרכים ניתן להטיל 10 קוביות שונות:

א. כך שכל אחד מהמספרים: $1, \dots, 6$ יצא לפחות פעם אחת?

ב. בכמה דרכים ניתן להטיל את הקוביות כך שלפחות מספר אחד אינו מופיע בהטלה?

22. נתונים $3n$ כדורים:
n כדורים גדולים הממוספרים $1, 2, \dots, n$
n כדורים בינוניים הממוספרים $1, 2, \dots, n$
n כדורים קטנים הממוספרים $1, 2, \dots, n$

מחלקים את הכדורים ל־ n תאים זהים כאשר בכל תא 3 כדורים ־ כדור גדול, כדור בינוני וכדור קטן. הסדר בתאים אינו חשוב.

א. בכמה אופנים ניתן לחלק את הכדורים לתאים?

ב. בכמה אופנים ניתן לחלק את כל הכדורים לתאים כך שאין תא בו כל הכדורים בעלי אותו מספר? תנו תשובה מפורטת.

23. נתונים $5n$ כדורים הממוספרים $1, 2, \ldots, 5n$. יש לסדרם ב־ $5n$ תאים שונים (שגם הם ממוספרים $1, 2, \ldots, 5n$), כך שבכל תא ימצא בדיוק כדור אחד. חשבו את מספר האפשרויות לסידור הכדורים בתאים כאשר הכדורים $1, 2, \ldots, n$ אינם מוכנסים לתאים שמספרם $1, 2, \ldots, n$, כלומר לכל i, $1 \leq i \leq n$, הכדור ה־ i אינו נמצא באחד מ־ n התאים הראשונים.

א. תנו פתרון ישיר בנוסחה ללא סכימה.

ב. פתרו באמצעות עקרון ההכלה וההפרדה.

- הגדירו תכונות מתאימות.
- רשמו את הפתרון.

24. בכמה אפשרויות ניתן לפזר k כדורים זהים ב־ n תאים שונים כך שאין תא המכיל בדיוק שלושה כדורים?

25. יהי מספר שלם $n > 10$ קבוע. כמה מספרים באורך n ניתן להרכיב מהספרות $1, 2, \ldots, 9$ (שימו לב, ללא הספרה '0') עם חזרות (כלומר, קיים מלאי בלתי מוגבל מכל ספרה), כך שבכל אחד מהמספרים המתקבלים יש בדיוק 4 ספרות שונות?

26. הוכיחו קומבינטורית כי:

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n + (k-r) - 1}{n} = \binom{k + (n-k) - 1}{n-k}$$

27. מה מספר האפשרויות לחלק k כדורים זהים ל־$2n$ תאים שונים הממוספרים $1, 2, \ldots, 2n$, כך שלכל i ($i = 1, 2, \ldots, n$) סכום הכדורים בתא ה־i ובתא ה־$n + i$ שונה מ־4?

28. הוכיחו קומבינטורית את השוויון הבא ממשולש פסקל:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

29. נתונים n זוגות נשואים.
בכמה דרכים ניתן להושיבם סביב שולחן עגול עם $2n$ מושבים כך שאף אדם לא יושב ליד בן/בת זוגו, כאשר:

א. המושבים זהים.

ב. המושבים שונים (ממוספרים במספרים $1 - 2n$).

5 נוסחאות נסיגה

1. רשום נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הוקטורים באורך n המקיימים:

   א. הוקטור בינארי, ולא מכיל '00'.

   ב. הוקטור טרנארי, ולא מכיל '00' או '11'.

   ג. הוקטור הוא מעל א"ב $\{1,2,3,4\}$, ולא מכיל אף אחת מתתי־המחרוזות '11', '12', '21', או '22'.

2. <u>הגדרה:</u> הפרות סדר של המספרים $1,2,\ldots,n$ זה סידור שלהם במקומות $1,2,\ldots,n$ כך שלכל i מספר i לא מופיע במקום i (פרמוטציה P, כך ש $P(i) \neq i$).

   מספרן יסומן ע"י D_n.

   א. הוכח כי מספר הפרות הסדר מקיים את נוסחת הנסיגה הבאה:

   $$D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right)$$

   מה תנאי ההתחלה?

   ב. הוכח באינדוקציה ש־

   $$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} \ .$$

3. וקטור בינארי יקרא k־מאוזן אם מספר האפסים בו פחות מספר האחדים בו הוא בתחום $\{-k,\ldots,k\}$. לדוגמא, הוקטורים $0011, 10, 1010$ הם כולם 0־מאוזנים (ולכן, הם גם 1־מאוזנים, 2־מאוזנים, וכן הלאה). דוגמא נוספת: הוקטורים $1101, 00, 0001$ הם כולם 2־מאוזנים אך אינם 1־מאוזנים.

   תן נוסחה רקורסיבית עבור $H(n,k)$ ־ מספר הוקטורים הבינאריים באורך n שהם k־מאוזנים. תן את כל תנאי ההתחלה הדרושים לצורך החישוב.

   רמז לפתרון אפשרי: חשב את $I(n,k_1,k_2)$ ־ מספר הוקטורים הבינאריים באורך n שעבורם ההפרש בין מספר האפסים למספר האחדים הוא קטן/שווה מ־k_2 וגם גדול/שווה ל־k_1. בטא את התשובה באמצעות גודל זה. שים לב לתנאי ההתחלה הנחוצים.

   ניתן גם לפתור ללא שימוש בפונקצית העזר הנ"ל!

4. מטילים (זורקים) קוביה n פעמים. סדרת תוצאות של n הטלות נקראת משחק. תוצאת הטלה תיקרא <u>דאבל</u> אם היא זהה לתוצאת ההטלה הקודמת.
   יהי $F(n,k)$ מספר המשחקים השונים בהם יש בדיוק k דאבלים. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה לחישוב $F(n,k)$ עבור $1 \le n$, $0 \le k$.

5. במסיבת ריקודים משתתפים n זוגות נשואים (n גברים ו־n נשים). כמה אפשרויות יש לסידור שלהם במעגלים עם לפחות 4 אנשים בכל מעגל, אין סדר בין מעגלים אך יש סדר בתוך מעגל, כאשר בין כל שני גברים יש אשה אחת ובין כל שתי נשים יש גבר אחד, וכולם רוקדים?

6. שאלה זו מתייחסת לבעיית חלוקת n רקדנים שונים למעגלים. ניתן לפתור את הבעייה הנ"ל באמצעות כלל הנסיגה:

   $$F(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (k-1)! F(n-k)$$

   ותנאי התחלה $F(0) = 1$.
   דקלה טוענת שהיא הצליחה לפתור את <u>אותה הבעייה</u> באמצעות כלל נסיגה אחר, יותר שווה ־ ללא סכימה:

   $$G(n) = n \cdot G(n-1)$$

   (תנאי ההתחלה, כמובן, נשאר זהה).

א. פתרו את נוסחת הנסיגה של דקלה.

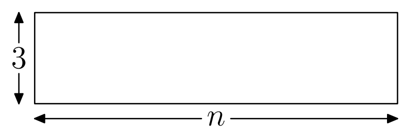
ב. בדקו באמצעות אינדוקציה (ע"י שימוש בכלל הנסיגה $F(n)$) שזהו אכן פתרון של בעיית הרקדנים.

ג. הסבירו (בדרך קומבינטורית) כיצד קיבלה דקלה את נוסחת הנסיגה $G(n)$.

⋆ ד. כיצד ניתן היה לקבל את הפתרון שחישבתם בסעיף א' באופן ישיר?
רמז: התאמה חח"ע.

⋆ ה. היעזרו בסעיף ד' כדי למצוא פתרון לבעיית הרקדנים כאשר מוסיפים את האילוץ הבא: בכל מעגל יש לפחות שני רקדנים.

7. נסמן ב־$T(n)$ את מספר האפשרויות לרצף משטח בגודל $3 \times n$ (ראה ציור) על־ידי מרצפות בגודל 1×3, שצבעיהן אדום, ירוק או כחול. שים לב, שמיקום המרצפות, ולא רק צבעיהן, משנה. במילים אחרות, מיקום החריצים שבין המרצפות משנה. תן נוסחת נסיגה ל־$T(n)$ ותנאי התחלה המספיקים לפתרון הבעיה.



8. בשנה הנוכחית לא נערך מצעד במדינת זאיר (קונגו). קמה שערוריה ציבורית, ובעקבותיה הופלה הממשלה. הממשלה החדשה שקמה חוקקה חוק שאין לקיים מצעדים יותר משנתיים ברציפות.

א. חשב את $Q(n)$ ־ מספר האפשרויות החוקיות לקיום המצעדים ב־n השנים הבאות. תן תנאי התחלה מתאימים. שים לב שבשנה הנוכחית (שהיא השנה הקודמת לשנת התכנון הראשונה) לא נערך מצעד.

ב. ראש הממשלה הזאירי שפט את מתנגדיו לשבע שנות מאסר. חשב את $Q(7)$.

9. ל־ Final four בכדורסל הגיעו קבוצות מישראל, ספרד, איטליה ויון. בכניסה לאולם הספורט מסודרים בשורה n תרנים (עמודים), $0 \leq n$, ועליהם יש להניף n דגלים (דגל על כל תורן).
ברשותכם 4 ערימות דגלים ־ ערימה של דגלי ישראל, ערימה של דגלי ספרד, ערימה של דגלי איטליה וערימה של דגלי יון. בכל ערימה יש n דגלים זהים.
נסמן ב־ $Q(n)$ את מספר האפשרויות להניף את הדגלים על התרנים, כך שיונף לפחות דגל ישראל אחד, ולפני דגל ישראל הראשון מימין, לא יונף אף דגל של ספרד.

א. חשבו את $Q(2)$ ואת $Q(3)$ והסבירו עם נימוקים קומבינטורים.

ב. תנו משוואת נסיגה ותנאי התחלה מתאימים המספיקים לחישוב $Q(n)$ כאשר בתור התורן ה־n לוקחים את התורן השמאלי ביותר.

ג. תנו משוואת נסיגה ותנאי התחלה מתאימים המספיקים לחישוב $Q(n)$ כאשר בתור התורן ה־n לוקחים את התורן הימני ביותר.

ד. תוך שימוש בתוצאות שקיבלתם בסעיפים ב' ו־ג' קבלו ביטוי מפורש ל־$Q(n)$.

ה. באמצעות הצבה של תוצאת סעיף ד' במשוואת נסיגה (של אחד הסעיפים ב' או ג') הוכיחו באינדוקציה כי תוצאה שמצאתם ב־ד' היא אכן פתרון למשוואה רקורסיבית.

ו. מצאו ביטוי מפורש ל־$Q(n)$ ישירות ללא שימוש בנוסחאות נסיגה. השוו את התוצאה לתוצאת סעיף ד'.

10. נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

א. מהו מספר תתי הקבוצות של A בהן לא מצוי אף זוג של מספרים עוקבים?

ב. חשבו פתרונות מספריים מפורשים עבור הבעיה בסעיף א' כאשר $n = 3$ וכאשר $n = 7$.

