תרגול מבוא להוכחות

הוכיחו את הטענות הבאות

1. לכל מספר שלם n, אם n זוגי אז n^2 זוגי.
2. לכל מספר שלם n, אם n^2 זוגי אז n זוגי.
3. סכום של מספר רציונלי ומספר אי־רציונלי הוא אי־רציונלי.
4. לכל מספר טבעי n, אם n הוא ריבוע ואי־זוגי אז קיים מספר שלם k כך ש $n = 4k + 1$.
5. לכל מספר שלם n, אם n זוגי אז **לא** קיים מספר k כך ש $n^2 = 4k + 2$.

פתרון

סעיף 1: יהי n מספר שלם כלשהו. נניח ש n הוא זוגי ונוכיח ש n^2 הוא זוגי. הנחנו ש n הוא זוגי ולכן קיים מספר שלם $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = 2 \cdot k$. נסמן את המספר הזה ב k_1. נבחר $k_2 = 2 \cdot k_1^2$. אז

$$n^2 = (2 \cdot k_1)^2 = 4 \cdot k_1^2 = 2 \cdot (2 \cdot k_1^2) = 2 \cdot k_2$$

הראינו שקיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n^2 = 2 \cdot k$ ולכן n^2 הוא זוגי.

סעיף 2: יהי n מספר שלם. נניח ש n אי־זוגי ונוכיח ש n^2 אי־זוגי. לפי טענה שלמדנו בשיעור, קיים מספר שלם k כך ש $n = 2 \cdot k + 1$. נסמן את המספר הזה ב k_1. נבחר $k_2 = 2 \cdot k_1^2 + 2 \cdot k_1$, ונקבל

$$n^2 = (2 \cdot k_1 + 1)^2 = 4 \cdot k_1^2 + 4 \cdot k_1 + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k_1^2 + 2 \cdot k_1) + 1 = 2 \cdot k_2 + 1$$

הראינו שקיים מספר שלם k כך ש $n^2 = 2 \cdot k + 1$, ולכן לפי הטענה שלמדנו בשיעור, המספר n^2 הוא אי־זוגי.

סעיף 3: לפני שניגשים לשאלה, צריך לתת לסטודנטים את ההגדרה של רציונלי: מספר ממשי x הוא רציונלי אם ורק אם קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = \frac{m}{n}$. לפני שכותבים את ההוכחה, צריך קודם כל לכתוב את ההוכחה בצורה לוגית: לכל $x, y \in \mathbb{R}$, אם x הוא רציונלי ו y הוא אי־רציונלי, המספר $x + y$ הוא אי־רציונלי.
נניח בשלילה שקיימים $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש x הוא רציונלי, y הוא אי־רציונלי, ו $x + y$ הוא רציונלי. נסמן את המספרים האלה ב x_1, y_1. המספר x_1 רציונלי, ולכן קיימים $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ כך ש $x_1 = \frac{m_1}{n_1}$. בנוסף, $x_1 + y_1$ רציונלי, ולכן קיימים $m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש $x_1 + y_1 = \frac{m_2}{n_2}$. מתקיים

$$y_1 = (x_1 + y_1) - x_1 = \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2 \cdot n_1 - m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$$

מצאנו מספרים שלמים ש y_1 שווה למנה שלהם, ולכן y_1 הוא רציונלי. הראינו ש y_1 רציונלי, אבל זה סותר את ההנחה ש y_1 הוא אי־רציונלי. הגענו לסתירה, ולכן הטענה נכונה.

סעיף 4: יהי n מספר טבעי. נניח ש n הוא ריבוע ואי־זוגי, ונוכיח שקיים k שלם כך ש $n = 4 \cdot k + 1$. המספר n הוא ריבוע, ולכן קיים מספר טבעי m כך ש $n = m^2$. נסמן את המספר הזה ב m_1. לפי טענה שלמדנו בכיתה, אם m_1 זוגי אז n זוגי, ולכן בגלל שנתון ש n אי־זוגי נובע ש m_1 אי־זוגי (הערה: אפשר להגיד לסטודנטים שזה הקונטרפוזיטיב, אבל לא צריך לכתוב את זה). לפי טענה שלמדנו בכיתה, מכך ש m_1 אי־זוגי נובע שקיים מספר שלם k כך ש $m_1 = 2 \cdot k + 1$. נסמן את המספר הזה ב k_1. נבחר $k_2 = k_1^2 + k_1$. אז מתקיים

$$n = m^2 = (2 \cdot k_1 + 1)^2 = 4 \cdot k_1^2 + 4 \cdot k_1 + 1 = 4 \cdot k_2 + 1$$

קיבלנו שקיים מספר שלם k_2 כך ש $n = 4 \cdot k_2 + 1$, כנדרש.

