מתמטיקה דיסקרטית
תרגול מס' 7

יחסי סדר:-

הגדרה:- תהי A קבוצה ויהי $R\subseteq A\times A$ יחס על A. נאמר ש-R יחס סדר חלקי אם:- 1. רפלקסיבי.
2. אנטי-סימטרי.
3. טרנזיטיבי.

ואז לזוג (A,R) קוראים קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).

הגדרה:- תהי (A,R) קס"ח. נאמר כי (A,R) קבוצה סדורה לינארית/מלאה/קווית אם לכל $x,y\in A$ מתקיים xRy או yRx.
כלומר (A,R) קבוצה סדורה לינארית (קס"ל) אם R הוא יחס סדר חלקי וכל שני איברים בקבוצה A ניתנים להשוואה (הם ביחס)

דוגמאות:- 1. תהי $A=\mathbb{N}^+$ ונגדיר יחס R על A להיות יחס ההתחלקות, כלומר לכל $x,y\in A$ מתקיים $xRy \iff x|y$ (x מחלק את y)
ואז $(\mathbb{N}^+,R)$ קס"ח.

2. תהי A קבוצה כלשהי ותהי $B=P(A)$. נגדיר יחס R על B להיות יחס ההכלה של קבוצות. כלומר לכל $X,Y\in B$ נאמר כי $XRY \iff X\subseteq Y$. הזוג $(B,\subseteq)$ קס"ח.

דוגמה לקבוצה סדורה לינארית:- היחס $\leq$ של מספרים על הקבוצה $\mathbb{N}$. $(\mathbb{N},\leq)$ קס"ל.

הערה חשובה:- כאשר (A,R) קס"ח או קס"ל, אם רושמים aRb אז הכוונה a קטן שווה ל-b לפי היחס הנתון.

* בדרך כלל אם R יחס סדר חלקי/מלא מסמנים במקום R "≤".

הגדרה :- תהי A קבוצה כלשהי ויהי R יחס כלשהו על A. נגדיר את היחס R^{-1} על A באופן הבא :-

$$\forall x,y\in A:\quad xR^{-1}y \longleftrightarrow yRx$$

במילים אחרות, R^{-1} הופך את כל הזוגות שיש ב-R.
קוראים לו הסדר ההפוך של R.

לדוגמה :- אם $A=\{1,2,3\}$ ו- R הוא היחס ≤ הרגיל של מספרים. כלומר $1\le2\le3$. אזי R^{-1} הוא היחס $1\ge2\ge3$

בכתיב של זוגות סדורים :-

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$$
$$R^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(3,2),(3,1)\}$$

תרגיל :- תהי (A,R) קס"ח. הוכיחו (A,R^{-1}) היא גם קס"ח.

פתרון :- 1. רפלקסיביות :- יהי $a\in A$. נתון ש- (A,R) קס"ח לכן יחס רפלקסיבי. זאת אומרת aRa. לכן aRa $aR^{-1}a$ (הפכנו בין a ל-a)
$\Leftarrow$ R^{-1} רפלקסיבי.

2. אנטי-סימטריות :- יהיו $x,y\in A$ כך ש- $xR^{-1}y$ וגם $yR^{-1}x$. צ"ל $y=x$. $xR^{-1}y$ לכן yRx. בנוסף $yR^{-1}x$ לכן xRy.
קיבלנו xRy וגם yRx. אבל R יחס אנטי-סימטרי לכן $y=x$.

3. טרנזיטיביות :- יהיו $a,b,c\in A$ כך ש- $bR^{-1}c$, $aR^{-1}b$. צ"ל $aR^{-1}c$.
$aR^{-1}b$ לכן bRa.
$bR^{-1}c$ לכן cRb.
cRb, bRa. אבל R טרנזיטיבי לכן cRa $\Leftarrow$ $aR^{-1}c$. סה"כ (A,R^{-1}) קס"ח.

איברים מיוחדים בקס"ח

הגדרות :- תהי (A,R) קבוצה סדורה חלקית. איבר $a\in A$ נקרא :-

1. מינימלי :- אם לא קיים $a\neq b\in A$ כך ש- bRa. $(b<a)$
2. מינימום/קטן ביותר :- אם לכל $b\in A$ מתקיים aRb.
3. מקסימלי :- אם לא קיים $a\neq b\in A$ כך ש- aRb. $(a<b)$
4. מקסימום (גדול ביותר) :- אם לכל $b\in A$ מתקיים bRa.