11. n רקדנים (שונים) מסודרים במעגל. נסמן ב־ $Q(n)$ את מספר הדרכים השונות להלביש את הרקדנים בחולצות מתוך מבחר של 7 צבעים שונים, באופן שכל שני רקדנים סמוכים לבושים בחולצות בצבעים שונים.

א. חשבו את $Q(2)$, $Q(3)$ ו־ $Q(4)$.

ב. כתבו משוואת נסיגה (רקורסיה) ותנאי התחלה שיאפשרו את חישוב $Q(n)$ לכל מספר שלם $2 \le n$.

12. בהינתן וקטור $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ באורך $2n$, נאמר כי מתקיימת בו סימטריה במקום i, עבור $1 \le i \le n$, אם מתקיים: $x_i = x_{2n-i+1}$. נאמר כי ב־ x יש k־סימטריות, אם מתקיימת סימטריה ב־ k מקומות $i_1, i_2, \ldots, i_k$ כלשהם המקיימים: $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

לדוגמא, בוקטור: $(1,0,0,1,2,0,2,1)$ יש בדיוק 2 סימטריות ־ במקומות 1 ו־ 3.

<u>נגדיר:</u>
$b(n,k)$ ־ מספר הוקטורים <u>הבינאריים</u> השונים באורך $2n$ שיש בהם <u>בדיוק</u> k סימטריות.
$t(n,k)$ ־ מספר הוקטורים <u>הטרנאריים</u> השונים באורך $2n$ שיש בהם <u>בדיוק</u> k סימטריות.

א. כתבו ביטוי מפורש עבור $b(n,k)$

ב. כתבו ביטוי מפורש עבור $t(n,k)$

ג. כתבו משוואת נסיגה ותנאי התחלה שיאפשרו את חישוב $t(n,k)$ לכל $k \ge 0, n \ge 0$.

13. וקטור בינארי יקרא $a : b$ מוגבל רצפים אם :

א. הוא מתחיל ומסתיים ב־1.

ב. בין כל שני 1־ים בוקטור, יש רצף אפסים באורך לפחות a ולכל היותר b.

מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הוקטורים $a : b$ מוגבלי הרצפים באורך n, כאשר נתון כי $b \le 2 \cdot a$.

14. תמורה של הספרות $1, 2, \ldots, n$, $(n \ge 1)$, נקראת ביטונית עולה־יורדת אם התמורה מורכבת מרצף עולה יחיד של ספרות, שאחריו רצף יורד יחיד של ספרות (רצף יכול להיות ריק, כלומר מותרות תמורות רק עולות ורק יורדות). לדוגמה ־ להלן כל התמורות הביטוניות־עולות־יורדות בגודל 3 : $(123), (132), (231), (321)$.

א. מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הסדרות הביטוניות העולות־יורדות מאורך n.

ב. פתור את השאלה באופן ישיר, תוך הגעה לתשובה מספרית.

15. בשפה ההוואית 13 צלילים: 8 עיצורים (h, w, f, l, m, k, n, p) ו־5 תנועות (a, e, i, o, u). כל הברה מורכבת או מתנועה בודדת (למשל "a") או מעיצור ולאחריו תנועה (למשל "lo"). לדוגמה, במלה Hawaii 4 הברות: Ha-wa-i-i. כל מילה הבנויה לפי כללים אלה היא חוקית. כמה מלים הוואיות חוקיות יש בעלות:

א. 4 הברות.

ב. n אותיות (תן משוואת נסיגה ותנאי התחלה מספיקים).

16. מהו מספר האפשרויות לחלק $2n$ אנשים ל־ n זוגות? (רשום משוואה רקורסיבית)

17. נתון סולם בעל אינסוף שלבים.
מותרים הצעדים הבאים:

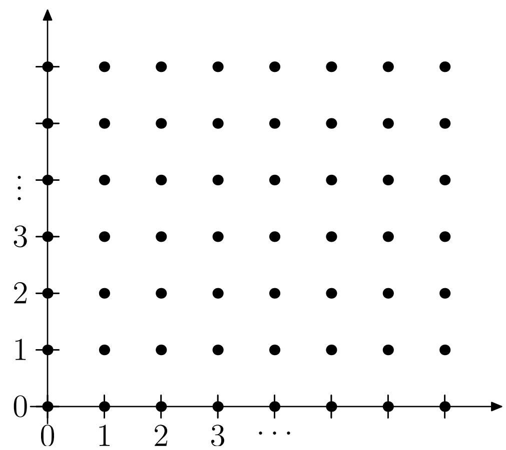
- לעלות 3 שלבים למעלה.

- לרדת שלב אחד למטה.

בנוסף, אסור לרדת שלב אחד למטה יותר מפעמיים ברציפות. כמו כן, אסור, כמובן, לרדת למטה בצעד הראשון.

נסמן על ידי: $F(n)$ את מספר המסלולים האפשריים להגיע לשלב ה־ n, כאשר מתחילים לטפס מהרצפה. תנו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור $F(n)$.

18. נתונה מערכת הצירים:



ומותרים בה צעדים משלושה סוגים:

- יחידה אחת למעלה.
- יחידה אחת ימינה.
- יחידה אחת באלכסון (ימינה ולמעלה).

נסמן ב־$F(m,n)$ את מספר האפשרויות (המסלולים השונים) להגיע מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (m,n).

א. מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה לחישוב $F(m,n)$.

ב. חשב את $F(4,3)$. הראה את מהלך החישוב (אפשר בעזרת טבלה).

ג. כעת, יהיו $a,b>0$ מספרים שלמים כך ש־ $m>2\cdot a\ ,\ n>2\cdot b$.
נסמן ב־ $G(m,n)$ את מספר המסלולים השונים מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (m,n) כאשר שני התנאים הבאים מתקיימים:

- המסלול חייב לעבור דרך הנקודה (a,b).
- המסלול אינו עובר בתוך המלבן שפינותיו הנגדיות הן (a,b) ו־ $(2a,2b)$ (מותר לעבור לאורך שפת המלבן, כפי שנובע מהתנאי הקודם).

הבע את $G(m,n)$ במונחי F.

19. מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר הוקטורים באורך n, המקיימים:

א. הוקטורים <u>בינאריים</u>, ולא מכילים שני '1'־ים רצופים.

ב. הוקטורים <u>טרנאריים</u>, ולא מכילים שני '1'־ים רצופים.

ג. הוקטורים <u>בינאריים</u>, ולא מכילים k '1'־ים רצופים (k שלם, $2\le k$).

ד. הוקטורים טרנאריים, ולא מכילים שני '1'־ים רצופים, ולא מכילים שני '2'־ים רצופים.

20. מצאי נוסחה סגורה למספר הוקטורים הטרינאריים באורך n עם מספר זוגי של אפסים. האם יש דרך להגיע לנוסחה זו ללא שימוש באינדוקציה או רקורסיה?

21. נתונים $n+1$ כדורים הממוספרים $1,2,\ldots,n+1$. יש לסדרם ב־ $n+1$ תאים שונים (שגם הם ממוספרים $1,2,\ldots,n+1$), כך שבכל תא ימצא בדיוק כדור אחד. בנוסף, בכל סעיפי שאלה זו, אסור להכניס כדורים הממוספרים $1,2,\ldots,n-1$ לתא שמספרו תואם את מספר הכדור. במילים אחרות, לכל i, $1 \le i \le n-1$, אין להכניס את הכדור ה־ i לתא ה־ i.

בכל אחד מסעיפי השאלה הבאים מפורטות מגבלות נוספות על אופן סדור הכדורים בתאים. המגבלות אינן מצטברות מסעיף לסעיף, אלא רק מתווספות למגבלה שתוארה לעיל לגבי $n-1$ הכדורים הראשונים. בכל סעיף, יש לחשב את מספר האפשרויות לפזור $n+1$ הכדורים ל־ $n+1$ התאים.

ניתן להעזר בשאלה זו בכך שמספר הפרות הסדר על k איברים, המסומן על ידי $D(k)$, נתון על ידי

$$D(k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{k!}{i!}$$

א. תנו נוסחה סגורה לבעיה, ונמקו תשובתכם, כאשר נוספות שתי המגבלות הבאות:

- לכדור ה־ n אסור להיות מוכנס לתאים ה־ n וה־$n+1$.
- לכדור ה־ $n+1$ אסור להיות מוכנס לתא ה־ $n+1$.

ב. פתרו בעזרת משוואת נסיגה ותנו תנאי התחלה מספיקים (אך לא מיותרים), כאשר נוספת המגבלה שבתא ה־ $n+1$ אין לשים את הכדור ה־ n וגם לא את הכדור ה־ $n+1$.

⋆ ג. פתרו בעזרת משוואת נסיגה ותנו תנאי התחלה מספיקים (אך לא מיותרים), כאשר נוספת המגבלה שבשני התאים ה־ $n+1$ וה־ n אין לשים את הכדור ה־ n וגם לא את הכדור ה־ $n+1$.

22. פתרו את שני הסעיפים הבאים באמצעות משוואות נסיגה, ותנו תנאי התחלה. נמקו את תשובותיכם.

א. מה מספר האפשרויות בחלוקת n אלמנטים שונים ל־ k תאים שונים כך שבכל תא יש לכל היותר s אלמנטים?

ב. מה מספר האפשרויות בחלוקת n אלמנטים שונים ל־ k תאים זהים כך שבכל תא יש לכל היותר s אלמנטים?

23. ישיבת כנסת מתנהלת כאשר חברי הכנסת עולים בזה אחר זה לדוכן הנואמים, בסדר אלפביתי של שמותיהם, כאשר כל חבר כנסת עולה לנאום פעם אחת בדיוק. כל חבר כנסת נואם באחת מן הצורות הבאות:

- מעלה הצעת חוק לדיון. במקרה כזה, נרשם בפרוטוקול הישיבה כי חבר הכנסת העלה הצעת חוק לדיון (אך לא מצוין בפרוטוקול תוכן הצעת החוק).
- מתייחס להצעת חוק שהועלתה בדיון על ידי אחד מהדוברים הקודמים. במקרה כזה נרשם בפרוטוקול הישיבה כי חבר הכנסת הנואם התייחס להצעת החוק של חבר הכנסת שהעלה את ההצעה.
- משמיץ את אחד מחברי הכנסת שדברו לפניו בדיון ושלא העלה בעצמו הצעת חוק (כלומר אסור להשמיץ חבר כנסת שהעלה הצעת חוק לדיון). במקרה כזה נרשם בפרוטוקול כי חבר הכנסת הנואם השמיץ את חבר הכנסת המושמץ.

רשמו נוסחת נסיגה בשני משתנים ותנו תנאי התחלה המאפשרים לחשב את מספר הפרוטוקולים השונים האפשריים לישיבות הכנסת במהלכן הועלו בדיוק k הצעות חוק לדיון.

רמז: שימו לב כי ניתן לתאר פרוטוקול ישיבת כנסת על ידי וקטור בן 120 מקומות.

24. נסמן ב־ $T(n)$ את מספר הסדרות הטרנאריות באורך n מעל $\{0,1,2\}$ המתחילות בספרה 1 ובהן כל שני אחדים מופרדים על ידי בדיוק k $(k \geq 2)$ ספרות שאינן כולן זהות. רשמו משוואת נסיגה עבור $T(n)$, ותנו תנאי התחלה מספיקים (אך לא מיותרים) עבורה.

