מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 8

אינדוקציה מתמטית:-

אינדוקציה I :- תהי $P(n)$ טענה לגבי המספר הטבעי $n\in\mathbb{N}$.

אם קיים $a\in\mathbb{N}$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:-

1) בסיס האינדוקציה:- הטענה $P(a)$ נכונה.

2) שלב האינדוקציה:- לכל $n>a$, נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת נכונות הטענה $P(n)$.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל $a\leq n\in\mathbb{N}$.

תרגיל:- הוכיחו שלכל $3\leq n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n^2+1\geq 9$.

הטענה היא: $n^2+1\geq 9$: $P(n)$.

פתרון:- 1. בסיס האינדוקציה $n=3$:- $P(3)=3^2+1=10\geq 9$ ✓

2. נניח שהטענה $P(n)$ נכונה עבור איזשהו $3\leq n\in\mathbb{N}$ מסוים.

כלומר מניחים ש- $n^2+1\geq 9$. נוכיח את הטענה $P(n+1)$. כלומר,

רוצים להוכיח ש- $(n+1)^2+1\geq 9$. אכן,

$$(n+1)^2+1 = n^2+2n+1+1 = n^2+1+2n+1 \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\geq} 9+2n+1 \underset{2n+1\geq 1}{\geq} 10>9$$

סה"כ קיבלנו $(n+1)^2+1\geq 9$.

לכן הטענה נכונה לכל $3\leq n\in\mathbb{N}$.

תרגיל:- הוכיחו באינדוקציה שלכל $1\leq n\in\mathbb{N}$ מתקיים:-

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

פתרון:- 1. בסיס האינדוקציה $n=1$:- $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$ ✓.

ב) שלב האינדוקציה :- נניח שהטענה $P(n)$ עבור $n\geq 1$ מסוים נכונה

ונוכיח שהטענה $P(n+1)$ נכונה. הטענה $P(n)$ היא

$$P(n): \frac{1}{1\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

כלומר מניחים ש-
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

ונוכיח ש-

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

אכן,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}\underset{\text{מכנה משותף}}{=}\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

לכן, $P(n+1)$ נכונה.

סכ"ג $P(n)$ נכונה לכל $1\leq n\in\mathbb{N}$.

תרגיל :- הוכיחו שלכל $1\leq n\in\mathbb{N}$ המספר $3^{2n+1}+4^{2n+1}$ מתחלק ב-7.

פתרון :- 1. בסיס האינדוקציה :- $n=1$: $3^{2\cdot1+1}+4^{2\cdot1+1}=91$ ואכן $7|91$.

2. שלב האינדוקציה :- נניח שהטענה נכונה עבור $1\leq n\in\mathbb{N}$ מסוים כלומר

מניחים ש- $7\,|\,3^{2n+1}+4^{2n+1}$.

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$:

$$3^{2(n+1)+1}+4^{2(n+1)+1} = 3^{2n+3}+4^{2n+3} = 3^2\cdot 3^{2n+1} + 4^2\cdot 4^{2n+1}$$

$$= \underbrace{\underbrace{9\cdot\left(3^{2n+1}+4^{2n+1}\right)}_{\text{מתחלק ב-7 לפי הנחת האינדוקציה}}}_{\text{מתחלק ב-7}} + \underbrace{7\cdot 4^{2n+1}}_{\text{כפולה של 7}}$$

סה"כ הביטוי מתחלק ב-7.

לכן הטענה נכונה לכל $1 \le n \in \mathbb{N}$.

$$P(n):\ 7 \,\big|\, \left(3^{2n+1}+4^{2n+1}\right)$$

אינדוקציה II (מלאה) :- תהי $P(n)$ טענה לשהי עבור המספר הטבעי $n\in\mathbb{N}$. אם קיים $a\in\mathbb{N}$ כך ששני התנאים הבאים מתקיימים :-

1. בסיס :- הטענה $P(a)$ נכונה.
2. צעד :- לכל $n>a$, נכונות הטענה $P(k)$ עבור $a\le k\le n-1$ גוררת נכונות הטענה $P(n)$.

אז $P(n)$ נכונה לכל $a\le n\in\mathbb{N}$.

