מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 11

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: גרפים 2.

הגדרה 1. גרף $G=(V,E)$ הוא עץ אם הוא קשיר וחסר מעגלים.

משפט 1. גרף $G=(V,E)$ הוא עץ אמ"מ שניים מתוך שלושת התנאים הבאים מתקיימים:

1. G קשיר.
2. G חסר מעגלים.
3. $|E|=|V|-1$.

תרגיל 1. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו כי G הוא עץ אמ"מ קיים מסלול יחיד בין כל זוג קודקודים בגרף.

פתרון 1. נוכיח את שני כיווני הטענה.

- ($\Longleftarrow$) נניח כי $G=(V,E)$ הוא עץ.
  - מכיוון ש-G קשיר, קיים מסלול בין כל זוג קודקודים בגרף.
  - נניח בשלילה שקיימים $u,v\in V$ כך שיש שני מסלולים P,Q שונים $u\rightsquigarrow v$. נסמן:
  $$P=u,v_1,\dots,v_k,v$$
  $$Q=u,u_1,\dots,u_l,v$$
  - מכיוון ש-P,Q מתחילים ב-u ומסתיימים ב-v, יש להם רישא (prefix) משותפת וסיפא (suffix) משותפת. נסמן ב-x את הקודקוד האחרון ברישא המשותפת, וב-y את הקודקוד הראשון בסיפא המשותפת. לכן, x ו-y מופיעים ב-P וגם ב-Q.
  - מהצורה שבה בחרנו את x ו-y, אין קודקודים משותפים על תת-המסלול $x\rightsquigarrow y$ ב-P או ב-Q.

- לכן, המסלול הבא הוא מעגל פשוט: $x \underset{P}{\rightsquigarrow} y \underset{Q}{\rightsquigarrow} x$: נקודת ההתחלה והסיום זהות, וגם כל הקודקודים באמצע מופיעים לכל היותר פעם אחת - בסתירה לכך ש-G עץ.

- ($\Longrightarrow$)

  - מכיוון שקיים מסלול יחיד בין כל זוג קודקודים בגרף, ברור כי הגרף קשיר.
  - נניח בשלילה שקיים מעגל פשוט $C = v_0, \ldots, v_k$ ($v_0 = v_k$) ב-G.
  - נסתכל על זוג הקודקודים v_0, v_1. מחד גיסא, המסלול v_0, v_1 הוא מסלול $v_0 \rightsquigarrow v_1$ בגרף.
  - מאידך, המסלול $v_0, v_{k-1}, \ldots, v_1$ הוא מסלול נוסף בגרף (מכיוון ש-$k \geq 2$). מכאן, קיימים שני מסלולים שונים בין v_0, v_1 - סתירה.

תרגיל 2. יהי $T = (V, E)$ עץ ויהיו $u, v \in V$ כך ש-$e = \{u, v\} \notin E$. יהי $G = (V, E \cup \{e\})$. הוכיחו כי קיים ב-G מעגל פשוט יחיד.

פתרון 2. נוכיח שקיים מעגל יחיד בגרף.

- מכיוון ש-T קשיר, קיים מסלול פשוט $v \rightsquigarrow u$ ב-T, ולכן שאינו מכיל את e. אזי, המסלול $u \underset{T}{\rightsquigarrow} v \underset{e}{\rightarrow} u$ הוא מעגל פשוט ב-G.
- נניח בשלילה שקיימים שני מעגלים שונים בגרף $C_1 \neq C_2$.
  - תחילה, שני המעגלים מכילים את e, מכיוון ש-T חסר מעגלים.
  - במידה ונוריד את e מכל אחד מהמעגלים נקבל מסלול $v \rightsquigarrow u$.
  - מכיוון ש-$C_1 \neq C_2$, ו-e מופיעה בשניהם, לאחר הורדת e שני המסלולים שונים.
  - קיבלנו שקיימים שני מסלולים שונים $v \rightsquigarrow u$ בגרף - סתירה.

תרגיל 3. יהי $T = (V, E)$ עץ כך ש-$|V| \geq 2$. הוכיחו שב-T יש עלה (צומת שדרגתו 1).

פתרון 3. נשתמש בעיקרון המינימום:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leq j \leq n} a_j}{n} = \frac{n \cdot \min_{1 \leq j \leq n} a_j}{n} = \min_{1 \leq j \leq n} a_j$$

$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n} < 2$$

מעיקרון המינימום, קיים קודקוד שדרגתו לכל היותר $2 - \frac{2}{n} < 2$. מכיוון שהדרגה שלמה, נקבל שהאפשרויות הן $\{0, 1\}$, ומכיוון ש-T קשיר הדרגה לפחות 1. בסך הכל, קיים עלה בעץ.

הגדרה 2. יהי $G=(V,E)$ גרף. מסלול אוילר ב-G הוא מסלול בו כל קשת $e\in E$ מופיעה פעם אחת בדיוק.

הערה **1.** מעגל הוא מסלול, ולכן מעגל אוילר הוא מסלול אוילר.

טענה **1.** יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. ב-G קיים מסלול אוילר אמ"מ מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא 0 או 2.