25. פתרו את הסעיפים הבאים בעזרת משוואות נסיגה, ותנו תנאי התחלה מספיקים (אך לא מיותרים).

א. חשבו את $B(n)$, שהוא מספר הוקטורים הבינארים באורך n, בהם כל שני אפסים מופרדים על ידי <u>לפחות</u> שמונה אחדים.

ב. חשבו את $T(n)$, שהוא מספר הוקטורים הטרנארים (וקטורים מעל הספרות $\{0,1,2\}$) באורך n, בהם סכום כל שתי ספרות שכנות <u>אינו</u> 4.

26. עבור נוסחאות נסיגה הבאות מצאו פתרון מפורש באמצעות שימוש <u>במשוואה אופיינית</u>.

א. $S_n = 3S_{n-1} + 4S_{n-2}$ עם תנאי התחלה $S_0 = 0, S_1 = 5$.

ב. $S_n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2}$ עם תנאי התחלה $S_0 = 1, S_1 = 4$.

27. פתור בשיטת הניחוש את נוסחת הנסיגה $f_n = f_{n-1} + n^2$ עם תנאי ההתחלה $f_1 = 1$.
<u>הדרכה:</u> נחש שהפתרון הוא פולינום ממעלה 3.

28. פתור את נוסחת הנסיגה $f(n) = 3(f(n/2))$ עם תנאי ההתחלה $f(1) = 2$.

א. בשיטת הניחוש (נחש כי $f(n) = an^b$).

ב. באמצעות הצבות חוזרות.

הנח כי n הוא חזקה טבעית של 2.

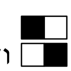
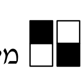
29. יהי A וקטור באורך $n = 2^k$, $k \geq 1$, מעל א"ב טרנארי (בגודל 3). יהיו R, L הווקטורים השווים לחצי הימני והשמאלי של A, בהתאמה (האורך של R ושל L הוא 2^{k-1}).

א. הווקטור A נקרא "יפה" אם $R \neq L$, וכן אם $k \geq 2$ אז גם L וגם R יפים.
לדוגמא: הווקטור $A = \underbrace{1\,0\,1\,0}_{L}\,\underbrace{0\,1\,1\,0}_{R}$ איננו יפה, מכיוון ש־ L איננו יפה (אך R כן יפה).

מהו מספר הווקטורים היפים באורך $n = 2^k$?

ב. הווקטור A נקרא "יפה מאוד" אם $R \neq L$ וגם $L \neq \overleftarrow{R}$, וכן אם $k \geq 2$ אז גם L וגם R יפים מאוד.
הסימון $\overleftarrow{R}$ משמעו וקטור הרוורס: אם $R = (r_1\, r_2\, \ldots\, r_t)$ אז $\overleftarrow{R} = (r_t\, r_{t-1}\, \ldots\, r_1)$.
לדוגמא: הווקטור $A = \underbrace{1\,2\,1\,0}_{L}\,\underbrace{0\,1\,1\,0}_{R}$ איננו יפה מאוד, כי R איננו יפה מאוד (אבל L כן).

מהו מספר הווקטורים היפים מאוד באורך $n = 2^k$?

30. נתונות n אבני דומינו (כל אחת בגודל 1×2) מהצורה: 
בכמה אופנים ניתן לרצף בעזרתן מלבן בגודל $2 \times n$, כאשר אין חשיבות למיקום המרצפות במלבן אלא רק לצבען?
(כלומר,  ו־  מייצגים את אותו הריצוף.)

31. נתונה הרקורסיה $S_0 = 0$,

$$. \; S_n = n^2 + S_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

דהיינו, S_n שווה לסכום הריבועים:

$$. \; S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$$

מצאו בעזרת שיטת הניחוש נוסחא סגורה ל־ S_n.
<u>רמז:</u> נחשו כי

$$S_n = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d \ .$$

כזכור, אם מצאתם פתרון, אין צורך פורמלי להוכיח כי הוא נכון. אבל, כדאי לכם לוודא שלא עשיתם טעויות חישוב...

32. א. פיתרו את נוסחת הנסיגה הבאה עבור $n = 2^k$ (כלומר, n שהוא חזקה טבעית של 2):

$$F(n) = \binom{n}{n/2}\left[F\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2, \quad F(1) = 1$$

ב. הוכיחו בעזרת אינדוקציה את הפתרון שלכם לסעיף א'.

33. סדרה המייצגת ביטוי אריתמטי בינארי היא סדרה סופית של סימנים הלקוחים מבין ששת הסימנים הבאים: הספרות 1,0, וסימני הפעולות +,־,*,/, בכפוף לתנאים הבאים:

1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
2. הסדרה אינה מכילה שני סימני פעולה רצופים.

לדוגמא: הסדרה 000/10+0110 הינה חוקית, אבל הסדרה 1־+10 אינה חוקית. שכן היא מפרה את תנאי מספר 2. הסדרה הריקה אינה חוקית שכן היא מפרה את תנאי מספר 1.
יהי a_n מספר הסדרות החוקיות שאורכן בדיוק n:

א. מצאו נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה מספיקים עבור a_n.
ב. פיתרו את הנוסחה הרקורסיבית מהסעיף הקודם, וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.

34. יהי a_n מספר הסדרות באורך n מעל $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, בהן לא מופיעות ספרות אי־זוגיות סמוכות. לדוגמה: עבור $n = 3$ הסדרות 523,241, 522 הן חוקיות, בעוד הסדרות 431, 251,332 אינן חוקיות.

א. מצאו נוסחא רקורסיבית ותנאי התחלה מספיקיפ עבור a_n
ב. פיתרו את הנוסחא הרקורסיבית שמצאתם בסעיף הקודם, וקבלו נוסחא מפורשת עבור a_n. פרטו את שלבי הפתרון.

35. נתונות הסדרות הבאות:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$
$$b_n = \sum_{\substack{0 \le i,j,k \\ i+j+2k=n}} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

הוכיחו בצורה קומבינטורית שלכל $n \geq 2$ מתקיים כי $a_n = b_n$.

36. נסמן ב־$f(n,k)$ את מספר הדרכים לחלק n כדורים שונים ל־k תאים שונים $k, n > 0$, כך שאין שני תאים עם אותו מספר כדורים ויש חשיבות לסדר הכדורים בתאים. מצא נוסחת נסיגה לחישוב $f(n,k)$ ותנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים. נמקו.

37. נסמן ב־$F(n,k)$ את מספר האפשרויות לבחור ללא חשיבות לסדר r מספרים שונים מתוך $\{1, 2, ..., n\}$ כך שאין בינהם זוג של מספרים עוקבים. (לדוגמה: הקבוצה $\{1, 3, 6\}$ היא חוקית, אך $\{2, 4, 5\}$ אינה חוקית).

א. תנו נוסחת נסיגה ל־$F(n,k)$ עבור $r \geq 0, \ n \geq 0$ (הניחו ש $F(0,0) = 1$) עם תנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים.

ב. ב) הוכיחו באינדוקציה ש־$F\left(r,n\right)=\left(\begin{array}{c} n-r+1\\ r \end{array}\right)$.

ג. הוכיחו בדרך ישירה את הזהות של סעיף ב'. כלומר, ספקו הסבר קומבינאטורי לזהות זו.

6 פונקציות יוצרות

1. מהי הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{a_k\}$, המוגדרת כמספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך n משפחות של עצמים (עצמים מאותה משפחה הינם זהים), כך שמאף משפחה לא נבחרים יותר מ־m עצמים? (m, n הינם קבועים בשאלה, ואין חשיבות לסדר בחירת העצמים).

   הבהרה: יש לרשום את הפונקציה בצורה קומפקטית, ולא את הפיתוח שלה לטור (אין צורך לבטא את מקדמי החזקות בטור).

2. פתור, בעזרת פונקציות יוצרות, את משוואת הנסיגה:

   $a_0 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2\binom{n+1}{n-1}$

3. הסדרה $a_0, a_1, \ldots$ מוגדרת רקורסיבית:

$$a_0 = 1$$
$$\forall n > 0 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 2$$

   תוך שימוש בפונקציה יוצרת מצא נוסחה מפורשת ל־a_n.

4. נתונים n סוגים של אלמנטים. אלמנטים מסוגים שונים נחשבים שונים זה מזה. אלמנטים מאותו סוג נחשבים זהים, ומספרם בלתי מוגבל.

   א. תהא $G(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, כאשר g_k שווה למספר הדרכים השונות בהן ניתן להרכיב צירוף של k אלמנטים מתוך n הסוגים, כך שמכל סוג נבחרים 2 אלמנטים לכל היותר. כתבו ביטוי מפורש עבור $G(x)$.

   ב. חשבו את g_6 כאשר $n = 4$.

5. תהי $\{b_n\}$ סדרה, ותהי $B(x)$ הפונקצייה היוצרת שלה. נגדיר סדרה $\{a_n\}$ באופן הבא:

$$a_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$

   תהי $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $\{a_n\}$. הוכח כי:

$$A(x) = \frac{B(x)}{1-x}$$

6. בשאלה זו נחשב את סכומם של n הריבועים הראשונים. נגדיר את הסדרה $\{b_n\}$ לכל n אי שלילי: $b_n = n^2$. אנו מחפשים את הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{a_n\}$, המוגדרת כך: $a_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

   א. נגדיר את הסדרה $\{c_n\}$: $c_0 = 0$, ולכל $n > 0$: $c_n = b_n - b_{n-1}$. הוכח כי לכל $n > 0$ מתקיים $c_n = 2(n-1) + 1$, כלומר האיבר c_n הינו האי־זוגי ה־n־י.

   ב. נגדיר את הסדרה $\{d_n\}$: $d_0 = 0$, ולכל $n > 0$: $d_n = c_n - c_{n-1}$. רשום, לכל $n > 0$, מיהו האיבר d_n.

   ג. נגדיר את הסדרה $\{e_n\}$: $e_0 = 0$, ולכל $n > 0$: $e_n = d_n - d_{n-1}$. מהי $G(x)$, הפונקציה היוצרת של $\{e_n\}$?

   ד. שים לב כי $\{d_n\}$ הינה סדרת הסכום של $\{e_n\}$, $\{c_n\}$ הינה סדרת הסכום של $\{d_n\}$, וכך הלאה. בטא, באמצעות הפעלות חוזרות של אופרטור הסכימה על $G(x)$, את $F(x)$ ־ הפונקציה היוצרת של $\{a_n\}$.

   ה. פתח את $F(x)$ לטור, וקבל את הנוסחה הכללית לאיבר a_n.

7. בשאלה זו נדון בחלוקות של מספרים טבעיים.

חלוקה של מספר k הינה הצגה שלו כסכום של מספרים טבעיים (גדולים ממש מאפס), כולל המספר עצמו (סכום בן איבר אחד), ללא חשיבות לסדר.

דוגמה: החלוקות השונות של 5 הינן:

$1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+4, 1+2+2, 3+2, 5$.

נסמן ב־ p_k את מספר החלוקות של k. (ראינו כי $p_5 = 7$).

