קומבינטוריקה אנליטית

חורף תשפ"ד

תוכן העניינים

חלק I
קומבינטוריקה

1 פונקציות יוצרות

1.1 מבוא לפונקציות יוצרות

הגדרה. תהי $\{a_n\}_{n\geq 0}$ סדרה כלשהי ($a_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$). נגדיר פונקציה יוצרת של a_n ע"י טור פורמלי (בינתיים, כלומר תוך כדי התעלמות מתכונות אנליטיות של הטור), ע"י

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

<u>שים לב:</u> המקדם של x^n ב-$A(x)$ הוא a_n, ונסמן

$$[x^n](A(x)) = a_n$$

דוגמה. בהינתן סדרה $\{a_n\}$, מצא פונקציה יוצרת.

1. $a_n = 1$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} 1\cdot x \\ &= \frac{1}{1-x} \quad \text{(טור גיאומטרי)} \end{aligned}$$

2. $a_n = 2^n - 3^n$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} (2^n - 3^n)\cdot x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} 2^n x^n - \sum_{n\geq 0} 3^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (2x)^n - \sum_{n\geq 0} (3x)^n \\ &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{-x}{(1-2x)(1-3x)} \end{aligned}$$

3. $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\int_0^x t^{n-1}dt \\ \text{(מניחים התכנסות במ"ש)} &= \int_0^x \sum_{n\geq 1} t^{n-1}dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\ &= -\ln(1-t)|_0^x \\ &= -\ln(1-x) \end{aligned}$$

4. $a_n = n^2$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} n^2x^n \\ &= x\cdot\sum_{n\geq 0} n\cdot(nx^n)' \\ &= x\left(\sum_{n\geq 0} nx^n\right)' \\ &= x\left(x\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)'\right)' \\ &= x\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right) \\ &= x\cdot\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' \\ &= x\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3}\right) \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

.5 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= x + \sum_{n\geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\ &= x + x\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= x + x(A(x) - a_0) + x^2 A(x) \\ &\Rightarrow A(x)\left(1 - x - x^2\right) = x \\ & A(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \end{aligned}$$

תרגיל. (מבחן) נתון כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

הוכיחו בעזרת פונקציות יוצרות ש-$a_n = 1$ לכל $n \geq 0$.

הוכחה. תהי b_n סדרה כך ש-$b_n = 1$ לכל $n \geq 0$. אזי:

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \frac{1}{1-x}$$

נמצא את הפונקציה היוצרת $A(x)$ של a_n:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= 1 + x + 2x\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} - x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= 1 + x + 2x(A(x) - 1) - x^2 A(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(x)\left(1-2x+x^2\right)=1+x-2x$$
$$A(x)=\frac{1-x}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}1\cdot x^n$$

הערה. אם שתי פונקציות יוצרות שוות, $A(x)=B(x)$, אזי המקדמים שלהם שווים:

$$\forall n:[x^n](A(x))=[x^n](B(x))$$

ולכן $a_n=1$ לכל $n\geq 0$. $\square$

תרגיל. נתון מלבן בגודל $n\times 1$. רוצים לרצף אותו בעזרת מלבן קטן (2×1), ריבוע שחור (1×1) וריבוע לבן (1×1). נסמן את קבוצת כל האפשרויות לריצוף מלבן זה ב-A_n.

1. נגדיר $a_n=|A_n|$. כתבו כלל נסיגה עם תנאי התחלה לסדרה a_n.
2. מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לסדרה a_n.
3. מצאו נוסחא מפורשת לסדרה a_n, בעזרת הסעיף הקודם.

פתרון.

1. נמצא כלל נסיגה ותנאי התחלה ל-a_n.
   - כלל הנסיגה הוא $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$.
   - נמצא תנאי התחלה:
     - $a_1=2$: ריבוע שחור או לבן.
     - $a_2=5$: או שימוש במלבן, או 2^2 אפשרויות לשימוש בריבועים.
     - נציב בכלל הנסיגה למציאת a_0:

$$a_2=2a_1+a_0\Rightarrow 5=2\cdot 2+a_0\Rightarrow a_0=1$$

   - בסך הכל,

$$\begin{cases}a_n=2a_{n-1}+a_{n-2} & n\geq 2\\ a_1=2\\ a_0=1\end{cases}$$

2. נסמן ב-$A\left(x\right)$ את הפונקציה היוצרת של a_n, ונמצא אותה:

$$\begin{aligned}A\left(x\right) &= \sum_{n\geq0}a_nx^n\\ &= a_0+a_1x+2x\sum_{n\geq2}a_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n\geq2}a_{n-2}x^{n-2}\\ &= 1+2x+2x\left(A\left(x\right)-1\right)+x^2A\left(x\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A\left(x\right)\left(1-2x-x^2\right)=1+2x-2x$$

$$A\left(x\right)=\frac{1}{1-2x-x^2}$$

טענה. **(זהב)**

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^{m+1}}=\sum_{n\geq0}\binom{n+m}{n}x^n$$

הוכחה. נוכיח את הטענה בשתי שיטות.

1. אינדוקציה על m.

- עבור $m=0$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq0}1\cdot x^n \iff T$$

- נניח ל-m ונוכיח ל-$m+1$ - נתון:

$$\frac{1}{\left(1-x\right)^{m+1}}=\sum_{n\geq0}\binom{n+m}{n}x^n$$

נגזור את שני האגפים (גזירה פורמלית):

$$\frac{m+1}{\left(1-x\right)^{m+2}}=\sum_{n\geq0}\binom{n+m}{n}nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{m+2}} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+m}{n}\cdot\frac{n}{m+1}x^{n-1}$$
$$= \sum_{n\geq 1}\binom{n+m}{n}\cdot\frac{n}{m+1}x^{n-1}$$
$$(N=n-1) = \sum_{N\geq 0}\binom{N+1+m}{N+1}\cdot\frac{N+1}{m+1}x^{N}$$
$$= \sum_{N\geq 0}\frac{(N+1+m)!}{(N+1)!\,(m)!}\cdot\frac{N+1}{m+1}x^{N}$$
$$= \sum_{N\geq 0}\binom{N+1+m}{N}x^{N}$$

ולכן הטענה נכונה ל-$m+1$.

2. הוכחה קומבינטורית (הצגת בעיה, שבה נפתור בעיה בשתי דרכים שונות - כל אחת תוביל לאגף אחר).

- נניח שיש לנו $m+1$ תאים, ובכל תא אפשר להכניס מטבעות של שקל 1 בצורה לא מוגבלת.
- השאלה: כמה אפשרויות ניתן להכניס לתאים כך שסכום המטבעות בכל התאים יהיה n?
- שאלה שקולה: יהי a_i מספר המטבעות בתא i. כמה פתרונות יש למשוואה $a_1+\cdots+a_{m+1}=n$ $(\star)$, כאשר $a_i\in\mathbb{N}_0$ לכל i.

(א) פתרון ראשון: נקודד את $(\star)$ ע"י מילה בינארית, באורך $a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}+m=n+m$, עם n אפסים ו-n אחדים, באופן הבא:

$$\underbrace{0\ldots0}_{a_1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_{m+1}}$$

אזי, מספר הפתרונות ל-$(\star)$ הוא בדיוק מספר המילים הבינאריות באורך $n+m$ עם n אפסים ו-n אחדים, בדיוק $\binom{n+m}{n}$. לכן, הפונקציה היוצרת היא

$$\sum_{n\geq 0}\binom{n+m}{n}x^n$$

(ב) פתרון שני: לפי עיקרון הכפל, יש למצוא את הפונקציה היוצרת A של תא בודד, ואז התשובה תהיה A^{m+1}. עבור תא אחד, יש אופציה אחת לכל n:

$$\begin{aligned} x^0+x^1+x^2+\cdots &= \frac{1}{1-x} \\ \Rightarrow A^m\left(x\right) &= \frac{1}{\left(1-x\right)^m} \end{aligned}$$

$\square$

הגדרה. (מכפלת קושי/קונבולוציה) נתון $A\left(x\right)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ ו-$B\left(x\right)=\sum_{m\geq 0}b_mx^m$, אזי

$$\begin{aligned} A\left(x\right)\cdot B\left(x\right) &= \sum_{n\geq 0}a_nx^n\cdot\sum_{m\geq 0}b_mx^m \\ &= \sum_{d\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d}a_jb_{d-j}\right)x^d \end{aligned}$$

פתרון. (סעיף 3 מהתרגיל הקודם) נמצא נוסחא מפורשת ל-a_n באמצעות $A\left(x\right)$:

$$\begin{aligned} A\left(x\right) &= \frac{1}{1-2x-x^2} \\ &= \frac{1}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)} \end{aligned}$$

נמצא את α,β:

$$\begin{aligned} \left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right) &= 1-2x-x^2 \\ 1+x\left(-\alpha-\beta\right)+\alpha\beta x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha\left(2-\alpha\right)=-1$$

$$\Rightarrow\alpha^2-2\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\alpha=1+\sqrt{2},\beta=1-\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} &= \frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}\\ &= \frac{a-\beta ax+b-\alpha bx}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ \beta a+\alpha b=0 \end{cases} \Rightarrow \beta a+\alpha-\alpha a=0$$

$$\Rightarrow a(\beta-\alpha)=-\alpha \Rightarrow a=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$b=1-a=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

לבסוף, נמצא את $a_n=[x^n]\left(A(x)\right)$:

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}\\ &= a\sum_{n\geq 0}\alpha^n x^n+b\sum_{n\geq 0}\beta^n x^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(a\alpha^n+b\beta^n\right)x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_n &= [x^n]\left(A(x)\right)\\ &= a\alpha^n+b\beta^n\\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

תרגיל. מצאו את המקדם של x^n בפונקציה היוצרת

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{1}{(1-x)^3(1-2x)}\\ &= \frac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3}+\frac{d}{1-2x}\\ &= \frac{\left(a+bx+cx^2\right)(1-2x)+d(1-x)^3}{(1-x)^3(1-2x)}\end{aligned}$$

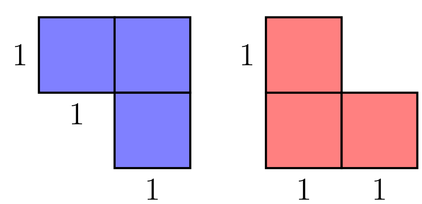
$$\Rightarrow 1=\left(a+bx+cx^{2}\right)(1-2x)+d(1-x)^{3}$$
$$x=1\Rightarrow a+b+c=-1$$
$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow d=8$$
$$x=0\Rightarrow a+d=1\Rightarrow a=-7$$
$$x=-1\Rightarrow 3(a-b+c)+8d=1$$

עבור a,b,c,d שמצאנו מ-4 המשוואות:

$$A(x)=\frac{a+bx+cx^{2}}{(1-x)^{3}}+\frac{d}{1-2x}$$
$$(\text{זהב})=\left(a+bx+cx^{2}\right)\sum_{n\geq 0}\binom{2+n}{n}x^{n}+d\sum_{n\geq 0}2^{n}x^{n}$$
$$=a\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{n}x^{n}+b\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{n}x^{n+1}+c\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{n}x^{n+2}+d\sum_{n\geq 0}2^{n}x^{n}$$
$$\Rightarrow\left[x^{N}\right]A(x)=a\binom{N+2}{2}+b\binom{N+1}{2}+c\binom{N}{2}+d2^{N}$$

תרגיל. (לחשוב) נתון מלבן בגודל $2\times n$. תהי A_n קבוצת כל הריצופים של מלבן זה בעזרת הצורות L, ר' (ראה איור 1), מלבן בגודל 1×2 וריבוע בגודל 1×1.

1. מצאו כלל נסיגה לסדרה $\{|A_n|\}$.
2. מצאו פונקציה יוצרת לסדרה בסעיף הקודם.
3. מצאו נוסחא מפורשת לסדרה.



איור 1: הצורות L ו-ר' (אורך 1).

פתרון.

1. נמצא כלל נסיגה ל-a_n. מאיור 2, נובע שכלל הנסיגה הוא

$$a_n = a_{n-3} + 2a_{n-2} + 2a_{n-1}$$

תנאי התחלה:

$$a_1 = \underbrace{1}_{\text{שני ריבועים}} + \underbrace{1}_{2\times 1 \text{ מלבן}} = 2$$

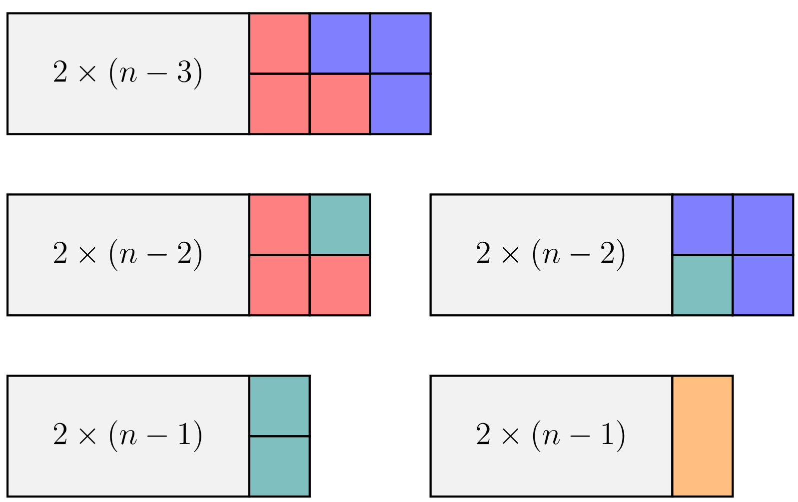
$$a_2 = \underbrace{1}_{L \text{ וריבוע}} + \underbrace{1}_{\text{ר' וריבוע}} + \left(\underbrace{2}_{a_1 \text{ כמו}}\right)^2 = 6$$

$$a_3 = \underbrace{1}_{L \text{ ו-ר'}} + 2 \cdot \underbrace{a_1 \cdot a_2}_{\text{עמודה 1 או 3 ב"ת}} - \left(\underbrace{2}_{\text{עמודה 1 וגם 3 ב"ת}}\right)^3 = 17$$

$$a_3 = a_0 + 2a_1 + 2a_1 \Rightarrow a_0 = 1$$

בסך הכל, קיבלנו כי

$$\begin{cases} a_n = a_{n-3} + 2a_{n-2} + 2a_{n-1} & n \geq 3 \\ a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$



איור 2: כל האפשרויות לכלל הנסיגה - "תורת הקשקוש".

2. ניתן למצוא את הפונקציה היוצרת $A\left(x\right)=\sum_{n\geq0}a_{n}x^{n}$ מסעיף א', או ישירות מהמבנה:

$$\underbrace{A\left(x\right)}_{\text{כל מלבן}}=\underbrace{1}_{\varepsilon}+\underbrace{x^{3}}_{\text{מלבן באורך 3}}\overbrace{A\left(x\right)}^{\text{כל מלבן}}+x^{2}A\left(x\right)+x^{2}A\left(x\right)+x^{1}A\left(x\right)+x^{1}A\left(x\right)$$

$$\Rightarrow A\left(x\right)=\frac{1}{1-2x-2x^{2}-x^{3}}$$

3. נמצא נוסחא מפורשת. תחילה, נמצא את השורשים.

- <u>שיטה א':</u> נניח שניתן לכתוב:

$$1-2x-2x^{2}-x^{3}=\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)\left(1-\gamma x\right)$$

(כלומר, השורשים הם $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$, עובדים מעל שדה סגור אלגברית) אזי,

$$\begin{aligned}A\left(x\right) & =\frac{1}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)\left(1-\gamma x\right)}\\
 & =\frac{a}{1-\alpha x}+\frac{b}{1-\beta x}+\frac{c}{1-\gamma x}\\
 & =\frac{a\left(1-\beta x\right)\left(1-\gamma x\right)+b\left(1-\alpha x\right)\left(1-\gamma x\right)+c\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)\left(1-\gamma x\right)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow1=a\left(1-\beta x\right)\left(1-\gamma x\right)+b\left(1-\alpha x\right)\left(1-\gamma x\right)+c\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)$$

$$\begin{aligned}x=\frac{1}{\alpha} & \Rightarrow a=\frac{\alpha^{2}}{\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha-\gamma\right)}\\
x=\frac{1}{\beta} & \Rightarrow b=\frac{\beta^{2}}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)}\\
x=\frac{1}{\beta} & \Rightarrow c=\frac{\gamma^{2}}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_{n} & =a\alpha^{n}+b\beta^{n}+c\gamma^{n}\\
 & =\frac{\alpha^{n+2}}{\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha-\gamma\right)}+\frac{\beta^{n+2}}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)}+\frac{\gamma^{n+2}}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)}
\end{aligned}$$

- שיטה ב':

$$\begin{aligned}
A\left(x\right) &= \frac{1}{1-2x-2x^{2}-x^{3}} \\
&= \frac{1}{1-2x-x^{2}\left(2+x\right)} \\
&= \frac{1}{1-2x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^{2}\left(2+x\right)}{1-2x}} \\
&= \frac{1}{1-2x}\cdot\sum_{j\geq0}\frac{x^{2j}\left(2+x\right)^{j}}{\left(1-2x\right)^{j}} \\
&= \sum_{j\geq0}\frac{x^{2j}\left(2+x\right)^{j}}{\left(1-2x\right)^{j+1}} \\
&= \sum_{j\geq0}x^{2j}\cdot\left(2+x\right)^{j}\cdot\frac{1}{\left(1-2x\right)^{j+1}} \\
&= \sum_{j\geq0}\left[x^{2j}\sum_{a=0}^{j}\binom{j}{a}2^{a}x^{j-a}\cdot\sum_{b\geq0}\binom{j+b}{j}2^{b}x^{b}\right] \\
&= \sum_{j\geq0}\sum_{a=0}^{j}\sum_{b\geq0}\binom{j}{a}\binom{j+b}{j}2^{a+b}x^{3j-a+b}
\end{aligned}$$

$$a_{n}=\left[x^{n}\right]A\left(x\right)$$

$$3j-a+b=n\underbrace{\Rightarrow}_{b=n+a-3j}a_{n}=\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}}\sum_{a=0}^{j}\binom{j}{a}\binom{j+n+a-3j}{j}2^{2a+n-3j}$$

מסקנה. נוסחא משיטה א' $=$ נוסחא משיטה ב' לכל n (זהות).

2 סטטיסטיקה

הגדרה. סטטיסטיקה היא פונקציה $f:A\to\mathbb{N}_{0}$.

