מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 7

הגשה ליום חמישי, 12/9 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. יהי $m \in \mathbb{N}^+$. נגדיר

$$X = \{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid m \cdot q \in \mathbb{Z}\}.$$

הוכיחו כי X סופית, ומצאו את $|X|$.

שאלה 2. תהיינה A, B קבוצות זרות, ותהי X קבוצה כלשהי. הוכיחו כי

$$\left|X^{A \cup B}\right| = \left|X^A \times X^B\right|.$$

שאלה 3. בשאלה זו נוכיח שלכל תת-קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים מינימום (לפי היחס $\leq$ הסטנדרטי).

א. הוכיחו שלכל קבוצה סופית $A \subseteq \mathbb{N}$ קיים מינימום.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ קיים מינימום.

שאלה 4. הוכיחו באינדוקציה את הטענה הבאה: לכל קבוצה סופית $A \neq \emptyset$ ולכל יחס סדר חלקי R מעל A, קיים ב-A איבר מינימלי לפי R.

הערה **1.** העזרו בטענה הבאה (ניתן להשתמש ללא הוכחה): אם (A, R) היא קס"ח ו-$A' \subseteq A$, אז $R' = R \cap (A' \times A')$ הוא יחס סדר חלקי מעל A'. לאחר מכן, בצעד האינדוקציה הסירו איבר מ-A והפרידו למקרים.

שאלה 5. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים ייצוג בינארי יחיד, כלומר קיים $r \in \mathbb{N}$ ו-$c_0, \ldots, c_r \in \{0,1\}$, וגם $c_r = 1$ כך ש-

$$n = c_r \cdot 2^r + c_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \cdots + c_0 = \sum_{i=0}^{r} c_i \cdot 2^i,$$

ובנוסף ייצוג זה יחיד.

רמז: השתמשו באינדוקציה חזקה, והפרידו למקרים לפי זוגיות המספר בצעד.

שאלה 6. נגדיר סדרה $(a_n)_{n\geq 0}$ באופן הבא:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \begin{cases} 1 & n \leq 2 \\ a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-3} & n > 2 \end{cases}.$$

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq 2^n$.

שאלה 7. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ויהי $G = (V, E)$ גרף בעל n צמתים חסר משולשים (כלומר לא מכיל מעגלים בגודל 3).

א. הוכיחו שלכל זוג שכנים $u, v \in V$ מתקיים $\deg(u) + \deg(v) \leq n$.

ב. נניח כי n זוגי ונסמן $k = n/2$. הוכיחו (באינדוקציה על k) ש-$|E| \leq k^2$.