מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 12

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: קומבינטוריקה 1/3.

שיטות ספירה.

- **עיקרון הסכום:** עבור קבוצות סופיות זרות A, B מתקיים $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- **עיקרון ההפרש:** עבור קבוצות סופיות A, B כך ש-$B \subseteq A$ מתקיים $|A \setminus B| = |A| - |B|$.
- **עיקרון הכפל:** עבור קבוצות $A_1, \ldots, A_k$ מתקיים

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{k} A_i \right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \, .$$

- מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$.
- מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$.
- לכל $n, k \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} .$$

תרגיל 1. תהי V קבוצה סופית כך ש-$|V| = n$.

1. מה מספר היחסים הבינאריים השונים על V?
2. מה מספר הגרפים הפשוטים $G = (V, E)$ (לא מכוונים)?

	עם חזרות	ללא חזרות
עם חשיבות לסדר	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{n}{k}$

טבלה 1: מספר הדרכים לבחירת k איברים מתוך n.

פתרון 1. **1.** מספר הזוגות הסדורים הוא בדיוק $|V^2| = |V \times V| = n^2$. מספר היחסים השונים הוא כמספר תתי-הקבוצות השונות של V^2. לכן, מספר היחסים השונים הוא

$$\left|\mathcal{P}\left(V^2\right)\right| = 2^{n^2}.$$

2. יש $\binom{n}{2}$ קשתות אפשריות ל-G. E יכולה להיות כל תת-קבוצה של קשתות, וכל קבוצה כזו מגדירה גרף שונה. לכן,

$$2^{\binom{n}{2}}.$$

תרגיל 2. מצאו את מספר הפתרונות למשוואה

$$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad \forall 1 \leq i \leq k : x_i \geq 1.$$

פתרון 2. ראינו בהרצאה כי מספר הפתרונות למשוואה

$$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad \forall 1 \leq i \leq k : x_i \geq 0$$

הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$. לכל $1 \leq i \leq k$ נגדיר $y_i = x_i - 1$. כעת, המשוואה המקורית שקולה ל-

$$(y_1 + 1) + \cdots + (y_k + 1) = n, \quad \forall 1 \leq i \leq k : y_i \geq 0.$$

$$y_1 + \cdots + y_k + k = n \iff y_1 + \cdots + y_k = n - k.$$

נשתמש בפתרון מההרצאה ונקבל שמספר הפתרונות למשוואה לעיל הוא

$$\binom{(n-k) + k - 1}{k - 1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

מכיוון שהמשוואה האחרונה שקולה למקורית, נקבל שמספר הפתרונות למשוואה המקורית הוא בדיוק $\binom{n-1}{k-1}$.

	אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	בכל תא כדור אחד לכל היותר
כדורים שונים	t^k	$\frac{t!}{(t-k)!}$
כדורים זהים	$\binom{t+k-1}{k}$	$\binom{t}{k}$

טבלה 2: מספר הדרכים לחלק k כדורים ל-t תאים.

מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך קבוצה בת n איברים:

באופן שקול, מספר הדרכים לחלק k כדורים ל-t תאים ($k \leq t$)?

תרגיל 3. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, חשבו בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו-n כדורים צבעוניים.

1. ל-$3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא.
2. ל-$3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא.
3. ל-n תאים, כדור לבן אחד לפחות לכל תא.

פתרון 3. 1. תחילה נסדר את הצבעוניים. יש n כדורים צבעוניים ו-$3n$ תאים. לכן,

$$\frac{(3n)!}{(3n-n)!} = \frac{(3n)!}{(2n)!}.$$

מכאן כל הכדורים הלבנים מסתדרים מכיוון שהם זהים. בסך הכל, מספר האפשרויות האו

$$\frac{(3n)!}{(2n)!}.$$

2. תחילה, נבחר $2n$ תאים עבור $2n$ הכדורים הלבנים - $\binom{3n}{2n}$ דרכים. עבור הצ', בחירה עם חזרות ועם חשיבות לסדר - לכן יש $(3n)^n$ דרכים. בסך הכל,

$$\binom{3n}{2n} \cdot (3n)^n .$$

3. תחילה, נחלק n כדורים לבנים - אחד בכל תא. כעת אין הגבלות נוספות - נותרו n לבנים ו-n צ'. לכן, מספר הדרכים הוא

$$\underbrace{\binom{n+n-1}{n-1}}_{\text{לבנים}} \cdot \underbrace{n^n}_{\text{צבעוניים}} = \binom{2n-1}{n-1} \cdot n^n.$$