דוגמה. נתונה בעיה: ריצוף מלבן $1\times n$ עם ריצוף ריבוע 1×1 או מלבן 1×2.
ראינו כי כאשר A_n היא קבוצת הריצופים של מלבן באורך n, ו-$a_n=|A_n|$, מתקיים

$$A\left(x\right)=\frac{1}{1-x-x^{2}}=\sum_{n\geq0}a_{n}x^{n}$$

נתעניין במספר הריצופים של המלבן עם k ריבועים. כלומר, נרצה לספור את הריצופים תחת סטטיסטיקה (שהיא מספר הריבועים). נגדיר פונקציה יוצרת ע"י

$$A\left(x,q\right)=\sum_{n\geq0}\sum_{k\geq0}a_{n,k}\cdot q^{k}x^{n}$$

כאשר $a_{n,k}$ הוא מספר הריצופים של מלבן באורך n עם k ריבועים בדיוק.

$$A\left(x,q\right)=\sum_{n\geq0}\sum_{\pi\in A_{n}}x^{n}q^{\#\text{ריבועים}(\pi)}$$

נסתכל על המקדמים השונים עבור n-ים קטנים:

$$n=3\Rightarrow\sqsubset\!\sqsupset\,\square+\square\,\sqsubset\!\sqsupset+\square\,\square\square\Rightarrow q^{3}x^{3}+qx^{3}+qx^{3}=\left(q^{3}+2q\right)x^{3}$$
$$n=2\Rightarrow\square\,\square+\sqsubset\!\sqsupset\Rightarrow q^{2}x^{2}+q^{0}x^{2}=\left(q^{2}+1\right)x^{2}$$
$$n=1\Rightarrow\square\Rightarrow qx$$
$$n=0\Rightarrow\varepsilon\Rightarrow1$$

$$\Rightarrow A\left(x,q\right)=1+qx+\left(q^{2}+1\right)x^{2}+\left(q^{3}+2q\right)x^{3}+\ldots$$

נמצא את $A\left(x,q\right)$:

$$\left[\text{אורך } n \text{ עם } k \text{ ריבועים}\right]=\square\left[\text{אורך } n-1 \text{ עם } k-1 \text{ ריבועים}\right]+\sqsubset\!\sqsupset\left[\text{אורך } n-2 \text{ עם } k \text{ ריבועים}\right]$$
$$a_{n,k}=a_{n-1,k-1}+a_{n-2,k}$$

$$a_{n,0}=\begin{cases}1 & \frac{n}{2}\in\mathbb{Z}\\0 & \frac{n}{2}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$a_{1,k}=\begin{cases}1 & k=1\\0 & k\neq1\end{cases}$$

$$a_{2,k}=\begin{cases}1 & k=0,2\\0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נמצא את $A\left(x,q\right)$:

$$\left[\text{כל מלבן}\right]=\varepsilon+\square\left[\text{כל מלבן}\right]+\sqsubset\!\sqsupset\left[\text{כל מלבן}\right]$$
$$A\left(x,q\right)=1+x^{1}q^{1}A\left(x,q\right)+x^{2}q^{0}A\left(x,q\right)$$

$$\Rightarrow A\left(x,q\right)=\frac{1}{1-xq-x^{2}}$$

<u>בדיקת שפיות:</u> עבור $q=1$ נקבל בדיוק את פיבונאצ'י.

2.1 ממוצע

נגדיר את ω_n להיות משתנה מקרי על הריצופים:

$$\omega_n\left(\text{ריצוף}\right)=\#\text{ריבועים}$$

$$\mathbb{E}\left[\omega_n\right]=\overline{\mu}_n=\frac{\text{סה"כ ריבועים בכל הריצופים}}{\text{מספר הריצופים}}$$

$$A\left(x,1\right)=\sum_{n\geq0}\left(\underbrace{\sum_{\pi\in A_n}1}_{a_n}\right)\cdot x^n$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial A\left(x,q\right)}{\partial q}\right|_{q=1}&=\left.\sum_{n\geq0}\sum_{\pi\in A_n}x^n\#\text{ריבועים}\left(\pi\right)q^{\#\text{ריבועים}(\pi)-1}\right|_{q=1}\\&=\sum_{n\geq0}\left(\sum_{\pi\in A_n}\#\text{ריבועים}\left(\pi\right)\right)x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overline{\mu}_n&=\frac{\left[x^n\right]\left(\left.\frac{\partial A(x,q)}{\partial q}\right|_{q=1}\right)}{\left[x^n\right]\left(A\left(x,1\right)\right)}\\&=\frac{\sum_{\pi\in A_n}\#\text{ריבועים}\left(\pi\right)}{\sum_{\pi\in A(n)}1}\end{aligned}$$

$$A\left(x,1\right)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left[x^n\right]A\left(x,1\right)&=F_{n+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial A\left(x,q\right)}{\partial q}\right|_{q=1}&=\frac{x}{\left(1-x-x^2\right)^2}\\&=\frac{x}{\left(1-\alpha x\right)^2\left(1-\beta x\right)^2}\end{aligned}$$

<u>טריק:</u> נגזור ונכפיל ב-x:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n\geq 0}F_{n+1}x^n\\
&\overset{\text{נגזור}}{\Rightarrow}\frac{1+2x}{\left(1-x-x^2\right)^2}=\sum_{n\geq 1}nF_{n+1}x^{n-1}\\
&\Rightarrow\frac{x+2x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2}=\sum_{n\geq 1}nF_{n+1}x^{n}\\
&\Rightarrow\frac{2x^2+2x-2-x+2}{\left(1-x-x^2\right)^2}=\sum_{n\geq 1}nF_{n+1}x^{n}\\
&\Rightarrow\frac{-2}{1-x-x^2}-\frac{x-2}{\left(1-x-x^2\right)^2}=\sum_{n\geq 1}nF_{n+1}x^{n}
\end{aligned}$$

שיעור הבא - מטרה: מציאת b_n.

$$[x^n]\left.\frac{\partial A(x,q)}{\partial q}\right|_{q=1}=b_n$$

$$\Rightarrow\boxed{\overline{\mu}_n=\frac{b_n}{F_{n+1}}}$$

2.2 סטיית תקן

$$Var\left(\omega_n\right)=\mathbb{E}\left[\omega_n^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[\omega_n\right]\right)^2$$

נחשב את $\mathbb{E}\left[\omega_n^2\right]$: **[המשך יבוא]**

נגזור פעמיים:

$$\begin{aligned}
Var\left(\omega_n\right)&=\mathbb{E}\left[\omega_n^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[\omega_n\right]\right)^2\\
&=???-\overline{\mu}_n^2
\end{aligned}$$

ראינו: אם $A(x,q)=\sum_{n\geq 0}\sum_{\pi\in A_n}x^nq^{f(\pi)}$ פונקציה יוצרת של סדרת מספר איברי קבוצה תחת סטטיסטיקה f, אז

$$\mathbb{E}[f]=\mu_n=\frac{[x^n]\left.\frac{\partial A(x,q)}{\partial q}\right|_{q=1}}{[x^n]\left(A(x,1)\right)}$$

כעת נסביר את $Var\left(f\right)$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}A\left(x,q\right)\right|_{q=1} &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\pi\in A_n} f\left(\pi\right)\cdot\left(f\left(\pi\right)-1\right)\right)1^{f(\pi)-2}\cdot x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{\pi\in A_n}\left(f\left(\pi\right)\right)^2 x^n - \sum_{n\geq 0}\sum_{\pi\in A_n} f\left(\pi\right)x^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left[x^n\right]\left(\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}A\left(x,q\right)\right|_{q=1}\right) = \sum_{\pi\in A_n}\left(f\left(\pi\right)\right)^2 - \sum_{\pi\in A_n} f\left(\pi\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\left[x^n\right]\left(\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}A\left(x,q\right)\right|_{q=1}\right)}{\left[x^n\right]\left(A\left(x,1\right)\right)} = \frac{\sum_{\pi\in A_n}\left(f\left(\pi\right)\right)^2}{\sum_{\pi\in A_n}1} - \frac{\sum_{\pi\in A_n}f\left(\pi\right)}{\sum_{\pi\in A_n}1} = \mathbb{E}\left[f^2\right]-\mathbb{E}\left[f\right]$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Var\left(f\right) &= \mathbb{E}\left[f^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[f\right]\right)^2 \\ &= \underbrace{\frac{\left[x^n\right]\left(\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}A\left(x,q\right)\right|_{q=1}\right)}{\left[x^n\right]\left(A\left(x,1\right)\right)} + \frac{\left[x^n\right]\left.\frac{\partial A(x,q)}{\partial q}\right|_{q=1}}{\left[x^n\right]\left(A\left(x,1\right)\right)}}_{\mathbb{E}\left[f^2\right]} - \left(\frac{\left[x^n\right]\left.\frac{\partial A(x,q)}{\partial q}\right|_{q=1}}{\left[x^n\right]\left(A\left(x,1\right)\right)}\right)^2\end{aligned}$$

3 מסלולים על שריג

- שריג $=\mathbb{Z}^2$.
- צעד $=$ וקטור, כלומר מתאר לנו איך להגיע מנקודה מסוימת.
- מסלול $=$ אוסף צעדים בין נקודה a_0 לנקודה a_n, כאשר אנו עוברים מ-a_i ל-a_{i+1} ע"י איזשהו צעד מוגדר לנו, לכל $i=0,\ldots,n-1$.

3.1 מסלול Dyck

מסלול Dyck הוא מסלול על השריג, שמתחיל בנקודה (a,k) ומסתיים בנקודה (b,k), כך שהמסלול אינו יורד מתחת לישר $y=k$, וכל צעד הוא $(1,1)$ (עלייה - U) או $(1,-1)$ (ירידה - D).

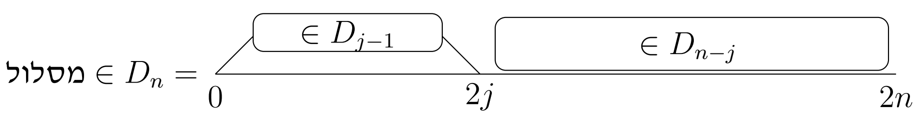
שאלה: כמה מסלולי Dyck יש שמתחילים בראשית הצירים, ומסתיימים באיזשהי נקודה על ציר x?

נסמן את קבוצת מסלולים אלו ב-D_n, כאשר $(2n,0)$ זו נקודת הסיום (או $2n$ צעדים), ונגדיר $c_n = |D_n|$. בטבלה 1 מוצגים D_n ו-c_n עבור ערכי n קטנים.

n	D_n	c_n
0	$\{\varepsilon\}$	1
1	$\{UD\}$	1
2	$\{UDUD, UUDD\}$	2
3	$\{UUUDDD, UDUDUD, UUDDUD, UDUUDD, UDUUDD\}$	5
$\vdots$	$?$	$?$

טבלה 1: מסלולי Dyck עבור ערכי n קטנים.

כעת, נפתח את כלל הנסיגה, כפי שמתואר באיור 3.



איור 3: כלל הנסיגה עבור מסלולי Dyck.

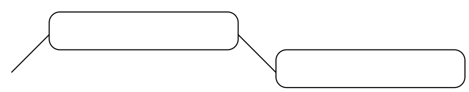
$$\Rightarrow \begin{cases} c_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1} \cdot c_{n-j} & n \geq 1 \\ c_0 = 1 \end{cases}$$

אלו מספרי קטלן (Catalan). כעת, נמצא פונקציה יוצרת:

- <u>שיטה א':</u> תהי $C(x)=\sum_{n\geq0}c_nx^n$, מצאו את $C(x)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq1}c_nx^n &= \sum_{n\geq1}\sum_{j=1}^{n}c_{j-1}c_{n-j}x^n\\ C(x)-c_0 &= \sum_{n\geq1}\sum_{i=0}^{n-1}c_ic_{n-1-i}x^n\\ (m+1=n) &= x\sum_{m\geq0}\sum_{i=0}^{m}c_ic_{m-i}x^m\\ (\text{מכפלת קושי}) &= x\cdot\sum_{n\geq0}c_nx^n\cdot\sum_{n\geq0}c_nx^n\\ &= x\cdot C(x)\cdot C(x)\\ \Rightarrow C(x) &= 1+x\left(C(x)\right)^2\end{aligned}$$

- <u>שיטה ב':</u> נמצא את הפונקציה היוצרת ישירות, נפתח בעזרת איור 4.

Dyck כל מסלול $=\ \varepsilon\ +$ 

איור 4: פיתוח ישיר של הפונקציה היוצרת למסלולי Dyck.

$$\begin{aligned}\Rightarrow C(x) &= \underbrace{1}_{\varepsilon}+\underbrace{x^1}_{\text{עלייה אחת}}C(x)\cdot C(x)\\ &\Rightarrow 1-C(x)+x\left(C(x)\right)^2\\ \Rightarrow C(x) &= \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\vee C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\end{aligned}$$

מה הפתרון הנכון? נשים לב כי $C(0)=c_0=1$, וננסה כל אחת מהאפשרויות:

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=\infty\neq1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\underset{\text{לופיטל}}{=}1=c_0$$

$$\Rightarrow\boxed{C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

כעת, נמצא נוסחא סגורה, כלומר את $c_n = [x^n]\, C(x)$.

טענה. עבור $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x^1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \\ &= \sum_{j\geq 0} \binom{\alpha}{j} x^j\end{aligned}$$

כאשר

$$\binom{\alpha}{j} := \begin{cases} 1 & j=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j \geq 1 \end{cases}$$

דוגמה. נחשב את $\binom{1/2}{j}$, עבור $j \geq 1$:

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{j} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-j+1\right)}{j!} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\dots\cdot\frac{-2j+3}{2}}{j!} \\ &= \frac{(-1)(-3)\cdots(-(2j-3))}{2^j j!} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{2^j j!}\left(1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2j-3)\right) \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{2^j j!}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(2j-2)(2j-3)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2j-2)} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}(2j-2)!}{2^j j!\cdot\left(2^{j-1}(j-1)!\right)} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{2^{2j-1}}\cdot\frac{1}{j}\binom{2j-2}{j-1}\end{aligned}$$

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= (1-4x)^{1/2} \\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{1/2}{j}(-4x)^j \\
&= 1+\sum_{j\geq 1}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{2j-1}}\cdot\frac{1}{j}\binom{2j-2}{j-1}\cdot(-1)^j\,2^{2j}x^j \\
&= 1+\sum_{j\geq 1}\frac{-2}{j}\binom{2j-2}{j-1}x^j \\
&= 1-2\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\binom{2j-2}{j-1}x^j \\
&= 1-2x\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
&= \frac{1-\left(1-2x\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i\right)}{2x} \\
&= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i
\end{aligned}$$

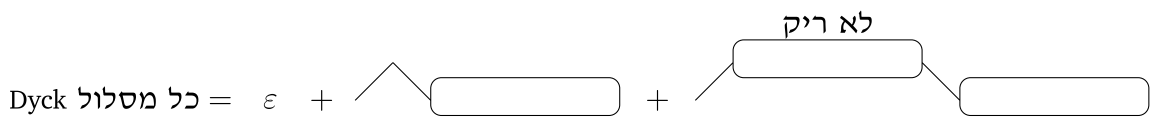
$$\Rightarrow c_n = [x^n]\,C(x) = \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{מספר קטאלאן}}$$

כעת, נגדיר גבעה במסלול Dyck להיות סדרת הצעדים UD. נרצה למצוא את ממוצע ושונות הגבעות ב-D_n.

- עבור $\pi\in D_n$, נסמן ב-$f(\pi)$ את מספר הגבעות במסלול, ו-

$$C(x,q)=\sum_{n\geq 0}\sum_{\pi\in D_n}x^n q^{f(\pi)}$$

- נרצה לפתח את $C(x,q)$ ישירות, באופן שיתאים לחישוב $f(\pi)$, כפי שמוצג באיור 5.



איור 5: פיתוח הפונקציה היוצרת $C\left(x,q\right)$ עבור הסטטיסטיקה #גבעות.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow C\left(x,q\right)=1+x^{1}q^{1}C\left(x,q\right)+x^{1}q^{0}\left(C\left(x,q\right)-1\right)\cdot\left(C\left(x,q\right)\right)\\
&\Rightarrow 0=1+\left(xq-x-1\right)C\left(x,q\right)+x\left(C\left(x,q\right)\right)^{2}\\
&\Rightarrow C\left(x,q\right)=\frac{1+x-xq-\sqrt{\left(1+x-xq\right)^{2}-4x}}{2x}
\end{aligned}$$

- כעת, נרצה למצוא את התוחלת:

$$\mathbb{E}\left[f\right]=\frac{\left[x^{n}\right]\left(\frac{\partial}{\partial q}C\left(x,q\right)\Big|_{q=1}\right)}{\underbrace{\left[x^{n}\right]C\left(x,1\right)}_{=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}}$$

<u>טריק:</u> נניח ש-$|x|,|q|\ll 1$. אזי:

$$\begin{aligned}
C\left(x,q\right)&=\frac{1+x-xq-\left(1+x-xq\right)\sqrt{1-\frac{4x}{\left(1+x-xq\right)^{2}}}}{2x}\\
&=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4x}{\left(1+x-xq\right)^{2}}}}{\frac{2x}{1+x-xq}}\\
&=\frac{1}{1+x-xq}C\left(\frac{x}{\left(1+x-xq\right)^{2}}\right)\\
&=\frac{1}{1+x-xq}\sum_{n\geq0}c_{n}\left(\frac{x}{\left(1+x-xq\right)^{2}}\right)^{n}\\
&=\sum_{n\geq0}c_{n}\cdot\frac{x^{n}}{\left(1+x-xq\right)^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q} C\left(x,q\right) &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{\left(1+x-xq\right)^{2n+1}}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} c_n x^n \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\left(1+x-xq\right)^{2n+1}}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} c_n x^n \frac{x\left(2n+1\right)}{\left(1+x-xq\right)^{2n+2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial q} C\left(x,q\right)\right|_{q=1} &= \sum_{n\geq 0} c_n x^n \frac{x\left(2n+1\right)}{\left(1+x-xq\right)^{2n+2}} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\left(2n+1\right)x^{n+1} \\
\left(m=n+1\right) &= \sum_{m\geq 1} c_{m-1}\left(2m-1\right)x^m
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[x^n\right] \left.\frac{\partial}{\partial q} C\left(x,q\right)\right|_{q=1} = \left(2n-1\right)c_{n-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f] = \frac{[x^n]\left(\frac{\partial}{\partial q}C(x,q)\Big|_{q=1}\right)}{\underbrace{[x^n]C(x,1)}_{=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}}$$

$$= \frac{(2n-1)c_{n-1}}{c_n}$$

$$= \frac{(2n-1)\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{\frac{(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!\cdot n}}{\frac{(2n)!}{(n!)(n!)(n+1)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{2n}{(n!)(n+1)}}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n}$$

$$= \boxed{\frac{n+1}{2}}$$

$$Var(f) = \frac{[x^n]\left(\frac{\partial^2 C(x,q)}{\partial q^2}\Big|_{q=1}\right)}{[x^n]C(x,1)} + \frac{[x^n]\left(\frac{\partial C(x,q)}{\partial q}\Big|_{q=1}\right)}{[x^n]C(x,1)} - \left(\frac{[x^n]\left(\frac{\partial C(x,q)}{\partial q}\Big|_{q=1}\right)}{[x^n]C(x,1)}\right)^2$$