סעיף 5:

יהי n מספר שלם. נניח בשלילה ש n זוגי וקיים מספר שלם k כך ש $n^2 = 4 \cdot k + 2$. נסמן את המספר הזה ב k_1. לפי ההנחה ש n זוגי, קיים מספר שלם k כך ש $n = 2 \cdot k$. נסמן את ה k הזה ב k_2. אז מתקיים

$$n^2 = (2 \cdot k_2)^2 = 4 \cdot k_2^2$$

ולכן לפי ההנחה על k_1 מתקיים

$$\begin{aligned} 4 \cdot k_2^2 &= 4 \cdot k_1 + 2 \\ 4 \cdot k_2^2 - 4 \cdot k_1 &= 2 \\ k_2^2 - k_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

אבל המספר בצד שמאל של המשוואה הוא שלם, והמספר בצד ימין אינו שלם, ולכן הם לא יכולים להיות שווים. הגענו לסתירה, ולכן אם n זוגי אז לא קיים מספר שלם k כך ש $n^2 = 4 \cdot k + 2$, כנדרש.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

צריך להסביר להם כאן מה זו שאלת "הוכח או הפרך"

1. לכל שני מספרים ממשיים a, b, אם $a^2 > b^2$ אז $a > b$.
2. המכפלה של שני ריבועים היא ריבוע.
3. לכל מספר ראשוני p מתקיים $(-1)^p = -1$.

פתרון

סעיף 1: טענה לא נכונה. נבחר $a = -2, b = 1$ ונקבל $(-2)^2 > 1^2$ אבל $-2 < 1$.

סעיף 2: יהיו a, b מספרים טבעיים. נניח ש a, b הם ריבועים ונוכיח ש $a \cdot b$ הוא ריבוע. לפי ההנחה ש a הוא ריבוע, קיים מספר טבעי m כך ש $a = m^2$. נסמן את המספר הזה ב m_1. לפי ההנחה ש b הוא ריבוע, קיים מספר טבעי m כך ש $b = m^2$. נסמן את המספר הזה ב m_2. נבחר $m_3 = m_1 \cdot m_2$. אז מתקיים

$$a \cdot b = m_1^2 \cdot m_2^2 = (m_1 \cdot m_2)^2 = m_3^2$$

קיבלנו שקיים מספר טבעי m כך ש $a \cdot b = m^2$, ולכן $a \cdot b$ הוא ריבוע, כנדרש.

סעיף 3: טענה לא נכונה. נבחר $p = 2$ ונקבל $(-1)^2 = 1$.

$\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי:

נניח בשלילה ש ש $\sqrt{2}$ הוא רציונלי. אז קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ ואי אפשר לצמצם את $\frac{m}{n}$. נסמן את המספרים האלה ב $\frac{m_1}{n_1}$. מכך ש $\frac{m_1}{n_1} = \sqrt{2}$ נובע ש

$$\frac{m_1^2}{n_1^2} = 2$$

ולכן $m_1^2 = 2 \cdot n_1^2$. לפי הגדרת המספר הזוגי, m_1^2 הוא זוגי. לפי הטענה שהוכחנו בשיעור, נקבל ש m_1 הוא זוגי. לפי הגדרת המספר הזוגי, קיים מספר שלם k כך ש $m = 2 \cdot k$. נסמן את המספר הזה ב k_1. אז

$$2 \cdot n_1^2 = m_1^2 = (2 \cdot k)_1^2 = 4 \cdot k_1^2$$

ולכן

$$n_1^2 = 2 \cdot k_1^2$$

לפי הגדרת המספר הזוגי, n_1^2 הוא זוגי. לפי הטענה שהוכחנו בשיעור, n_1 זוגי. הוכחנו שגם m_1 וגם n_1 הם זוגיים. לכן אפשר לצמצם את השבר $\frac{m_1}{n_1}$ ב 2, אבל זה סותר את ההנחה שאי אפשר לצמצם אותו. קיבלנו סתירה, ולכן $\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי.