מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 4

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: יחסי שקילות.

יחסי שקילות

הגדרה 1. יחס R הוא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

הגדרה 2. תהי A קבוצה ויהי R יחס שקילות מעל A. יהי $a \in A$. מחלקת השקילות של a ביחס ל-R מוגדרת להיות

$$[a]_R := \{b \in A \mid b\ R\ a\},$$

כלומר - כל האיברים ב-A שהם ביחס R עם a.

הערה 1.
1. R רפלקסיבי ולכן $a \in [a]_R$: $[a]_R \neq \emptyset$.
2. אם $a\ R\ b$ אז $[a]_R = [b]_R$.
3. אם $(a,b) \notin R$ אז $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

הגדרה 3. תהי A קבוצה ויהי R יחס שקילות מעל A. נגדיר את קבוצת המנה להיות

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

נשים לב שמחלקות השקילות הן אוסף קבוצות לא ריקות, זרות, שאיחודן הוא כל הקבוצה.

משפט 1. כל יחס שקילות משרה חלוקה של A, וכל חלוקה של A משרה יחס שקילות.

דוגמה 1. נגדיר $A = \{1,2,3,4,5\}$ וחלוקה $\mathcal{F}$ שלה:

$$\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}.$$

נסמן את יחס השקילות המושרה מ-$\mathcal{F}$ ב-$R_{\mathcal{F}}$. נרצה שמחלקות השקילות של $R_{\mathcal{F}}$ יהיו המחלקות שנמצאות בחלוקה $\mathcal{F}$. מכאן, נרצה שלכל $a,b\in A$ יתקיים ש-a,b באותה מחלקה ב-$\mathcal{F}$ אמ"מ $[a]_{R_{\mathcal{F}}}=[b]_{R_{\mathcal{F}}}$ (כלומר $a\ R_{\mathcal{F}}\ b$). מכאן, היחס הוא

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{F}}=&\left\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\right\}\cup\\&\left\{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\right\}.\end{aligned}$$

תרגיל 1. בכל סעיף נתונה קבוצה A ויחס R מעליה. בדקו האם R רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, אנטי-סימטרי חזק או טרנזיטיבי. במידה ו-R הוא יחס שקילות, מצאו את $^{A}/_{R}$.

1. $A=\mathbb{R}$, $x\ R\ y\iff x^2=y^2$.
2. $A=\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $X\ R\ Y\iff X\cap\mathbb{Z}=Y\cap\mathbb{Z}$.
3. $A=\mathbb{N}^+$, $a\ R\ b\iff(a-2)\cdot(b-2)\geq0$.

פתרון 1. **1.** $A=\mathbb{R}$, $x\ R\ y\iff x^2=y^2$.

- R רפלקסיבי: לכל $x\in A$ מתקיים $x^2=x^2$ ולכן $x\ R\ x$ (לכן בפרט לא אנטי-רפלקסיבי).
- R סימטרי: לכל $x,y\in A$ מתקיים

$$x\ R\ y\iff x^2=y^2\iff y^2=x^2\iff y\ R\ x.$$

לכן בפרט R לא אנטי-סימטרי.

- R טרנזיטיבי: יהיו $x,y,z\in A$ כך ש-$x\ R\ y$ וגם $y\ R\ z$. אזי $x^2=y^2$ וגם $y^2=z^2$. מטרנזיטיביות שוויון מתקיים $x^2=z^2$ ולכן $x\ R\ z$.
- לכן R יחס שקילות. יהי $x\in A$. לכל $y\in A$, $x\ R\ y\iff x^2=y^2$, כלומר $x=\pm y$. לכן

$$^{A}/_{R}=\left\{\{x,-x\}\mid x\in\mathbb{R}_{\geq0}\right\}.$$

2. $A=\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $X\ R\ Y\iff X\cap\mathbb{Z}=Y\cap\mathbb{Z}$.

- R רפלקסיבי: לכל $X\in A$ מתקיים $X\cap\mathbb{Z}=X\cap\mathbb{Z}$ ולכן $X\ R\ X$ (לכן בפרט לא אנטי-רפלקסיבי).
- R סימטרי: לכל $X,Y\in A$ מתקיים

$$X\ R\ Y\iff X\cap\mathbb{Z}=Y\cap\mathbb{Z}\iff Y\cap\mathbb{Z}=X\cap\mathbb{Z}\iff Y\ R\ X,$$

לכן בפרט R לא אנטי-סימטרי.

- R טרנזיטיבי: יהיו $X,Y,Z \in A$ כך ש-$X\ R\ Y$ וגם $Z\ R\ Y$. אזי $X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}$ וגם $Y \cap \mathbb{Z} = Z \cap \mathbb{Z}$. מטרנזיטיביות שוויון מתקיים $X \cap \mathbb{Z} = Z \cap \mathbb{Z}$ ולכן $X\ R\ Z$.
- לכן R יחס שקילות. יהי $X \in A$. כל האיברים שביחס עם X הם אלו שמכילים את אותם מספרים שלמים כמו X. לכן

$$A/R = \{\{S \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \mid S \cap \mathbb{Z} = C\} \mid C \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

.3 $A = \mathbb{N}^+$, $a\ R\ b \iff (a-2)\cdot(b-2) \geq 0$.