נחשב את $\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}C\left(x,q\right)\right|_{q=1}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}C\left(x,q\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\underbrace{\sum_{n\geq 0}c_nx^n\,\frac{x\left(2n+1\right)}{\left(1+x-xq\right)^{2n+2}}}_{\frac{\partial}{\partial q}C(x,q)}\right)$$

$$=\sum_{n\geq 0}c_nx^n\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x\left(2n+1\right)}{\left(1+x-xq\right)^{2n+2}}\right)$$

$$=\sum_{n\geq 0}c_nx^{n+1}\left(2n+1\right)\cdot\frac{\left(2n+2\right)x}{\left(1+x-xq\right)^{2n+3}}$$

$$=\sum_{n\geq 0}c_n\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)x^{n+2}\frac{1}{\left(1+x-xq\right)^{2n+3}}$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}C\left(x,q\right)\right|_{q=1}=\sum_{n\geq 0}c_n\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)x^{n+2}\frac{1}{1^{2n+3}}$$

$$=\sum_{m\geq 2}c_{m-2}\left(2m-1\right)\left(2m\right)x^m$$

$$\Rightarrow\left[x^n\right]\left.\frac{\partial^2}{\partial q^2}C\left(x,q\right)\right|_{q=1}=2n\left(2n-1\right)c_{n-2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Var\left(f\right) &= \frac{[x^n]\left(\left.\frac{\partial^2 C(x,q)}{\partial q^2}\right|_{q=1}\right)}{[x^n]\,C\left(x,1\right)} + \mathbb{E}\left[f\right] - \left(\mathbb{E}\left[f\right]\right)^2 \\
&= \frac{2n\left(2n-1\right)c_{n-2}}{c_n} + \frac{n+1}{2} - \frac{n^2+2n+1}{4} \\
&= \frac{2n\left(2n-1\right)\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} + \frac{2n+2-\left(n^2+2n+1\right)}{4} \\
&= \frac{2n\left(2n-1\right)\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-2)!}}{\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)(n!)}} + \frac{1-n^2}{4} \\
&= 2n\left(2n-1\right)\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!\,(n-2)!}\left(n+1\right)\left(n!\right)\left(n!\right)\frac{1}{(2n)!} + \frac{1-n^2}{4} \\
&= \frac{1}{(2n-2)!}\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!\,(n-2)!}\left(n+1\right)\left(n!\right)\left(n!\right) + \frac{1-n^2}{4} \\
&= \frac{1}{\left(2n-3\right)\left(2n-2\right)}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot n^2\left(n-1\right)^2 + \frac{1-n^2}{4} \\
&= \frac{n^2}{\left(2n-3\right)\left(2n-2\right)}\cdot\left(n^2-1\right) - \frac{n^2-1}{4} \\
&= \boxed{\left(n^2-1\right)\left(\frac{n^2}{\left(2n-3\right)\left(2n-2\right)} - \frac{1}{4}\right)}
\end{aligned}$$

נמצא את התוחלת של מספר הגבעות ב-D_n: נסמן ב-$f\left(\pi\right)$ את מספר הגבעות עבור $\pi \in D_n$.

$$\mathbb{E}_n\left[f\right] = \frac{[x^n]\left(\left.\frac{\partial}{\partial q}C\left(x,q\right)\right|_{q=1}\right)}{[x^n]\left(C\left(x,1\right)\right)} = \frac{d_n}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

נמצא את d_n, נסמן $\tilde{C}\left(x\right) = \left.\frac{\partial}{\partial q}C\left(x,q\right)\right|_{q=1}$.

$$\tilde{C}\left(x\right) = 0 + xC\left(x,1\right) + x\tilde{C}\left(x\right) + x\tilde{C}\left(x\right)C\left(x,1\right) + x\left(C\left(x,1\right)-1\right)\tilde{C}\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x) &= \frac{xC(x,1)}{1-x-xC(x,1)-x(C(x,-1)-1)} \mid \\ &= \frac{xC(x,1)}{1-2xC(x,1)} \\ &= \frac{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}{1-\left(1-\sqrt{1-4x}\right)} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2\sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= (1-4x)^{-1/2} \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4)^n x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(-\frac{1}{2}n+1\right)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \\ &= \dots \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n2^n n!n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-1)^n 4^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}_n[f] &= \frac{[x^n]\left(\frac{\partial}{\partial q}C(x,q)\Big|_{q=1}\right)}{[x^n](C(x,1))}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}\\ &= \boxed{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

הערה. כל סטטיסטיקה שהתוחלת שלה לינארית, מגיעה מהתפלגות נורמלית. כלומר, מספר הגבעות במסלולי Dyck מתפלג נורמלית.

כעת, נמצא את $Var(f)$. נסמן $\tilde{\tilde{C}}(x)=\frac{\partial^2}{\partial q^2}C(x,q)\Big|_{q=1}$.

$$\tilde{\tilde{C}}(x)=0+2x\tilde{\tilde{C}}(x)+2x\tilde{C}(x)+x(C(x,1)-1)\tilde{\tilde{C}}(x)+2x\tilde{C}^2(x)+x\tilde{\tilde{C}}(x)\tilde{C}(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{\tilde{C}}(x) &= \frac{2x\tilde{C}(x)+2x\tilde{C}^2(x)}{1-x-x(C(x,1)-1)-xC(x,1)}\\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-4x}}-x+\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}}-x\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}}-x\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4x}}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{\left(x-x\sqrt{1-4x}\right)\left(1+\sqrt{1-4x}\right)}{2\sqrt{1-4x}^3}\\ &= \frac{x-x(1-4x)}{2\sqrt{1-4x}^3}\\ &= \frac{2x^2}{\sqrt{1-4x}^3}\end{aligned}$$

למה. נפתח את $\frac{1}{\sqrt{1-4x}^3}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}^3}=(1-4x)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
\binom{-3/2}{n} &= \frac{\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}\cdot\dots\cdot\left(\frac{-3}{2}-n+1\right)}{n!}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\cdot\frac{1^2\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot\dots\cdot(2n+1)^{2n+2}}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n+2)}\\
\gamma_n &= \frac{(-1)^n(2n+2)!}{n!2^n2^{n+1}n!\,(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-4x}^3} = \sum_{n\geq 0}\gamma_n(-4)^n$$

$$\Rightarrow [x^n]\frac{1}{\sqrt{1-4x}^3} = \frac{(2n+2)!}{2n!\,(n+1)!}$$

כעת, נחשב את $[x^n]\,\tilde{\tilde{C}}(x)$:

$$\begin{aligned}
[x^n]\,\tilde{\tilde{C}}(x) &= 2\left[x^{n-2}\right]\frac{1}{\sqrt{1-4x}^3}\\
&= 2\cdot\frac{(2n-2)!}{2\,(n-2)!\,(n-1)!}\\
&= n\binom{2n-2}{n-2}
\end{aligned}$$

עבור $n \geq 2$. כעת, נחשב את $Var\left(f\right)$.

$$\begin{aligned}
Var\left(f\right) &= \frac{\left[x^n\right]\tilde{\tilde{C}}\left(x\right)}{\left[x^n\right]C\left(x,1\right)} + \frac{\left[x^n\right]\tilde{C}\left(x\right)}{\left[x^n\right]C\left(x,1\right)} - \left(\frac{\left[x^n\right]\tilde{C}\left(x\right)}{\left[x^n\right]C\left(x,1\right)}\right)^2 \\
&= \frac{n\binom{2n-2}{n-2}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n\left(n^2-1\right)}{2n-1} + \frac{2\left(n+1\right)-\left(n+1\right)^2}{4} \\
&= \frac{2n^3-n^2+2n-1-2n^3+n^2}{4\left(2n-1\right)} \\
&= \frac{n^2-1}{4\left(2n-1\right)} \\
&= \frac{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{4\left(2n-1\right)} \\
&\approx \boxed{\frac{n}{8}}
\end{aligned}$$

3.2 מסלול מוצקין

הגדרה. מסלול מוצקין הוא ממסלול על השריג מ-$(0,0)$ עד לאיזשהי נקודה על ציר x, כך שאינו יורד מתחת לציר x, וכל צעד הוא עלייה $(1,1)$ (U), ירידה $(1,-1)$ (D) או ימינה $(1,0)$ (H).

נסמן את קבוצת מסלולי מוצקין המגיעים לנקודה $(n,0)$ ב-M_n.

$$\begin{array}{rc}
M_0: & \{\varepsilon\} \\
M_1: & \{H\} \\
M_2: & \{HH, UD\} \\
M_3: & \{HHH, HUD, UDH, UHD\} \\
\vdots &
\end{array}$$

איור 6: פיתוח הפונקציה היוצרת עבור מסלולי מוצקין.

נפתח את הפונקציה היוצרת ישירות, בעזרת איור 6:

$$M\left(x\right)=1+xM\left(x\right)+x^{2}M^{2}\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow M\left(x\right) & =\frac{1-x\pm\sqrt{\left(1-x\right)^{2}-4x^{2}}}{2x^{2}}\\
\left(\text{נפסל}+\right) & =\frac{1-x-\left(1-x\right)\sqrt{1-\frac{4x^{2}}{\left(1-x\right)^{2}}}}{2x^{2}}\\
 & =\frac{1-\sqrt{1-\frac{4x^{2}}{\left(1-x\right)^{2}}}}{\left(1-x\right)\frac{2x^{2}}{\left(1-x\right)^{2}}}\\
 & =\frac{1}{1-x}C\left(\frac{x^{2}}{\left(1-x\right)^{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow M\left(x\right) & =\sum_{n\geq0}c_{n}\left(\frac{x^{2}}{\left(1-x\right)^{2}}\right)^{n}\cdot\frac{1}{1-x}\\
 & =\sum_{n\geq0}c_{n}\frac{x^{2n}}{\left(1-x\right)^{2n+1}}\\
 & =\sum_{n\geq0}c_{n}x^{2n}\sum_{m\geq0}\binom{2n+m}{m}x^{m}\\
 & =\sum_{n\geq0}\sum_{m\geq0}c_{n}\binom{2n+m}{m}x^{2n+m}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left[x^{j}\right]\underset{m=2n-j}{=}\sum_{n=0}^{\left\lfloor j/2\right\rfloor }\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{m}{m-2n}$$

תרגיל. תהי M_{n} קבוצת מסלולי מוצקין על n צעדים. נגדיר $f:M_{n}\to\mathbb{N}_{0}$, כך ש-$\#_{H}\left(\pi\right)\mapsto\pi$. מצאו את $\mathbb{E}\left[f\right]$.

פתרון. נגדיר $M\left(x,q\right)=\sum_{n\geq0}\left(\sum_{\pi\in M_{n}}q^{f\left(\pi\right)}\right)x^{n}$. ניעזר באיור 6 לפיתוח הפונקציה היוצרת - עדיין תקף!

$$M\left(x,q\right)=1+xqM\left(x,q\right)+x^{2}M^{2}\left(x,q\right)$$

הוכחה. נגדיר $\tilde{M}(x) = \frac{\partial}{\partial q} M(x,q)\Big|_{q=1}$:

$$\tilde{M}(x) = 0 + xM(x,1) + x\tilde{M}(x) + 2x^2 M(x,1)\tilde{M}(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tilde{M}(x) &= \frac{xM(x,1)}{1-x-2x^2M(x,1)}\\ &= \dots\\ &= \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x\sqrt{1-2x-3x^2}}\end{aligned}$$

□

<u>תחושת בטן:</u> אין נוסחא יפה ל-$[x^n]\,\tilde{M}(x)$. בנוסף:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x-3x^2} &= \left(1-\left(2x+3x^2\right)\right)^{1/2}\\ &= \sum_{j\geq 0}\binom{1/2}{j}(-1)^j\left(2x+3x^2\right)^j\end{aligned}$$

אם נפתח את הבינום, יהיו שני סכומים, וכך ב-$\mathbb{E}[f]$ יהיה סכום חלקי סכום: לא יפה! בהמשך (??), נחשב אסימפטוטית כל אחד מהם.

4 חלוקות

4.1 מספרי Bell

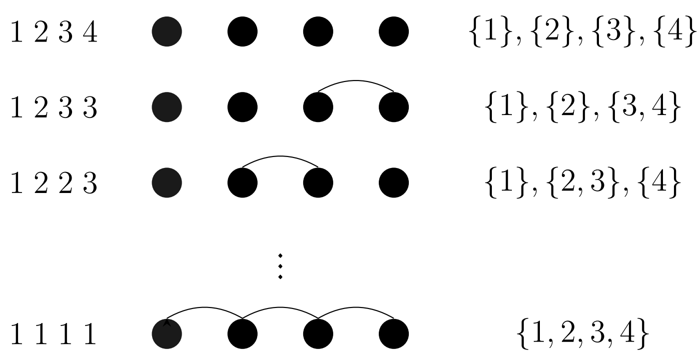
תרגיל. (בבית) חלוקה של הקבוצה $[n]=\{1,\dots,n\}$ היא אוסף קבוצות $A_1,\dots,A_m$ כך ש-$A_i\cap A_j\neq\emptyset$ לכל $i\neq j$ וגם $\bigcup_{i=1}^n A_i=[n]$. לשם פשטות, נניח שהקבוצות מקיימות

$$\min A_1 < \min A_2 < \cdots < \min A_m$$

נסמן ב-b_n את מספר החלוקות של $[n]$, מצא את הפונקציה היוצרת

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

דוגמה. ייצוג החלוקות של $\{1,2,3,4\}$.



איור 7: ייצוג החלוקות של הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ באופן גרפי. מסלול בגרף (אמצע) / מספר שווה (שמאל) בין מספרים מאותה קבוצה.

דוגמה. מאיור 7, נוכל לפתח כלל נסיגה עבור הסדרה:

- עבור החלוקה הריקה, $b_0 = 1$.
- בכל חלוקה לא ריקה, A_1 מכילה את 1 ועוד j איברים נוספים ($0 \le j \le n-1$), ונותר לחלק את $n-1-j$ האיברים שנותרו:

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_{n-j-1}$$

- כעת, נפתח את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה.
- זהו כלל נסיגה לא ליניארי! ומסדר לא סופי.

הגדרה. נגדיר פונקציה יוצרת מעריכית בתור

$$B(x) = \sum_{n\ge 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!} \frac{b_{n-1-j}}{(n-1-j)!}$$

$$\frac{b_n}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \frac{b_{n-1-j}}{(n-1-j)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}\tilde{b}_n x^n = B(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n$$

$$\left(\tilde{b}_n x^n\right)' = \left(\frac{b_n x^n}{n!}\right)' = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\tilde{b}_{n-1-j}x^{n-1}$$

$$\sum_{n\geq 1}\left(\tilde{b}_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{b_n x^n}{n!}\right)' = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\tilde{b}_{n-1-j}x^{n-1}$$

$$\left(B(x) - \tilde{b}_0\right)' = \sum_{m\geq 0}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\frac{\tilde{b}_{m-j}}{1}x^m = \sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!}\cdot\sum_{j\geq 0}\tilde{b}_j x^j$$

$$\Rightarrow B'(x) = e^x B(x)$$

$$\Rightarrow \frac{B'(x)}{B(x)} = e^x$$

$$\Rightarrow \ln B(x) = e^x + c \Rightarrow B(x) = e^{e^x + c}$$

$$B(0) = \tilde{b}_0 = 1 = e^{e^0 + c} \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{B(x) = e^{e^x - 1}}$$

<u>בעיה:</u> מהו $\text{Bell}_n = [x^n]\,B(x)$?

$$\begin{aligned} B(x) &= e^{e^x}\cdot e^{-1}\\ &= e^{-1}\sum_{j\geq 0}\frac{(e^x)^j}{j!}\\ &= e^{-1}\sum_{j\geq 0}\frac{e^{jx}}{j!}\\ &= e^{-1}\sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0}\frac{(jx)^i}{i!j!}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Bell}_n}{n!} = e^{-1}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{n!j!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Bell}_n = e^{-1}\sum_{j\geq 0}\frac{j^n}{j!}}$$

כך נוכל להביע סכומים קשים באמצעות מספרי Bell:

$$\sum_{j\geq 0}\frac{j^3}{j!}=e\mathrm{Bell}_3=5e$$

זו הפונקציה היוצרת המעריכית, נרצה למצוא את הרגילה.

הגדרה. נסמן $S_{n,k}$ מספר החלוקות של $[n]$ עם k בלוקים <u>בדיוק</u> (סטרלינג).

נפתח כלל נסיגה לאיברי הסדרה:

$$S_{n,k}=\underbrace{S_{n-1,k-1}}_{n\text{ מהווה בלוק}}+k\cdot\underbrace{S_{n-1,k}}_{n\text{ לא מהווה בלוק}}$$

$$S_{n,0}=\delta_{n=0}=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$
$$S_{0,k}=\delta_{k=0}$$

$$\begin{aligned}S_{n,1}&=0+S_{n-1,1}\\&=S_{n-1,1}\\&=\cdots\\&=S_{1,1}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{n,2}&=S_{n-1,1}+2S_{n-1,2}\\&=1+2S_{n-1,2}\\&=\dots\\&=2^{n-1}-1\end{aligned}$$

תרגיל. מצאו את הפונקציה היוצרת $S_k\left(x\right)=\sum_{n\geq k}S_{n,k}x^n$.

פתרון. נפתור.

$$\begin{aligned}S_k\left(x\right)&=\sum_{n\geq k}S_{n,k}x^n\\&=\sum_{n\geq k}S_{n-1,k-1}x^n+\sum_{n\geq k}kS_{n-1,k}x^n\\&=x\sum_{n\geq k}S_{n-1,k-1}x^{n-1}+xk\sum_{n\geq k}S_{n-1,k}x^{n-1}\\&=xS_{k-1}\left(x\right)+kxS_k\left(x\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_k(x) = \frac{x}{1-kx} S_{k-1}(x)$$
$$S_0(x) = \sum_{n\geq 0} S_{n,0} x^n = \sum_{n\geq 0} \delta_{n=0} x^n = 1$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{x}{1-x} S_0(x) = \frac{x}{1-x} \\ S_2(x) &= \frac{x}{1-2x}\frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} \\ &\vdots \\ S_k(x) &= \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \end{aligned}$$

כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} S_k(x)\, y^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{x^k y^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \end{aligned}$$

אזי $S(x,1)$ הוא הפונקציה היוצרת של Bell_n. כלומר:

$$\sum_{n\geq 0} \text{Bell}_n x^n = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$$

תרגיל. נתונה הפונקציה היוצרת הרגילה $F(x) = \sum_{n\geq 0} \text{Bell}_n x^n = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)}$. מצאו את $G(x) = \sum_{n\geq 0} \text{Bell}_n \frac{x^n}{n!}$.