הפונקציה היוצרת של הסדרה p_k הינה מכפלה אינסופית של סכומים איסופיים:

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^i+x^{2i}+\cdots)\cdots \\ &= (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\cdots(1-x^i)^{-1}\cdots \end{aligned}$$

כאשר האיבר הנלקח מהגורם ה־i קובע כמה פעמים מופיע המספר i בסכום.

נסמן ב־d_k את מספר החלוקות של k למחוברים שונים, ותהי $D(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{d_k\}$.

נסמן ב־o_k את מספר החלוקות של k למחוברים אי זוגיים, ותהי $O(x)$ הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{o_k\}$.

דוגמאות:

- $o_5 = 3 : (1+1+1+1+1, 1+1+3, 5)$
- $d_5 = 3 : (2+3, 1+4, 5)$.

נוכיח, בעזרת פונקציות יוצרות, כי לכל k מתקיים $d_k = o_k$.

א. מצא את $O(x)$.

ב. מצא את $D(x)$.

רמז לשני הסעיפים הראשונים:

שנו את $P(x)$ בהתאם למגבלות המוטלות על החלוקות של k בכל סעיף.

ג. הוכח כי $O(x) = D(x)$.

רמז: הכפל את המונה והמכנה של $D(x)$ בצמוד של כל גורם (צמוד של $(a-b)$ הוא $(a+b)$).

מכיון שהראינו שהפונקציות היוצרות של הסדרות $\{o_k\}$ ו־$\{d_k\}$ שוות, נובע שהסדרות עצמן שוות, כלומר שלכל k מתקיים $d_k = o_k$.

8. עבור משוואת הנסיגה: $F(n) = 5F(n-1) + 6F(n-2)$
עם תנאי ההתחלה: $F(0) = 42, F(1) = 210$

מצאו נוסחה סגורה עבור $F(n)$ לכל $0 \leq n$, באמצעות פונקציות יוצרות. ניתן להשתמש בפירוק:

$$\frac{1}{6x^2+5x-1} = \frac{6}{7(6x-1)} - \frac{1}{7(x+1)}$$

9. בעזרת פונקציות יוצרות מצא את מספר הפתרונות השלמים למשוואה:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

כאשר:

$$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6$$

$$2 \leq x_4 \leq 5$$

10. נתונה נוסחת נסיגה

$$d_n = 7d_{n-1} - 12d_{n-2}$$

עם תנאי התחלה

$$d_0 = 0,\ d_1 = 1$$

א. מצא ביטוי מפורש לפונקציה היוצרת של הסדרה.

ב. מצא ביטוי מפורש לאיבר הכללי d_n של הסדרה הזאת.

11. נתונה סדרה

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n - 2, \qquad a_1 = 3, \quad a_0 = 2$$

א. מצא פונקציה יוצרת של הסדרה הזאת.

ב. בעזרת פונקציה יוצרת זו, מצא ביטוי מפורש ל a_n.

12. נתונה משוואת הנסיגה:

$$F(n) = F(n-1) + 2n$$

עם תנאי התחלה $F(0) = 5$.

א. מצא ביטוי מפורש לפונקציה היוצרת של הסדרה.

ב. מצא ביטוי מפורש לאיבר הכללי $F(n)$ של הסדרה הזאת.

13. פתור את משוואת הנסיגה $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 2$ באמצעות פונקציות יוצרות. תן פתרון מלא ומפורט.

7 מושגים בסיסיים בגרפים

1. השלם את הטבלה עבור השאלה: כמה גרפים עם n צמתים שונים ו m קשתות קיימים?

	מכוון	מכוון ופשוט	לא מכוון	לא מכוון ופשוט
קשתות שונות				
קשתות זהות				

2. בכמה גרפים מכוונים ופשוטים עם n צמתים שונים אין קשתות אנטימקבילות?

3. א. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם n צמתים שונים?

ב. מה מספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, עם n צמתים שונים בהם אין צמתים מבודדים?
רמז: כלל הכלה והפרדה.

ג. הוכח כי מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים עם n צמתים שונים, בהם אין צמתים מבודדים שווה למספר הגרפים הפשוטים, שאינם מכוונים, בהם אין צמתים שדרגתם $n-1$. תן הוכחה באמצעות התאמה חד־חד ערכית.

4. א. יהי G גרף מכוון (לאו דווקא פשוט), ויהי C מעגל ב־G. הוכיחי שקיים ב־G מעגל <u>פשוט</u> C' שכל קשתותיו שייכות ל־C.

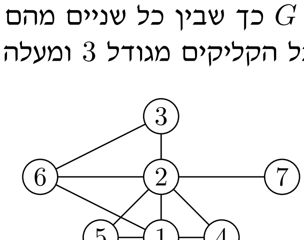
ב. האם הטענה נכונה גם עבור גרפים לא־מכוונים?

5. יהי $G(V,E)$ גרף פשוט <u>מכוון</u> שכל קשת שלו צבועה בצבע כחול או צהוב. מעגל מונוכרומטי בגרף G הינו מעגל <u>פשוט</u> שכל קשתותיו צבועות באותו הצבע. נתון כי ב־G יש מעגל מונוכרומטי אחד <u>בדיוק</u>.
<u>הוכח</u> כי קיימת לפחות קשת אחת ב־G אשר שינוי צבעה ישאיר את הגרף ללא מעגלים מונוכרומטיים. האם הטענה נכונה גם עבור גרף לא־מכוון?

6. יהיה $f(n)$ מספר הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים, בעלי n צמתים הממוספרים $1,2,\ldots,n$, בהם דרגת כל צומת היא 2. תן משוואת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים ולא מיותרים ל־$f(n)$. נמק את תשובתך!

7. מהו מספר הגרפים הלא־מכוונים (ולא בהכרח פשוטים) בעלי n צמתים שונים ו־k קשתות (זהות) וללא חוגים עצמיים, כך שלכל קשת בגרף יש קשת מקבילה (לפחות אחת)?
<u>הערת הבנת־הנקרא</u>: שימו לב שכל ההבהרות שבסוגריים הן למעשה מיותרות, כלומר גם אם הן היו מושמטות הייתם אמורים להבין את השאלה בדיוק באותו האופן.

8. <u>קליק</u> בגרף G הוא תת־קבוצה של צמתי G כך שבין כל שניים מהם יש קשת. ה<u>גודל</u> של הקליק הוא מספר הצמתים בתת הקבוצה הנ"ל. מצא את כל הקליקים מגודל 3 ומעלה בגרף הבא:



9. יהי G גרף <u>מלא</u> עם 10 צמתים, אשר כל קשת בו צבועה בכחול או בצהוב. הוכח כי ב־G יש קליק כחול בגודל 3 או קליק צהוב בגודל 4.
<u>רמז</u>: הוכחתם באחת ההרצאות (בנושא עיקרון שובך־היונים) שבגרף כנ"ל עם 6 צמתים יש משולש(=קליק בגודל 3) מונוכרומטי. השתמשו בזאת!

$\star$ 10. יהי G גרף פשוט לא מכוון עם n צמתים ו־m קשתות.

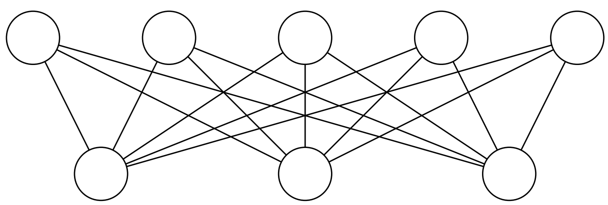
א. הוכיחי כי אם $m > \frac{n^2}{4}$ אז בגרף G יש משולש (קליק בגודל 3).

ב. הוכיחי כי זהו חסם הדוק, כלומר עבור n גדול ככל שנרצה קיים גרף עם n צמתים, $\frac{n^2}{4}$ קשתות וללא משולש.

רמז ל־א': הניחי (בעזרת אינדוקציה) שהטענה נכונה לכל גרף G' עם פחות מ־ n צמתים, והסתכלי על שני צמתים שכנים כלשהם.

הגדרה : מסלול (מעגל) המילטוני הוא מסלול (מעגל) פשוט שבו מופיעים כל צמתי הגרף.

11. נתון הגרף הבא:



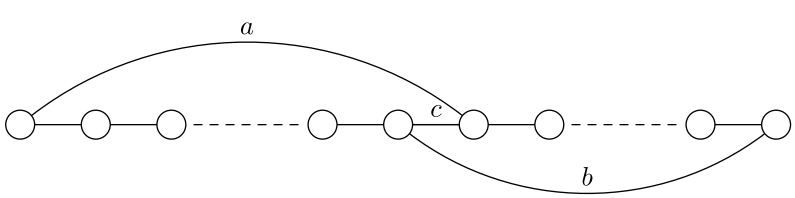
א. כמה מעגלים פשוטים באורך 3 יש בגרף? וכמה באורך 4?

ב. הוכיחו שבגרף הנ"ל אין מעגל המילטוני.

$\star$ 12. יהי G גרף סופי מכוון שבו כל זוג צמתים מחוברים ע"י קשת אחת בדיוק באחד משני הכיוונים האפשריים.
הוכיחו כי קיים ב־ G מסלול המילטוני.
רמז ־ הוכיחו באינדוקציה על מספר הצמתים.

13. נתון $G(V,E)$ גרף סופי, פשוט ובלתי מכוון.

א. להלן שיטה למצוא מעגל המילטוני ב־G.
תחילה בונים מסלול פשוט, כאשר לא ניתן להאריך את המסלול יותר משני קצותיו, מנסים לסגור את המסלול למעגל פשוט ע"י שימוש בקשת שמחברת את שני קצוות המסלול (אם היא קיימת), או ע"י חילוף, כמתואר בציור א', כאשר קשתות a ו־b נוספות למסלול ואילו c מוצאת ממנו. לאחר שנוצר מעגל מחפשים קשת מאחת מצמתי המעגל לצומת שאינו במעגל ופותחים את המעגל בעזרת קשת זאת למסלול ארוך חדש.



ב. הוכיחו כי אם לכל זוג צמתים v ו־u מתקיים $d(u)+d(v) \geq n$ כאשר $n = \mid V \mid$ אזי נצליח למצוא מעגל המילטוני בגרף.

ג. הסיקו את משפט דירק: אם לכל צומת v מתקיים $d(v) \geq \frac{n}{2}$ אזי G הוא גרף המילטוני.

14. בשאלה זו כל הגרפים הם פשוטים וסופיים מעל n צמתים שונים. בכל סעיף עליך לנמק האם הטענה נכונה או לא:

א. מספר הקשתות בגרף מכוון הוא לכל היותר $\binom{n}{2}$.

ב. אם יש בגרף לא מכוון מעגל אוילר אז יש בו מעגל המילטון.

ג. אם גרף התשתית של גרף מכוון אינו קשיר אזי גם הגרף המכוון עצמו אינו קשיר.

ד. אם הגרף הוא עץ אזי הוא קשיר והסרת כל צומת מהגרף (יחד עם הקשתות הנוגעות בו) הופכת אותו לבלתי קשיר.

ה. אם גרף הוא קשיר אז יש בו רכיב קשירות אחד.

