מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 11

פונקציות יוצרות :-

תרגיל :- יהי $a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1$ עם תנאי התחלה
$a_0 = 1 \;,\; a_1 = -1$.

א) מצאו פונקציה יוצרת עבור $\{a_n\}$.

ב) מצאו פתרון עבור $\{a_n\}$.

פתרון :- א.

$$
+\quad
\begin{array}{lcl}
\vdots & \vdots & \\
z^n & a_n = & -2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1 \\
\vdots & \vdots & \\
z^3 & a_3 = & -2a_2 + 3a_1 + 1 \\
z^2 & a_2 = & -2a_1 + 3a_0 + 1 \\
z^1 & a_1 = & -1 \\
z^0 & a_0 = & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
F(z) = {} & -2a_1 z^2 - 2a_2 z^3 - \dots - 2a_{n-1} z^n - \dots \\
& + 3a_0 z^2 + 3a_1 z^3 + \dots + 3a_{n-2} z^n \\
& + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^n + \dots \\
& - z + 1
\end{aligned}
$$

$$F(z) = -2z\left(F(z) - a_0\right) + 3z^2 F(z) + z^2 \cdot \frac{1}{1-z} - z + 1$$

$$F(z) = -2zF(z) + 2z + 3z^2 F(z) + \frac{z^2}{1-z} - z + 1$$

$$F(z)\underbrace{\left(1 + 2z - 3z^2\right)}_{(1+3z)(1-z)} = \frac{z^2}{1-z} + z + 1$$

$$F(z) = \frac{z^2}{(1+3z)(1-z)^2} + \frac{z+1}{(1+3z)(1-z)}$$

$$\frac{z^2}{(1+3z)(1-z)^2} = \frac{A}{1+3z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} \quad \Big/ (1+3z)(1-z)^2$$ ב.

$$z^2 = A(1-z)^2 + B(1-z)(1+3z) + C(1+3z)$$

$$z^2 = A - 2Az + Az^2 + B + 2Bz - 3Bz^2 + C + 3Cz$$

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = -2A + 2B + 3C \\ 1 = A - 3B \end{cases}$$

פותרים מערכת משוואות (למשל בעזרת מטריצה) ומקבלים

$$A = \frac{1}{16}, \quad B = -\frac{5}{16}, \quad C = \frac{1}{4}$$

סה"כ

$$\frac{z^2}{(1+3z)(1-z)^2} = \underbrace{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1+3z} - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}}_{*}$$

כעת נטפל ב- $\frac{z+1}{(1+3z)(1-z)}$

$$\frac{z+1}{(1+3z)(1-z)} = \frac{A}{1+3z} + \frac{B}{1-z} \quad \Big/ (1+3z)(1-z)$$

$$z+1 = A(1-z) + B(1+3z)$$

$$z+1 = A - Az + B + 3Bz$$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 1 = -A + 3B \end{cases}$$

נפתור ונקבל $A = B = \frac{1}{2}$ לכן

$$\frac{z+1}{(1+3z)(1-z)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+3z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}}_{**}$$

$$F(z) = * + ** = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{1+3z} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$$ סה״כ

$$\boxed{a_n = \frac{9}{16}\cdot(-3)^n + \frac{3}{16} + \frac{1}{4}(n+1)}$$

תזכורת :- ראינו בתרגול אחרון שהפונקציה היוצרת של הסדרה $(n)_{n=0}^{\infty}$ היא $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

תרגיל :- מצאו את הפונקציה היוצרת של $(n^2)_{n=0}^{\infty}$.

פתרון :- לפי טענה 5 שראינו "$F'(z) \sim (n+1)a_{n+1}$" מתקיים שהפונקציה $\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)'$ מתאימה לסדרה $(n+1)a_{n+1} = (n+1)^2$.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

נחסיר מפונקציה זו את הפונקציה היוצרת של $2n$ ושל 1 ונקבל שהפונקציה היוצרת של $(n^2)_{n=0}^{\infty}$ היא

$$G(z) = \left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' - \frac{2z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}$$

נחשב $\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)'$

$$\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \frac{1\cdot(1-z)^2 - z(-2+2z)}{(1-z)^4}$$

$$= \frac{1 - 2z + z^2 + 2z - 2z^2}{(1-z)^4}$$

$$= \frac{1-z^2}{(1-z)^4} = \frac{(1+z)(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

$$G(z)=\frac{1+z}{(1-z)^3}-\frac{2z}{(1-z)^2}-\frac{1}{1-z}$$

$$=\frac{1+z-2z(1-z)-(1-z)^2}{(1-z)^3}$$

$$=\frac{\cancel{1}+z-\cancel{2z}+2z^2-\cancel{1}+\cancel{2z}-z^2}{(1-z)^3}$$

$$=\frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

וזו הפונקציה היוצרת של $(n^2)_{n=0}^{\infty}$.

תרגיל :- מצאו את הפונקציה היוצרת המתאימה לסדרה $a_n=n\cdot 2^n$

פתרון :- הפונקציה היוצרת המתאימה לסדרה $(2^n)_{n=0}^{\infty}$ היא

$$F(z)=\frac{1}{1-2z}$$

לפי טענה 5 הפונקציה $F'(z)$ מתאימה לסדרה

$$b_n=(n+1)\cdot 2^{n+1}$$

כעת $z\cdot F'(z)$ מתאימה לפי טענה 4 לסדרה

$$c_n=b_{n-1}=n\cdot 2^n$$

כלומר

$$G(z)=z\cdot F'(z)=z\cdot\left(\frac{1}{1-2z}\right)'=z\cdot\frac{2}{(1-2z)^2}=\frac{2z}{(1-2z)^2}$$

תרגיל :- מצאו את הפונקציה היוצרת של $a_n=(n-1)3n$.

פתרון :-

$$a_n = 3n^2-3n$$

מתרגיל לפני אחרון קיבלנו שהפונקציה היוצרת של $(n^2)_{n=0}^{\infty}$ היא

$$F(z)=\frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

ולפי תרגול 10 ראינו שהפונקציה היוצרת של $(n)_{n=0}^{\infty}$ היא

$$G(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

לכן הפונקציה היוצרת של $(n-1)3n$ היא

$$H(z)=3F(z)-3G(z)$$

$$H(z)=\frac{3z+3z^2}{(1-z)^3}-\frac{3z}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{3z+3z^2-3z(1-z)}{(1-z)^3}=\frac{6z^2}{(1-z)^3}$$