למה. נסתכל על $\frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)}$:

$$\frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)} = a_0 + \frac{a_1}{1-x} + \frac{a_2}{1-2x} + \cdots + \frac{a_k}{1-kx}$$

כאשר

$$\begin{aligned}
a_m &= \lim_{x\to\frac{1}{m}} \frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)}(1-mx)\\
(0\le m\le k) &= \lim_{x\to\frac{1}{m}} \frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-(m-1)x)(1-(m+1)x)\cdots(1-kx)}\\
&= \frac{\frac{1}{m^k}}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\left(1-\frac{m+1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{m}\right)}\\
&= \frac{\frac{1}{m}}{(m-1)(m-2)\cdots(1)\cdot(-1)(-2)\cdots(-(k-m))}\\
&= \frac{(-1)^{k-m}}{m!\,(k-m)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)} &= \sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-m}}{m!\,(k-m)!}\cdot\frac{1}{1-mx}\\
&= \sum_{m=0}^{k}\sum_{j\ge 0}\frac{(-1)^{k-m}}{m!\,(k-m)!}m^j x^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge 0}\mathrm{Bell}_n\frac{x^n}{n!} &= \sum_{k\ge 0}\sum_{n\ge 0}x^n\frac{[x^n]\frac{x^k}{(1-x)\cdots(1-kx)}}{n!}\\
&= \sum_{k\ge 0}\sum_{m=0}^{k}\sum_{j\ge 0}\frac{(-1)^{k-m}}{m!\,(k-m)!}\cdot\frac{m^j x^j}{j!}\\
&= \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-m}\,k!}{m!\,(k-m)!}e^{mx}\\
&= \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}(e^x)^m\\
&= \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}(e^x-1)^k\\
&= e^{e^x-1}
\end{aligned}$$

הערה. מכפלת קושי של פונקציות יוצרות מעריכיות.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq0}a_n\frac{x^n}{n!}\sum_{n\geq0}b_n\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geq0}\left(\frac{a_n}{n!}\right)x^n\sum_{n\geq0}\left(\frac{b_n}{n!}\right)x^n\\ &= \sum_{n\geq0}\left(\sum_{j=0}^{n}n!\frac{a_j}{j!}\cdot\frac{b_{n-j}}{(n-j)!}\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq0}\left(\sum_{j\geq0}\binom{n}{j}a_jb_{n-j}\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

תרגיל. יהי $a_{n,k}$ מספר החלוקות של $[n]$ ל-k בלוקים כך שגודל כל בלוק הוא לפחות 2.

1. מצאו כלל נסיגה עם תנאי התחלה לסדרה $a_{n,k}$.
2. מצאו פונקציה יוצרת רגילה $A\left(x,y\right)=\sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^ny^k$.
3. מצאו פונקציה יוצרת מעריכית המתאימה ל-$A\left(x,y\right)$.
4. מצאו אסימפטוטית את גודל $a_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}$ (לא למדנו עדיין).

פתרון. נפתור את סעיפים 1-3.

1. נמצא כלל נסיגה.

$$a_{n,k}=\left\{1,\underbrace{\cdots}_{\text{לפחות מספר 1}}\right\}\underbrace{\cdots}_{k-1\text{ בלוקים, כל בלוק לפחות 2}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{n,k}=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}a_{n-j-1,k-1}\\ a_{n,0}=\delta_{n=0}\\ a_{0,k}=\delta_{k=0}\end{cases}$$

2. נמצא את הפונקציה היוצרת.

$$\begin{aligned}A\left(x,y\right) &= \sum_{n\geq0}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^ny^k\\ &= 1+\sum_{n\geq1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}a_{n-1-j,k-1}\right)x^ny^k\end{aligned}$$

תסביך! נבצע החלפת סכומים (משפט פוביני).

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\cdots=\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k}\cdots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A\left(x,y\right) &= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n-1}{j}a_{n-1-j,k-1}\right)x^{n}y^{k}\\
(m=n-k) &= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\sum_{j=1}^{m}\binom{m+k-1}{j}a_{m+k-1-j,k-1}x^{m+k}y^{k}\\
&= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1}\sum_{m\geq j}\binom{m+k-1}{j}a_{m+k-1-j,k-1}x^{m+k}y^{k}\\
(d=m-j) &= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1}\sum_{d\geq 0}\binom{d+k-1+j}{j}a_{d+k-1,k-1}x^{d+k+j}y^{k}\\
&= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 0}a_{d+k-1,k-1}x^{d+k}y^{k}\left(\sum_{j\geq 1}\binom{d+k-1+j}{j}x^{j}\right)\\
(\text{זהב}) &= 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 0}a_{d+k-1,k-1}x^{d+k}y^{k}\left(\frac{1}{\left(1-x\right)^{d+k}}-1\right)\\
&= 1+\underbrace{\sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 0}a_{d+k-1,k-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{d+k}y^{k}}_{(I)}-\underbrace{\sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 0}a_{d+k-1,k-1}x^{d+k}y^{k}}_{(II)}
\end{aligned}$$

נמצא את I ו-II:

$$\begin{aligned}
(II) &= \sum_{k\geq 1}\sum_{d\geq 0} a_{d+k-1,k-1}x^{d+k}y^k \\
&\underbrace{=}_{d=m-k} \sum_{k\geq 1}\sum_{m\geq k} a_{m-1,k-1}x^m y^k \\
&= xy\sum_{m\geq 1}\sum_{k=1}^{m} a_{m-1,k-1}x^{m-1}y^{k-1} \\
(m=\tilde{m}+1) &= xy\sum_{\tilde{m}\geq 0}\sum_{k=1}^{\tilde{m}+1} a_{\tilde{m},k-1}x^{\tilde{m}}y^{k-1} \\
\left(k=\tilde{k}+1\right) &= xy\sum_{\tilde{m}\geq 0}\sum_{\tilde{k}=0}^{\tilde{m}} a_{\tilde{m},\tilde{k}}x^{\tilde{m}}y^{\tilde{k}} \\
&= xyA\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

נשים לב ש-(I) הוא כמו (II), רק עם שינוי של x ב-$\frac{x}{1-x}$. כלומר,

$$(I) = \frac{x}{1-x}yA\left(\frac{x}{1-x},y\right)$$

מכאן,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A\left(x,y\right) = 1 - xyA\left(x,y\right) + \frac{xy}{1-x}A\left(\frac{x}{1-x},y\right) \\
&\Rightarrow A\left(x,y\right) = \underbrace{\frac{1}{1+xy}}_{\alpha_x} + \underbrace{\frac{xy}{\left(1-x\right)\left(1+xy\right)}}_{\beta_x}A\left(\frac{x}{1-x},y\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\left(x,y\right) &= \alpha_x + \beta_x\left(\alpha_{\frac{x}{1-x}} + \beta_{\frac{x}{1-x}}A\left(\frac{x}{1-2x},y\right)\right) \\
&= \alpha_x + \beta_x\alpha_{\frac{x}{1-x}} + \beta_x\beta_{\frac{x}{1-x}}\alpha_{\frac{x}{1-2x}} + \beta_x\beta_{\frac{x}{1-x}}\beta_{\frac{x}{1-2x}}\alpha_{\frac{x}{1-3x}} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \sum_{j\geq 0}\beta_{\frac{x}{1-0x}}\beta_{\frac{x}{1-x}}\cdots\beta_{\frac{x}{1-(j-1)x}}\alpha_{\frac{x}{1-jx}}\\ &= \sum_{j\geq 0}\frac{1}{1+\frac{xy}{1-jx}}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\frac{xy}{1-ix}}{\left(1-\frac{x}{1-ix}\right)\left(1+\frac{xy}{1-ix}\right)}\\ &= \boxed{\sum_{j\geq 0}\frac{1-jx}{1-(j-y)x}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{(1-ix)xy}{(1-(i+1)x)(1-(i-y)x)}}\end{aligned}$$

<u>בבית:</u> כלל הנסיגה הוא הבעיה! נחפש כלל נסיגה יותר יפה. נבנה את כלל הנסיגה אחרת: אין בלוק שמכיל מספר אחד בלבד.

- נסמן מספר זה ב-$B^*_{n,m}$: איפה אפשר לשים את n? בה"כ עם $n-1$.
  - אם $\{n,n-1\}$ הוא בלוק משל עצמו זה הבלוק האחרון, $B^*_{n-2,m-1}$.
  - אם שניהם יחד בבלוק אחר, שיש בו איברים - $B^*_{n-1,m}$ (העפנו את n).
  - אם n בכל בלוק אחר, $B^*_{n-2,m}$.

$$B^*_{n,m} = B^*_{n-1,m} + B^*_{n-2,m-1} + (m-1)\,B^*_{n-2,m}$$

- נמצא את הפונקציה היוצרת - נגדיר $B^*_m(x) = \sum_{n\geq m} B^*_{n,m}x^m$.

$$\begin{aligned}B^*_m(x) &= \sum_{n\geq m} B^*_{n,m}x^m\\ &= xB^*_m(x)\\ &= x^2B^*_{m-1}(x)\\ &= (m-1)\,x^2B^*_m(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B^*_m(x) = \frac{x^2}{1-x-(m-1)\,x^2}B^*_{m-1}(x)$$

$$B^*_0(x) = 1$$

$$B^*_1(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\begin{aligned}B_m^*(x) &= \frac{x^2}{1-x-(m-1)x^2}\cdot\frac{x^2}{1-x-(m-2)x^2}\cdot\cdots\cdot\frac{x^2}{1-x}\\ &= \prod_{j=0}^{m-1}\frac{x^2}{1-x-jx^2}\\ &= \frac{x^{2(m-1)}}{\prod_{j=0}^{m-1}(1-x-jx^2)}\end{aligned}$$

$$B^*(x,y) = 1+\sum_{m\geq 0}\frac{x^{2m}y^m}{\prod_{j=0}^{m-1}(1-x-jx^2)}$$

לפתח פונקציה יוצרת מעריכית - קשה מאוד.

4.2 Lagrange Inversion Formula

משפט. (סעיף של Lagrange Inversion Formula, LIF) תהי $A(x)$ פונקציה יוצרת המקיימת

$$A = x\Phi(A)$$

כאשר $\Phi(0)\neq 0$, ו-Φ נחמדה. אזי,

$$[x^n]A(x) = \frac{1}{n}\left[A^{n-1}\right](\Phi(A))^n$$

דוגמה. קטלן.

$$C = 1+xC^2$$

נגדיר $\tilde{C} = C-1$, אז

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= x\left(\tilde{C}+1\right)^2\\ \Rightarrow\tilde{C} &= x\Phi\left(\tilde{C}\right)\end{aligned}$$

כאשר $\Phi(y) = (y+1)^2$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow [x^n]\left(\tilde{C}\right) &= \frac{1}{n}\left[\tilde{C}^{n-1}\right]\left(\tilde{C}+1\right)^{2n}\\ &= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}\\ &= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+!)!}\\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}\end{aligned}$$

תרגיל. מצאו $[x^n]\,(f(x))$ כאשר

$$f(x) = 1 + xf^m(x)$$

פתרון. נשתמש ב-LIF: נגדיר $\tilde{f} = f - 1$:

$$\Rightarrow \tilde{f} = x\left(\tilde{f}+1\right)^m$$

$$(\Phi(y) = (y+1)^m)\tilde{f} = x\Phi\left(\tilde{f}\right)$$

$$n \geq 1 \Rightarrow [x^n]\,f = [x^n]\,\tilde{f} = \frac{1}{n}\left[\tilde{f}^{n-1}\right]\left(\tilde{f}+1\right)^{mn} = \frac{1}{n}\binom{mn}{n-1}$$

תרגיל. איזה מבנה קומבינטורי מגדיר את הפונקציה לעיל?

פתרון. נגדיר m-עץ להיות עץ כך שלכל אבא יש או 0 בנים או m בנים.

$$f(x) = 1 + x \cdot f^m(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow [x^n]\,f(x) &= \frac{1}{n}\binom{mn}{n-1}\\ &= \boxed{\frac{1}{mn+1}\binom{mn}{n}}\end{aligned}$$

תרגיל. נתונה פונקציה יוצרת $B(x,q)$ המקיימת

$$B(x,q) = 1 + xB(x,q) + x^2qB^2(x,q)$$

מצאו נוסחא מפורשת.

פתרון. נגדיר $G = B(x,q) - 1$.

$$\begin{aligned} G &= x(G+1) + x^2 q (G+1)^2 \\ &= x(G+1)(1+qx(G+1)) \end{aligned}$$

טריק (מנסור, 01'): נגדיר פונקציה $H = G_\alpha$, ע"י

$$H = \alpha x (H+1)(1+xq(H+1))$$

$$\begin{aligned} [\alpha^n](H) &= \frac{1}{n}\left[H^{n-1}\right]\left(x^n (H+1)^n (1+xq(H+1))^n\right) \\ &= \frac{x^n}{n}\left[H^{n-1}\right]\left((H+1)^n \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^j q^j (H+1)^j\right) \\ &= \frac{x^n}{n}\left[H^{n-1}\right]\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^j q^j (H+1)^{n+j}\right) \\ &= \frac{x^n}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^j q^j \binom{n+j}{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(\alpha) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^j q^j \binom{n+j}{n-1}\alpha^n$$

$$\begin{aligned} G &= H(1) \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{n+j}}{n}\binom{n}{j}\binom{n+j}{n-1} q^j \end{aligned}$$

$$[q^m]\, G = \sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+m}}{n}\binom{n}{m}\binom{n+m}{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[x^N q^m\right] = \frac{\binom{N-m}{m}\binom{N}{N-m-1}}{N-m}}$$

4.3 עוד פונקציות יוצרות מעריכיות

דוגמה. מעבר מפונקציה יוצרת רגילה למעריכית.
נתון כלל נסיגה

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}$$
$$a_{n,0} = \delta_{n=0}$$
$$a_{0,k} = \delta_{k=0}$$
$$\forall n < k, n < 0, k < 0 : a_{n,k} = 0$$

1. מצאו כלל נסיגה לפולינום $A_k(x) = \sum_{n\geq k} a_{n,k}x^n$.

$$\sum_{n\geq k} a_{n,k}x^n = 2x\sum_{n\geq k} a_{n-1,k-1}x^n + x\sum_{n\geq k+1} a_{n-1,k}x^{n-1}$$
$$\Rightarrow A_k(x) = 2xA_{k-1}(x) + xA_k(x)$$
$$\Rightarrow A_k(x) = \frac{2x}{1-x}A_{k-1}(x)$$
$$A_0(x) = \sum_{n\geq 0} a_{n,0}x^n = 1$$

$$\Rightarrow A_k(x) = \underbrace{\frac{2x}{1-x}\cdot\dots\cdot\frac{2x}{1-x}}_{\text{פעמים } k} = \frac{2^kx^k}{(1-x)^k}$$

2. מצאו את הפונקציה היוצרת המעריכית $B_k(x) = \sum_{n\geq k} a_{n,k}\frac{x^n}{n!}$.

$$\begin{aligned} 2^k a_{n,k} &= [x^n]\,A_k(x) \\ &= \left[x^{n-k}\right]\frac{2^k}{(1-x)^k} \\ (\heartsuit) &= 2^k\binom{(n-k)+k-1}{n-k} \\ &= 2^k\binom{n-1}{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B_k(x) &= \sum_{n\geq k}\frac{2^k\binom{n-1}{n-k}}{n!}x^n\\ &= \sum_{n\geq k}\frac{2^k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!n!}x^n\\ &= \frac{2^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq k}\frac{x^n}{n(n-k)!}\\ &= \frac{2^k}{(k-1)!}\int_0^x\sum_{n\geq k}\frac{t^{n-1}}{(n-t)!}dt\\ &= \frac{2^k}{(k-1)!}\int_0^x\sum_{m\geq 0}\frac{t^{m+k-1}}{m!}dt\\ &= \frac{2^k}{(k-1)!}\int_0^x t^{k-1}e^t dt\end{aligned}$$

3. כעת, נתון

$$b_{n,k} = b_{n-1,k-1} + 2kb_{n-1,k}$$

$$b_{n,0} = \delta_{n=0}, b_{0,k} = \delta_{k=0}$$

בבית - תראו $B_k(x) = \sum_{n\geq k} b_{n,k}x^n$ מקיימת

$$B_k(x) = \frac{x}{1-2kx}B_{k-1}(x)$$

$$B_0(x) = 1$$

ואז באינדוקציה, תוכיחו

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-2x)(1-4x)\cdots(1-2kx)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha_j}{1-2jx} \quad \text{(פירוק לשברים חלקיים)}$$

ומכאן (לא מחלקים ב-0.

$$\alpha_0 = \lim_{x\to\infty}B_k(x) = \frac{1}{(-2)(-4)\cdots(-2k)} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \lim_{x\to\frac{1}{2m}}\left(1-2mx\right)B_k\left(x\right)\\
&= \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^k}{\left(1-\frac{2}{2m}\right)\left(1-\frac{4}{2m}\right)\cdots\left(1-\frac{2(m-1)}{2m}\right)\left(1-\frac{2(m+1)}{2m}\right)\cdots\left(1-\frac{2k}{2m}\right)}\\
&= \frac{1}{2m\left(2m-2\right)\left(2m-4\right)\cdots\left(2m-2m+2\right)\left(2m-2m-2\right)\cdots\left(2m-2k\right)}\\
&= \frac{\left(-1\right)^{m-k}}{2^k m!\left(k-m\right)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B_k\left(x\right) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{\frac{(-1)^{j-k}}{2^k j!(k-j)!}}{1-2jx}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(-1\right)^{j-k}}{2^k j!\left(k-j\right)!}\cdot\left(2jx\right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_k\left(x\right) &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(-1\right)^{j-k}}{2^k j!\left(k-j\right)!}\cdot\frac{\left(2jx\right)^n}{n!}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{j-k}}{2^k j!\left(k-j\right)!}e^{2jx}\\
&= \frac{1}{2^k\cdot k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j-k}\left(e^{2x}\right)^j\binom{k}{j}\\
&= \frac{\left(e^{2x}-1\right)^k}{2^k\cdot k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k\geq 0}E_k\left(x\right)y^k &= \sum_{k\geq 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)^k}{2^k\cdot k!}y^k\\
&= \boxed{e^{\frac{e^{2x}-1}{2}y}}
\end{aligned}$$

עוד שיטה! (מעניינת)

$$B_k\left(x\right) = \frac{x}{1-2kx}B_{k-1}\left(x\right)$$

$$B_k - 2kxB_k = xB_{k-1}$$

$$\left[\left[xB_k = \sum_{n\geq k} b_{n,k}x^{n+1}\right] \Rightarrow E_k - 2k\int E_k = \int E_{k-1}\right]$$

$$E_k' - 2kE_k = E_{k-1}$$

$$E_0 = 1$$

נסמן $E(x,y) = \sum_{k\geq 0} E_k y^k$.

$$E_k' - 2kE_k = E_{k-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x,y) - 1\right) - \sum_{k\geq 0} 2kE_k y^k = y\sum_{k\geq 1} E_{k-1}y^{k-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E(x,y) - 2y\frac{\partial}{\partial y}E(x,y) = yE(x,y)$$

ועכשיו למייפל. נניח ש-$E(x,y) = e^{f(x,y)}$, ונציב במשוואה החלקית:

$$e^{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - 2ye^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{f(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial y} = y$$

כעת, נניח ש-$f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$.

$$\Rightarrow g_x\cdot h - 2yg\cdot h_y = y$$

כעת, ננחש ש-$h(y) = y$.

$$\Rightarrow g_x y - 2yg = y$$

$$\Rightarrow g_x = 1 + 2g$$

$$g_x - 2g = 1$$

$$\left(ge^{-2x}\right)' = e^{-2x}$$

$$ge^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$\Rightarrow g = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$E(0,y)=1\Rightarrow g(0)=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$
$$g(x)=\frac{e^{2x}-1}{2}$$
$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{e^{2x}-1}{2}y$$
$$\Rightarrow E(x,y)=\boxed{e^{\frac{e^{2x}-1}{2}y}}$$

חלק II
אנליטית

1 מבוא

דוגמה. חברנו הטוב, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, כך ש-

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|&=\left|\frac{\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}z\right|\\&=\left|\frac{2(2n+1)}{n+2}z\right|\\&<1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\boxed{|z|<\frac{1}{4}}$$

אסימפטוטיקה פירושה למצוא סדרה, למשל מהצורה, $\text{const}\cdot\alpha^n\cdot n^\beta$ כך ש-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\text{const}\cdot\alpha^n\cdot n^\beta}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\text{const}\cdot\alpha^n\cdot n^\beta} = 1$$

נראה בעתיד הקרוב ש-

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$$

טענה. $[z^n]\, f(z) = \rho^{-n}[z^n]\, f(\rho z)$.