הערה :- ההבדל בין מקסימלי למקסימום זה שהמקסימלי הוא לא בהכרח בהשוואה עם כל שאר האיברים. אבל מקסימום הוא כן בהשוואה עם כל שאר האיברים והוא גדול מהם (מבחינת יחס).
כנ"ל עבור מינימום/מינימלי.

תרגיל :- תהי $A=\{2,3,4,\dots,20\}$ נגדיר על A יחס R להיות יחס ההתחלקות. כלומר $xRy \iff x$ מחלק את y $(x|y)$.

א. מצאו את האיברים המקסימליים (אם יש).
ב. מצאו את האיברים המינימליים (אם יש).
ג. מצאו מקסימום ומינימום (אם יש).
ד. אם באחד הסעיפים לא מצאתם איבר הוסיפו לקבוצה A איבר שיענה על דרישות הסעיף.
ה. שרטטו את דיאגרמת הסה לקס"ח $(A,|)$.

פתרון :- א. איבר $x\in A$ הנו מקסימלי אם הוא לא מחלק אף מספר אחר ב-A.
לכן האיברים המקסימליים הם $\{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

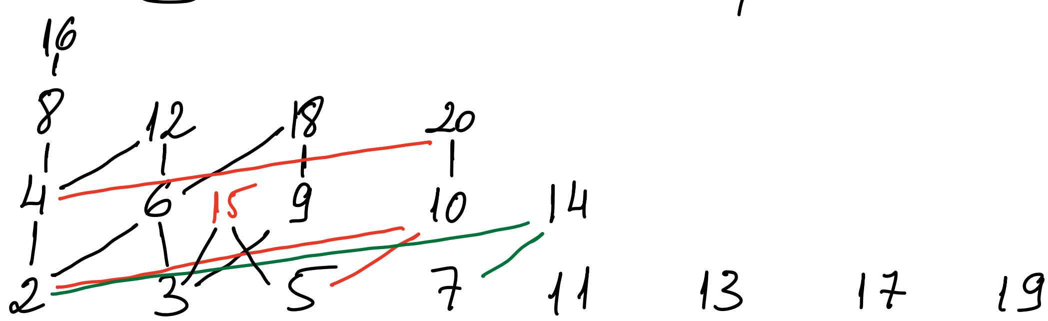
ב. איבר $x\in A$ הוא מינימלי אם הוא לא מתחלק באף מספר אחר שונה ממנו ב-A. לכן האיברים המינימליים הם $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ כל הראשוניים.

ג+ד. אין איבר בקבוצה A שהוא מקסימום כי אין אף איבר שמתחלק בכל שאר האיברים ב-A. אם נוסיף לקבוצה A $20!$ $(20! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 20)$ אז $20!$ יהיה מקסימום.

בנוסף אין מינימום ב-A כי אין אף איבר ב-A שמחלק את כל שאר האיברים. אם נוסיף את 1 ל-A אז הוא יהיה מינימום.

הערה:- אם מוסיפים לקבוצה A את $20!$ ו- 1. אז $20!$ יהיה מקסימום כלומר מקסימלי יחיד ו- 1 יהיה מינימום כלומר מינימלי יחיד (כלומר הפתרון של סעיפים א+ב יהיה שונה).

ה.



תרגיל:- הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:-

א. אם R ו- S שני יחסי סדר חלקי על X, אז: $R\cap S$ גם יחס סדר חלקי על X.

ב. אם R ו- S שני יחסים מלאים אז $R\cap S$ יחס סדר מלא.

פתרון:- א. הטענה נכונה. ראינו בתרגיל הבית שאם R ו- S הם יחסים על אותה הקבוצה כך ש:

1) שניהם רפלקסיביים אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

2) שניהם אנטי-סימטריים אז $R\cap S$ אנטי-סימטרי.

3) שניהם טרנזיטיביים אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

סה"כ $R\cap S$ יחס סדר חלקי.

ב. לא נכון. דוגמה נגדית :- $X=\{1,2\}$.

$$R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$$

$$S=\{(1,1),(2,2),(2,1)\}$$

$$R\cap S=\{(1,1),(2,2)\}$$

R,S מלאים אבל $R\cap S$ לא מלא כי $1,2$ לא ניתנים להשוואה.