15. בשאלה הבאה מותר להשתמש בסעיף הראשון בפתרון הסעיף השני:

א. יהי גרף מלא בעל 6 צמתים. הוכיח כי אם צובעים את הקשתות של הגרף **<u>בשני</u>** צבעים שונים אזי יש משולש שכל הקשתות שלו צבועות באותו צבע.

ב. יהי גרף מלא בעל 17 צמתים. הוכיח כי אם צובעים את הקשתות של הגרף **<u>בשלושה</u>** צבעים שונים אזי יש משולש שכל הקשתות שלו צבועות באותו צבע.

8 מסלולי אוילר

1. נתון גרף בלתי מכוון וסופי שדרגת כל צומת בו היא זוגית. הוכח שניתן לכוון את כל הקשתות כך שבכל צומת דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה.

2. יהיה $G(V,E)$ גרף סופי שבו לכל היותר שני צמתים מדרגה אי־זוגית. הוכח שבכל רכיב קשיר יש מעגל או מסלול אוילרי.

3. נתון גרף לא מכוון עם $2n$ צמתים הממוספרים $1,2,\ldots,2n$, כאשר לכל i דרגת צומת i היא $2i+1$.

   א. מה מינימום הקשתות שיש להוסיף לגרף כדי לקבל גרף אוילרי מעגלי?

   ב. למה אי אפשר בפחות קשתות?

   ג. למה אפשר במספר קשתות שרשמת?

4. מהו המספר המינימלי של מסלולים זרים בקשתות הדרוש לכסות קליק בעל n צמתים, כאשר כל קשת של גרף מופיעה פעם אחת באחד המסלולים? (קליק הינו גרף שבו כל זוג של צמתים קשור ביניהם בקשת).

5. יהא $G(V,E)$ גרף קשיר סופי לא מכוון. הוכח שניתן לכסות את קשתות הגרף ע"י לא יותר מ $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ מסלולים זרים בקשתות.

6. $\star$ סריקה מצומת v הינה טיול בגרף המתחיל בצומת v. במהלך הטיול אין בוחרים קשת יותר מפעם אחת. בכל צעד נבחרת קשת באופן שרירותי מבין הקשתות הנוגעות בצומת הנוכחי, ועדיין לא נבחרו. הסריקה מסתיימת כאשר מגיעים לצומת שכל הקשתות הנוגעות בו נבחרו כבר.
   גרף קשיר ולא מכוון נקרא גרף תערוכה מצומת v אם **כל** סריקה מצומת v יוצרת מעגל אוילרי.

   א. הוכח שגרף נתון G הינו גרף תערוכה מצומת v אמ"מ הוא גרף אוילרי מעגלי ו־v נמצא על כל מעגל פשוט של G.

   ב. יהי F גרף ללא מעגלים וללא צמתים מבודדים. הוכח שאם מוסיפים ל־F צומת v ולכל צומת u ב־F שדרגתו אי־זוגית מוסיפים קשת (u,v), אזי הגרף המתקבל הינו גרף תערוכה מצומת v.

   ג. הוכח או הפרך: גרף בן שלושה צמתים או יותר הינו גרף תערוכה מכל אחד מצמתיו אמ"מ הוא מעגל פשוט.

7. יהא $G(V,E)$ גרף סופי לא מכוון וקשיר. הוכח כי הטענות הבאות שקולות:

   א. G אוילרי מעגלי.

   ב. קיימת קבוצה של מעגלים (לאו דווקא פשוטים), כך שכל קשת ב־ G שייכת בדיוק למעגל אחד ומופיעה בו בדיוק פעם אחת.

   ג. לכל תת־קבוצה X של צמתי G, מספר הקשתות בין X ל $V-X$ הוא זוגי.

8. יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון שבו גרף התשתית קשיר ולכל צומת $v \in V$ מתקיים $d_{in}(v) = d_{out}(v)$. הוכח שכל צומת $v \in V$ הוא שורש של G.

9. הוכח: גרף לא מכוון וקשיר הוא אוילרי מעגלי אם"ם ניתן לחלק את קשתותיו לקבוצות זרות כך שכל קבוצה תהווה מעגל פשוט לא מכוון.

10. הוכיחו שאם גרף סופי קשיר ובלתי מכוון מקיים שבדיוק ל־2K מצמתותיו יש דרגה אי זוגית, עבור $K \geq 1$, אזי ניתן למצוא חלוקה של קשתותיו ל־K מסלולים זרים בקשתות, באופן שכל קשת שייכת למסלול אחד בדיוק.

11. נתון גרף $G(V,E)$ לא מכוון, חסר קשתות מקביליות וחוגים עצמיים. נגדיר גרף $L(G)$ כדלקמן:

- כל צומת ב־$L(G)$ ייצג קשת של G.
- שני צמתים של $L(G)$ יחוברו בקשת אס"ם לקשתות המתאימות בגרף G יש צומת משותף.

א. הוכח כי אם G אוילרי מעגלי אז $L(G)$ אוילרי מעגלי והמילטוני. האם ההיפך נכון? הסבר.

ב. בטא את מספר הקשתות ב־$L(G)$ כפונקציה של דרגות הצמתים של G.

12. הגדרה: מעגל C הוא "מעגל אוילרי $k+$" בגרף לא מכוון $G(V,E)$ אם הוא מכיל כל קשת של $G(V,E)$ פעם אחת או פעמיים, ומספר הקשתות שהוא מכיל פעמיים לא גדול מ־k.
נתון גרף לא מכוון וקשיר $G(V,E)$ ושני צמתים s ו־t בו. לכל צומת $v \in V \setminus \{s,t\}$, בגרף דרגה $d(v)$ זוגית. ל־s,t דרגות $d(s), d(t)$ אי־זוגיות. יהי $l(s,t)$ אורך של מסלול קצר ביותר בין s ו־t (במספר קשתות).

א. הוכח שאם $l(s,t) \leq k$, אזי קיים ב־$G(V,E)$ "מעגל אוילרי $k+$".

ב. יהי C "מעגל אוילרי $k+$" ב־$G(V,E)$. הוכח: לכל צמת $v \in V \setminus \{s,t\}$, מספר הקשתות הנוגעות ב־$v$ ומוכלות ב־C פעמיים הוא זוגי, ולכל צמת $v \in \{s,t\}$ מספר הקשתות הנוגעות ב־v ומוכלות ב־C פעמיים הוא אי זוגי.

$\star$ ג. הוכח שאם $l(s,t) > k$, אזי לא קיים ב־$G(V,E)$ "מעגל אוילרי $k+$".

13. גרף פשוט לא־מכוון G יקרא "מעגל עם מיתר" אם קיימת בדיוק קשת אחת שהסרתה מ־G תיצור גרף G' שהוא מעגל פשוט (שכולל את כל הצמתים).

א. מה מספר המעגלים עם מיתר השונים עם n צמתים שונים?

ב. הוכח: גרף פשוט לא־מכוון G הוא מעגל עם מיתר אס"ם G הוא גרף קשיר בו קיימים 2 צמתים u,v בעלי דרגה 3, דרגת שאר הצמתים היא 2, קיימת הקשת $u-v$, והורדת קשת מהגרף אינה פוגעת בקשירות.

14. א. יהי G גרף שהוא מעגל פשוט לא־מכוון בן n צמתים שונים ($n > 10$). בכמה אופנים ניתן להוסיף 3 קשתות ל־G כך שישאר גרף פשוט ובנוסף יהיה בו מעגל אוילרי?

ב. יהי G גרף שהוא מעגל פשוט מכוון בן n צמתים שונים ($n > 10$). בכמה אופנים ניתן להוסיף קשתות ל־G כך שלכל צומת v ב־G יתקיים $d_{in}(v) = d_{out}(v) = 2$ וכן לא יהיו חוגים עצמיים?

15. יהי $G(V,E)$ גרף מכוון בעל m קשתות שגרף התשתית שלו קשיר. לכל קשת e_i, $1 \leq i \leq m$, מצמידים מספר שלם חיובי N_i. כמו־כן מתקיים לכל צומת $v \in V$:

$$\sum_{e_j = x \to v} N_j = \sum_{e_i = v \to y} N_i$$

תהי $e_1 = u \to w$ ונניח $N_1 = 1$. הוכיחו כי קיים מסלול מכוון מ־ w ל־ u בו לכל $1 \leq i \leq m$, הקשת e_i מופיעה N_i פעמים.

16. גרף אויילרי מעגלי חבל על הזמן:

א. גרף אויילרי מעגלי חבל־על־הזמן (חבל"ז) הוא גרף $G = (V,E)$ לא מכוון אויילרי מעגלי כך שלכל צומת $v \in V$, $d(v) < 4$. כמה גרפים אויילריים מעגליים חבל"זים יש בעלי $n > 2$ צמתים שונים.

ב. הגרף $\overline{G} = \left(V, \overline{E}\right)$ יקרא משלים חבל"ז אם קיים גרף $G = (V,E)$ אויילרי מעגלי חבל"ז ומתקיים התנאי הבא: לכל זוג צמתים x ו־y, יש קשת יחידה $x - y = e \in \overline{E}$ אם ורק אם אין קשת בין x ו־y ב־E.

הוכיחו כי אם $n \geq 5$ הוא אי זוג, אזי כל גרף משלים חבל"ז בעל n צמתים הוא אויילרי מעגלי.

17. גרף אי זוגי:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ולא מכוון. ידוע כי לכל צומת ב־G דרגה אי זוגית. הוכיחו את אחת מהטענות הבאות:

i. $|V|$ הוא תמיד זוגי.

ii. $|V|$ הוא תמיד אי זוגי.

iii. $|V|$ יכול להיות זוגי או אי זוגי.

<u>הגדרה:</u>

גרף פשוט ולא מכוון $G=(V,E)$ יקרא גרף **<u>אי זוגי</u>** אם לכל זוג צמתים u ו־v שונים בגרף מספר השכנים המשותפים ל־ u ו־v הוא אי זוגי.

ב. תנו דוגמא לגרף אי־זוגי בעל 5 צמתים בדיוק.

ג. יהי $G=(V,E)$ גרף אי זוגי. הוכיח כי G הוא אוילרי מעגלי.

<u>הדרכה:</u>

עבור צומת כלשהו x ב־G יהי $G_x=(V_x,E_x)$ תת הגרף המושרה ע"י קבוצת הצמתים השכנים של x (שימו לב כי x איננו ב־G). הוכיחו כי "$|V_x|$ הוא זוגי".

הערות:

i. ניתן לראות את ההגדרה של גרף מושרה ע"י קבוצת צמתים בדף ההגדרות שפורסם באתר.

ii. ניתן להשתמש בטענה המצוטטת בהדרכה ללא הוכחתה, אולם ניקוד מלא יינתן רק עבור הוכחה מלאה של הסעיף.

18. נתון לוח שחמט בגודל $n\times n$ משבצות. על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד יכול הצריח לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן (כלומר לעבור למשבצת אחרת באותה שורה) או במאונך (לעבור למשבצת אחרת באותה עמודה). רוצים לתכנן סדרת מהלכים של הצריח על הלוח באופן הבא:

א. הצריח יתחיל ויסיים באותה משבצת.

ב. לכל זוג משבצות A,B שנמצאות באותה שורה או אותה עמודה, יהיה בדיוק צעד אחד במהלך שבו הצריח עובר מ־A ל־B או מ־B ל־A. כלומר, הצריח יבצע את כל הצעדים האפשריים עבורו בלוח באחד מהכיוונים שלהם.

