**פולינום אופייני ומינימלי**

$A\in M_n(\mathbb{F})$ אז $\Delta_A(x)=|xI-A|$. הוא מתוקן, מקדם חופשי הוא $(-1)^n\cdot\det(A)$ ושל $x^{n-1}$ הוא $-\text{tr}(A)$. שורשיו הם ע״ע, ריבוי הוא ריבוי אלגברי.

לכל פולינום $p$ מתקיים $m_A\mid p\iff p(A)=0$.

**משפט קיילי-המילטון:** $\Delta_A(A)=0$. מכאן גם $m_A\mid\Delta_A$. למטריצות דומות יש אותו פ״א ופ״מ. מטריצה לכסינה אם $m_A$ מתפרק לגורמים לינאריים זרים. $A,B$ דומות אוניטרית אם קיימת אוניטרית $P$ כך ש-$P^*AP=B$. עבור כל מ״ע של אופרטור $T$, $V_\lambda$ הוא $T$-שמור. מרחק של $v$ מתת-מרחב $U$ הוא $d(v,U)=\left\|v-\sum_{i=1}^k\langle v,v_i\rangle\cdot v_i\right\|$.

**לכסון ושילוש + אוניטרי**

מוצאים ע״ע - זה האלכסון של $D$. $P$ תורכב מו״ע בהתאמה ונקבל $A=P^{-1}DP$. **משפט שור:** $A\in M_n(\mathbb{C})$ דומה אוניטרית למשולשת עליונה (כלומר $Q^*AQ$ משולשת עליונה). $A\in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת לשילוש דומה אורתוגונלית למשולשת עליונה. אם מטריצה נורמלית היא **משולשת** אזי היא **אלכסונית**. **לכסון אוניטרי:** תוך כדי הלכסון לבחור וקטורים מנורמלים. **שילוש אוניטרי:** נשלש ואז גרם-שמידט.

עבור שילוש: נמצא ו״ע $v_1$ של $A$ עבור ע״ע $\lambda_1$, ונשלים אותו לבסיס $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. נגדיר

$$P=\begin{bmatrix}\vdots & & \vdots\\ v_1 & \cdots & v_n\\ \vdots & & \vdots\end{bmatrix}\Longrightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

כאשר $\Delta_{A_1}(\lambda)=\frac{\Delta_A(\lambda)}{\lambda-\lambda_1}$. באותו האופן נמצא $P_2\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך ש- $P_2^{-1}A_1P_2=\begin{bmatrix}\lambda_2 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$. $P_2'=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$

ואז:

$$P_2'^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2'=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & *\\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

. נמשיך כך עד לקבלת מטריצה משולשת.

בשילוש אוניטרי, לאחר השלמת השילוש נבצע גרם-שמידט על העמודות לקבלת בסיס א״נ.

$A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה $\iff$ ל-$A$ יש $n$ ו״ע בת״ל $\iff$ כל הע״ע של $A$ ב-$\mathbb{F}$ ומתקיים ר״א = ר״ג לכל ע״ע $\iff$ פ״מ מתפרק לגורמים לינאריים זרים.

אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אז ל-$A$ יש $n$ ע״ע ב-$\mathbb{F}$ (עם כפילויות). אם $T\in End(V)$ לכסין אז $\text{Ker}T\oplus\text{Im}T=V$.

**הטלות**

העתקה $T\in End(V)$ היא **הטלה** אם $T^2=T$. ע״ע ב-$\{0,1\}$. כל הטלה היא לכסינה. ניתן להגדיר הטלה על $U$ במקביל ל-$W$ אם $V=U\oplus W$ $\text{pr}_U^W(v)=u$.