הערה :- כל מה שניתן להוכיח באינדוקציה I ניתן להוכיח באינדוקציה מלאה, אבל ההפך לא נכון. לומר יש טענות שאפשר להוכיח באינדוקציה מלאה אך לא ניתן להוכיח באינדוקציה I (רגילה).

תרגיל :- תהי $a_1, a_2, \ldots$ סדרת מספרים המוגדרת באופן הבא:-

$$a_1 = 13\ ,\qquad a_2 = 79$$

$$\forall k\ge 3:\quad a_k = 3a_{k-1}+10a_{k-2}$$

הוכיחו כי: $$\forall n\ge 1:\ a_n = 3\cdot 5^n + (-2)^n$$

$$\boxed{P(n):\ a_n = 3\cdot 5^n+(-2)^n}$$

פתרון :- 1. בסיס האינדוקציה $n=1$ ו- $n=2$:-

$$a_1 = 13, \quad a_1 = 3\cdot 5^1 + (-2)^1 = 13$$

$$a_2 = 79, \quad a_2 = 3\cdot 5^2 + (-2)^2 = 79$$

2. נניח שהטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים שגדולים שווים ל- 1 וקטנים שווים ל- $n-1$ עבור $2<n\in\mathbb{N}$ מסוים.

לפי הגדרת הסדרה מתקיים

$$a_n = 3a_{n-1} + 10\cdot a_{n-2} \underset{\text{הנחה}}{=} 3\cdot\left(3\cdot 5^{n-1} + (-2)^{n-1}\right) + 10\cdot\left(3\cdot 5^{n-2} + (-2)^{n-2}\right)$$

$$= 9\cdot 5^{n-1} - 6\cdot(-2)^{n-2} + 2\cdot 3\cdot 5^{n-1} + 10\cdot(-2)^{n-2}$$

$$= 15\cdot 5^{n-1} + 4(-2)^{n-2} = 3\cdot 5^n + (-2)^n$$

לכן $P(n)$ נכונה לכל $\mathbb{N}\ni n\geq 1$.

תרגיל :- תהי $f:\mathbb{N}^+\longrightarrow\mathbb{N}^+$ המקיימת :-

(i) $f(2)=2$.

(ii) לכל $m,n\in\mathbb{N}^+$, $f(mn)=f(m)f(n)$

(iii) אם $n<m$ אז $f(n)<f(m)$.

הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}^+$, $f(n)=n$ (כלומר f היא פונקציית הזהות)

פתרון :- 1. בסיס $n=1$:- אפשר להראות בכמה דרכים ש- $f(1)=1$ למשל לפי (ii) $f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$: $m=n=1$

כלומר $f(1)=f(1)\cdot f(1)$. $f(1)\in\mathbb{N}^+$ לכן נחלק ב- $f(1)$ את שני האגפים ונקבל $1=f(1)$.

2. שלב האינדוקציה :- יהי $n>1$ נניח שהטענה נכונה לכל $1\leq k\leq n$

כלומר מניחים שלכל $1\leq k\leq n$, $f(k)=k$, ונוכיח עבור $n+1$.

אם n אי-זוגי אז $n+1$ זוגי. לכן קיים $1\leq k<n$ כך ש-

$2k=n+1$. אזי $f(n+1) = f(2k) \underset{(ii)}{=} f(2)\cdot f(k) \underset{(i)}{=} 2\cdot f(k) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} 2k = n+1$

אחרת, כלומר אם n זוגי אזי $n+1$ אי-זוגי. לכן קיים $1\le k<n$
כך ש- $2k+1=n+1$. נחשב:-

$$2k \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} f(2k) \underset{(iii)}{<} f(2k+1) = f(n+1) = f(2k+1) \underset{(iii)}{<} f(2k+2)$$

$$f(2(k+1)) \underset{(ii)}{=} f(2)\cdot f(k+1) \underset{(i)\ \text{והנחת האינדוקציה}}{=} 2\cdot(k+1)$$

סה"כ קיבלנו ש- $2k < f(n+1) < 2k+2$
$\Longleftarrow$ $f(n+1) = 2k+1 = n+1$.

תרגיל:- הוכיחו שלכל $1\le n\in\mathbb{N}$ קיימים $0\le k\in\mathbb{N}$ ו-$a\in\mathbb{N}$ אי-זוגי
כך ש- $n=2^k\cdot a$.
בקיצור:- תעשו לבד באינדוקציה מלאה.