דיון :- תהיינה (A,R) , (B,S) שתי קבוצות סדורות חלקית.
ניתן להגדיר יחסים על $A\times B$ באופן הבא :-

1. $\le_{lex}$ (לקסיקוגרפי) : $\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$:

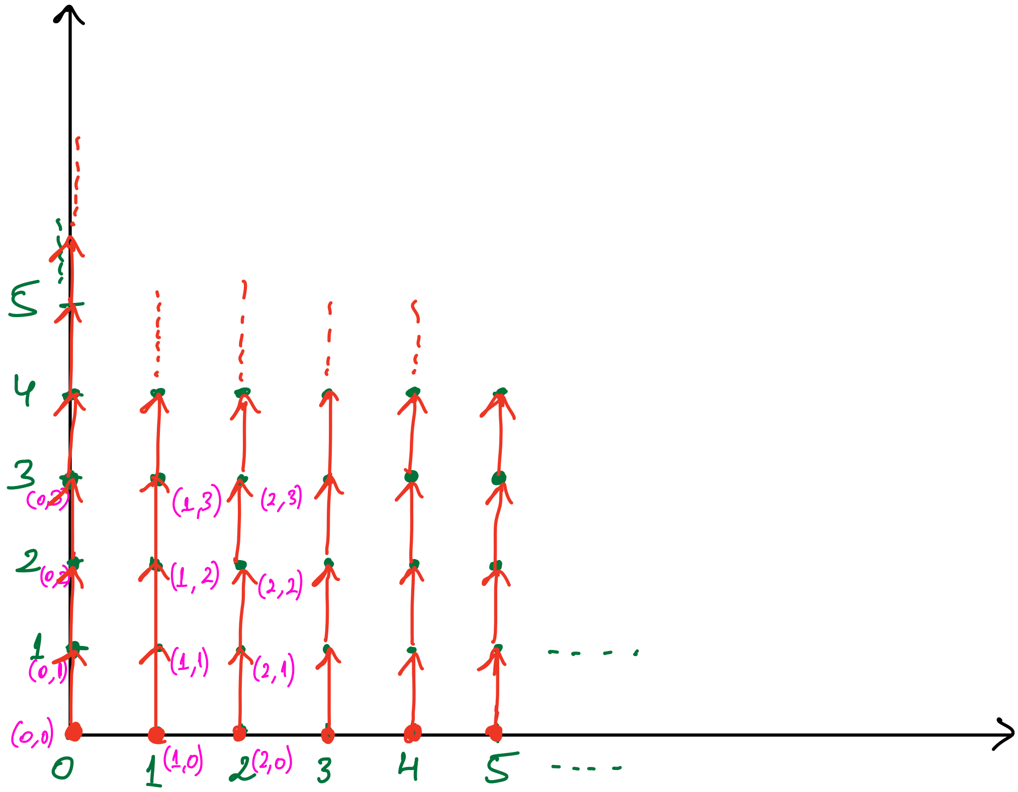
$$(a_1,b_1)\le_{lex}(a_2,b_2) \iff \underbrace{(a_1 R a_2 \text{ וגם } a_1\neq a_2)}_{a_1<a_2} \text{ או } \underbrace{(a_1=a_2 \text{ וגם } b_1 S b_2)}_{a_1=a_2 \text{ וגם } b_1\le b_2}$$

2. $\le_{cart}$ (קרטזי) : $\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$:

$$(a_1,b_1)\le_{cart}(a_2,b_2) \iff \underbrace{(a_1 R a_2 \text{ וגם } b_1 S b_2)}_{a_1\le a_2 \text{ וגם } b_1\le b_2}$$

הערה :- ראינו בהרצאות שהיחסים $\le_{lex}$, $\le_{cart}$ הם יחסי סדר חלקי.
בנוסף, אם (A,R) , (B,S) הן קס"ל אז היחס $\le_{lex}$ הוא יחס סדר מלא על $A\times B$. אבל $\le_{cart}$ הוא לא כך.
למשל :- $(\mathbb{N},\le)$ $\le$ הרגיל של מספרים. ואז $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_{cart})$ היא קס"ח אבל אינה קס"ל כי $(1,2),(2,1)$ הם לא ביחס.
לעומת זאת, נתבונן ב- $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_{lex})$:-

ציור בעמוד הבא :-



הערה :- אם (x,y) נמצא בעמודה יותר ימנית מ- (a,b) אז $(a,b) \lneq_{lex} (x,y)$. ואם (x,y) ו- (a,b) באותה עמודה אז $x=a$ ואז אם $b\le y$ אז $(a,b)\le_{lex}(x,y)$ ואם $y\le b$ אז ההפך...

תרגיל :- יהי R יחס טרנזיטיבי ורפלקסיבי על קבוצה A. אז $R\cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות.

פתרון :- תעשו לבד.