מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 2 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 8/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

תזכורות והגדרות

א. עבור שלמים n, m, נסמן ב-$n \mid m$ את הטענה n **מחלק** את m (קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m = k \cdot n$). בנוסף, נסמן ב-$n \nmid m$ את הטענה n **לא מחלק** את m.

ב. יהיו $n, r \in \mathbb{Z}$ ו-$d \in \mathbb{N}^+$. נאמר ש-n **מתחלק ב-d עם שארית** r אם $0 \leq r < d$ וקיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$n = d \cdot q + r.$$

- למשל, 7 מתחלק ב-2 עם שארית 1: $2 < 1 \leq 0$ ועבור $q = 3$ מתקיים $7 = 2 \cdot 3 + 1$.
- נאמר ש-q היא המנה ו-r היא שארית החלוקה.
- שימו לב שעבור $r = 0$, n מתחלק ב-d עם שארית r אמ"מ n מתחלק ב-d.

שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}$, אם a מתחלק ב-b וגם b מתחלק ב-c, אז a מתחלק ב-c:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ((b \mid a) \land (c \mid b)) \rightarrow (c \mid a)$$

ב. לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}$, אם $a \cdot b$ מתחלק ב-c, אז a מתחלק ב-c או b מתחלק ב-c:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c \mid (a \cdot b)) \rightarrow (c \mid a \lor c \mid b)$$

ג.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : (b \mid a \land a \mid b) \rightarrow a = b$$

ד.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c \nmid a \cdot b) \rightarrow (c \nmid a)$$

ה.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : ((c \mid a) \wedge (c \nmid (a+b))) \to b \nmid c$$

ו.

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} : \big(b \mid a^2 \wedge b < a\big) \to b \mid a$$

פתרון 1. א. הוכחה: יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a \mid b$ וגם $b \mid c$.
מהגדרת "מחלק" קיימים $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$a = k_1 \cdot b, \quad b = k_2 \cdot c.$$

מכאן נקבל ש-

$$a = k_1 \cdot b = k_1 \cdot k_2 \cdot c.$$

נגדיר $k = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$, ונקבל ש-$a = k \cdot c$, מכאן מתקיים $a \mid c$.

ב. הפרכה: נבחר $a = 2, b = 2, c = 4$. ברור ש-$a,b,c \in \mathbb{Z}$ וגם $a \cdot b = c$, ולכן $a \cdot b \mid c$. עם זאת, מכיוון שהמספרים אי-שליליים וגם $c > \max\{a,b\}$, c לא מחלק את a,b בנפרד: נניח בשלילה כי $2 \mid 4$, לכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$k \cdot 4 = 2$, וכך $k = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ והגענו לסתירה.

ג. הפרכה: נבחר $a = 1, b = -1$. עבור $k = -1 \in \mathbb{Z}$ נקבל ש-$a = k \cdot b$, לכן $a \mid b$, וגם $b = k \cdot a$, ולכן $b \mid a$. עם זאת, $a \neq b$ והטענה לא נכונה.

ד. הוכחה - נוכיח את הטענה הקונטרפוזיטיב: יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a \mid c$, נראה כי $a \cdot b \mid c$. מכיוון ש-$a \mid c$, קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$a = k \cdot c.$$

נכפיל ב-b את שני האגפים ונקבל $a \cdot b = k \cdot b \cdot c$. נבחר $k' = k \cdot b \in \mathbb{Z}$ ונקבל $a \cdot b = k' \cdot c$, ולכן מהגדרה $a \cdot b \mid c$.

ה. הפרכה: נבחר $a = 4, b = 1, c = 2$. ברור ש-$a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a \mid c$ וגם $(a+b) \nmid c$.
עם זאת, $b \mid c$ והטענה לא נכונה.

ו. הפרכה: נבחר $b = 4, a = 6$. מכיוון ש-$a^2 = 36 = 9b$ מתקיים $a^2 \mid b$, וגם $a < b$, אך $a \nmid b$.

שאלה 2. בשאלה זו נוכיח את קיום ויחידות השארית.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}^+$, n מתחלק ב-d עם שארית כלשהי, כלומר קיים $r \in \mathbb{Z}$ כך ש-n מתחלק ב-d עם שארית r.

ב. הוכיחו כי לא יכולות להיות שתי שאריות שונות עבור n, d. כלומר: לכל $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}^+$, לא קיימים $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$r_1 \neq r_2$, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_1, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_2.

