מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 5

הגשה ליום חמישי, 29/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. תהי A קבוצה, ויהיו R_1, R_2 יחסים מעל A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם R_1 ו-R_2 יחסי שקילות מעל A, אז גם $R_1 \cup R_2$ יחס שקילות מעל A.

ב. אם R_1 ו-R_2 יחס סדר חלקי מעל A, אז גם $R_1 \cup R_2$ יחס סדר חלקי מעל A.

ג. אם R_1 ו-R_2 יחסי שקילות מעל A, אז גם $R_1 \triangle R_2$ יחס שקילות מעל A.

ד. אם R_1 ו-R_2 יחס סדר חלקי מעל A, אז גם $R_1 \triangle R_2$ יחס סדר חלקי מעל A.

שאלה 2. תהי A קבוצה, ויהי R יחס מעל A. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. נניח ש-R הוא יחס סדר מלא, ויהי $m \in A$ איבר מינימלי. אזי m איבר קטן ביותר.

ב. נגדיר יחס S מעל A כך שלכל $x, y \in A$:

$$x \; S \; y \iff \exists z \in A : x \; R \; z \wedge z \; R \; y.$$

אזי R טרנזיטיבי אמ"מ $S \subseteq R$.

ג. נניח ש-R סימטרי וטרנזיטיבי. אזי, R יחס שקילות אמ"מ לכל $x \in A$ קיים $y \in A$ כך ש-$x \; R \; y$.

שאלה 3. תהי A קבוצה, ותהי $\mathcal{H}$ קבוצת כל החלוקות של A. נגדיר יחס R מעל $\mathcal{H}$ באופן הבא: לכל $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{H}$, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in R$ אמ"מ $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$.

א. כתבו במפורש את $\mathcal{H}$ כאשר $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

ב. הוכיחו כי R הוא יחס סדר חלקי.

ג. מצאו איבר מינימלי ומקסימלי ב-$\mathcal{H}$.

יחס הרישא

הגדרה 1. תהי A קבוצה. נסמן ב-A^* את כל הסדרות באורך סופי של איברי A. כלומר, A^* היא קבוצת כל ה-n-יות הסדורות $(a_1, \dots, a_n)$, כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו-$a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\begin{aligned} A^* &= \{(a_1, \dots, a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n. \end{aligned}$$

נסמן ב-ε את ה-"סדרה הריקה" - המקרה בו $n = 0$.

הגדרה 2. תהי A קבוצה. יחס הרישא $\leq_{\text{pre}}$ מעל A^* מוגדר באופן הבא: לכל

$$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_m) \in A^*,$$

$(a_1, \dots, a_n) \leq_{\text{pre}} (b_1, \dots, b_m)$ אמ"מ $m \geq n$ וגם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$.

אינטואיציה:

אם $(b_1, \dots, b_m) \leq_{\text{pre}} (a_1, \dots, a_n)$ אז איברי $(a_i)_{i=1}^n$ מופיעים בתחילת הסדרה $(b_i)_{i=1}^m$. היחס $\leq_{\text{pre}}$ הוא יחס סדר מלא אם $|A| = 1$, אך לא יחס סדר מלא אם $|A| > 1$: אם ב-a יש שני איברים שונים, α ו-β, אז הסדרות (α) ו-(β) מקיימות $(\beta) \not\leq_{\text{pre}} (\alpha)$ וגם $(\alpha) \not\leq_{\text{pre}} (\beta)$.

טענה 1. תהי A קבוצה. אזי היחס $\leq_{\text{pre}}$ מעל A^* הוא יחס סדר חלקי.

שאלה 4.

א. הוכיחו את טענה 1.

ב. האם קיים איבר מינימלי ב-A^*? אם כן, מצאו אחד כזה.

ג. האם קיים איבר מקסימלי ב-A^*? אם כן, מצאו אחד כזה.

שאלה 5. בדקו האם כל אחת מהפונקציות הבאות היא חח"ע/על (האם בהכרח חח"ע, בהכרח לא חח"ע או ייתכן שחח"ע, וכנ"ל לעל) במידה והפונקציה הפיכה, מצאו את הפונקציה ההופכית.

א. $f : (1, \infty) \to (0, 1)$, לכל $x \in (1, \infty)$ מתקיים $f(x) = 1 - 1/x$.

ב. $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $g(x) = 1/x$.

ג. $h : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, לכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $h(A) = A \triangle \mathbb{N}$.

ד. פונקציה $f : A \to B$ כלשהי עבור קבוצות סופיות A, B כך ש-$|A| < |B|$.

ה. פונקציה $f : A \to B$ כלשהי עבור קבוצות סופיות A, B כך ש-$|A| > |B|$.