הוכחה.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

$$[z^n]\, f(z) = a_n$$

$$\rho^{-n}[z^n]\, f(\rho z) = \rho^{-n}\rho^n a_n = a_n$$

□

הגדרה. נכתוב $h(z) \sim g(z) \iff [z^n]\, h(z) \sim [z^n]\, g(z) \iff \lim_{n\to\infty}\frac{[z^n]h(z)}{[z^n]g(z)} = 1$.

דוגמה. נבחר $f(z) = \frac{1}{1-z}, g(z) = e^z + \frac{1}{1-z}, h(z) = e^z$.

$$[z^n]\, f(z) = 1$$

$$[z^n]\, g(z) = \frac{1}{n!} + 1$$

$$[z^n]\, h(z) = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n!}+1} = 1 \Rightarrow f(z) \sim g(z)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}+1} = 0 \Rightarrow h(z) \not\sim g(z)$$

תרגיל. נתון $p(z)$ פולינום. מצאו פונקציה שקולה $f(z)$ ל-$\frac{p(z)}{1-z}$.

פתרון. נסמן $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i\cdot z^i$. אז

$$\frac{p(z)}{1-z} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{z^i}{1-z}$$

כאשר $d \to \infty$:

$$d \gg n \Rightarrow \left[z^d\right] \frac{p(z)}{1-z} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left[z^d\right] \left(\frac{z^i}{1-z}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i = p(1)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{p(1)}{1-z}$$

הערה. $[z^n] f(z) = p(1)$, אבל $[z^n] \frac{p(z)}{1-z}$ - לא מיידי. בהמשך נראה שאם $F(z)$ פונקציה אנליטית כך ש-$F(1) \neq 0$ אז

$$\frac{F(z)}{1-z} \sim \frac{F(1)}{1-z}$$

תרגיל. יהי $p(z)$ פולינום. מצא $[z^n] p(z) \sqrt{1-z}$:

$$\binom{1/2}{n} (-1)^n \underset{\text{בבית}}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{\pi n^3}}$$

הגדרה. פונקציה $f(z)$ המוגדרת בתחום Ω היא אנליטית בנקודה $z_0 \in \Omega$ אם קיימת סביבה $|z-z_0| < \rho, \rho > 0$ כך שהפונקציה $f(z)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות מהצורה

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n$$

פונקציה $f(z)$ נקראת אנליטית בתחום Ω אם היא אנליטית בכל נקודה $z_0 \in \Omega$.
פונקציה $f(z)$ נקראת שלמה אם היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$.

דוגמה. נתבונן בפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-z}$, המוגדרת בתחום $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. $f(z)$ אנליטית ב-$z=0$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} 1 \cdot (z-0)^n, |z| < 1$$

אז $f(z)$ אנליטית בתחום $|z| < 1$. נבדוק האם $f(z)$ אנליטית ב-$z = z_0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

כאשר $|z-z_0| < \rho = |1-z_0|$.

1.1 פונקציה הולומורפית

הגדרה. פונקציה $f(z)$ המוגדרת בתחום Ω היא הולומורפית בנקודה z_0 אם הגבול

$$\lim_{\mathbb{C}\ni\delta\to 0}\frac{f(z_0+\delta)-f(z_0)}{\delta}$$

קיים (יעני גזירה). אם הגבול קיים, נסמנו ב-$f'(z_0)$, או $\frac{d}{dz}f(z)\Big|_{z_0}$. $f(z)$ נקראת הולומורפית בכל תחום אם היא הולומורפית בכל נקודה ב-Ω.

הערה. חוקי הגזירה ברורים: אריתמטיקה סטנדרטית.

משפט. פונקציה אנליטית בתחום Ω $\Longleftrightarrow$ הפונקציה הולומורפית בתחום Ω.

הגדרה. (הכי חשובה) פונקציה $h(z)$ מורומורפית בנקודה z_0 אם עבור z בסביבת z_0 כך ש-$z\neq z_0$, $h(z)$ ניתנת להצגה ע"י $\frac{f(z)}{g(z)}$, כאשר $f(z), g(z)$ אנליטיות בנקודה z_0.
במקרה זה, ניתן לכתוב

$$h(z)=\sum_{n\geq -M}h_n(z-z_0)^n\,, h_{-M}\neq 0, M\geq 1$$

המקדם h_{-1} נקרא השארית של $h(z)$ בנקודה $z=z_0$, ונסמן

$$\operatorname{Res}(h(z), z=z_0)=h_{-1}$$

1.2 אינטגרל מסילתי

הגדרה. מסילה = פונקציה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה. נגדיר

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

משפט. f אנליטית בתחום Ω ותהי γ מסילה סגורה בתוך Ω. אזי

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

בצורה שקולה,

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma'} f(z)\,dz$$

עבור שתי מסילות הומוטופיות $\gamma\cong\gamma'$.

משפט. (קושי) תהי $h(z)$ מורומורפית בתחום Ω, ותהי γ מסילה מכוונת (עם יחס לכיוון חיובית (התחום מצד שמאל) סגורה פשוטה ב-Ω, ו-$h(z)$ אנליטית על השפה γ. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(z)\,dz=\sum_{z_0}\text{Res}\left(h(z),z=z_0\right)$$

תרגיל. חשבו

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

פתרון. יאללה.

- I_1 - דרך $\mathbb{R}$:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)|_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

- דרך $\mathbb{C}$: המסילה שמורכבת מחצי מעגל $-R,R$ עליון כיוון חיובי (לסמן i ו-$-i$).

  - המסילה γ מורכבת מ-γ_1 בעיגול, ואז γ_2.

$$\gamma_1(t)=Re^{it},0\le t\le\pi$$

$$\gamma_2(t)=t,-R\le t\le R$$

נקודות בעייתיות: $\pm i$, אכפת רק מ-i.

$$\int_{\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz=\int_{\gamma_1}\frac{1}{1+z^2}dz+\int_{\gamma_2}\frac{1}{1+z^2}dz$$

בהנחה ש-R מספיק גדול, כדי שיכיל את i.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz&=\int_{\gamma-\delta}\frac{1}{1+z^2}dz+\int_{\delta}\frac{1}{1+z^2}dz\\&=0+2\pi i\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2},z=i\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2}&=\frac{1}{(z-i)(z+i)}\\&=\frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\\&\sim\frac{1}{2i}(z-i)^{-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^2}dz + \underbrace{\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^2}dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^2}dz\right| &\leq \int_0^\pi \left|\frac{1}{1+R^2e^{2it}}\right| \left|iRe^{it}\right| dt \\
&= \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^2e^{2it}|}dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{2R}{R^2-1}dt \\
&= \frac{\pi R}{R^2-1} \\
&\xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

- כעת, I_2:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^4}$$

$$\begin{aligned}
1+z^4 &= 0 \\
\Rightarrow z^4 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 \\
&= \frac{1}{4}(1+i)^4 \\
&= \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_k = e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i}$$

$$\Rightarrow I_2 = 2\pi i \cdot \left(\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z = e^{\frac{\pi}{4}i}\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z = e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)\right)$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}}{z-z_0}$$
$$\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z=z_0\right) = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}$$

באופן כללי,
$$I_n = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}$$

1.2.1 נוסחת קושי

אותן הנחות של משפט קושי, כך ש-h גזירה n פעמים,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}$$

בפרט, אם $f(z)$ אנליטית בתחום Ω המכיל 0, ו-γ מסילה סגורה פשוטה מכוונת חיובית, אז
$$f_n = [z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

הערה. כעת מוכנים לדון בקשר בין סינגולריות ואסימפטוטיקה לקומבינטוריקה.

2 אסימפטוטיקה

הגדרה. נתונה פונקציה f המוגדרת בפנים של התחום החסום ע"י מסילה פשוטה סגורה γ. נקודה z_0 על השפה של γ נקראת סינגולרית אם f אינה ניתנת להרחבה אנליטית ב-z_0.

דוגמה. הפונקציה $\frac{1}{z}$ ב-$z_0 = 0$. אנטי-דוגמא: $\frac{z}{z}$ ב-$z_0 = 0$.

משפט. תהי $f(z)$ אנליטית בראשית (אז f ניתנת לכתיבה כטור חזקות סביב 0) עם רדיוס התכנסות R סופי. אזי ל-f יש נקודה סינגולרית ב-$|z| = R$.

משפט. אם $f(z)$ ניתנת לכתיבה כטור סביב $z = 0$ עם מקדמים אי-שליליים, ורדיוס ההתכנסות הוא R, אז $z = R$ היא נקודה סינגולרית של $f(z)$.

הערה. הוכחה בעמודים 240-242.

דוגמה. תהי S_n^* כל התמורות של S_n ללא נקודות שבת. נסמן

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left|S_{n-j}^*\right| = |S_n| = n!$$

מצאו $|S_3^*|$, $|S_4^*|$:

$$|S_0^*| = 1, |S_1^*| = 0, |S_2^*| = 1$$

$$3! = \sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\left|S_{3-j}^*\right| = |S_3^*| + 3\,|S_2^*| + 3\,|S_1^*| + |S_0^*|$$

$$\Rightarrow |S_3^*| = 2$$

$$4! = \sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\left|S_{4-j}^*\right| = |S_4^*| + 4\,|S_3^*| + 6\,|S_2^*| + 4\,|S_1^*| + |S_0^*|$$

$$\Rightarrow |S_4^*| = 9$$

מצאו פונקציה יוצרת: נסמן $D(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{|S_n^*|}{n!}x^n$, מצאו $D(x)$.

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!j!}\cdot\left|S_{n-j}^*\right| = n!$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\left|S_{n-j}^*\right|}{(n-j)!j!} = 1$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left|S_{n-j}^*\right|}{(n-j)!j!}x^n = \sum_{n\geq 0}1\cdot x^n$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{|S_k^*|}{k!}x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

נתבונן בפונקציה זו כפונקציה $D(z)$, אנליטית סביב 0. לפונקציה זו יש נקודה סינגולרית ב-$z = 1$, אז ע"פ המשפט רדיוס ההתכנסות הוא $R = 1$.

דוגמה. נסתכל על הפונקציה $E(z) = (2-e^z)^{-1}$.

$$E(z) = \frac{1}{2-e^z}$$

נקודות סינגולריות: $2-e^z=0$,

$$2 = e^z \Rightarrow z = \log z + 2\pi k i$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = \log 2$.

דוגמה. e^{e^z-1}, $e^{z+z^2/2}$ (אינבולוציות).

2.1 קצב גידול מעריכי

הגדרה. נאמר שהסדרה a_n היא מסדר מעריכי k^n ונכתוב

$$a_n \bowtie k^n \iff \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = k$$

דוגמה. כל מיני.

$$n \bowtie 1^n$$

כל פולינום סופי $\bowtie 1^n$.

$$2^n \bowtie 2^n$$

$$\sqrt{3^n+4^n+1} \bowtie 2^n$$

משפט. תהי $f(z)$ אנליטית ב-$z=0$, ויהי

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 \mid |z| < r \text{-ב אנליטית } f \right\}$$

אז המקדם $f_n = [z^n] f(z)$ מקיים $f_n \bowtie \left(\frac{1}{R}\right)^n$.

דוגמה. (פשוטה) ראינו של-$D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$ יש נקודת סינגולרית $z=1$, כלומר $R=1$. אז

$$\frac{d_n}{n!} = [z^n] D(z) \bowtie 1^n$$

הוכחה. (המשפט הקודם) נגדיר $R = \sup\left\{ r \geq 0 \mid |z| < r \text{-ב אנליטית } f \right\}$. אז R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור של $f(z)$ סביב 0. לכן (נובע ממבחן השורש/המנה) נקבל:

$$f_n \bowtie \left(\frac{1}{R}\right)^n$$

□

דוגמה. הפונקציה $E\left(z\right)=\frac{1}{2-e^{z}}$. הנקודות הסינגולריות הן $z=\log2+2\pi ki,k\in\mathbb{Z}$, וראינו כי $R=\log2$, לכן:

$$\frac{e_{n}}{n!}=\left[z^{n}\right]E\left(z\right)\bowtie\left(\frac{1}{\log2}\right)^{n}$$

תרגיל. (נחמד) נגדיר I_{n} קבוצת כל החלוקות של $\left[n\right]$ כך שבכל בלוק יש איבר או שני איברים בדיוק.

1. מצאו פונקציה יוצרת של $I\left(x\right)=\sum_{n\geq0}\frac{I_{n}}{n!}x^{n}$.
2. מצאו את הגידול האסימפטוטי של $\frac{I_{n}}{n!}$.

פתרון.

.1

$$\begin{cases}I_{n}=I_{n-1}+\left(n-1\right)I_{n-2}\\ I_{0}=I_{1}=1\end{cases}$$

$$\sum_{n\geq2}\frac{I_{n}}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}=\sum_{n\geq2}\frac{I_{n-1}}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}+x\sum_{n\geq2}\frac{I_{n-2}}{\left(n-2\right)!}x^{n-2}$$

$$\left(\sum_{n\geq2}I_{n}\frac{x^{n}}{n!}\right)'=I\left(x\right)-1+xI\left(x\right)$$

$$\left(I\left(x\right)-x-1\right)'=I\left(x\right)-1+xI\left(x\right)$$

$$I'\left(x\right)-1=I\left(x\right)-1+xI\left(x\right)$$

$$I'\left(x\right)=I\left(x\right)\left(1+x\right)$$

$$\ln I\left(x\right)=x+{}^{x^{2}}/_{2}+c$$

$$I\left(x\right)=e^{x+x^{2}/2+c}$$

$$I\left(0\right)=1=e^{c}\Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow\boxed{I\left(x\right)=e^{x+x^{2}/2}}$$

2. נשים לב של-$I\left(z\right)=e^{z+z^{2}/2}$ אין נקודה סינגולרית, כי הפונקציה שלמה. אז מהו k? בינתיים לא יודעים.

2.2 Saddle-point bounds

טענה. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|<R$ כאשר $0<R\le\infty$. נגדיר

$$M(f;r)=\sup_{|z|=r}|f(z)| \qquad \forall r\in(0,R)$$

אז לכל $r\in(0,R)$:

$$(18)\ [z^n]f(z)\le\frac{M(f;r)}{r^n}\Rightarrow[z^n]f(z)\le\inf_{r\in(0,R)}\frac{M(f;r)}{r^n}$$

אם בנוסף המקדמים $[z^n]f(z)$ הם אי-שליליים כטור חזקות סביב 0, אז

$$(19)\ \forall r\in(0,R):[z^n]f(z)\le\frac{f(r)}{r^n}\wedge[z^n]f(z)\le\inf_{r\in(0,R)}\frac{f(r)}{r^n}$$

הוכחה. (18) נובע מנוסחת קושי:

$$[z^n]f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

(19) מתקיים כי (מציבים $z=r$)

$$f_n\le\underbrace{\frac{f_0}{r^n}+\frac{f_1}{r^{n-1}}+\cdots+\frac{f_{n-1}}{r}+f_n+f_{n+1}r+f_{n+2}r^2+\cdots}_{\frac{f(r)}{r^n}}$$

מאחר ו-$[z^k]f(z)=f_k\ge0$ $\square$

<u>**השאלה:**</u> מהו ה-r הטוב ביותר שמקיים את (19)? זה הוא s המקיים (נראה בהמשך) $s\frac{f'(s)}{f(s)}=n$. למשל, עבור $I(z)=e^{z+z^2/2}$,

$$I'(z)=e^{z+z^2/2}(1+z)$$

$$s(1+s)=n$$

$$\Rightarrow s_I=s=\frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2}$$

הערה. לפי (19), נציב $r=n$ ואז $\frac{1}{n!}=[z^n]e^z\le\frac{e^n}{n^n}$.

$$\Rightarrow n!\ge\frac{n^n}{e^n}=\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

דוגמה. תהי $F(z)=e^{z/1-z}$, כאן $R=1$.

$$s=\frac{F'(s)}{F(s)}=n$$

$$s\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1-z}\right)\bigg|_{z=s}=n$$

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)'=-\left(\frac{1-z}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{s}{(1-s)^2}=n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s&=\frac{2n+1-\sqrt{4n+1}}{2n}\\&=1+\frac{1}{2n}-\sqrt{\frac{4n+1}{4n^2}}\\&\approx 1\end{aligned}$$

2.3 פונקציות רציונליות

$f(z)$ היא פונקציה רציונלית $\Longleftrightarrow$

$$\exists N(z),D(z)\ \text{פולינומים}\ :f(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

ונניח ש-$D(z)=d_0+d_1z+\cdots d_mz^m$. נסמן $f_n=[z^n]f(z)$, אז

$$\left(\sum_{k\geq0}f_kz^k\right)(d_0+d_1z+\cdots+d_mz^m)=\left(n_0+n_1z+\cdots+n_tz^t\right)$$

$$n>t\Rightarrow d_0f_n+d_1f_{n-1}+\cdots+d_mf_{n-m}=0$$

מסקנה. לכל כלל נסיגה עם מקדמים קבועים $d_0f_n+\cdots+d_mf_{n-m}=0$ מתאימה פונקציה יוצרת רציונלית

$$f(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

משפט. אם $f(z)$ פונקציה רציונלית אשר אנליטית ב-$z=0$ עם קטבים $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, אז קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים

$$f_n=[z^n]\,f(z)=\sum_{j=1}^{n}P_j(n)\,\alpha_j^{-n}$$

כאשר $P_j(x)$ הוא פולינום מדרגה d_j-1, d_j הוא הריבוי האלגברי של α_j.