ג. סטודנט כתב את ההוכחה הבאה עבור הסעיף הקודם. הסבירו את השגיאה בהוכחה שלהם ומדוע היא אינה נכונה.

<u>ההוכחה:</u>

- יהיו $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$. נניח בשלילה כי קיימים $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$r_1 \neq r_2$, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_1, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_2.
- n מתחלק ב-d עם שארית r_1, ולכן קיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q + r_1$.
- n מתחלק ב-d עם שארית r_2, ולכן קיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q + r_2$. אזי,

$$d \cdot q + r_1 = n = d \cdot q + r_2 \implies r_1 = r_2,$$

בסתירה לכך ש-$r_1 \neq r_2$.

פתרון 2. א. יהיו $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}^+$. נוכיח כי קיים $r \in \mathbb{Z}$ כך ש-n מתחלק ב-d עם שארית r. נגדיר את $q \in \mathbb{Z}$ להיות המספר השלם המקסימלי כך ש-

$$d \cdot q \leq n.$$

נבחר $r = n - d \cdot q$. תחילה, ברור שמתקיים $n = d \cdot q + r$. נותר להראות ש-$0 \leq r < d$. עבור $r \geq 0$:

$$r = n - d \cdot q \geq d \cdot q - d \cdot q = 0.$$

לבסוף, נניח בשלילה כי $r \geq d$. אזי

$$n = d \cdot q + r \geq d \cdot q + d = d \cdot (q + 1),$$

ולכן עבור השלם $(q+1)$ מתקיים $d \cdot (q+1) \leq n$. זאת בסתירה לכך ש-q הוא השלם המקסימלי שמקיים $d \cdot q \leq n$, ולכן $r < d$.

ב. הוכחה: יהיו $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$. נוכיח כי אם עבור $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, n מתחלק ב-d עם שארית r_1 וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_2, אז $r_1 = r_2$. n מתחלק ב-d עם שארית r_1, ולכן קיים $q_1 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q_1 + r_1$. באופן דומה עבור r_2, קיים $q_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q_2 + r_2$. בנוסף, $0 \leq r_1, r_2 < d$. אזי,

$$d \cdot q_1 + r_1 = n = d \cdot q_2 + r_2$$

$$\implies d\,(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

מכיוון ש-$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ נקבל ש-d מחלק את $r_2 - r_1$. מכיוון ש-$0 \leq r_1, r_2 < d$ מתקיים $-d < r_2 - r_1 < d$. לכן, הערך האפשרי היחיד של $r_2 - r_1$ כך שיתחלק ב-d הוא 0. מכאן $r_1 - r_2 = 0$, כלומר $r_1 = r_2$.

ג. השגיאה בהוכחת הסטודנט היא שהמנה בחלוקה עם כל אחת מהשאריות יכולה להיות שונה. לכן היה עליו להגדיר משתנים שונים עבור כל מנה: קיימים $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$n = d \cdot q_1 + r_1$ וגם $n = d \cdot q_2 + r_2$, ולהמשיך משם.

שאלה 3. א. חשבו את $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \triangle B$ עבור כל אחד מהסעיפים הבאים:

(i) $A = \{5, 8\}, B = \{2, \{8\}, 5, 10\}$

(ii) $A = [6, 10) \cup \{5\}, B = \mathbb{N}$

(iii) $A = \{\mathbb{N}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}\}$

ב. בכל סעיף מהבאים נתונות קבוצות A, B: קבעו האם $A \in B$ והאם $A \subseteq B$.

(i) $A = \emptyset, B = \{1\}$

(ii) $A = \{\mathbb{R}\}, B = \{\mathbb{N}\}$

(iii) $A = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \mathbb{R}$

(iv) $A = P(P(\emptyset)), B = P(P(P(\emptyset)))$

(v) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = P(\mathbb{N})$.

פתרון 3. א. (i) $A = \{5, 8\}, B = \{2, \{8\}, 5, 10\}$:

$$A \cup B = \{2, \{8\}, 5, 10, 8\}$$
$$A \cap B = \{5\}$$
$$A \setminus B = \{8\}$$
$$A \triangle B = \{8, \{8\}, 2, \{10\}\}$$

(ii) $A = [6, 10) \cup \{5\}, B = \mathbb{N}$:

$$A \cup B = (6, 10) \cup \mathbb{N}$$
$$A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A \setminus B = (6, 7) \cup (7, 8) \cup (8, 9) \cup (9, 10)$$
$$A \triangle B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4 \vee n \geq 10\} \cup (6, 7) \cup (7, 8) \cup (8, 9) \cup (9, 10)$$

(iii) $A = \{\mathbb{N}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}\}$:

$$A \cup B = \{\mathbb{N}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}\}$$
$$A \cap B = \{\mathbb{N}\}$$
$$A \setminus B = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\}$$
$$A \triangle B = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \mathbb{Q}\}, \mathbb{Q}\}$$

ב. (i) $A \notin B$, $A \subseteq B$.

