

מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 8

הגשה ליום חמישי, 19/9 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

הגדרה 1. יהי $G = (V, E)$ גרף. מסלול המילטוני ב- G הוא מסלול פשוט שעובר בכל הקודקים ב- G . אם ב- G קיים מסלול המילטוני, נאמר ש- G המילטוני.

שאלה 1. עבור כל אחד מהגרפים הבאים, האם הוא המילטוני?

א. יהי $n \in \mathbb{N}$. $G = (V, E)$ כך ש- $V = \{0, 1\}^n$, ולכל $u, v \in V$ $(u, v) \in E$ אם ורק אם u ו- v נבדלים בתו אחד בדיוק. באופן שקול,

$$|v \oplus u| = \sum_{i=1}^n v_i \oplus u_i = 1.$$

ב. $G = (V, R)$, כאשר $V = [n] = \{1, \dots, n\}$ עבור $n \in \mathbb{N}^+$ כלשהו, ו- R יחס משווה ואנטי-סימטרי חזק על V (שימו לב ש- R מכונן).

שאלה 2. יהיו $n, k \in \mathbb{N}^+$ ויהי $G = (V, E)$ גרף קשיר בעל n צמתים ו- $n + k - 1$ קשתות. הוכיחו כי ב- G יש לפחות k מעגלים שונים.

שאלה 3. יהי $G = (V, E)$ גרף בעל n צמתים ו- $n - 1$ קשתות. הוכיחו שקיים ב- G רכיב קשירות שהוא עץ.

שאלה 4. תהי $V \neq \emptyset$ קבוצה ויהיו $T_1 = (V, E_1), T_2 = (V, E_2)$ עצים. תהי $e \in E_1$.

א. הוכיחו כי קיימת $f \in E_2$ כך ש- $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ הוא עץ.

ב. הוכיחו כי קיימת $f \in E_2$ כך ש- $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ הוא עץ וגם $(T_2 \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ הוא עץ.

רמז: התחילו מהטענה הבאה (יש להוכיח): יהי $G = (V, E)$ בעל שני רכיבי קשירות, ויהיו $x, y \in V$ צמתים ברכיבי קשירות שונים. במידה ונוסיף את הקשת $\{x, y\}$ לגרף נקבל גרף קשיר.

שאלה 5. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ותהי $\emptyset \neq F \subseteq E$ קבוצת קשתות. נסמן $H = G \setminus F$. הוכיחו כי בכל רכיב קשירות של H קיים צומת שאחת מקשתותיו ב- G ב- F .

שאלה 6. הסטודנט נועם נמצא בראשית הצירים על השריג \mathbb{Z}^2 . נועם רוצה לבקר את הוריו הנמצאים בנקודה (n, m) כך ש- $n, m \in \mathbb{N}$, ויכול לצעוד ימינה או מעלה בלבד (למשל, צעד ימינה מ- $(0, 0)$ יביא את נועם ל- $(0, 1)$, וצעד מעלה ל- $(1, 0)$).

- א. מצאו את מספר המסלולים האפשריים השונים של נועם מראשית הצירים להוריו.
- ב. יהי יפתח חבר כלשהו של נועם, הנמצא במיקום (i, j) . מצאו את מספר המסלולים האפשריים השונים של נועם מראשית הצירים להוריו, כך שהוא לא יפגוש ביפתח.
- ג. נניח ש- $n = m$. חשבו את מספר המסלולים השונים של נועם מראשית הצירים להוריו שלא מכילים שני צעדי ימין רצופים.

שאלה 7. יהי $m \in \mathbb{N}^+$. במסעדת הסרטן הפריך m שולחנות עגולים שונים, כך שבכל שולחן יש בדיוק m מקומות ישיבה זהים. m^2 הסטודנטים בקורס מתמטיקה דיסקרטית חגגו את סיום הסמסטר במסעדה. כל סטודנט בוחר מקום ישיבה אחד. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים (בלתי תלויים), מצאו את מספר האפשרויות להושיב את הסטודנטים בכיסאות.

- א. ללא תנאים נוספים.
- ב. דני ודנה, שני סטודנטים בקורס, לא יכולים לשבת אחד על היד השנייה.
- ג. הסטודנטים ישבו ללא תנאים נוספים ביום א'. ביום ב', הם התיישבו כך שאין אף שולחן בו התיישבו הסטודנטים כמו ביום א'.
- כלומר, לכל שולחן, אוסף הסטודנטים שישבו בו ביום א' שונה מאוסף הסטודנטים שישבו בו ביום ב'.
- ד. השולחנות אינם עגולים, אלא שורות.