**פירוק ספקטרלי**

פולינומי לגראנז' לקבוצת איברים שונים הם $\{\ell_i\}_{i=1}^n$ כך ש-$\ell_i=\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$. עבור $T$ לכסין, ע״ע $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, $V_i=V_{A,\lambda_i},W_i=\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^k V_j$, $E_i=\text{pr}_{V_i}^{W_i}$:

1. $V=\bigoplus_{i=1}^k V_i$.
2. $Id=\sum_{i=1}^k E_i$.
3. $T=\sum_{i=1}^k\alpha_iE_i$, והפירוק יחיד.
4. לכל פולינום $f\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים $f(T)=\sum_{i=1}^k f(\lambda_i)E_i$.
5. $\ell_i(T)=E_i$ עבור פולינומי לגראנז' של $\{\lambda_i\}$.

**מכפלה פנימית**

**ממ״פ** הוא $(V,\langle\rangle)$, $V$ מ״ו מעל $\mathbb{F}$ -$\mathbb{F}$ $\langle\rangle:V^2\to\mathbb{F}$ שמקיימת:

$$\langle\alpha v+\beta u,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle+\beta\langle u,w\rangle,\quad\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle},$$

$$\langle v,v\rangle\geq 0\wedge v=0\iff\langle v,v\rangle=0$$

מעל $\mathbb{R}$ ייקרא **אוקלידי** ומעל $\mathbb{C}$ **אוניטרי**. תבנית היא כל העתקה $\langle\rangle:V^2\to\mathbb{F}$. תבנית בילינארית לינארית בשני המשתנים, מ״פ היא $1\frac{1}{2}$-לינארית.

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

**א״ש המשולש:** $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$. **א״ש קושי-שוורץ:** $|\langle v,u\rangle|\leq\|v\|\cdot\|u\|$. זווית בין $v,u$ היא $\cos\theta=\frac{|\langle v,u\rangle|}{\|v\|\cdot\|u\|}$.

מייצגת של בילינארית היא $A_f=[A_f]_B=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ כאשר $a_{ij}=f(v_j,v_i)$ עבור הבסיס $B=\{v_i\}_{i=1}^n$.

**אורתוגנליות ואורתונורמליות**

אם $\{a_i\}_{i=1}^n$ קבוצה א״נ אז $\langle a_i,a_j\rangle=\delta_{ij}$.

גרם-שמידט: מתחילים מבסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$, עבור $i=1\dots n$:

$$\tilde{e_i}=v_i-\sum_{j<i}\langle v_i,e_j\rangle\cdot e_j$$

$$e_i=\frac{1}{\|\tilde{e_i}\|}\cdot\tilde{e_1}$$

נסיים בבסיס א״נ. עבור בסיס א״נ $\{e_i\}_{i=1}^n$ **מקדמי פורייה** של $v$ הם $\langle v,e_i\rangle$. הטלה א״נ על ת״מ $U=\text{sp}\{u_1,\dots,u_n\}$ בבסיס א״נ: $\langle v,u_i\rangle\cdot u_i$ (מרחק קצר ביותר ל-$U$). נורמה מוגדרת ע״י מ״פ $\iff$ מתקיים $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\|v\|^2+2\|w\|^2$, נשחזר את המ״פ להיות $\langle v,w\rangle=\frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2\right)$.

**אפיונים**

אופרטור צמוד (דואלי) $T^*$ ל-$T$ מקיים לכל $v,u$ $\langle Tv,u\rangle=\langle v,T^*u\rangle$. עבור בסיס א״נ $B$: $[T^*]_B=[T]_B^*$. תכונות:

1. $(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$.
2. $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$.
3. $(AB)^*=B^*A^*$.
4. $(A^n)^*=(A^*)^n$.
5. אם $A$ הפיכה אז $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

| אפיון | הגדרה | ע"ע |
|---|---|---|
| הרמיטית (סימטרית) | $A^*=A$ | $\in\mathbb{R}$ |
| אנטי-הרמיטית (א"ס) | $A^*=-A$ | $\alpha i\mid\alpha\in\mathbb{R}$ |
| אוניטרית/אורתוגונלית | $A^*=A^{-1}$ | $\lvert\lambda\rvert=1$ |
| נורמלית | $A^*A=AA^*$ | |

1. $T$ אוניטרי $\iff\forall u,v:\langle Tv,Tu\rangle=\langle v,u\rangle\iff\|Tv\|=\|v\|\iff$ $T$ מעביר בסיס א"נ לבסיס א"נ.
2. עבור $A$ הרמיטית: $A$ מוגדרת אי-שלילית (חיובית) $\iff$ כל הע"ע אי-שליליים (חיוביים) $\iff$ קיימת $B$ הרמיטית (הפיכה) כך ש-$A=B^2$ $\iff$ קיימת $C$ (הפיכה) כך ש-$A=C^*C$.