דוגמה. $f(z)=\frac{1}{(1-z)(1-2z)^2}$, הקטבים הם $a_1=1$ מריבוי 1, $a_2=\frac{1}{2}$ מריבוי 2, אזי

$$f_n=[z^n]\,f(z)=c\cdot 1^{-n}+(an+b)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}=c+(an+b)\,2^n$$

$$f_n\bowtie 2^n$$

$$f_n\sim an\cdot 2^n$$

הוכחה. (משפט רציונלית)

$$f(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

כאשר N,D פולינומים. לכן:

$$f(z)=Q(z)+\frac{r(z)}{D(z)}$$

כאשר Q,r,D פולינומים, ו-$\deg r<\deg D$. נשים לב ש-

$$D(z)=(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_m)^{k_m}$$

כאשר r_i הוא ריבוי הקוטב α_i. לכן, ע"פ פירוק לשברים חלקיים:

$$f(z)=Q(z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j(z)}{(z-\alpha_j)^{k_j}}$$

כאשר $r_j(z)$ פולינום ממעלה k_j-1. נניח ש-Q ממעלה d.

$$n\geq d+1\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
[z^n]\, f(z) &= \sum_{j=1}^{m} [z^n] \left(\frac{r_j(z)}{(z-\alpha_j)^{k_j}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} [z^n] \left(\sum_{i=0}^{k_j-1} a_{ij} z^i \cdot \frac{1}{(z-\alpha_j)^{k_j}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} [z^n] \left(\sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i}{\alpha_j} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z}{\alpha_j}-1\right)^{k_j}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} [z^n] \left(\sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i}{\alpha_j} \cdot \frac{(-1)^{k_j}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_j}\right)^{k_j}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i (-1)^{k_j}}{\alpha_j} \left[z^{n-i}\right] \frac{1}{\left(1-\frac{z}{\alpha_j}\right)^{k_j}} \\
k_j \geq 1, \heartsuit &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i (-1)^{k_j}}{\alpha_j^{k_j}} \left[z^{n-i}\right] \sum_{m\geq 0} \binom{k_j-1+m}{m} \frac{z^m}{\alpha_j^m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i (-1)^{k_j}}{\alpha_j^{k_j}} \frac{\binom{k_j-1+n-i}{n-i}}{\alpha_j^{n-i}} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j-1} \frac{a_{ij} z^i (-1)^{k_j}}{\alpha_j^{k_j-i}} \frac{\binom{k_j-1+n-i}{n-i}}{\alpha_j^{n}}
\end{aligned}$$

$$n \geq d+1 \Rightarrow$$

$$[z^n]\, f(z) \underbrace{=}_{\binom{n}{s}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-s+1)}{s!}} \sum_{j=1}^{m} P_j(n)\, \alpha_j^{-n}$$

כאשר P_j פולינום מדרגה k_j-1. (עמוד 256) $\square$

דוגמה. כמה דוגמאות.

1. $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$.

(א) מספר ריצופים של מלבן $(n-1)\times 1$ עם ריבוע 1×1 ו-1×2.

(ב) כמה בערך f_n, עבור $f(z)=\sum_{n\geq 0} f_n z^n$.

$$f(z)=\frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}$$

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f_n=c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}+d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}$$

(ג) מצאו התנהגות אסימפטוטית של f_n.

$$f_n\sim d\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}=d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$f_0=0=c+d$$

$$f_1=1=c\frac{1-\sqrt{5}}{2}+d\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow d-c=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow d=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f_n\sim\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=1$$

2. $f(z)=\frac{z}{1-3z+2z^2}$.

(א) נמצא.

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z}{(1-z)(1-2z)}\\&=\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{1-z}\end{aligned}$$

סופר את כל המילים הבינאריות באורך n ללא המילה הטריוויאלית $\underbrace{00\cdots0}_{n}$.

(ב) נוסחא מפורשת.

$$f_n = 2^n - 1$$

(ג) התנהגות אסימפטוטית:

$$f_n \sim 2^n$$

3. $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3(1+z)}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)^2(1-z^2)} \\ &= \end{aligned}$$

(א) לחשוב בבית מה סופרת. $f_n = ?$.

$$\begin{aligned} f_n &= \left(a + bn + cn^2\right) 1^{-n} + d(-1)^{-n} \\ &= a + bn + cn^2 + d(-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\binom{2+0}{0} + \binom{2+1}{1} z + \binom{2+2}{2} z^2 + \cdots\right)\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right) \\ &= \left(1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \cdots\right)\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right) \\ &= 1 + 2z + 4z^2 + 6z^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$f_0 = f(0) = 1 = a + d$$

$$f_1 = \left[z^1\right] f(z) = 2 = a + b + c - d$$

$$f_2 = \left[z^2\right] f(z) = 4 + a + 2b + 4c + d$$

$$f_3 = 6 = a + 3b + 9c - d$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{7}{8} + n + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{8}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{f_n \sim \frac{n^2}{4}}$$

4. $f(z)=\frac{1}{(1-z^3)(1-z^2)^3\left(1-z^2/2\right)}$. מצאו

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n}$$

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^4(1+z+z^2)(1+z)^3(1-z/2)}$$

לכן, הקטבים הם α_1 מריבוי 4, α_2,α_3 שורשי $1+z+z^2=0$ מריבוי 1 ($\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$). $\alpha_4=-1$ מריבוי 3, $\alpha_5=2$ מריבוי 1.

$$|\alpha_1|=|\alpha_{2,3}|=|\alpha_4|=1,|\alpha_5|=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n}=\frac{1}{R}=1$$
$$\Rightarrow f_n\bowtie 1^n$$

משפט. (IV.10) תהי $f(z)$ פונקציה מורומורפית בתחום $|z|\le R$ עם קטבים $\alpha_1,\dots,\alpha_m$. נניח ש-$f(z)$ אנליטית על השפה $|z|=R$, וגם בנקודה $z=0$. אזי קיימים פולינומים $P_j(x)$ כך ש-

$$f_n=[z^n](f(z))=\sum_{j=1}^{m}P_j(n)\alpha_j^{-n}+O\left(R^{-n}\right)$$

כאשר $P_j(x)$ פולינומים ממעלה k_j-1 כאשר k_j הוא הריבוי של הקוטב α_j.

דוגמה. $R(z)=\frac{1}{2-e^z}$.

$$2=e^z\Rightarrow z=\log 2+2\pi ik,k\in\mathbb{Z}$$

ניקח $R=6$, כך הקוטב היחיד ב-$|z|<R$ הוא $\log 2$.

$$\Rightarrow f_n\sim P_1(n)(\log 2)^{-n}+O\left(6^{-n}\right)$$

$$\lim_{z\to\log 2}\frac{1-\frac{z}{\log 2}}{2-e^z}=\frac{-\frac{1}{\log 2}}{-e^{\log 2}}=\frac{1}{2\log 2}\neq 0$$

ולכן הריבוי של $\log 2$ הוא 1.

$$\Rightarrow f_n\sim c(\log 2)^{-n}+O\left(6^{-n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n}=\frac{1}{\log 2}$$

נחשב את c:

$$R\left(z\right)=\frac{1}{2-e^{z}}=\frac{c_{-1}}{1-\frac{z}{\log 2}}+c_{0}+c_{1}\left(1-\frac{z}{\log 2}\right)^{1}+c_{2}\left(1-\frac{z}{\log 2}\right)^{2}+\cdots$$

$$\frac{1-\frac{z}{\log 2}}{2-e^{z}}=c_{-1}+c_{0}\left(1-\frac{z}{\log 2}\right)^{1}+c_{1}\left(1-\frac{z}{\log 2}\right)^{2}+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{1-\frac{z}{\log 2}}{2-e^{z}}\xrightarrow[z\to\log 2]{}c_{-1}=\frac{1}{2\log 2}$$

$$\Rightarrow f_{n}\sim\frac{1}{2\log 2}\left(\log 2\right)^{-n}$$

$$\Rightarrow f_{n}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\log 2\right)^{n+1}}$$

תרגיל. הוכח באינדוקציה.

$$\begin{aligned}\left(e^{e^{x}-1}\right)^{(m)}&=\left(\sum_{n\geq 0}\mathrm{Bell}_{n}\frac{x^{n}}{n!}\right)^{(m)}\\&=\sum_{n\geq m}\mathrm{Bell}_{n}\frac{x^{n-m}}{(n-m)!}\\&\vdots\\&=\sum_{j=1}^{m}S_{m,j}e^{e^{x}+jx-1}\end{aligned}$$

2.4 צירופים

צירוף של n הוא סדרה שסכום איבריה הוא n. נסמן את קבוצת כל הצירופים של n ב-C_n.

טענה. $n\geq 1$, $a_n=|C_n|=2^{n-1}$.

הוכחה. (1) כלל נסיגה.

$$\begin{cases}a_{n}=\sum_{i=1}^{n}a_{n-i}\\ a_{0}=1\end{cases}$$

$$a_{n}=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{0}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_0$$
$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow a_n = 2a_{n-1}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$
$$\boxed{a_n = 2^{n-1}, \forall n \geq 1}$$

□

הוכחה. (2) פונקציה יוצרת. נסמן

$$C\left(x\right) = \sum_{n\geq 0} \left|C_n\right| x^n$$

כל צירוף זה הריצוף הריק, או כל מספר ואחריו ריצוף כלשהו. לכן:

$$C\left(x\right) = 1 + x^1 C\left(x\right) + x^2 C\left(x\right) + \cdots$$
$$C\left(x\right) = 1 + \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right) C\left(x\right)$$
$$C\left(x\right) = 1 + \frac{x}{1-x} C\left(x\right)$$

$$\begin{aligned} C\left(x\right) &= \frac{1-x}{1-2x} \\ &= \left(1-x\right)\frac{1}{1-2x} \\ &= \left(1-x\right)\sum_{k\geq 0} 2^k x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} 2^k x^k - \sum_{k\geq 0} 2^k x^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= \left[x^n\right] C\left(x\right) \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= \boxed{2^{n-1}}, n \geq 1 \end{aligned}$$

□

הוכחה. (3) מודל הסתברותי. נמדל: ע"י נקודות לבנות ושחורות.

$$\begin{aligned} 1,2,3 &\quad \rightarrow \quad ☻☺☻☺☺☻ \\ 1,2,1,2 &\quad \rightarrow \quad ☻☺☻☻☺☻ \end{aligned}$$

נשים לב שכל נקודה מ-n הנקודות היא לבנה או שחורה, חוץ מהאחרונה שתמיד שחורה - לכן יש 2^{n-1} אפשרויות. $\square$

תרגיל. (יפה לבחינה) יהי D_n (Carlitz) קבוצת כל הצירופים של n, כך שאין שתי אותיות סמוכות זהות.

פתרון. נפתור.

- כל צירוף Car הוא:
  - ריק
  - או מתחיל ב-1 ואחכ אין אחד
  - מתחיל ב-i ואז אין i.
- נסמן $D(x) = \sum_{n\geq 0} |D_n|^n$, ונסמן

$$D_a(x) = \sum_{n\geq a} \sum_{\text{צירוף קרליץ עם אות ראשונה } a} x^n$$

$$D(x) = 1 + D_1(x) + D_2(x) + \cdots$$

$$\begin{aligned} D_a(x) &= x^a + x\sum_{b\neq a} D_b(x) \\ &= x^a + x^a D_1(x) + \cdots + x^a D_{a-1}(x) + x^a D_{a+1}(x) + \cdots \\ &= x^a\left(1 + D_1(x) + D_2(x) + \cdots + D_{a-1}(x) + D_{a+1}(x) + \cdots\right) \\ &= x^a\left(D(x) - D_a(x)\right) \end{aligned}$$

$$D_a(x) = \frac{x^a}{1+x^a} D(x)$$

$$D(x) = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{x^j}{1+x^j} D(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{D(x) = \frac{1}{1-\sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{1+x^j}}}$$

הוכחה. (משפט IV.10)

- סביב כל קוטב α, $f\left(z\right)$ ניתנת לפיתוח סביב $z=\alpha$ ע"י

$$f\left(z\right)=\sum_{k\geq-M}C_{\alpha,k}\left(z-\alpha\right)^{k}$$

כאשר החלק החלק הסינגולרי נסמן אותו ב-$S_{\alpha}\left(z\right)$, והחלק האנליטי ב-$H_{\alpha}\left(z\right)$, ואז

$$f\left(z\right)=\underbrace{\sum_{k\geq-M}^{-1}C_{\alpha,k}\left(z-\alpha\right)^{k}}_{S_{\alpha}\left(z\right)}+\underbrace{\sum_{k\geq0}C_{\alpha,k}\left(z-\alpha\right)^{k}}_{H_{\alpha}\left(z\right)}$$

- נשים לב ש-$M\geq1$, מאחר ו-α קוטב לא עיקרי.

$$S_{\alpha}\left(z\right)=\frac{N_{\alpha}\left(z\right)}{\left(z-\alpha\right)^{M}}$$

כאשר $N_{\alpha}\left(z\right)$ פולינום.

- בנוסף, $H_{\alpha}\left(z\right)$ אנליטית סביב $z=\alpha$. נסמן

$$S\left(z\right)=\sum_{j=1}^{m}S_{\alpha_{j}}\left(z\right),H\left(z\right)=\sum_{j=1}^{m}H_{\alpha_{j}}\left(z\right)$$

כאשר $\alpha_{1},\ldots,\alpha_{m}$ הם כל הקטבים של $f\left(z\right)$.

- הפונקציה $f\left(z\right)-S\left(z\right)$ אנליטית ב-$\left|z\right|\leq R$. לכן:

$$\begin{aligned}\left[z^{n}\right]f\left(z\right) & =\left[z^{n}\right]\left(S\left(z\right)\right)+\left[z^{n}\right]\left(f\left(z\right)-S\left(z\right)\right)\\ \text{(משפט פונקציות רציונליות)} & =\sum_{j=1}^{m}P_{j}\left(n\right)\alpha_{j}^{-n}+\boxed{\quad ?\quad}\end{aligned}$$

- ע"פ אינטגרל קושי,

$$\begin{aligned} ? &= \left|[z^n]\left(f(z)-S(z)\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)-S(z)}{z^{n+1}}dz\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{|f(z)-S(z)|}{|z^{n+1}|}|dz| \\ &= \frac{1}{2\pi R^{n+1}}\int_{|z|=R}|f(z)-S(z)|\,|dz| \\ &= \frac{1}{2\pi R^{n+1}}O(1)\cdot 2\pi R \\ &= O\left(R^{-n}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [z^n]f(z)=\boxed{\sum_{j=1}^{m}P_j(n)\,\alpha_j^{-n}+O\left(R^{-n}\right)}$$

□

דוגמה. פעם שעברה ראינו שאם $f(z)=\frac{1}{2-e^z}$ אז

$$\frac{f_n}{n!}\sim\frac{1}{2(\log 2)^{n+1}}$$

דוגמה. (alignment) תהי

$$O(z)=\frac{1}{1-\log\frac{1}{1-z}}$$

נקודות סינגולרית ב-$z=1$, $1-\log\frac{1}{1-z}=0\Rightarrow z=1-\frac{1}{e}$, לכן נסתכל על $z=1-\frac{1}{e}$.
רואים שהנקודה הסינגולרית היחידה בתוך מעגל $|z|\le R$, כאשר $1-\frac{1}{e}<R<1$ היא $z_0=1-\frac{1}{e}$.

$$O(z)\sim\frac{c}{z-z_0}$$

בבית - להוכיח ש-$c=-\frac{1}{e}$, לכן

$$[z^n]O(z)\sim-\frac{-\frac{1}{e}}{z_0^{n+1}}=\frac{\frac{1}{e}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^{n+1}}$$

תרגיל. מצאו אסימפטוטיקה של המקדם של x^n ב-

$$A\left(x\right)=\frac{x}{\left(1-3x\right)\left(1-4x\right)\left(1-5x\right)}$$

ל-$A\left(x\right)$ יש 3 קטבים, $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$. מכאן, A אנליטית ב-$|z|<\frac{1}{5}$. לכן לפי המשפט

$$\left[x^n\right]A\left(x\right)^{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}5$$

$$\left[x^n\right]A\left(x\right)\sim\boxed{???}\cdot5^n$$

$$A\left(x\right)=\frac{\frac{x}{(1-3x)(1-4x)}}{1-5x}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}}\left(1-5x\right)A\left(x\right)=\frac{1}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{2}{5}\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(x\right)\sim\frac{5}{2}\left(1-5x\right)=\sum_{n\geq0}\frac{5}{2}5^nx^n$$

$$\Rightarrow\left[x^n\right]A\left(x\right)\sim\frac{5}{2}5^n$$

תרגיל. (שאלת אלירן):

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2-e^z}$$

אנליטית ב-$|z|<\log2$.

1. דרך

$$\lim_{x\to\log2}\frac{1-\frac{z}{\log2}}{2-e^z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\log2}}\sim\frac{-\frac{1}{\log2}}{-e^{\log2}}\sum\frac{z^n}{\left(\log2\right)^n}$$

$$\Rightarrow\left[z^n\right]f\left(z\right)\sim\frac{2}{\left(\log2\right)^{n+1}}$$

2. דרך

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\log2}\frac{z-\log2}{2-e^z}\cdot\frac{1}{z-\log2}&\sim\frac{1}{-e^{\log2}}\frac{1}{z-\log2}\\&=\frac{1}{2\left(\log2-z\right)}\\&=\frac{1}{2\log2\left(1-\frac{z}{\log2}\right)}\end{aligned}$$

ואז זהו.

תרגיל. תהי A_n קבוצת כל הצירופים של n אשר כל אות בצירוף היא שייכת לקבוצת המספרים המתחלקים ב-3.

$$A(x) = 1 + \sum_{k\geq 1} x^{3k} A(x)$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-\sum_{k\geq 1} x^{3k}} \\ &= \frac{1-x^3}{1-2x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1-x}{1-2x} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x} &\Rightarrow 2^{n-1} \\ \left[x^{3n}\right] A(x) &\sim 2^{n-1} \\ \left[x^{3n+1}\right] A(x) &= 0 \\ \left[x^{3n+2}\right] A(x) &= 0 \end{aligned}$$

דוגמה. (דוגמא IV.8 מהספר) הפונקציה

$$D^{(k)}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}-\cdots-\frac{z^k}{k}}}{1-z}$$

רואים ש-$D^{(k)}(z)$ אנליטית ב-$|z| < 1$.

$$\begin{aligned} D^{(k)}(z) &= e^{-\sum_{j=1}^{k}\frac{z^j}{j}} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &\sim e^{-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}} \cdot \frac{1}{1-z} \\ \Rightarrow \left[z^n\right] D^{(k)}(z) &= e^{-H_k} \end{aligned}$$

דוגמה. (קשה מאוד) מספר צירופי Carlitz הוא c_n, אזי

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \frac{1}{1-\sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{1+x^j}}$$

נתבונן ב-

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{x^j}{1+x^j} - 1$$

$$S_1 = \frac{x}{1+x} - 1 = -\frac{1}{1+x} \neq 0$$

$$S_2 = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S_N = \frac{x}{1+x} + \cdots + \frac{x^N}{1+x^N} - 1 = 0$$

על פי עיקרון הארגומנט, נספור את מספר האפסים של S_N בתוך העיגול $|x| = 1$. נחשב לפי עיקרון הארגומנט את מספר האפסים של $S_{100}(x)$ ב-$|x| < 1/2$. רואים שאין אפסים. אבל, אם נספור אפסים בתחום הנחסם ע"י $|x| = 0.58$, רואים שיש 0 אחד. כעת, איך מוצאים ρ, $|\rho| < 0.58$ כך ש-$S_N(\rho) = 0$?

$$\rho = 0.571349\ldots$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\rho} C(x)\left(1 - \frac{x}{\rho}\right) &= \lim_{x\to\rho} \frac{1-\frac{x}{\rho}}{1-S(x)} \\
&= \lim_{x\to\rho} \frac{\frac{1}{\rho}}{S'(x)} \\
&= \frac{1}{\rho S'(\rho)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C(x) \sim \frac{A}{1-\frac{x}{\rho}}$$

$$[x^n]\, C(x) \sim A \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^n = 0.456387 \cdot (1.750243)^n$$

$$A \approx 0.456387$$

דוגמה. תהי

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}(1-2x)^{\beta}}$$

פונקציה יוצרת רגילה. לפי פירוק לשברים חלקיים, ניתן לכתוב

$$f(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^{\alpha+1}} + \frac{Q(x)}{(1-2x)^{\beta}}$$

כאשר $\deg P \le \alpha, \deg Q \le \beta - 1$. ע"פ נוסחת זהב,

$$f(x) = P(x)\sum_{j\ge 0}\binom{\alpha+j}{j}x^j + Q(x)\sum_{j\ge 0}\binom{\beta-1+j}{j}2^j x^j$$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\alpha} p_j x^j, Q(x) = \sum_{j=0}^{\beta-1} q_j x^j$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow [x^n] f(x) &\sim p_0\binom{\alpha+n}{n} + q_0\binom{\beta-1+n}{n}2^n \\ &\sim q_0\binom{\beta-1+n}{n}2^n \\ &\sim \boxed{q_0 \cdot n^{\beta-1}\cdot 2^n}\end{aligned}$$

2.5 שורשים כפולים ואסימפטוטיקה

הערה. אלירן תתקשר לרובא.