האם הדבר אפשרי? הוכיחו!

רמז: חישבו על מידול הבעייה בעזרת גרף.

9 גרף דה־ברוין

1. מצא סדרת דה־ברוין עבור $\sigma = 3$, $n = 3$. השתמש בא"ב $\{0, 1, 2\}$.

2. נגדיר גרף מכוון $K_{\sigma,n}(V, E)$, עבור א"ב $\Sigma = \{0, 1, \ldots, \sigma - 1\}$ ואורך מילה n, בצורה הבאה:
V הוא אוסף כל המילים מאורך $n - 1$ מעל Σ, כך שאין במילה שתי אותיות סמוכות זהות.
(לדוגמה, אם $\sigma = 3$ ו־$n = 4$,
$V = \{010, 012, 020, 021, 101, 102, 120, 121, 201, 202, 210, 212\}$)
E הוא אוסף כל המילים מאורך n מעל Σ, כך שאין במילה שתי אותיות סמוכות זהות.
כאשר הקשת $a_1 a_2 \ldots a_n$ יוצאת מצומת $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ ונכנסת לצומת $a_2 a_3 \ldots a_n$.

   א. מהו מספר הצמתים ב־$K_{\sigma,n}$?

   ב. הוכח ש־$K_{\sigma,n}$ קשיר היטב.

   ג. הוכח ש־$K_{\sigma,n}$ הוא גרף אוילרי מעגלי.

3. מהו המספר המינימלי של צמתים שיש להוציא כדי שהגרף דה־ברוין $G_{2,n}$ יאבד את קשירותו? הוכח.

4. מהו אורך המסלול הקצר ביותר מצומת 2117339 לצומת 3392117 בגרף דה־ברוין $G_{10,8}$? נמק.

5. יהי G גרף דה־ברוין $G_{2,7}$. נוציא מ־G שני צמתים (000000) ו־(100000) עם הקשתות שפוגעות בצמתים אלו. יהי G' הגרף שמתקבל.
<u>הוכח או הפרך:</u>

   א. ב־G' קיים מסלול אוילרי.

   ב. בגרף התשתית של G' קיים מסלול אוילרי.

6. נתון גרף דה־ברוין $G_{\sigma,n}$.

   א. תן חסם עליון למרחק בין שני צמתים בגרף.

   ב. לכמה צמתים שונים ניתן להגיע מצומת v נתון באמצעות מסלולים באורך k $(0 \le k \le n)$? (שים לב: הכוונה לצמתים שמגיעים אליהם בתום k צעדים, ולא לצמתים שעוברים דרכם תוך כדי הליכה על המסלול).

   ג. כמה מסלולים קצרים ביותר יש בין שני צמתים נתונים בגרף?

   ד. מה אורך המסלול הארוך ביותר, בין שני צמתים נתונים בגרף, שאינו משתמש באף קשת פעמיים?

   ה. מה אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר בין שני צמתים נתונים בגרף?

7. נתון גרף דה־ברוין $G_{2,n}$. הוכח שעבור כל $1 \le k \le n - 1$ קיים בגרף מעגל מכוון פשוט באורך k.
(הערה: שימו לב שב־$G_{2,n}$ יש 2^{n-1} צמתים ו־2^n קשתות).

8. א. הוכח כי בין כל שני צמתים בגרף דה־ברוין $G_{2,n}$ קיים מסלול אחד בדיוק באורך $n - 1$.

   $\star$ ב. הוכח כי ניתן למצוא ב־$G_{\sigma,n}$ קבוצת מעגלים פשוטים כך ש:

   - אורך כל מעגל מחלק את $n - 1$.
   - כל צומת נמצא על מעגל אחד בדיוק.

   ג. השתמש בתוצאה של סעיף ב' והראה שעבור כל מספר ראשוני p מתקיים ש־p מחלק את $2^p - 2$.

10 עצים

1. <u>הגדרה:</u> טורניר הוא גרף מכוון שגרף התשתית שלו הוא קליק.
<u>הוכח:</u> לכל טורניר יש שורש.

2. <u>טורניר</u> הוא גרף מכוון סופי $G(V,E)$, באופן שעבור כל שני צמתים a ו b, E מכילה בדיוק את אחת הקשתות $a \to b$ או $b \to a$.

<u>המרחק</u> $d(a,b)$ מצומת a לצומת b הוא אורך המסלול הקצר ביותר מ a ל b (אורך המסלול הוא מספר הקשתות בו).

<u>מלך</u> בגרף מכוון הוא צומת a המקיים $d(a,v) \le 2$ לכל $v \in V$.

א. הוכח שבכל טורניר יש מלך.

ב. תן דוגמא לטורניר שיש בו בדיוק ארבעה מלכים, ולטורניר שיש בו בדיוק שלושה מלכים.

⋆ ג. הוכח שעבור כל $k \ge 4$ קיים טורניר שיש בו בדיוק k מלכים.

3. א. כמה עצים ייווצרו עקב הוצאת m קשתות מעץ עם n צמתים?

ב. מה מספר היערות עם שני עצים בדיוק ו n צמתים שונים?

4. נתון עץ מכוון T עם שורש r, ויהי $s \neq r$ צומת אחר בעץ. כיוונן של אילו קשתות ב־T יש <u>להפוך</u> כדי לקבל עץ מכוון T' עם שורש s? הוכיחו!

5. הראה שבהנתן n מספרים שלמים חיוביים $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$ המקיימים:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2n-2$$

קיים עץ לא מכוון שצמתיו הם: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ והמספרים $d(v_i)$ הם הדרגות של הצמתים בעץ.

6. כמה עצים פורשים ניתן לבנות על הצמתים $\{1,2,\ldots,30\}$ עבורם הצמתים $\{1,2,...,16\}$ הם עלים והצמתים $\{17,18,\ldots,30\}$ הם בעלי דרגה 3? הסבר.

7. כמה עצים פורשים יש לצמתים $\{1,2,\ldots,30\}$, עבורם הצמתים $\{1,2,\ldots,10\}$ הם עלים והצמתים $\{11,12,\ldots,20\}$ הם בעלי דרגה 2? הסבר את שלבי הפתרון.

8. כמה גרפים לא מכוונים בעלי 15 צמתים שונים קיימים, כך ששבעה צמתים הם בעלי דרגה 7 ושמונה צמתים הם בעלי דרגה 8?

9. נתון עץ מכוון עם שורש r. דרגת היציאה של כל הצמתים הפנימיים מלבד r היא 11. מספר העלים בגרף הוא 1984. נתון שדרגת היציאה של השורש קטנה מ־11. מהי הדרגה?

10. כמה עלים יש בעץ המתאים למילה 3385855 לפי הוכחת פרופר?

11. נתבונן בעצים לא מכוונים המוגדרים על הצמתים $V = \{1,2,\ldots,n\}$.

א. בכמה מהעצים הנ"ל הצומת 1 הוא עלה?

ב. בכמה מהעצים הנ"ל הצמתים $1,2,\ldots,k$ $(k<n)$ הם עלים? (שים לב: יתכן שחלק מיתר הצמתים גם הם עלים).

12. א. מה מספר העצים המכוונים הפורשים על הצמתים $1,2,\ldots,n$? נמק.

ב. בכמה עצים מתוכם מתקיים $d_{in}(1) = d_{out}(1)$?

13. כמה עצים פורשים יש על הצמתים $\{1,2,\ldots,100\}$, כך שהצמתים $\{1,2,\ldots,50\}$ הם בעלי דרגה 2?

14. נתונים n צמתים $v_1, v_2, \ldots, v_n$. בכמה אופנים ניתן לבנות עץ על הצמתים האלה, לאו דווקא פורש, כך שיהיו בו בדיוק m קשתות?

15. כמה עצים (לא מכוונים) פורשים n צמתים שונים כך שלאף צומת אין דרגה ששווה ל־2?

16. הוכח שבכל גרף קשיר $G(V,E)$ אפשר למצוא $|E|-|V|+1$ מעגלים פשוטים שבכל אחד מהם יש קשת אחת שאינה מופיעה באף מעגל אחר.

17. תן פתרון רקורסיבי ל־$f(n)$: מספר יערות לא מכוונים לא מסודרים עם n צמתים שונים.
רמז: סמן ב־k את מספר הצמתים בעץ המכיל את הצומת הראשון.

18. סילוק של קשת e מעץ $T(V,E)$ מפריד את העץ לשני רכיבים קשורים בעלי r_e ו־l_e צמתים. יהיה

$$q_e = |l_e - r_e|$$

קשת e_0 היא <u>מרכזית</u> אם $q_{e_0} = \min_{e\in E}\{q_e\}$. הוכח או הפרך:

א. בכל עץ סופי יש לכל היותר שתי קשתות מרכזיות.
ב. בכל עץ סופי כל הקשתות המרכזיות נפגשות בצומת יחיד.

$\star$ 19. יהי $T=(V,E)$ עץ. נגדיר את $d(u,v)$ להיות אורך המסלול הפשוט (היחיד) בין u ל־v בעץ.
חציון בעץ T הוא צומת v שעבורו $\sum_{u\in V} d(v,u)$ מינימלי.

א. הוכיחו כי בכל עץ סופי יש חציון אחד או שניים (ולא יותר), ואם יש שניים ־ אז הם שכנים.
ב. הוכיחו כי v הוא חציון בעץ אם"ם מחיקתו מהעץ (יחד עם כל הקשתות שמחוברות אליו) מפרקת את העץ לרכיבי קשירות שבכל אחד מהם יש לכל היותר $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ צמתים.

$\star$ 20. מרכז בעץ $T=(V,E)$ הוא צומת v שעבורו $e(v)=\max_{u\in V} d(v,u)$ מינימלי.

א. הוכיחו כי בכל עץ סופי יש מרכז אחד או שניים (ולא יותר), ואם יש שניים ־ אז הם שכנים.
ב. יהי T עץ, ו־v מרכז שלו. נסמן:

$$\begin{aligned} e &= e(v) \\ d &= \max_{x,y\in V} d(x,y) \end{aligned}$$

אומרים ש־d הוא <u>הקוטר</u> של הגרף.

הוכח:
- $d \le 2e$
- ב־T יש מרכז יחיד אמ"ם $d = 2e$

אפשר להוכיח באינדוקציה או בכל דרך אחרת.

21. גרף סופי לא מכוון $G(V,E)$ ייקרא <u>דו־עץ</u> אם קיימת חלוקה של V לשתי קבוצות לא ריקות V_1 ו־V_2 כך ש:

- אין קשתות בין V_1 ו־V_2.
- תתי הגרפים המושרים ע"י V_1 ו־V_2 הם עצים.

הוכח כי הטענות הבאות הן שקולות:

א. G הוא דו־עץ

ב. קיימים צמתים x ו־y כך שהוספת קשת ביניהם תהפוך את G לעץ.

ג. G חסר מעגלים, כל הוספה של 2 קשתות ל־G תקלקל זאת וניתן להוסיף קשת אחת ל G מבלי ליצור מעגל.

ד. G חסר מעגלים ומתקיים $|E| = |V| - 2$.