הרמיטית ואוניטרית נורמליות. ע"ע של הרמיטית ממשיים, ושל אנטי-הרמיטית מרוכבים. נורמלית $\iff$ לכסין אוניטרית. סימטרית $\iff$ לכסינה אורתוגונלית.

1. $A$ **מוגדרת חיובית** אם לכל $\vec{0}\neq v\in\mathbb{C}^n$ מתקיים $v^*Av>0$ (או $\langle Av,v\rangle>0$). **אי-שלילית** עבור $\geq$ **ושלילית** עבור $<$.

צורה כללית לאורתוגונליות ב-$M_2(\mathbb{R})$: $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (סיבוב) או $\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (סיבוב + שיקוף). $|\det A|=1$. אוניטרית מעבירה בין בסיסים א"נ.

### סיבוב שיקוף

בהינתן מטריצת סיבוב, ציר הסיבוב הוא ו"ע עם ע"ע 1, שאר הע"ע הם $\lambda,\overline{\lambda}$ ומתקיים $\lambda=\text{cis}\theta$: $\text{tr}A=1+\lambda+\overline{\lambda}$. מציאת מטריצת סיבוב בהינתן ציר $\hat{v}$ וזווית $\theta$:

1. השלמת $\hat{v}$ לבסיס א"נ $B=\{\hat{v},\hat{u},\hat{w}\}$.
2. בניית מטריצת מעבר $P_{B\to S}$ ו-$P_{S\to B}=P^*_{B\to S}=P^t_{B\to S}$ כי היא מעבירה בין בסיסית א"נ ($S=\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}$, $\hat{v}\to\hat{x}$ בסיס סטנדרטי).

$$U=P_{B\to S}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}P_{S\to B}$$

מטריצת שיקוף, באותו האופן בדיוק השלמה לבסיס א"נ, המטריצה באמצע היא אלכסונית שמכילה 1 לכל ציר שלא משתנה (תת-המרחב שהשיקוף ביחס אליו) ו-1- לכל מי שכן.

### פירוקים

פירוק $UH$: כל מטריצה הפיכה $A\in M_n(\mathbb{C})$ ניתנת לפירוק יחיד מהצורה $A=UH$ כאשר $U$ אוניטרית ו-$H$ הרמיטית מוגדרת חיובית. עבור לא הפיכות הפירוק לא יחיד ו-$H$ מוגדרת אי-שלילית. איך למצוא?

1. חשב $A^*A$ ומצא ע"ע וו"ע שלה (אפשרי כי היא הרמיטית) - לכסן אוניטרית.
2. $H=\sqrt{A^*A}=P\sqrt{D}P^{-1}$, שורש על איברי האלכסון.
3. $U=AH^{-1}$.

פירוק SVD: סקלר $\alpha$ הוא ערך סינגולרי (ע"ס) אם קיימים $\hat{v},\hat{w}$ כך ש-$A\hat{v}=\alpha\hat{w},A^*\hat{w}=\alpha\hat{v}$. $\hat{v}$ נקרא ו"ס ימני ו-$w$ שמאלי. כל מטריצה (גם לא ריבועית) ניתן לפרק ל-$A=PDQ$ כאשר $D$ אלכסונית (לאו דווקא ריבועית) של ע"ס של $A$, $P$ של ו"ס שמאליים ו-$Q$ של ימניים. איך למצוא?

1. ע"ע של $A^*A$, הע"ס של $A$ הם כל השורשים של הע"ע החיוביים.
2. $D$ באותם גדלים של $A$ ומכילה את הע"ס בסדר יורד.
3. הו"ע של $A^*A$ הן העמודות של $Q^*$, והשורות (עם $*$) של $Q$.
4. העמודה ה-$i$ של $P$ מקיימת $C_i(P)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}AC_i(Q^*)$.

