מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 3 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 15/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. תהיינו A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $A^2 \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$.

ב. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})$.

ד. אם $A \triangle C = B \triangle C$ אז $A = B$.

ה. אם $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$ וגם $\mathcal{P}(A) \triangle C = \mathcal{P}(B) \cup C$ אז $A = B$.

פתרון 1. **א.** הפרכה: עבור $A = \{1\}, B = \{1\}, C = \emptyset$ מתקיים

$$A^2 \setminus (B \times C) = \{(1,1)\} \setminus \emptyset = \{(1,1)\},$$

$$(A \setminus B) \times (A \setminus C) = \emptyset \times A = \emptyset$$

ולכן לא מתקיים שוויון.

ב. הוכחה: לכל $(x, y) \in U^2$ עבור הקבוצה האוניברסלית U מתקיים

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \wedge y \in B \cup C \\
&\iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\iff (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C),
\end{aligned}$$

ולכן הקבוצות שוות.

ג. הוכחה: תהיינה A, B קבוצות ותהי $S \in \mathcal{P}(A \setminus B)$. אזי $S \subseteq A \setminus B$. לכן לכל $x \in S$ מתקיים $x \in A \wedge x \notin B \iff x \in A \setminus B$. לכן $S \subseteq A$ (מכאן $S \in \mathcal{P}(A)$) וגם $S \cap B = \emptyset$ - לכן אם $S \neq \emptyset$ מתקיים $S \not\subseteq B$, ומתקיים $S \notin \mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}$. בסך הכל, $S \in \mathcal{P}(A) \setminus (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})$.

ד. הוכחה: ניתן להוכיח כי $C \triangle C = \emptyset$. לכן,

$$\begin{aligned}
A \triangle C = B \triangle C &\iff (A \triangle C) \triangle C = (B \triangle C) \triangle C \\
(\text{אסוציאטיביות של } \triangle) &\iff A \triangle (C \triangle C) = B \triangle (C \triangle C) \\
&\iff A \triangle \emptyset = B \triangle \emptyset \\
&\iff A = B.
\end{aligned}$$

ה. הוכחה: מכיוון ש-$B \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(B)$ מכילה קבוצות של שלמים ו-C מכילה מספרים שלמים - לכן $\mathcal{P}(B) \cap C = \emptyset$, ולכן $\mathcal{P}(B) \triangle C = (\mathcal{P}(B) \cup C) \setminus (\mathcal{P}(B) \cap C) = \mathcal{P}(B) \cup C$. לכן ידוע כי

$$\mathcal{P}(A) \triangle C = \mathcal{P}(B) \cup C = \mathcal{P}(B) \triangle C,$$

ומהסעיף הקודם נקבל ש-$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. נניח בשלילה ש-$A \neq B$, לכן בה"כ קיים $x \in A \setminus B$. אזי $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ ו-$\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$ - סתירה. בסך הכל, הוכחנו כי $A = B$.

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. תהי A קבוצה ותהי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ משפחת קבוצות. אזי ,

$$A \cup \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{F}} (A \cup S).$$

ב. תהי A קבוצה, $K \subseteq A$ תת-קבוצה שלה ותהי $\mathcal{F}$ חלוקה של A. נגדיר משפחה $\mathcal{G}$ להיות

$$\mathcal{G} = \{S \triangle K \mid S \in \mathcal{F}\},$$

אזי $\mathcal{G}$ חלוקה של A.

פתרון 2. א. הוכחה: יהי $x \in A \cup \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$, אזי $x \in A$ או $x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$. נפריד למקרים:

- אם $x \in A$, מהגדרת איחוד נקבל שלכל $S \in \mathcal{F}$ מתקיים $x \in A \cup S$, ולכן מהגדרת חיתוך נקבל ש-$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{F}} (A \cup S)$.

- אחרת, $x \in \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$. לכן לכל $S \in \mathcal{F}$ מתקיים $x \in S$, וכך לכל $S \in \mathcal{F}$ מתקיים $x \in A \cup S$. לכן מהגדרת חיתוך נקבל ש-$x \in \bigcap_{S\in\mathcal{F}} (A \cup S)$.

