מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 3

תזכורת :- תהיינה $A_1, A_2, \dots$ קבוצות. נאמר ש- $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ אם קיים $i \in \mathbb{N}^+$ כך ש- $x \in A_i$. ונאמר $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ אם לכל $i \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $x \in A_i$.

תרגיל :- תהיינה $T = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$, $S = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ משפחות (= קבוצה של קבוצות).

הוכיחו $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} (A_i \setminus B_i)$

פתרון :- יהי $x \in \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i\right)$ לכן $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i$

וגם $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$.

$\Leftarrow$ קיים $j \in \mathbb{N}^+$ כך ש- $x \in A_j$.

בנוסף, לכל $i \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $x \notin B_i$.

סה"כ עבור אותו $j \in \mathbb{N}^+$ המקיים $x \in A_j$ מתקיים $x \notin B_j$

$\Leftarrow$ $x \in A_j \setminus B_j$ $\Leftarrow$ $x \in A_j \setminus B_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} (A_i \setminus B_i)$

סה"כ $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i \setminus B_i$.

יחסים בינאריים :-

הגדרה :- תהי A קבוצה. יחס בינארי על A הוא תת-קבוצה של $A \times A$ שנסמנה R. כלומר R הוא אוסף של זוגות סדורים. לכל $a,b \in A$ אנו מסמנים aRb או $(a,b) \in R$ ואומרים ש- a הוא ביחס R עם b אם ורק אם $(a,b) \in R$.

הגדרות:- תהי A קבוצה כלשהי. יחס בינארי R על A $(R\subseteq A\times A)$ יקרא יחס:-

1. רפלקסיבי:- אם ורק אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. אנטי-רפלקסיבי:- אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\notin R$.
3. סימטרי:- $(a,b)\in R \longrightarrow (b,a)\in R$.
4. אנטי-סימטרי:- $(a,b)\in R$ וגם $(b,a)\in R \longrightarrow a=b$.
5. טרנזיטיבי:- $(a,b)\in R$ וגם $(b,c)\in R \longrightarrow (a,c)\in R$.

תרגיל:- תהי

$A=\{$ יובל פוקס, רומי בוזגלו, גיא עמנואל, נסים אבו חמוד, עמנואל קסיס, לי אבוגלאי $\}$

נגדיר יחס R על A באופן הבא:-

לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x,y)\in R$ אם ורק אם האות האחרונה בשם המשפחה של x זהה לאות האחרונה בשם המשפחה של y.

כתבו את כל איברי R וקבעו איזה סוג יחס הוא מבין 5 הסוגים שהוגדרו למעלה.

פתרון:- לשם נוחות נסמן:-

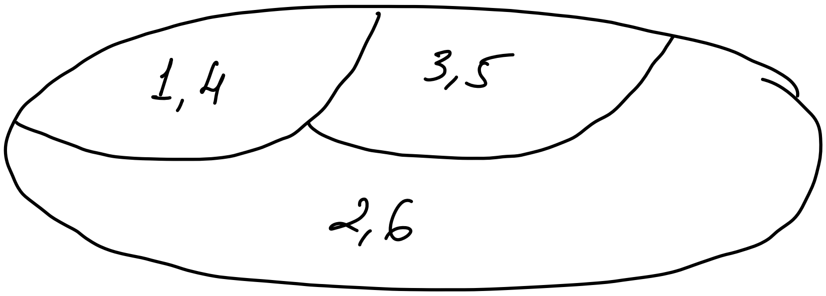
יובל פוקס, רומי בוזגלו, גיא עמנואל, נסים אבו חמוד, עמנואל קסיס, לי אבוגלאי
6 5 4 3 2 1

אז:

$$R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(2,6),(6,2),(6,6),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$$

R הוא יחס רפלקסיבי, בפרט לא אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, הוא לא אנטי-סימטרי (כי: $(1,4)\in R$ וגם $(4,1)\in R$ אבל $1\neq 4$) והוא יחס טרנזיטיבי.

הערה :- זה יחס שקילות כי הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.



תרגיל :- מצאו אלו מבין 5 התכונות של יחס (שלמדנו) מקיים כל אחד מהיחסים הבאים כאשר הוא מוגדר בכל אחת מבין שלושת הקבוצות $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \{3,5,7,9\}$.

א) $(k,l)\in R \iff$ קיים $m\in\mathbb{Z}$ אי-זוגי כך ש- $k=m\cdot l$.

ב) $(k,l)\in S \iff$ קיים $m\in\mathbb{Z}$ זוגי כך ש- $k=m\cdot l$.