(ii) $A \notin B$, $A \nsubseteq B$.

(iii) $A \notin B$, $A \nsubseteq B$.

(iv) $A \in B$, $A \subseteq B$.

(v) $A \notin B$, $A \nsubseteq B$.

שאלה 4. יהיו A, B, C קבוצות בקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A \cap C = B \cap C$ אז $A = B$.

ב. אם $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$.

ג. אם $A \cap C = B \cap C$ וגם $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$.

ד. אם $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$ אז $A \cap C \subseteq B$.

ה. אם $A \times B = B \times A$ אז $A = B$.

ו. $A \subseteq B$ אמ"מ $A^c \subseteq B^c$.

ז. $A \subseteq B$ אמ"מ $A^c \supseteq B^c$.

ח. אם $\forall x \in A : x \in B$ אז $\exists x \in A : x \in B$.

פתרון 4. **א.** הפרכה: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \emptyset$. $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ אבל $A \neq B$.

ב. הפרכה: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$. $A \cup C = B \cup C = C$ אבל $A \neq B$.

ג. הוכחה: יהיו A, B, C קבוצות כך ש-$A \cap C = B \cap C$ וגם $A \cup C = B \cup C$, נוכיח כי $A = B$ ע"י הכלה דו-כיוונית.

- נוכיח בה"כ כי $A \subseteq B$ - הכיוון השני זהה מקומוטטיביות של איחוד וחיתוך.
- יהי $x \in A$. נפריד למקרים:
  - $x \in C$. מהגדרת חיתוך $x \in A \cap C$ ולכן $x \in B \cap C$. מהגדרת חיתוך מתקיים $x \in B$.
  - $x \notin C$. מהגדרת איחוד $x \in A \cup C$ ולכן $x \in B \cup C$, כלומר $x \in B \vee x \in C$. מכיוון ש-$x \notin C$, נקבל ש-$x \in B$.
- בכל מקרה קיבלנו כי $x \in B$, ולכן $A \subseteq B$.
- בסך הכל, קיבלנו כי $A = B$.

ד. הוכחה:

$$
\begin{aligned}
(A \setminus B) \cap C &= (A \cap B^c) \cap C \\
\text{(קומוטטיביות של } \cap \text{)} \quad &= C \cap (A \cap B^c) \\
\text{(אסוציאטיביות של } \cap \text{)} \quad &= (C \cap A) \cap B^c \\
\text{(קומוטטיביות של } \cap \text{)} \quad &= (A \cap C) \cap B^c \\
\text{(הגדרת הפרש)} \quad &= (A \cap C) \setminus B
\end{aligned}
$$

לכן אם $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$ אז $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$. מכאן לכל $x \in A \cap C$ מתקיים $x \in B$ (אחרת $x \in (A \cap C) \setminus B$), ולכן $A \cap C \subseteq B$.

ה. הפרכה: נבחר $A = \emptyset, B = \{1\}$ ונקבל $A \times B = B \times A = \emptyset$, אבל $A \neq B$.

ו. הפרכה: נבחר $A = \emptyset, B = \{1\}$ ונקבל $A \subseteq B$. עם זאת, $1 \in A^c$ אך $1 \notin B^c$ ולכן $A^c \not\subseteq B^c$.

ז. הוכחה: מהגדרת הכלה,

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B &\iff \forall x \in U : (x \in A) \to (x \in B) \\
\text{(קונטרפוזיטיב)} &\iff \forall x \in U : (x \notin B) \to (x \notin A) \\
&\iff \forall x \in U : (x \in B^c) \to (x \in A^c) \\
&\iff B^c \subseteq A^c.
\end{aligned}
$$

ח. הפרכה: נבחר $A = \emptyset, B = \{1\}$. מתקיים באופן ריק ש-$\forall x \in A : x \in B$. עם זאת, מכיוון ש-$A$ ריקה $\exists x \in A : x \in B$ לא מתקיים.