מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 12

תמורות :-

הגדרה :- תהי A קבוצה סופית. תמורה על A היא פונקציה $f: A \to A$ חח"ע. בדרך כלל כשמדברים על תמורות נהוג לסמן את איברי A ב- $1,2,3,\dots,n$ כאשר $|A|=n$. ותמורות נהוג לסמן אותן באותיות יווניות $\pi, \sigma, \alpha, \beta$ ....

הערה :- אם A סופית! - $f: A \to A$ אזי f חח"ע $\Longleftrightarrow$ f על.

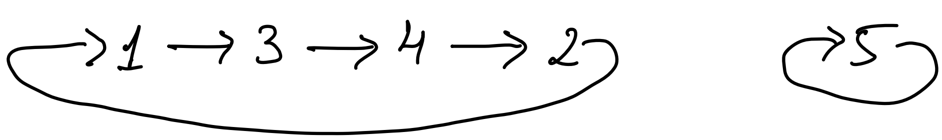
כתיבת תמורות :-

1) צורה מטריציונית :-
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

זו תמורה על הקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ שמקיימת
$$\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 2,\ \sigma(5) = 5$$

2) צורה מקוצרת :- משמיטים את השורה הראשונה ומסתפקים בכתיבת השורה השניה. למשל σ כמו מקודם ניתן לכתוב ע"י
$$\sigma = 3\ 1\ 4\ 2\ 5$$

3) צורה מעגלית :- אותה σ מקודם. ניתן לתאר בעזרת שני המעגלים הבאים



והצורה המעגלית של σ היא $\sigma = (1\,3\,4\,2)(5)$. בדרך כלל נהוג למחוק מעגלים באורך 1. כלומר מסתפקים בכתיבת $\sigma = (1342)$.

הערה :- המעגל $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)$ הנו אותו מעגל כמו $(x_k x_{k+1} \dots x_n x_1 \dots x_{k-1})$.

הגדרה :- תהי $A=\{1,2,..,n\}$ ותהי σ תמורה על A. איבר $k\in A$ נקרא נקודת שבת של σ אם $\sigma(k)=k$.

הגדרה :- תהי $A=\{1,2,...,n\}$. אוסף כל התמורות על הקבוצה A מסומן ב- S_n.

דוגמה :- אם $A=\{1,2,3\}$ אז אוסף כל התמורות של A הוא הקבוצה :-

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$$

או בצורה מעגלית :-

$$S_3=\{id,(23),(13),(12),(132),(123)\}$$

הערה :- אם $|A|=n$ אז יש $n!$ תמורות על A. כלומר, $|S_n|=n!$.

הגדרה :- תהיינה $\sigma,\pi\in S_n$ אז: $\sigma\circ\pi\in S_n$ והיא מוגדרת באופן הבא :-
לכל $1\le k\le n$, $(\sigma\circ\pi)(k)=\sigma(\pi(k))$.

תרגיל :- תהיינה $\sigma=(12345)$, $\pi=(135)(24)$ שתי תמורות ב- S_6.
א) כתבו את σ,π בצורה מטריציונית.
ב) חשבו את $\pi\circ\sigma$ ו- $\sigma\circ\pi$ בצורה מעגלית ומטריציונית.

פתרון :- א)

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}$$

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&2&1&6\end{pmatrix}$$

ב)

$$\sigma\circ\pi = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&2&1&6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&1&3&2&6\end{pmatrix}$$

$$\pi\circ\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&2&1&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&1&3&6\end{pmatrix}$$

הערה :- $\pi\circ\sigma \neq \sigma\circ\pi$.

בצורה מעגלית :- $\pi\circ\sigma = (135)(24)\circ(12345) = (14)(253)$

$\sigma\circ\pi = (12345)\circ(135)(24) = (25)(431) = (25)(143)$

הערה :- אם $(xyz),(\alpha\beta\gamma\delta)$ שני מעגלים שאין מספר משותף ביניהם אז $(xyz)(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)(xyz)$. כלומר $(143)(25) = (25)(143)$.

קומבינטוריקה (כל הקבוצות סופיות) :-

עקרון הסכום :- אם $A\cap B=\emptyset$ כלומר A,B זרות אז:

$$|A\cup B| = |A|+|B|$$

באופן כללי אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות זרות בזוגות כלומר לכל $1\le i\ne j\le n$ מתקיים $A_i\cap A_j=\emptyset$ אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

עקרון החיסור :- אם A קבוצה ו- $B\subseteq A$ אזי $|A\setminus B| = |A|-|B|$.

עקרון הכפל :- תהיינה A,B קבוצות אזי $|A\times B| = |A|\cdot|B|$
באופן כללי, אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות אזי

$$\left|\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

כאשר

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times \dots \times A_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} |A_i| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|$$

מסקנה מעקרון הכפל :- אם $|A|=n$ אזי $|P(A)|=2^n$.

משפט 1 :- תהיינה N,K שתי קבוצות כך ש- $|N|=n$, $|K|=k$.
אזי $|N^K|=n^k$ כאשר N^K הוא קבוצת כל הפונקציות מ- K ל- N.
(בחירה עם חזרות עם חשיבות לסדר).

משפט 2 :- תהיינה N,K כמו במשפט קודם. אזי מספר הפונקציות
החח"ע מ- K ל- N **בתנאי ש-$(k\le n)$** הוא $\dfrac{n!}{(n-k)!}$