22. גרף לא מכוון ייקרא <u>יער</u> אם הוא חסר מעגלים. גרף לא מכוון ייקרא <u>דו־צדדי</u> אם קיימת חלוקת צמתיו לשתי קבוצות כך שכל קשת בגרף מחברת צומת מקבוצה אחת לצומת בקבוצה השניה.
יהיה $G(V, E)$ גרף לא מכוון וסופי. הוכח כי הטענות הבאות שקולות:

א. G הוא יער.

ב. לכל תת־קבוצה U של קבוצת הצמתים V, בגרף המושרה ע"י U יש צומת שדרגתו קטנה מ־2.

ג. G הוא גרף דו־צדדי חסר מעגלים.

23. גרף סופי בלתי מכוון נקרא חד־מעגלי אם הוא קשיר ויש בו בדיוק מעגל אחד. הוכח: אם G גרף סופי לא מכוון בעל n צמתים אז שלושת התנאים הבאים הם שקולים:

א. G חד־מעגלי.

ב. G קשיר ומספר קשתותיו הוא n.

ג. קיימת קשת ב G שסילוקה הופך את G לעץ.

24. <u>הגדרה:</u> גרף לא מכוון נקרא דו־מעגלי אם קיימות בו שתי קשתות שמחיקתן תהפוך את הגרף לעץ.

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. הוכח כי הטענות הבאות שקולות:

א. G דו־מעגלי.

ב. G קשיר ו $|E| = |V| + 1$.

ג. מחיקה של כל קבוצה שהיא של שלוש קשתות ב G יוצרת גרף לא קשיר, וקיימות שתי קשתות שמחיקתן משאירה את G קשיר.

25. יהיו T_1 ו־T_2 שני עצים פורשים של גרף לא מכוון G. הוכח כי לכל קשת $e_1 \in (T_1 - T_2)$ קיימת קשת $e_2 \in (T_2 - T_1)$ כך שמתקיימת התכונה הבאה:
T_1' וגם T_2' המוגדרים כך:

$$T_1' = (T_1 - \{e_1\}) \cup \{e_2\}$$
$$T_2' = (T_2 - \{e_2\}) \cup \{e_1\}$$

הם עצים פורשים של G.

26. יהא k מספר טבעי. גרף יקרא k־צביע אם אפשר לצבוע את צמתיו ב k צבעים, כך שעבור כל זוג צמתים x ו y המחוברים בקשת, x ו y נצבעו בצבעים שונים.

א. מהו ה k המינימלי כך שכל עץ T הוא k־צביע? הוכח (רמז: אינדוקציה).

ב. יהא G מעגל פשוט בן n צמתים $(n > 1)$. נסח והוכח תנאי הכרחי ומספיק לכך ש G הוא 2־צביע.

ג. עבור גרף $G = (V, E)$, נסמן ב Δ_G את הדרגה המקסימלית של צומת ב G: $\Delta_G = max_{v \in V} d(v)$. הוכח שכל גרף הוא $\Delta_G + 1$ צביע. (רמז: אינדוקציה).

27. ביער (גרף חסר מעגלים) יש 100 רכיבים קשירים ו־200 צמתים. כמה קשתות יש ביער?

28. כמה יערות לא מסודרים עם 2 עצים מכוונים וסה"כ n צמתים הממוספרים $1, 2, \ldots, n$ קיימים?

29. יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $k+1$ מספרים שונים מתוך $\{1,2,\ldots,n\}$, (עבור $1 \le k \le n-2$). מהו מספר העצים הפורשים מעל הצמתים $\{1,2,\ldots,n\}$ בהם קיים המסלול $a_0 \frac{e_1}{} a_1 \frac{e_2}{} \ldots \frac{e_k}{} a_k$? הוכח.
הדרכה: הנח ש־$a_0 = n-1, a_k = n$ ותן איפיון לסדרות המותאמות בהוכחת משפט קיילי לעצים המכילים מסלול כנ"ל.

30. א. מהו מספר העצים המכוונים עם n צמתים שונים, אם לכל צומת v בעץ מתקיים

$$d_{in}(v) + d_{out}(v) \le 2 \quad ?$$

ב. מה מספר העצים הלא מכוונים על n צמתים שונים הממוספרים $1,2,\ldots,n$ עם $k > 2$ עלים בדיוק וצומת אחד בלבד שדרגתו גדולה מ־2?

ג. מה מספר העצים הלא מכוונים על $2n$ צמתים שונים בהם דרגות כל הצמתים קטנות מ־$n+1$?

ד. מה מספר העצים הלא מכוונים על n צמתים שונים הממוספרים $1,2,\ldots,n$ בהם העלי?? הם הצמתים $1,2,\ldots,k$ בלבד?

31. מהו מספר העצים שניתן לבנות על n צמתים ממוספרים עם קשתות לא מסומנות, כך שדרגה של צומת מסוים (למשל צומת מספר i) תהיה שווה ל־k.

32. מה מספר העצים שניתן לבנות על n צמתים ממוספרים ע?? $m = n-1$ קשתות שונות? הוכח שמספר העצים שניתן לבנות עם m קשתות שונות (ללא סימונים בצמתים) הוא $(m+1)^{m-2}$.

33. מהו מספר העצים הפורשים שניתן לבנות על הצמתים $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ אם נתון שדרגות הצמתים הן לפי הטבלה הבאה:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(v_i)$	1	2	1	4	1	3	1	1	1	3

34. הוכח כי מספר העצים הפורשים של גרף דה־ברוין $G_{2,n}$, $n \ge 2$, עם שורש בצומת $00\ldots0$ שווה למספר סדרות דה־ברוין בינאריות המתאימות ל־n הזה.

רמז: הסתכל בעץ עם כיווני הקשתות ההפוכים.

35. הראה שאם מותר לסובב ו/או להפוך מרצפות, אזי בעית הריצוף הופכת לטריוויאלית.

36. נתבונן בבעיה של ריצוף המישור, כאשר נתון מספר סופי של סוגי מרצפות, כמות בלתי מוגבלת מכל סוג, ולכל מרצפת יש כיוון. אם נתון שאפשר לרצף כל תחום סופי אז: (בחר את כל התשובות הנכונות)

א. ניתן לרצף רק תחומים סופיים.

ב. לא ניתן לרצף את כל המישור.

ג. ניתן לרצף את כל המישור.

ד. ניתן לרצף חצי מישור.

ה. ניתן לרצף רבע מישור.

ו. אין מספיק נתונים לקבוע.

37. הוכח: אם הגרף G הוא קשיר, בלתי מכוון ואינסופי, אשר לכל צמתיו דרגה סופית, אז כל צומת בגרף יכול להיות צומת התחלה למסלול פשוט אינסופי כלשהו בגרף.

38. <u>הגדרה:</u> גרף משלים של גרף פשוט, לא מכוון וסופי $G(V,E)$ הינו גרף פשוט ולא מכוון $G'(V,E')$, כך ש: $E'=\{(a-b):(a-b)\notin E\}$. במילים אחרות G' מורכב מאותם צמתים כמו G ומכל הקשתות שאינן מופיעות ב־G.
הוכח שמשלים של עץ הינו קשיר או מורכב מצומת בודד וקליק (גרף שיש בו קשת בין כל זוג צמתים שונים).

39. יהי $G=(V,E)$ גרף לא־מכוון חסר־מעגלים, ויהיו $G_i=(V_i,E_i)$ $(i=1,2,3)$ שלושה עצים שכל אחד מהם הוא תת־גרף של G. (כלומר לכל $i=1,2,3$: $V_i\subseteq V$, $E_i\subseteq E$ ו־G_i עץ).
בנוסף נתון שלכל שני עצים יש לפחות צומת משותף אחד. (כלומר: לכל $i\neq j$ מתקיים $V_i\cap V_j\neq\emptyset$).

א. הוכיחו כי $G'=\{V_1\cup V_2\cup V_3,E_1\cup E_2\cup E_3\}$ הוא עץ.

ב. הוכיחו כי יש צומת שמשותף לכל העצים ($V_1\cap V_2\cap V_3\neq\emptyset$).

40. יהי $G=(V,E)$ גרף סופי מכוון. הוכח: G הוא עץ מכוון אם ורק אם אין בו מעגלים מכוונים, קיים בו צומת יחיד r שעבורו $d_{in}(r)=0$, ולכל צומת אחר v בגרף $d_{in}(v)=1$. האם הטענה נכונה גם עבור גרף שאינו סופי?

⋆ 41. נתון גרף סופי פשוט ולא מכוון $G=(V,E)$ שבו דרגת כל צומת היא לפחות 3. תהי $F\subseteq V$ קבוצת צמתים כך שכל מעגל ב־G עובר דרך צומת (אחד לפחות) מ־F. תהי S קבוצת שאר צמתי הגרף. נסמן ב־x את מספר הקשתות בגרף המושרה ע"י S וב־z את מספר הקשתות ב־G.
הוכח: $2x<z$

42. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם בעץ סופי לא־מכוון קיים צומת שדרגתו d, אז קיימים בעץ לפחות d עלים.

ב. אם בעץ סופי (בעל 3 צמתים לפחות) לא־מכוון לכל צומת שאינו עלה יש דרגה גדולה מ־d, אז קיים בעץ לפחות צומת אחד שאליו מחוברים לפחות d עלים.

43. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהי P מסלול אוילר $P=v_0\to v_1\to\ldots\to v_l$. לכל צומת $v\in V, v\neq v_0$, תהי $e(v)$ הקשת הראשונה במסלול P הנכנסת ל־ v. נגדיר $E'=\{e(v)\,|\,v\in V\}$.
הוכיחו כי $G'=(V,E')$ הוא עץ מכוון עם שורש v_0.

44. <u>הגדרות:</u> <u>מרחק</u> בין שני צמתים הוא אורך המסלול הפשוט הקצר ביותר ביניהם. <u>קוטר</u> של גרף הוא המרחק הגדול ביותר בין שני צמתים בגרף.
כמה עצים לא־מכוונים יש על n צמתים שונים:

א. בקוטר 2 בדיוק

ב. בקוטר 3 בדיוק

ג. בקוטר 4 בדיוק (מותרת סכימה)

נמקו את תשובותיכם.

45. יהי G עץ סופי לא מכוון עם n צמתים שבו בדיוק k עלים. מהו סכום כל דרגות הצמתים שאינם עלים?

46. יהי $T=(V,E)$ עץ סופי ולא מכוון בעל $|V|=n$ צמתים. לכל $k\geq i\geq 1$ יהי $T_i=(V_i,E_i)$ תת עץ של T, דהיינו, $V_i\subseteq V$, $E_i\subseteq E$ ו־$|V_i|\geq 1$. נתון כי <u>לכל</u> i ו־j יש ל־T_i ו־T_j צומת משותף.

47. יהי K_{17} גרף פשוט לא מכוון ומלא בעל 17 צמתים. הוכיחו שאם צובעים את הקשתות בגרף ב־8 צבעים שונים אזי הגרף יכיל לפחות מעגל אחד מונוכרומטי (בעל צבע אחד) באורך כלשהו.