הוכחה. נוכיח את שני כיווני הטענה:

- ($\Longrightarrow$) נפריד למקרים:
  - במקרה שבו יש 0 קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית, כל הקודקודים בעלי דרגה זוגית, ולכן קיים מעגל אוילר - סיימנו.
  - אחרת, קיימים $u\neq v\in V$ בעלי דרגה אי-זוגית, כאשר כל שאר הקודקודים בעלי דרגה זוגית.
    * נוסיף קודקוד חדש w גרף, יחד עם הקשתות $\{v,w\},\{u,w\}$. כעת, דרגות u,v,w הן זוגיות, ודרגות כל שאר הקודקודים לא השתנו. לכן קיים מעגל אוילר בגרף החדש, נסמנו ב-

$$e_1,\ldots,e_i,\{v,w\},\{u,w\},e_{i+2},\ldots,e_{|E|+2}.$$

לכן, מכיוון שהמסלול לעיל הוא מעגל, המסלול

$$e_{i+2},\ldots,e_{|E|+2},e_1,\ldots,e_i$$

הינו מסלול אוילר בגרף המקורי (ל-$e_{|E|+2},e_1$ יש קודקוד משותף).

- ($\Longleftarrow$) נניח שב-G קיים מסלול אוילר.
  - אם מסלול האוילר מעגלי, לפי משפט דרגות כל הקודקודים זוגיות וסיימנו.
  - אחרת, נסמן את נקודות ההתחלה והסיום של המסלול ב-u ו-v בהתאמה ($u\neq v$).
  - לכל קודקוד בפנים המסלול (שונה מ-u,v), בכניסה לקודקוד וביציאה ממנו נספור שתי קשתות. מכיוון שכל קשת של הקודקודים נספרת בדיוק פעם אחת, נקבל שהדרגה הוא כפעמיים מספר המופעים. לכן, דרגת כל הקודקודים פרט ל-u,v זוגית.
  - מכיוון שכל הופעה של קודקוד בפנים המסלול מוסיפה שתי קשתות בדיוק, הדבר אינו משפיע על זוגיות הדרגה שלו. בנוסף, u ו-v סופרים קשת אחת נוספת: הקשת הראשונה והאחרונה של המסלול בהתאמה. לכן דרגתם של u ו-v אי-זוגית.

$\square$

הגדרה 3. יהי $G=(V,E)$ גרף. תת-גרף $T=(V',E')$ של G הוא עץ פורש אם $V'=V$ וגם T הוא עץ.

תרגיל 4. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכיחו כי G קשיר אמ"מ קיים ל-G עץ פורש.

פתרון 4. נוכיח את שני כיווני הטענה.

- **($\Longrightarrow$)** יהי T עץ פורש של G. מכיוון ש-T קשיר וגם $V(T)=V$, קיים מסלול המשתמש בקשתות T בלבד בין כל זוג קודקודים ב-V. מכיוון ש-T הוא תת-גרף של G, נקבל ש-G קשיר (כל מסלול שקיים ב-T קיים גם ב-G).
- **($\Longleftarrow$)**
  - אלגוריתם - נפריד למקרים:
    * אם G הוא עץ, סיימנו - G הוא עץ פורש של עצמו.
    * אחרת, מכיוון ש-G כבר קשיר, קיים מעגל פשוט C בגרף.
    * ראינו כי במידה ומסירים קשת ממעגל פשוט בגרף קשיר, הקשירות נשמרת.
    * נסיר קשת שרירותית מ-C מהגרף, ונחזור חלילה.
  - מכיוון שהגרף סופי, ובכל צעד אנו מורידים קשת אחד בדיוק, בסופו של דבר נגיע למצב בו $|E|=|V|-1$ ונקבל עץ פורש.

הגדרה 4. גרף $G=(V,E)$ הוא דו-צדדי אם קיימת חלוקה $\mathcal{F}=\{A,B\}\subseteq\mathcal{P}(V)$ כך שלכל $e=\{u,v\}\in E$ מתקיים $u\in A\wedge v\in B$.

תרגיל 5. הוכיחו כי גרף $G=(V,E)$ הוא דו-צדדי אמ"מ לא קיים ב-G מעגל באורך אי-זוגי.

פתרון 5. נוכיח את שני כיווני הטענה.

- **($\Longleftarrow$)** נניח ש-G גרף דו-צדדי, ונניח בשלילה שקיים מעגל ב-G באורך אי-זוגי.
  - נסמן את המעגל ב-$v_1,\dots,v_k$ ($v_1=v_k$), ונניח בה"כ כי $v_1\in A$.
  - מכיוון ש-$\{v_1,v_2\}\in E$, מתקיים $v_2\in B$. באופן דומה, כל קודקוד במרחק זוגי במעגל מ-v_1 שייך ל-A, והשאר ל-B.
  - הצומת v_{k-1} במרחק זוגי מ-v_1, לכן $v_{k-1}\in A$. בנוסף $\{v_{k-1},v_1\}\in E$ - בסתירה לכך שהגרף דו-צדדי ($v_1,v_{k-1}\in A$).
- **($\Longrightarrow$)**

- לכל רכיב קשירות $K \subseteq V$ נפעל באופן הבא: יהי $v \in K$ שרירותי. נגדיר את הקבוצות הבאות:

$$A_K = \{u \in V \mid \textbf{dist}\,(v,u) \equiv 0 \mod 2\}$$

$$B_K = \{u \in V \mid \textbf{dist}\,(v,u) \equiv 1 \mod 2\}$$

נניח בשלילה שקיימת $e = (x,y) \in E$ כך שבה"כ $x, y \in A_K$. אזי קיימים מסלולים באורכים זוגיים $x \rightsquigarrow v$ ו-$y \rightsquigarrow v$. אזי, המסלול

$$v \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow v$$

הוא באורך אי-זוגי - סתירה. ברור כי A_K, B_K זרות.

- בסך הכל, נגדיר את הקבוצות A, B להיות:

$$A = \bigcup A_K$$

$$B = \bigcup B_K$$

ברור ש-A, B היא חלוקה. בנוסף, מכיוון שאין קשתות בין רכיבי קשירות שונים, תכונת הדו-צדדיות נשמרת.