דוגמה. כמה דוגמאות.

1. $f(z) = \frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\ge 0} z^j + \frac{1}{2}\sum_{j\ge 0}(-z)^j\end{aligned}$$

$$[z^n] f(z) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$$

כאן היינו מגדירים $f(\sqrt{z}) = \frac{1}{1-z}$, ואז

$$[z^n] f\left(\sqrt{z}\right) = 1 \Rightarrow \left[\sqrt{z}^{2n}\right] f\left(\sqrt{z}\right) = 1$$

$$\left[w^{2n}\right] f(w) = 1$$

ו-0 כמובן עבור אי-זוגי.

2. $g(z) = \frac{1}{1-z^3}$.

$$\left[z^{3n+r}\right] g(z) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ 0 & r=1,2 \end{cases}$$

3. $\phi(z) = \frac{2-z^2+z^3+z^4+z^8+z^9-z^{10}}{1-z^{12}}$.

$$\phi(z) = \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1-z^3}$$

כאן רואים את הבעיה - איך קובעים את המחזוריות של אסימפטוטיקה?

למה. תהי $f(z)$ אנליטית ב-$|z| < \rho$ עם מקדמים $0 \leq$. נניח כי $f(z)$ לא ניתנת לצמצום למונום, ויש מספר שלילי z המקיים $|z| < \rho$ כך ש-$|f(z)| = f(|z|)$. אז מתקיים:

1. θ, הארגומנט של z מקיים $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, וגם $0 < \frac{\theta}{2\pi} < 1$.
2. מתקיים f admits p as a span.

כאשר פירוש 2. נתון ע"י ההגדרה הבאה.

הגדרה. תהי (f_n) סדרה עם פונקציה יוצרת $f(z)$. התומך של f, $\mathrm{Supp}(f)$ מוגדר להיות

$$\mathrm{Supp}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n \neq 0\}$$

ונאמר ש-f admits a span d אם עבור איזשהו r, מתקיים

$$\mathrm{Supp}(f) \subseteq \{r + kd \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

הערה. ה-d המקסימלי נקרא מחזוריות (period), ובדרך כלל נסמנו באות p. אם $p = 1$, נאמר שהפונקציה אי-מחזורית.

הוכחה. תרגיל נחמד באי-שוויון המשולש. ראה עמודים 266-267. □

הערה. מזה נובע טיעון על מחלקות של קבוצות שסופרות אובייקטים מסומנים, כגון תמורות/עצים מסומנים/פיזור כדורים שונים... ואת זה נלמד **יום אחד**. למרות שספרנו מחלקות כאלה, למשל:

- "Bell numbers"

$$\sum_{n \geq 0} \mathrm{Bell}_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$$

- "Bernoulli numbers"

$$\sum_{n\geq 0} \text{Ber}_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}$$

- "Surjection numbers"

$$\sum_{n\geq 0} \text{Sur}_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}$$

- "Secant numbers"

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{\cos x}$$

- "Tangent numbers"

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan(x)$$

- תמורות זיג-זאג (alternating permutations).

$$\sum_{n\geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\cos x} + \tan x$$

הערה. שתי מחלקות שונות בקומבינטוריקה: labelled או non-labelled.

- לא מתויגים: כדורים זהים, מילים, עצים לא מסומנים...
  - פונקציה יוצרת רגילה.
- מתויגים: כדורים שונים, תמורות, עצים מסומנים...
  - פונקציה יוצרת מעריכית.

תרגיל. נרחיב את הדיון למספרי ברנולי.

$$B(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$e^z = 1 \iff z = \chi_k = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

נשים לב ש-$B(0) := 1$, ולכן אינו קוטב.

$$B(z) = \frac{z}{\prod_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} 1 - \frac{z}{\chi_k}}$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{-1}{1-\frac{z}{\chi_k}}$$

$$\Rightarrow B_n = -n! \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \chi_k^{-n} = -n! \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (2\pi k i)^{-n}$$

קל לראות ש-$B_n = 0$ כאשר n אי-זוגי≤ 3. עבור זוגיים,

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n-1} 2^{1-2n} \pi^{-2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n-1} 2^{1-2n} \pi^{-2n} \zeta(2n)$$

2.6 מקומות של אפסים/קטבים

הגדרה. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום Ω, ותהי γ מסילה סגורה פשוטה בפנים של Ω. אזי

$$\underbrace{N(f;\gamma)}_{\text{מספר האפסים של } f \text{ על } \gamma \text{ עם ריבוי}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

<u>עיקרון הארגומנט:</u> מספר האפסים של $f(z)$ (עם ספירת ריבוי) בתחום מסילה γ פשוטה וסגורה $=$ מספר הסיבובים סביב הראשית של $f(\gamma)$.

משפט. (רושה) יהיו $f(z), g(z)$ אנליטיות ב-$z=0$ המוכל בתחום הנחסם ע"י מסילה פשוטה וסגורה γ. נניח כי $|g(z)| \leq |f(z)|$ לכל z על γ. אזי ל-$f(z)+g(z)$ ול-$f(z)$ אותו מספרים אפסים בתחום החסום ע"י γ (ללא שפה).

2.7 תבניות של מילים

דוגמה. התבנית "אין רצף 001" במילים בינאריות. כל מילה היא:

- המילה הריקה.
- מילה שמתחילה ב-1.
- מילה שמתחילה ב-0:
  - המילה 0, או מילה שמתחילה ב-01.
  - מילה שמתחילה ב-000 (כי אין 001).

$$F\left(x\right)=1+xF\left(x\right)+G\left(x\right)$$
$$G\left(x\right)=x+H\left(x\right)+x^{2}F\left(x\right)$$
$$H\left(x\right)=x^{2}+xH\left(x\right)$$

שים לב - מערכת ליניארית (סופית) עם מקדמים קבועים, ולכן הפתרון הוא פונקציה רציונלית.

$$H\left(x\right)=\frac{x^{2}}{1-x}$$

$$G\left(x\right)=x+\frac{x^{2}}{1-x}+x^{2}F\left(x\right)=\frac{x}{1-x}+x^{2}F\left(x\right)$$
$$F\left(x\right)=1+xF\left(x\right)+\frac{x}{1-x}+x^{2}F\left(x\right)$$
$$\Rightarrow\boxed{F\left(x\right)=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(1-x-x^{2}\right)}}$$

- המכנה מתאפס ב-$x=1,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
- לכן, הקוטב הקרוב ביותר לראשית הוא $x_{1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, וכך $F\left(z\right)$ אנליטית ב-$\left|z\right|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, והיא לא אנליטית בכל תחום $\left|z\right|<R$ כאשר $R>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- לכן, רדיוס ההתכנסות של $F\left(z\right)$ היא $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$\Rightarrow\left[z^{n}\right]F\left(z\right)\sim c\cdot\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^{n}$$
$$=c\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n}$$

כעת, נמצא את c:

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{z\to x_1}\left(z-z_1\right)F\left(z\right)\\
&= \lim_{z\to x_1}\frac{z-x_1}{\left(1-z\right)\left(1-z-z^2\right)}\\
&= \lim_{z\to x_1}\frac{1}{-\left(1-z-z^2\right)+\left(1-z\right)\left(-1-2z\right)}\\
&= \frac{1}{\left(1-x_1\right)\left(-1-2x_1\right)}\\
&= \frac{1}{\left(x_1-1\right)\left(2x_1+1\right)}\\
&= \frac{1}{2\left(1-x_1\right)-x_1-1}\\
&= \frac{1}{1-3x_1}\\
&\Rightarrow \left[z^n\right]F\left(z\right)\sim c\cdot\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^n=\frac{1}{1-3x_1}x_1^n
\end{aligned}$$

לפעמים, כאשר נאסור תבנית של רצף $w_1w_2\dots w_s$, נקבל פונקציה יוצרת **"לא נחמדה"**. למשל:

$$F\left(z\right)=\frac{C\left(z\right)}{z^k+\left(1-mz\right)C\left(z\right)}$$

כאשר $C\left(z\right)$ פולינום ממעלה $k-1$.

דוגמה. נסתכל על המכנה $z^{31}+\left(1-2z\right)C\left(z\right)$, כאשר הרצף הוא $0\underbrace{(10)\,(10)\cdots(10)}_{\text{15 פעמים}}$, או $0\underbrace{(01)\,(01)\cdots(01)}_{\text{15 פעמים}}$. בעזרת ציורים של $|z|=0.6$, ניתן לראות שמתקיים

$$\begin{aligned}
\left|C\left(z\right)\right| &\underbrace{\approx}_{\text{דומה}} 1+z+z^2+\cdots+z^{k-1}\\
&\geq 1-\left(|z|^2+|z|^3+\cdots\right)\\
&= 1-\frac{|z|^2}{1-|z|}\\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

מנגד,

$$\begin{aligned} |1-2z| &= |2z-1| \\ &\geq |2z|-1 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(1-2z)\,C(z)| \geq 0.02$$

נשים לב ש-$k \geq 7$, $|z|^k = 0.6^7 \ll 0.02$, וכך המכנה $z^k + (1-2z)\,C(z)$ אינו מתאפס על $|z| = 0.6$.

כלומר, הפונקציה $z^k + (1-2z)\,C(z)$ אנליטית בעיגול $|z| \leq 0.6$ עד כדי קוטב יחיד (פשוט). אז,

$$[z^n]\,\frac{C(z)}{z^k + (1-2z)\,C(z)} \sim c \cdot \rho^{-n}$$

כאשר ρ הוא השורש הפשוט של $z^k + (1-2z)\,C(z)$ בתוך $|z| < 0.6$, ו-

$$\begin{aligned} c &= \lim_{z \to \rho} \frac{\left(1-\frac{z}{\rho}\right) C(z)}{z^k + (1-2z)\,C(z)} \\ &= \frac{C(\rho)}{-\rho\left(k\rho^{k-1} - 2C(\rho) + (1-2\rho)\,C'(\rho)\right)} \end{aligned}$$

3 סינגולריות ומשוואות פונקציונליות

ניתוח אסימפטוטי, בלי לדעת את הפונקציה בעצמה.

דוגמה. משוואות פונקציונליות קשות.

1. $f(z) = ze^{f(z)}$ (Cayley Trees).
2. $f(z) = z + f(z^2 + z^3)$ (עצי 2-3 מאוזנים).
3. $f(z) = \frac{1}{1 - zf(z^2)}$ (Polya's alcohols).

דוגמה. האם ניתן לחשב את מקדמי $f(z)$, כאשר

$$f(z) = ze^{f(z)}$$

- נניח $f(z)=z$, אזי

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{z} \\ &= z\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots\right) \\ &\approx z+z^2 \end{aligned}$$

- כעת נניח $f(z)=z+z^2$, אזי

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{z(1+z)} \\ &= z\left(1+z(1+z)+\frac{z^2(1+z)^2}{2}+\cdots\right) \\ &\approx z+z^2+\frac{7z^3}{6} \end{aligned}$$

- וממשיכים כך.

למה. (משפט הפונקציה ההפוכה) תהי $\Psi(z)$ אנליטית ב-y_0 כך ש-$\Psi(y_0)=z_0$. נניח ש-$\Psi'(y_0)\neq 0$. אזי, עבור z בסביבה קטנה סביב z_0 קיימת פונקציה אנליטית $y(z)$ הפותרת את המשוואה

$$\Psi(y)=z$$

נפעיל את הלמה בדוגמא הקודמת: $f(0)=0$, $f(z)=ze^{f(z)}$.

$$\Rightarrow z=f(z)e^{-f(z)}$$

$$\Psi(y)=ye^{-y},\Psi(0)=0$$

$$\Psi'(y)=e^{-y}-ye^{-y}\Rightarrow\Psi'(0)=1-0\neq 0$$

מתקיימים תנאי הלמה, ולכן קיים ρ כך שב-$|z-0|<\rho$ קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ כך ש-

$$\Psi(f(z))=z$$

$$f(z)e^{-f(z)}=z\Rightarrow f(z)=ze^{f(z)}$$

כלומר, $f(z)$ ניתנת לכתיבה כטור חזקות $\sum_{n\geq 1}f_nz^n$.

הערה. נשים לב ש-

$$\Psi(y)\approx\Psi(y_0)+\Psi'(y_0)(y-y_0)$$

$$y\approx y_0+\frac{1}{\Psi'(y_0)}(z-z_0)$$

דוגמה. (ספירת עצים) נניח שיש לנו פונקציה $y(z)$ המקיימת

$$y(z) = z\Phi(y(z))$$

כאשר $\Phi(u)$ אנליטית ב-$u=0$. לשם פשטות, נניח כי $\Phi(0) \neq 0$. משוואה כזו ניתנת לכתיבה כ-

$$\Psi(y(z)) = z$$

כאשר

$$\Psi(u) = \frac{u}{\Phi(u)}$$

טענה. תהי $\Phi(z)$ אנליטית ב-$z=0$, כך שלטור הטיילור שלה יש מקדמים אי-שליליים, וגם $\Phi(0) \neq 0$. יהי $R \leq +\infty$ רדיוס ההתכנסות של הטור $\Phi(u)$. תחת התנאי

$$\lim_{x \to R^-} \frac{x\Phi'(x)}{\Phi(x)} > 1$$

יש פתרון יחיד $\tau \in (0, R)$ המקיים את המשוואה

$$\tau \frac{\Phi'(\tau)}{\Phi(\tau)} = 1$$

אז הפתרון הפורמלי $y(z)$ של המשוואה $y(z) = z\Phi(y(z))$ הוא אנליטי ב-$z=0$, וגם המקדמים מקיימים

$$\sqrt[n]{[z^n]\, y(z)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho^{-1}$$

כאשר $\rho = \frac{\tau}{\Phi(\tau)} = \frac{1}{\Phi'(\tau)}$.

דוגמה. ניקח $\Phi(y) = \frac{1}{1-y}$.

$$y(z) = \frac{z}{1-y(z)}$$

$$\begin{aligned} y(z) &= zC(z) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} z^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [z^n]\, y(z) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \text{Catalan}_{n-1}$$

ידוע כי $\Phi(0)=1\neq 0$.

$$\frac{\tau\Phi'(\tau)}{\Phi(\tau)}=\frac{\tau/(1-\tau)^2}{\frac{1}{1-\tau}}=\frac{\tau}{1-\tau}=1\Rightarrow\tau={}^1\!/_2$$

$$\rho=\frac{\tau}{\Phi(\tau)}=\frac{\tau}{\frac{1}{1-\tau}}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{[z^n]\,y(z)}\xrightarrow[n\to\infty]{}4$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}4$$

"נראה" (בסמסטר הזה או בגלגול אחר) ש-

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\sim c\cdot\rho^{-n}\cdot n^{-3/2}$$

3.1 עצי 2-3

הגדרה. עץ 2-3 הוא עץ בו לכל צומת $0/2/3$ בנים.

תהי $E(z)$ הפונקציה היוצרת שסופרת מספר עצי 2-3 עם n קשתות.

- z^0 סופר עץ עם קודקוד בודד.
- z^2 סופר שורש עם שני בנים עלים, ו-z^3 סופר שורש עם שלושה בנים עלים.
- כל עץ הוא:
  - קודקוד בודד.
  - או קודקוד עם שני בנים.
  - או קודקוד עם שלושה בנים.

$$E(z)=1+z^2E^2(z)+z^3E^3(z)$$

- השאלה: האם ניתן לכתוב $\tilde{E}(z)=z\Phi\left(\tilde{E}(z)\right)$? זו **פנטזיה**.

נגדיר $y(z) = E(z) - 1$.

$$y = z^2 (y+1)^2 + z^3 (y+1)^3$$

$$y = z^2 (y+1)^2 (1 + z(y+1))$$

כעת $u = z(y+1) = zE$

$$\frac{u}{z} - 1 = u^2 (1+u)$$

$$\begin{aligned} u &= z\left(1 + u^2 + u^3\right) \\ &= z\Phi(u) \end{aligned}$$

כאשר $\Phi(u) = 1 + u^2 + u^3$. אחת השיטות למציאת המקדם $[z^n]\, u(z)$ היא נוסחת LIF (הרחבה של מה שעשינו).