פתרון :- א. R רפלקסיבי בכל שלושת הקבוצות כי לכל $a\in\mathbb{Z}$ בפרט $a\in\mathbb{N}^+$ וגם $a\in\{3,5,7,9\}$ מתקיים $(a,a)\in R$ כי אם נבחר $m=1$ אי-זוגי ונקבל $a=1\cdot a$.

R אנטי-רפלקסיבי :- הוא לא אנטי-רפלקסיבי בכל הקבוצות כי הוא רפלקסיבי בכל הקבוצות.

R אינו סימטרי באף אחת מבין שלושת הקבוצות כי מתקיים $9R3$ אבל $(3,9)\notin R$.

R אינו אנטי-סימטרי ב- $\mathbb{Z}$, שכן $\underbrace{(3,-3)\in R \text{ וגם } (-3,3)\in R}_{m=-1}$ אבל $3\neq -3$.

אולם, R כן אנטי-סימטרי ב- $\mathbb{N}^+$ וגם ב- $\{3,5,7,9\}$ כי אם $(k,l)\in R$ בקבוצות האלו זה אומר ש- $k\geq l$ כי $k=m\cdot l$ וגם k,l חיוביים אז בהכרח m חיובי.

לכן אם $(k,l)\in R$ וגם $(l,k)\in R$ אז $k\geq l$ וגם $l\geq k \Leftarrow k=l$.

R כן טרנזיטיבי בכל הקבוצות כי: אם $(k,l)\in R$ וגם $(l,t)\in R$ אז
קיימים $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ אי-זוגיים כך ש- $k=m_1\cdot l$ ו- $l=m_2\cdot t$
ואז $k=m_1\cdot l=\underbrace{m_1\cdot m_2}_{\text{אי-זוגי שלם}}\cdot t$ ולכן $(k,t)\in R$.

ב) S אינו רפלקסיבי בכל אחת מהקבוצות כי: אם $a\in\mathbb{Z}$ כך ש-
$(a,a)\in S$ אז קיים $m\in\mathbb{Z}$ זוגי כך ש- $a=m\cdot a$. אבל זה יתכן רק
אם $m=1$ או $a=0$.
S אינו יחס אנטי-רפלקסיבי ב- $\mathbb{Z}$ כי: $(0,0)\in S$
מצד שני, S הוא כן אנטי-רפלקסיבי ב- $\mathbb{N}^+$ וגם ב- $\{3,5,7,9\}$.
S אינו סימטרי ב- $\mathbb{Z}$ וב- $\mathbb{N}^+$ כי: $\underbrace{(4,2)\in S}_{m=2}$ אבל $(2,4)\notin S$.
אולם S הוא כן סימטרי ב- $\{3,5,7,9\}$ כי אין אף זוג מהקבוצה הזו
שהוא ביחס S.
S כן טרנזיטיבי :- אותה הוכחה כמו בסעיף א'.
S אנטי-סימטרי בקבוצות $\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}^+$ כי: מהטרנזיטיביות
נקבל שאם $(k,l)\in S$ וגם $(l,k)\in S$ אז $(l,l)\in S$
אבל זה לא ייתכן ב- $\{3,5,7,9\}$ ו- $\mathbb{N}^+$.
בנוסף, S הוא כן אנטי-סימטרי ב- $\mathbb{Z}$ כי: שוב מטרנזיטיביות נקבל
אם $(k,l)\in S$ וגם $(l,k)\in S$ אז $(l,l)\in S$ אבל זה נכון רק עבור
$l=0$. ואם $l=0$ ומתקיים $(k,l)\in S$ אז בהכרח $k=0$
$\Rightarrow l=k$.

יחסי שקילות :-

הגדרה :- יחס R נקרא יחס שקילות אם הוא :-
1. רפלקסיבי 2. סימטרי 3. טרנזיטיבי.

הגדרה :- תהי A קבוצה ויהי R יחס שקילות על A. יהי $a\in A$ כלשהו. מחלקת השקילות של a ביחס ל-R מוגדרת להיות :-

$$[a]_R := \{b\in A \mid bRa\}$$

במילים :- $[a]_R$ היא קבוצת כל האיברים בקבוצה A שהם ביחס R עם האיבר a.

הערה :- 1. $[a]_R\neq\phi$ כי $a\in[a]_R$.

2. אם aRb אז $[a]_R=[b]_R$.

3. אם $(a,b)\notin R$ אז $[a]_R\cap[b]_R=\phi$.

הגדרה :- אם A קבוצה ו- R יחס שקילות על A נגדיר קבוצת המנה

$$A/_R = \{[a]_R \mid a\in A\}$$

לדוגמה ביחס הראשון שהגדרנו היום (בשאלה השניה בתרגול) קבוצת המנה היא