תרגיל 4. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. צירוף (compositions) של n הוא סדרת טבעיים חיוביים $(x_i)_{i=1}^k$ עבור $k \in \mathbb{N}^+$ כלשהו כך ש-

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

מצא את מספר הצירופים השונים של n.

פתרון 4. נפתור את השאלה בשתי דרכים:

- אינדוקציה: ננחש שהפתרון הוא 2^{n-1}, ונוכיח באינדוקציה.

  - בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, הצירוף היחיד הוא 1, ולכן מספר הצירופים הוא $1 = 2^0$.

  - צעד האינדוקציה: יהי $(x_i)_{i=1}^k$ צירוף של $n-1$. ניצור את שני הצירופים הבאים:

$$x_1 + \cdots + x_k + 1 = n$$

$$x_1 + \cdots + (x_k + 1) = n$$

  יהי $(y_i)_{i=1}^l$ צירוף כלשהו של n. אם $y_l = 1$, אזי הצירוף $(y_i)_{i=1}^{l-1}$ הוא צירוף של $n-1$, שמוביל בבנייה שעשינו ל-n. אחרת, הצירוף

$$y_1 + \cdots + y_{l-1} + (y_l - 1) = n - 1$$

  הוא צירוף של $n-1$ שמוביל בבנייה שלנו ל-n. בנוסף, הצירופים מהסוג הראשון מסתיימים ב-1, ומהסוג השני לא מסתיימים ב-1, ולכן לא תהיה ספירה כפולה.

- הוכחה נוספת: נשים n 1-ים בשורה. ביניהם, נמקם ריבועים ריקים בין כל זוג 1-ים רצופים, בהם יכול להיות $+$ או ,. כל השמה של $+$-ים ו-,-ים בריבועים הריקים מביאה לצירוף יחיד של n באופן הפיך. לכן, מספר הצירופים השונים של n הוא כמספר השיבוצים השונים: יש $n-1$ ריבועים, ולכל אחד שתי אפשרויות. בסך הכל 2^{n-1}.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}, |S|=k} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

תרגיל 5. תהיינה A, B קבוצות סופיות כך ש-$|A| = m$ ו-$|B| = n$ ($m \geq n$). חשבו כמה פונקציות על יש מ-A ל-B. נסמן $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ו-$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

פתרון 5. (שגוי) יש m^n פונקציות מ-A ל-B. תחילה, נבחר לכל תמונה בטווח מקור בתחום: זו בחירה ללא חזרות ועם חשיבות לסדר, לכן $\binom{m}{n}n!$ דרכים. כעת ניתן לבחור את שאר התמונות ללא הגבלה: נותרו $m-n$ מקורות ולכל אחד m תמונות אפשריות. לכן, מספר הדרכים הוא

$$\binom{m}{n}n! \cdot m^{m-n}.$$

פתרון זה **אינו נכון**, ומכיל ספירה כפולה. למשל, עבור $A=\{1,2,3\}\,, B=\{1,2\}$:

- נוכל לבחור את המקורות $1,2$ ולמפות $2 \mapsto 1, 2 \mapsto 1$, וכעת נבחר $3 \mapsto 1$.
- אפשרות אחרת שתיספר היא לבחור את $1,3$, למפות $2 \mapsto 1, 2 \mapsto 3$ ולבסוף $1 \mapsto 1$.

פתרון באמצעות הכלה והדחה: נספור את מספר הפונקציות שהן לא על, כלומר קיים $b \in B$ כך שהתמונה של הפונקציה מוכלת ב-$B \setminus \{b\}$ - המשך בתרגול הבא.