- R רפלקסיבי: לכל $a \in A$ מתקיים $0 \leq (a-2)^2 = (a-2)\cdot(a-2)$, ולכן $a\ R\ a$. (לכן בפרט לא אנטי-רפלקסיבי).
- R סימטרי: לכל $a,b \in A$ מתקיים

$$a\ R\ b \iff (a-2)\cdot(b-2) \geq 0 \iff (b-2)\cdot(a-2) \geq 0 \iff b\ R\ a.$$

לכן בפרט R לא אנטי-סימטרי.

- R טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c \in A$ כך ש-$a\ R\ b$ וגם $b\ R\ c$. אזי $(a-2)\cdot(b-2) \geq 0$ ולכן $(a-2)$ ו-$(b-2)$ שווי סימן. באותו האופן $(b-2)\cdot(c-2) \geq 0$ ולכן $(b-2)$ ו-$(c-2)$ שווי סימן. מכאן, גם $(a-2)$ ו-$(c-2)$ שווי סימן ומתקיים $(a-2)\cdot(c-2) \geq 0$, כלומר $a\ R\ c$.
- לכן R יחס שקילות. יהי $x \in A$. כל $y \in A$ הוא ביחס עם x אמ"מ $(x-2)$ ו-$(y-2)$ שווי סימן. $x = 1$ הוא האיבר היחיד ב-A כך ש-$(x-2)$ שלילי, ולכן $[1]_R = \{1\}$. לכל $1 \neq x \in A$ מתקיים $(x-2)$ אי-שלילי, ולכן

$$A/R = \left\{ \{1\}, \underbrace{\mathbb{N}^+ \setminus \{1\}}_{\{2,3,\dots\}} \right\}.$$

מחלקות השקילות של יחס החפיפה מודולו d

הגדרה 4. יהיו $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}^+, r \in \mathbb{N}$. נאמר ש-$n$ **מתחלק ב-d עם שארית** r אמ"מ $r < d$ וקיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q + r$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}^+$. הוכח בתרגיל הבית כי קיים $r \in \mathbb{N}$ כך ש-n מתחלק ב-d עם שארית r, ושמספר זה הוא יחיד (אין שניים שונים כאלה). נסמן מספר זה ב-$n \mod d$ ("n מודולו d").

יחס החפיפה מודולו d מוגדר מעל $\mathbb{Z}$ ויסומן ב-$\equiv_d$. לכל $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \equiv_d n$ אמ"מ $d \mid (m-n)$.

טענה 1. יהי $d \in \mathbb{N}^+$. לכל $m,n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $m \equiv_d n$ אמ"מ קיים $r \in \mathbb{N}$ כך ש-$m \mod d = r$ וגם $n \mod d = r$ (כלומר $n \mod d = m \mod d$).

הוכחה. יהי $d \in \mathbb{N}^+$ ויהיו $m,n \in \mathbb{Z}$, נוכיח את שני כיווני הטענה.

- אם $m \equiv_d n$ אז $n \mod d = m \mod d$.
  נסמן $r = m \mod d$ ו-$s = n \mod d$, ונניח בה"כ כי $s \geq r$. מהגדרת חלוקה עם שארית, קיימים $p,q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m = d \cdot p + r$ ו-$n = d \cdot q + s$. אזי,
  $$m - n = (d \cdot p + r) - (d \cdot q + s) = d \cdot (p - q) + (r - s)\,.$$
  לכן, מהגדרת חלוקה עם שארית, $m-n$ מתחלק ב-d עם שארית $r-s$. בנוסף, הוכחנו בתרגיל הבית ש-$m-n$ לא יכול להתחלק ב-d עם שתי שאריות שונות. מכאן
  $$r - s = 0 \implies r = s.$$
  ולכן $n \mod d = m \mod d$.

- אם $n \mod d = m \mod d$ אז $m \equiv_d n$.
  נסמן $r = m \mod d$. מהגדרת חלוקה עם שארית, קיימים $p,q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m = d \cdot p + r$ ו-$n = d \cdot q + r$. מכאן
  $$m - n = (d \cdot p + r) - (d \cdot q + r) = d \cdot (p - q)\,.$$
  לכן עבור $p - q \in \mathbb{Z}$ מתקיים $m - n = d \cdot (p - q)$, ולכן $d \mid (m - n)$ ומתקיים $m \equiv_d n$.

□

טענה 2. יהי $d \in \mathbb{N}^+$ ויהי $d > r \in \mathbb{N}$. מחלקת השקילות $[r]$ של $\equiv_d$ היא קבוצת כל המספרים השלמים שמתחלקים ב-d עם שארית r. בנוסף, כל מחלקות השקילות של $\equiv_d$ הן מהצורה הזו.

הוכחה. יהי $d \in \mathbb{N}^+$ ויהי $d > r \in \mathbb{N}$. נוכיח שלכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $n \in [r]$ אמ"מ n מתחלק ב-d עם שארית r.

- ידוע ש-$n \in [r]$ אמ"מ $r \equiv_d n$, ומטענה 1 ש-$r \equiv_d n$ אמ"מ $n \mod d = r \mod d$. בנוסף, $r \mod d = r$, ולכן n מתחלק ב-d עם שארית r.

- כדי להוכיח שכל מחלקות השקילות של $\equiv_d$ הן מצורה זו, נראה שלכל $n \in \mathbb{Z}$ קיים $r < d$ כך ש-$[r] = [n]$. יהי $n \in \mathbb{Z}$. נבחר $r = n \mod d$ ונקבל $[r] = [n]$.

□