אם ב-$A$ יש יותר שורות מעמודות, לפרק SVD את $B=A^*$ ובסוף $A=B^*=Q^*D^*P^*$ פירוק SVD של $A$.

### חבורות

קבוצה **לא ריקה** $G$ עם פעולה היא **חבורה** אם (1) הפעולה **סגורה** ($\forall a,b\in G:ab\in G$) (2) אסוציאטיבית ($a(bc)=(ab)c$) (3) קיים איבר אדיש $\forall a\in G:ae=ea=a$ (4) קיים איבר הופכי $b$ המקיים $ab=ba=e$. חבורה **אבלית** אם הפעולה **קומוטטיבית**. סדר של חבורה הוא מספר האיברים בה, $|G|$. אדיש והופכי יחידים. תת-חבורה $H<G$ אם הפעולה סגורה ב-$H$ וגם קיים הופכי. אם $G$ סופית אפשר לבדוק רק סגירות. תתי-חבורות סגורות תחת חיתוך.

**משפט לגראנז':** אם $G$ סופית ו-$H<G$ אז $|H|\mid|G|$. האינדקס של $H$ ב-$G$ הוא $[G:H]=|G|/|H|$.

עבור $H<G$ נגדיר $a,b\in G$ **שקולים מימין מודולו** $H$ $\iff ab^{-1}\in H$, מסמנים $a=^r b\mod H$. יחס שקילות שמגדיר מחלקות שקילות ימניות, לכל $a$ נסמן ב-$Ha$. אם $H<G$ ו-$H\neq G$ אז $|H|\leq\frac{1}{2}|G|$ (כי $|H|\mid|G|$ ו-$|H|\neq|G|$).

**החבורה הציקלית** שיוצרה $a$ היא $\langle a\rangle=\{a^k\mid k\in\mathbb{Z}\}<G$. אם קיים $a\in G$ כך ש-$\langle a\rangle=G$ אז $G$ **חבורה ציקלית**. הסדר של $a$ הוא $o(a)=|\langle a\rangle|$. לפי לגראנז' מתקיים $o(a)\mid o(G)$.

פונקציית אוילר....$GL_n(\mathbb{F})=\{A\in M_n(\mathbb{F})\mid|A|\neq0\}$ או $SL_n(\mathbb{F})$ עם $|A|=1$, עם כפל מטריצות. חבורה לא אבלית, $SL_n(\mathbb{F})\subseteq GL_n(\mathbb{F})$.

$\mathbb{Z}_n^*=\{x\in\mathbb{Z}_n\mid\gcd(x,n)=1\}$. $\mathbb{Z}_n$ (חיבור) או $\mathbb{Z}_n^*$ (כפל) חבורות אבליות. **פונקציית אוילר** $\varphi(n)=|\mathbb{Z}_n^*|$.

$$\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1},\gcd(p,q)=1\implies\varphi(pq)=\varphi(p)\varphi(q)$$

### אקסטרה

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

עבור דוגמאות נגדיות: $\mathbb{Z}_8^*$ ו-$\{1,5\},\{1,7\}\subseteq\mathbb{Z}_8^*$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

מטריצות אוניטריות (כחבורה או תת-חבורה). עבור $V$ סוף-מימדי, לכל $T\in End(V)$ מתקיים $\dim\text{Ker}T+\dim\text{Im}T=\dim V$. לכל אופרטור $T$ ופולינום $p$ מתקיים $p(T)T=Tp(T)$. מטריצה נלווית $\text{adj}A$ מקיימת $A\cdot\text{adj}A=\det(A)I$. הוכחת שוויון סדרים בחבורות - כל אחד מחלק את השני. לכל מטריצה $A$ עם ע"ע $\lambda$ מתקיים $\overline{\lambda}$ ע"ע של $A^*$. $\text{rank}(AB)\leq\min\{\text{rank}A,\text{rank}B\}$.