11 משפט קירכהוף

1. הוכח שמספר עצים מכוונים הפורשים n צמתים שונים הוא n^{n-1}:
   א. באמצעות שימוש במשפט קירכהוף.
   ב. באמצעות שימוש במשפט קיילי לעצים לא מכוונים.

2. הוכח את הזהות
$$2n^{n-3} = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-2}{m-1} m^{m-2}(n-m)^{n-m-2}$$
באופן הבא:
   א. הוכח בעזרת משפט קיילי שמספר העצים הפורשים הלא מכוונים שאפשר לבנות על הצמתים $1, 2, \ldots n$, בתנאי שהקשת $\{1, 2\}$ משתתפת, שווה לאגף ימין של הזהות.
   ב. הוכח, תוך שימוש במשפט קירכהוף, או בדרך אחרת, שמספר העצים הפורשים שבהם הקשת $\{1, 2\}$ לא משתתפת הוא $(n-2)n^{n-3}$, והשתמש במשפט קיילי כדי להוכיח שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. חשב את הדטרמיננט של המטריצה בעזרת משפט לספירת העצים:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. יהיה $G(V, E)$ גרף מכוון וסופי שצמתיו הם $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ וקשתותיו מכוונות רק מצמתים קטנים לגדולים. כלומר
$$(i, j) \in E \Rightarrow i < j$$
הוכח: אם הצומת הראשון "1" הוא שורש אז מספר העצים הפורשים של G הוא
$$\prod_{i=2}^{n} d_{in}(i)$$
   א. בעזרת משפט קירכהוף.
   ב. ללא עזרת משפט קירכהוף.

5. חשב את מספר העצים הפורשים עם שורש 000 בגרף דה־ברוין $G_{2,4}$.

6. חשב את מספר העצים הפורשים עם שורש 00 בגרף דה־ברוין $G_{3,3}$.

7. הראה כי מספר עצים פורשים מכוונים בגרף דה־ברוין $G_{\sigma,n}$, $\Delta_{\sigma,n}$, עם שורש נתון, מקיים
$$\Delta_{\sigma,n} = \Delta_{\sigma,n-1} \cdot \sigma^{\sigma^{n-1}-\sigma^{n-2}-1}.$$
רמז: בנה את $D_{\sigma,n}$, מטריצת דרגת כניסה של $G_{\sigma,n}$. מחק שורה ראשונה ועמודה ראשונה שלה. החסר σ^{n-2} שורות אחרונות מתוך $\sigma^{n-1} - \sigma^{n-2} - 1$ שורות ראשונות על־מנת לבטל כניסות השוות ל־-1. הוסף $\sigma^{n-1} - \sigma^{n-2} - 1$ עמודות ראשונות לשאר העמודות. בדטרמיננט שהתקבל הוסף את כל השורות לשורה ראשונה.

8. בעזרת התוצאה של השאלה הקודמת הראה כי

$$\Delta_{\sigma,n} = \sigma^{\sigma^{n-1}-n}.$$

⋆⋆ 9. הראה כי מספר סדרות דה־ברוין עבור σ ו־n נתונים הוא

$$\frac{(\sigma!)^{\sigma^{n-1}}}{\sigma^n}$$

12 צופני חד־פענח ומספרי קטלן

1. בנה יער מכוון, עץ בינארי מצבי ופרמוטציה דרך מחסנית שמתאימים לסדרת הסוגריים הבנויה היטב הבאה:

$$(()(()()))((()()()))$$

2. נתונה הסדרה

$$(()())()(())$$

א. מהו היער המסודר המתאים?

ב. מהו העץ המצבי הבינרי המתאים?

3. בנה את היער המסודר והעץ הבינארי המצבי המתאימים לסדרת הסוגריים הבאה:

$$((())())(()())$$

4. א. נתון צופן בינארי ה??א:

$$\{00, 01, 10, 1110, 1111\}$$

האם הצופן הוא פרפיקסי? מהו העץ המצבי המתאים לצופן זה? מהו הסכום האופייני?

ב. בנה צופן פרפיקסי מעל $\Sigma = \{0, 1\}$, אשר אורכי המילים בו הם $1, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 5$.

5. א. מהו ה σ הקטן ביותר עבורו יש קוד חד־פענח שאורכי מילותיו הם $1, 1, 2, 2, 3, 3$?

ב. כתוב קוד פרפיקסי עבור סדרת האורכים מהסעיף הקודם עם ה σ שמצאת.

6. צופן נקרא מלא אם כל מילה מעל הא"ב היא רישא של איזושהי הודעה שמורכבת ממילות הצופן. הוכח: אם צופן הוא פרפיקסי וסכומו האופייני הוא 1 אז הוא צופן מלא.

7. א. האם הקוד $C = \{1, 10, 1001, 01011, 0001, 0010\}$ הוא חד־פענח? אם כן, נמק. אם לא, הצג הודעה הניתנת לפענוח בשני אופנים.

ב. האם קיים קוד פרפיקסי מעל הא"ב הבינרי שסדרת אורכי מילותיו זהה לזו של C? אם כן, הצג קוד כזה. אם לא, נמק.

8. הוכח באינדוקציה כי עבור עץ מצבי מלא T מתקיים

$$\sum_{v \text{ עלה}} \sigma^{-l(v)} = 1$$

כאשר הסכום הוא על כל העלים v של העץ, ו־$l(v)$ מסמן מרחק משורש עד לעלה v.

9. א. הוכח שבעץ בינארי מלא מספר העלים גדול ב־1 ממספר הצמתים הפנימיים.

ב. הראה העתקה חח"ע ועל בין עצים בינאריים מצביים <u>מלאים</u> בני n צמתים לבין עצים בינאריים מצביים עם $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ צמתים.

ג. כמה עצים בינאריים מצביים <u>מלאים</u> בני n צמתים קיימים?

10. כמה סדרות סוגריים חוקיות קיימות עם n פותחים ו־n סוגרים המתחילות בשני פותחים: "(("?

11. א. נתונים שלושה סוגים של פותחים־סוגרים:

$$"[","]","(",")","\{","\}"$$

כמה ביטוי סוגרים שונים עם r פותחים ו־r סוגרים מסוג ראשון, l פותחים ו־l סוגרים מסוג שני, n פותחים ו־n סוגרים מסוג שלישי (בהם בכל רישא מספר סוגרים מכל סוג אינו עולה על מספר פותחים מאותו סוג) קיימים?

שים לב: $[(])$ הוא ביטוי חוקי תחת הגדרה זו.

ב. כעת ביטוי סוגריים חוקי מוגדר ברקורסיה באופן הבא:

- הביטוי הריק הוא ביטוי חוקי (סדרה ללא פותחים וללא סוגרים).
- אם A ו־B הם ביטויים חוקיים אזי
  - AB הוא ביטוי חוקי
  - $\{A\}$ הוא ביטוי חוקי
  - (A) הוא ביטוי חוקי
  - $[A]$ הוא ביטוי חוקי

שים לב: $[(])$ אינו ביטוי חוקי תחת הגדרה זו.

כמה ביטוי סוגרים שונים עם r פותחים ו־r סוגרים מסוג ראשון, l פותחים ו־l סוגרים מסוג שני, n פותחים ו־n סוגרים מסוג שלישי קיימים?

12. הוכח באמצעות רקורסיה כי מספר דרכים לחלק מצולע בן n צלעות ל $n-2$ משולשים הוא C_{n-2}.

13. עם הגעת המתיישבים החדשים לאמריקה החליט שבט האקמצ'י לאמץ את 26 אותיות השפה האנגלית. מכובדי השבט החליטו על הכללים הבאים לשפתם:

- בכל מילה יש לא יותר מ־30 אותיות.
- כל מילה מתחילה ומסתיימת ב־A.
- כל שתי אותיות סמוכות במילה חייבות להיות סמוכות גם באלפבית. לדוגמא, אחרי A חייב להיות B ואחרי B יופיע A או C.

א. כמה מילים באורך n, $n \leq 1$, יכולות להיות בשפת האקמצ'י?

ב. האם קבוצת המילים בשפת האקמצ'י מהווה צופן פרפיקסי?

ג. האם קבוצת המילים בשפת האקמצ'י מהווה צופן חד פענח?

14. שיטה ישירה לחישוב מספר העצים הבינאריים המצביים על n צמתים היא:
יהי b_n מספר העצים על n צמתים. נגדיר $b_0 = 1$ ונגדיר פונקציה:

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

א. הוכח ש־$b_n = b_0 \cdot b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} \cdot b_0$

ב. הוכח ש־$xB^2(x) - B(x) + 1 = 0$

ג. השתמש בנוסחא

$$(1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}a + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}a^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}a^3 + \cdots$$

כדי להוכיח

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

15. בכל הסעיפים: n,k הם מספרים שלמים גדולים מ־ 10. ו־ M,S הם מספרים שלמים אי־שליליים. כל המסלולים הם בצעדי יחידה למעלה או ימינה (הקורדינטה הראשונה היא מספר העמודה).

א. נתונים $0 < i_1 < i_2 < i_3 < n$ ו־ $0 < j_1 < j_2 < j_3 < k$. כמה מסלולים שונים מ־ $(0,0)$ ל־ (n,k) העוברים בכל 3 הנקודות $(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)$?

ב. כמה מסלולים שונים מ־ $(0,0)$ ל־ (n,k) בהם אין שני צעדים רצופים ימינה?

ג. כמה מסלולים שונים שמתחילים ב־ $(0,0)$ ומסתיימים בנקודה (M,S) המקיימת $M+S=100$?

ד. כמה מסלולים שונים מ־ $(0,0)$ ל־ (n,k) שאינם עוברים בנקודה (i,j)?

ה. כמה מסלולים שונים מ־ $(0,0)$ ל־ (n,k) אינם עוברים בנקודות $(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)$ כאשר נתון כי $i_1+j_1=i_2+j_2=i_3+j_3=S$ וכן i_1,i_2,i_3 שונים זה מזה?

ה. כמה מסלולים שונים מ־ $(0,0)$ ל־ $(n,)$ אינם עוברים בנקודות מהצורה (i,i) (מלבד $(0,0)$ ו־ (n,n) כמובן)?

16. נגדיר את הדירוג של אדם העומד בתור לקולנוע כמספר האנשים מאותו מין שעומדים לפניו בתור. בכמה דרכים ניתן לסדר בתור n זוגות (כל זוג מורכב מגבר ואישה) כך שיתקיימו שני התנאים הבאים:

- כל אישה רואה לפניה בתור יותר גברים מנשים
- הדירוג של כל גבר שונה מהדירוג של בת זוגתו

17. אדם ניצב ליד סולם בן 20 שלבים הנשען על קיר. כאשר האדם עומד על הקרקע הוא יכול בצעד הבא רק לעלות שלב. כאשר הוא ניצב על שלב 20 הוא יכול בצעד הבא רק לרדת שלב. כאשר האדם ניצב על כל שלב אחר, הוא יכול בצעד הבא לעלות או לרדת שלב.

א. בכמה אופנים יכול האדם לעשות 40 צעדים ולסיים חזרה על הקרקע?

ב. בכמה אופנים יכול האדם לעשות 44 צעדים ולסיים חזרה על הקרקע?

ג. בכמה אופנים יכול האדם לעשות 35 צעדים ולסיים חזרה על הקרקע?

בהצלחה!