ב. הפרכה: עבור $K = \{1\}$, $A = \{1\}$ ו-$\mathcal{F} = \{\{1\}\}$, נקבל ש-

$$\mathcal{G} = \{\{1\} \triangle \{1\}\} = \{\emptyset\},$$

ברור ש-$\mathcal{G}$ אינה חלוקה (למשל $\emptyset \in \mathcal{G}$).

שאלה 3. תהי A קבוצה, ויהיו $R, S \subseteq A \times A$ יחסים מעל A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם R ו-S רפלקסיביים אז $R \setminus S$ רפלקסיבי.

ב. אם R ו-S סימטריים אז $R \setminus S$ סימטרי.

ג. אם R ו-S טרנזיטיביים אז $R \setminus S$ טרנזיטיבי.

ד. אם R ו-S רפלקסיביים אז $R \cup S$ רפלקסיבי.

ה. אם R ו-S סימטריים אז $R \cup S$ סימטרי.

ו. אם R ו-S טרנזיטיביים אז $R \cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R ו-S רפלקסיביים אז $R \cap S$ רפלקסיבי.

ח. אם R ו-S סימטריים אז $R \cap S$ סימטרי.

ט. אם R ו-S טרנזיטיביים אז $R \cap S$ טרנזיטיבי.

פתרון 3. א. הפרכה: עבור $A = \{1\}, R = S = \{(1,1)\}$ נקבל ש-R, S רפלקסיביים ($1 \, R \, 1 \wedge 1 \, S \, 1$) אבל $R \setminus S = \emptyset$ ולכן $(1,1) \notin R \setminus S$, ו-$R \setminus S$ אינו רפלקסיבי.

ב. הוכחה: יהיו $a, b \in A$ כך ש-$(a,b) \in R \setminus S$. אזי $(a,b) \in R$ וגם $(a,b) \notin S$. מכיוון ש-R סימטרי נקבל ש-$(b,a) \in R$. בנוסף, $(b,a) \notin S$ (אחרת, מכיוון ש-S סימטרי נקבל ש-$(a,b) \in S$ ונגיע לסתירה). לכן $(b,a) \in R \setminus S$ והיחס סימטרי.

ג. הפרכה: נבחר $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ ו-

$$S = \{(1,4),(4,3),(3,1)\}.$$

ברור כי R, S טרנזיטיביים. עם זאת,

$$R \setminus S = \{(1,2),(2,3)\},$$

ויחס זה אינו טרנזיטיבי ($(1,2) \in R \setminus S$ וגם $(2,3) \in R \setminus S$ אבל $(3,1) \notin R \setminus S$).

ד. הוכחה: יהי $a \in A$. מכיוון ש-R רפלקסיבי נקבל ש-$(a, a) \in R$, ומהגדרת חיתוך נקבל $(a, a) \in R \cup S$.

ה. הוכחה: יהיו $a, b \in A$ כך ש-$(a, b) \in R \cup S$. נניח בה"כ כי $(a, b) \in R$, אזי $(b, a) \in R$ ומהגדרת איחוד $(b, a) \in R \cup S$.

ו. הפרכה: נבחר $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2)\}$ ו-$S = \{(2, 3)\}$. ברור כי R, S טרנזיטיביים. עם זאת, $(1, 2) \in R \cup S$ וגם $(2, 3) \in R \cup S$, אבל $(3, 1) \notin R \cup S$, ולכן $R \cup S$ אינו טרנזיטיבי.

ז. הוכחה: יהי $a \in A$. מכיוון ש-R, S רפלקסיביים נקבל ש-$(a, a) \in R$ וגם $(a, a) \in S$. אזי $(a, a) \in R \cap S$.

ח. הוכחה: יהיו $a, b \in A$ כך ש-$(a, b) \in R \cap S$. אזי $(a, b) \in R$ וגם $(a, b) \in S$. מכיוון ש-R, S סימטריים נקבל ש-$(b, a) \in R$ וגם $(b, a) \in S$, ולכן $(b, a) \in R \cap S$.

ט. הוכחה: יהיו $a, b, c \in A$ כך ש-$(a, b) \in R \cap S$ וגם $(b, c) \in R \cap S$. אזי $(a, b) \in R$ וגם $(b, c) \in R$, ומטרנזטיביות R נקבל ש-$(a, c) \in R$. באופן דומה נקבל ש-$(a, c) \in S$, ולכן $(a, c) \in R \cap S$.