- מקרה זה מאוד פשוט:

$$\begin{aligned} u_n &= [z^n]\, u \\ &= \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\left(1 + u^2 + u^3\right)^n \\ &= \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(u^2 + u^3\right)^j \\ &= \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^{2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}u^i \\ (2j + i = n - 1) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{n-1-2j} \end{aligned}$$

$$u_n = [z^n]\, u = \left[z^{n-1}\right](y+1) = y_{n-1}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n/2}\binom{n+1}{j}\binom{j}{n-2j}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow y_n = e_n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : \boxed{[z^n]\, E(z) = e_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n/2}\binom{n+1}{j}\binom{j}{n-2j}}$$

3.2 אפילו עוד משוואה פונקציונלית

תרגיל. נתונה משוואה
$$F(z) = z + F\left(z^2 + z^3\right)$$

פתרון. נכתוב

$$\begin{aligned} F(z) &= z + F(\sigma(z)) \\ &= z + \sigma(z) + F(\sigma(\sigma(z))) \\ &\vdots \\ &= \boxed{\sigma^0(z) + \sigma(z) + \sigma^2(z) + \cdots + F(\sigma^\infty(z))} \end{aligned}$$

זו שיטת האיטרציה.

$$\begin{gathered} \sigma^0(z) = z \\ \sigma^1(z) = z^2 + z^3 \\ \sigma^2(z) = (\sigma(z))^2 + (\sigma(z))^3 = z^4 + 2z^5 + 2z^6 + 3z^7 + 3z^8 + z^9 \end{gathered}$$

נשים לב ש-$F(\sigma^\infty(z)) = 0$: המקדם הקטן ביותר ב-$\sigma^m(z)$ הוא z^{2^m}, שואף ל-0 כאשר $|z| < 1$. לכן ב-$|z| < 1$:

$$\boxed{F(z) = \sum_{j\geq 0} \sigma^j(z)}$$

- נגדיר $F(z) = \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} f_n z^n &= z + \sum_{n\geq 1} f_n z^{2n} (1+z)^n \\ &= z + \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f_n z^{2n+j} \end{aligned}$$

כעת, נסתכל על $\left[z^N\right]$, $N \geq 2$:

$$f_N = \sum_{n\geq 1}^{N/2} \binom{n}{N-2n} f_n$$

$$f_1 = 1$$

וזה כלל נסיגה נחמד. מזה **לא קל** למצוא אסימפטוטיקה של f_n.

- עם זאת, נסתכל על $\rho > 0$, $\rho = \sigma(\rho)$. אזי

$$\rho = \rho^2 + \rho^3 \Rightarrow \rho = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

לכן $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. בנוסף, יודעים שאם $|z| < \rho^{-1}$ אז $\sigma^k(z)$ מתכנסת לכל k: באינדוקציה $\left|\sigma^k(z)\right| \leq \rho$.

- אם $\left|\sigma^k(z)\right| \leq \rho$, אז גם

$$\left|\sigma^{k+1}(z)\right| = \left|\sigma\left(\sigma^k(z)\right)\right| \underbrace{\leq}_{|\sigma(z)| \leq \sigma(|z|)} |\sigma(\rho)| \leq \rho$$

- קיבלנו כי $F(z)$ אנליטית ב-$|z| < \rho^{-1}$, אבל $F(\rho^{-1})$ אינו מוגדר.
- לכן, הנקודה החיובית הסינגורלית היחידה ב-$|z| \leq \rho^{-1}$ היא $z = \rho^{-1}$:

$$\sqrt[n]{[z^n] F(z)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$$

העשרה: למעוניינים בלבד,

$$f_n = [z^n] F(z) \sim \frac{\rho^n}{n} \Omega(\log n)$$

3.3 דוגמא מסתורית

$$M(z) = \frac{1}{1 - zM(z^2)}$$

<u>תהייה:</u> מה זה???

<u>תשובה:</u> ב-EIS, A000621.

$$1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 14, 23, 39, \ldots$$

עמוד 283 בספר.

$$M(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{1 - \frac{z^2}{1 - z^4 \boxed{\ldots}}}}$$

טענה. קיימים קבועים k,β ו-$B>1$ כך ש-

$$M_n = k\beta^n\left(1+\mathcal{O}\left(B^{-n}\right)\right)$$

יתר על כן,

$$\beta = 1.68136\ldots, k = 0.36071\ldots$$

פרסומת. (הדוקטורט של תאופיק) ראינו שפונקציית קטלן $C(x)$ מקיימת

$$C(x) = \frac{1}{1-xC(x)} \iff C(x) = 1+xC^2(x)$$

$$, \Rightarrow C(x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{1-\ddots}}}$$

שבר רציף. נגדיר

$$C_k(x) = \underbrace{\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{1-\ddots}}}}_{k \text{ פעמים}}$$

$$C_1(x) = 1$$

$$C_2(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$C_3(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}$$

$$C_4(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1-xC_3(x)} = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}$$

$$C_k(x) = \frac{1}{1-xC_{k-1}(x)}$$

נגדיר $C_k(x) = \frac{a_k}{b_k}$, אז

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} &= C_{k+1}(x)\\ &= \frac{1}{1-xC_k(x)}\\ &= \frac{1}{1-x\frac{a_k}{b_k}}\\ &= \frac{b_k}{b_k-xa_k}\end{aligned}$$

לכן, אם השברים מצומצמים:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{k+1} = b_k \\ b_{k+1} = b_k - x a_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{k+1} = b_k - x b_{k-1} \\ b_0 = 1 \\ b_1 = 1 - x \end{cases}$$

נגדיר $\tilde{b}_k = \frac{b_k}{\sqrt{x}^k}$.

$$\frac{b_{k+1}}{\sqrt{x}^{k+1}} = \frac{b_k}{\sqrt{x}^{k+1}} - x \frac{b_{k-1}}{\sqrt{x}^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{b}_{k+1} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \tilde{b}_k - \tilde{b}_{k-1} \\ \tilde{b}_0 = 1 \\ \tilde{b}_1 = \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \end{cases}$$

נסמן $t = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ואז

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{b}_{k+1} = 2t \tilde{b}_k - \tilde{b}_{k-1} \\ \tilde{b}_0 = 1 \\ \tilde{b}_1 = 2t - \frac{1}{2t} \end{cases}$$

$$\tilde{b}_2 = \underbrace{2t}_{u_1} \tilde{b}_1 - \tilde{b}_0$$

$$\tilde{b}_3 = \underbrace{\left(4t^2 - 1\right)}_{u_2} \tilde{b}_1 - \underbrace{2t}_{u_1} \tilde{b}_0$$

$$\vdots$$

המקדמים מהווים את פולינום צ'ביצ'ב מסוג שני.

$$\Rightarrow \tilde{b}_m = u_{m-1}(t)\, \tilde{b}_1 - u_{m-2}(t)\, \tilde{b}_0$$

$$\begin{cases} u_m = 2t u_{m-1} - u_{m-2} \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2t \end{cases}$$

$$\frac{b_m}{\sqrt{x}^m} = u_{m-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(2t-\frac{1}{2t}\right) - u_{m-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot 1$$

$$b_m = \sqrt{x}^m\left[u_m\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{m-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$a_m = b_{m-1} = \sqrt{x}^{m-1}\left[u_{m-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{m-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow C_k(x) &= \frac{a_k}{b_k}\\ &= \frac{\sqrt{x}^{k-1}\left[u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{l-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}{\sqrt{x}^k\left[u_k\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}\\ &= \frac{u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{l-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left[u_k\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}\end{aligned}$$

שים לב, שע"פ הגדרה $C_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} C(x)$.

$$C_k(x) = \frac{1-\sqrt{x}\frac{u_{l-2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}}{\sqrt{x}\left[\frac{u_k\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{u_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} - \sqrt{x}\right]}$$

רעיון: $u_m = 2tu_{m-1} - u_{m-2}$, ואז

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} = 2t - \frac{1}{\frac{u_{m-1}}{u_{m-2}}}$$

כעת, כאשר $m\to\infty$:

$$\alpha = 2t - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 - 2t\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2t\pm\sqrt{4t^2-4}}{2} = t\pm\sqrt{t^2-1}$$

למציאת הפתרון הנכון, נציב 0:

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{x}} \pm \sqrt{\frac{1}{4x}-1} = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sqrt{x}C\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow C_k\left(x\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} & \frac{1-\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}C(x)}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}C\left(x\right)-\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{C\left(x\right)-1}{x\left(C\left(x\right)-1\right)C\left(x\right)}\\ &= \frac{1}{xC\left(x\right)}\end{aligned}$$

המינוס לא עוזר!

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{x}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\\ &= \sqrt{x}\frac{1-\left(1-4x\right)}{2x\left(1-\sqrt{1-4x}\right)}\\ &= \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}C\left(x\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow C_k\left(x\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} & \frac{1-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}C\left(x\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}C(x)}-\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1-xC\left(x\right)}{x\left(\frac{1}{xC(x)}-1\right)}\\ &= \frac{\left(1-xC\left(x\right)\right)xC\left(x\right)}{x\left(1-xC\left(x\right)\right)}\\ &= \boxed{C\left(x\right)}\end{aligned}$$

הוכחה. נוכיח את הטענה בעזרת הטריק: נגדיר

$$M_k\left(z\right) = \frac{1}{1-\frac{z}{1-\frac{z^2}{1-\frac{z^4}{1-z^{2^{k-1}}}}}}$$

$$M_0\left(z\right)=1, M_1\left(z\right)=\frac{1}{1-z}$$

$$M_2\left(z\right)=\frac{1}{1-\frac{z}{1-z^2}}=\frac{1-z^2}{1-z-z^2}$$

$$M_3\left(z\right)=\frac{1-z^2-z^4}{1-z-z^3-z^4+z^5}$$

$$M_k\left(z\right)=\frac{\Psi_{k-1}\left(z^2\right)}{\Psi_k\left(z\right)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_k\left(z^2\right)}{\Psi_{k+1}\left(z\right)}&=M_{k+1}\left(z\right)\\&=\frac{1}{1-zM_k\left(z^2\right)}\\&=\frac{1}{1-z\frac{\Psi_{k-1}\left(z^4\right)}{\Psi_k\left(z^2\right)}}\\&=\frac{\Psi_k\left(z^2\right)}{\Psi_k\left(z^2\right)-z\Psi_{k-1}\left(z^4\right)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Psi_{k+1}\left(z\right)=\Psi_k\left(z^2\right)-z\Psi_{k-1}\left(z^4\right)\\ \Psi_0\left(z\right)=1\\ \Psi_1\left(z\right)=1\end{cases}$$

הדבר נכון לכל k, ו-$\Psi_k\left(z\right)$ טור חזקות (פולינום), לכן מתכנס סביב $z=0$. נסמן

$$\Psi_k\left(z\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}\Psi\left(z\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Psi\left(z\right)=\Psi\left(z^2\right)-z\Psi\left(z^4\right)\\ \Psi\left(0\right)=1\end{cases}$$

$$\Psi\left(z\right)=\sum_{m\geq0}\rho_m z^m$$

$$\begin{cases}\rho_{4n}=\left[z^{4n}\right]\Psi\left(z\right)=\rho_{2n}\\ \rho_{4n+1}=-\rho_n\\ \rho_{4n+2}=\rho_{2n+1}\\ \rho_{4n+3}=0\end{cases}$$

מאחר ו-$\rho_0 = 1$, רואים באינדוקציה ש-$\forall n \geq 0 , \rho_n \in \{0, 1, -1\}$. לכן,

$$M(z) = \frac{\sum_{m\geq 0} \rho_m z^{2m}}{\sum_{m\geq 0} \rho_m z^m}$$

אשר מתכנס בסביבת $z = 0$. לכן, $M(z)$ אנליטית סביב $z = 0$.

$$\begin{gathered}\rho_0 = 1 \neq 0 \\ \rho_0 + \rho_1 z = 1 - z \Rightarrow |z| < 1 \\ \rho_0 + \rho_1 z + \rho_2 z^2 = 1 - z - z^2 \Rightarrow |z| < \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618\end{gathered}$$

$$\rho_0 + \rho_1 z + \cdots + \rho_{16} z^{16} = 1 - z - z^2 - z^4 + z^5 - z^8 + z^9 + z^{10} - z^{16}$$

ואז בעזרת **כוח Maple** נקבל שהשורש קרוב ל-$\rho = 0.59475$. שים לב ש-$\Psi(\rho) = 0$, אבל $\Psi(\rho^2) \neq 0$. לכן,

$$\begin{aligned}\Rightarrow M(z) &= \frac{\Psi(z^2)}{\frac{\Psi(z)}{z-\rho}(z-\rho)} \\ &\xrightarrow[z\to\rho]{} \frac{\Psi(\rho^2)}{\Psi'(\rho)(z-\rho)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_n \sim -\frac{\Psi(\rho^2)}{\rho\Psi'(\rho)}\rho^{-n}$$

וכך $\beta = \frac{1}{\rho}$ ו-$k = -\frac{\Psi(\rho^2)}{\rho\Psi'(\rho)}$. □

4 Super Critical Sequence Schema

דוגמה. (צירופים)

$$n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m, \forall i : \sigma_i \in \mathbb{N}$$

נסתכל על זה כוקטור $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$. נסמן ב-$G(x)$ פונקציה יוצרת של המספרים הטבעיים.

$$G(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

נסתכל למשל על

$$15 = 5 + 1 + 3 + 2 + 4$$

$$\text{bargraph}:\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{bmatrix}\to x$$

הפונקציה היוצרת של bargraph עם עמודה אחת היא $G(x)$. עבור m עמודות, $G^m(x)$.
עבור כל ה-bargraphs:

$$\begin{aligned}B(x)&=(G(x))^0+(G(x))^1+\cdots\\&=\boxed{\frac{1}{1-G(x)}}\end{aligned}$$

בספר, $\text{SEQ}(G)=B$.

תרגיל. יער של Dyck הוא וקטור m-מימדי כך שכל קואורידנטה היא מסלול Dyck.
כתוב פונקציה יוצרת למספר יערות Dyck, כך שסופרים את מספר העליות בכל קואורדינטות. אין תלות בין קואורדינטות שונות, ואז

$$G(x)=C(x)-1=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}-1$$

$$\begin{aligned}B(x)&=\frac{1}{1-G(x)}\\&=\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}-1}\\&=\frac{2x}{4x-1+\sqrt{1-4x}}\\&=\frac{2x\left(4x-1-\sqrt{1-4x}\right)}{(4x-1)^2-(1-4x)}\\&=\frac{2x\left(4x-1-\sqrt{1-4x}\right)}{16x^2-8x+1-1+4x}\\&=\frac{4x-1-\sqrt{1-4x}}{2(4x-1)}\\&=\frac{1-4x-\sqrt{1-4x}}{2(1-4x)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)\end{aligned}$$

לכן, מספר יערות Dyck עם n עליות הוא $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$, $n \geq 1$.

דוגמה. (מעניינת) תהי P קבוצת כל המספרים הראשוניים. מצאו את הפונקציה היוצרת של כל הצירופים של n כך שכל איבר בצירוף שייך ל-P.

$$f(x) = 1 + \sum_{p\in P} x^p f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sum_{p\in P} x^p}$$

מציאת $[x^n] f(x)$ לא יישומי. לכן, ננתח את האסימפטוטיקה של המקדם. מהמשפט שראינו על $f(x) = \frac{1}{1-g(x)}$, אז

$$[x^n] f(x) = \frac{1}{\sigma g'(\sigma)} \sigma^{-n}$$

כאשר $g(\sigma) = 1$. נחפש σ כך ש-$g(\sigma) = 1$ ועבור $|x| < \sigma$, $f(x)$ אנליטית. נעריך את σ ע"י כתיבת

$$g_N(x) = \sum_{P\ni k=2}^{N} x^k$$

$$g_1(x) = 0$$

$$g_2(x) = x^2 \Rightarrow \sigma_2 = 1$$

$$g_3(x) = x^2 + x^3 \Rightarrow \sigma_3 < \sigma_2$$

$$g_5(x) = x^2 + x^3 + x^5 \Rightarrow \sigma_5 < \sigma_3 < \sigma_2$$

באופן כללי, $1 = \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_5 < \sigma_7 < \sigma_{11} < \cdots \leq 0$. לכן ל-$\sum_{p\in P} x^p = 1$ יש שורש, נסמנו ב-ξ. לכן,

$$[x^n] f(x) \sim \frac{1}{\xi g'(\xi)} \xi^{-n}$$

$$g'(x) = \sum_{p\in P} p x^{p-1}$$

נשאר למצוא הערכה ל-ξ (בעזרת אנליזה נומרית וכו').

$$[x^n] f(x) \sim 0.18937 \times 1.29799^n$$

5 דוגמאות סיכום

דוגמה. (סיכום לקורס) תהי SP_n קבוצת כל החלוקות של $[n]$. מעוניינים לספור את איברי הקבוצה SP_n ע"פ מספר האיברים בבלוק הראשון (שמכיל את 1). נגדיר תסטטיסטיקה ע"י $\kappa(\pi)$.

1. מצאו כלל נסיגה לפונקציה היוצרת

$$f_n(q) = \sum_{\pi \in \mathrm{SP}_n} q^{\kappa(\pi)}$$

$$f_n(q) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} q^{j+1} f_{n-j-1}(1)$$

$$f_0(q) = 1$$

2. כתוב פונקציה יוצרת מעריכית לסדרה $f_n(q)$:

$$F(x,q) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n(q)\, x^n}{n!}$$

$$f_n(q) = \sum_{j=0}^{n-1} (n-1)! \frac{f_{n-j-1}(1)}{(n-1-j)!} \frac{q^{j+1}}{j!}$$

$$\frac{f_n(q)\, x^n}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_{n-j-1}(1)}{(n-1-j)!} \frac{q^{j+1}}{j!} x^n$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f_n(q)\, x^n}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_{n-j-1}(1)}{(n-1-j)!} \frac{q^{j+1}}{j!} x^n$$

$$x \sum_{n \geq 1} \left(\frac{f_n(q)\, x^n}{n!} \right)' = qx \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_{n-j}(1)\, x^{n-j}}{(n-j)!} \frac{q^j x^j}{j!}$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} F(x,q) = qxF(x,1) \cdot e^{qx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,q) = qe^{qx} \underbrace{F(x,1)}_{e^{e^x-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}F\left(x,q\right)=qe^{qx+e^{x}-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F\left(x,q\right)=q\int_{0}^{x}e^{qt+e^{t}-1}dt}$$

3. נגדיר tot_n להיות סכום גדלי כל הבלוקים הראשונים בכל החלוקות של SP_n.
למשל, עבור $n=3$:

$$\begin{array}{c}\left\{1\right\},\left\{2\right\},\left\{3\right\}\\ \left\{1,2\right\},\left\{3\right\}\\ \left\{1,3\right\},\left\{2\right\}\\ \left\{1\right\},\left\{2,3\right\}\\ \left\{1,2,3\right\}\end{array}\quad\Rightarrow \mathrm{tot}_3=9$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F\left(x,q\right)=qe^{qx+e^{x}-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}G\left(x\right)= & \left.\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial q}F\left(x,q\right)\right|_{q=1}\\ & =e^{e^{x}+x-1}+e^{x+e^{x}-1}x\\ & =\left(e^{e^{x}-1}\right)'+\left(e^{e^{x}-1}\right)'x\\ & =\left(\sum_{n\geq0}B_{n}\frac{x^{n}}{n!}\right)'\left(1+x\right)\\ & =\sum_{n\geq1}B_{n}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\left(1+x\right)\end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq1}\mathrm{tot}_n\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}=\sum_{n\geq1}B_{n}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}+\sum_{n\geq1}nB_{n}\frac{x^{n}}{n!}$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{aligned}\mathrm{tot}_{n-1} & =B_{n}+\left(n-1\right)B_{n-1}\\ \mathrm{tot}_3 & =B_{3}+2B_{2}=9\end{aligned}$$

כעת, מהו הממוצע של גדלי הבלוק הראשון?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n} & =\frac{\mathrm{tot}_n}{B_{n}}\\ & =1+\left(n-1\right)\frac{B_{n-1}}{B_{n}}\end{aligned}$$

כעת, נרצה להעריך את $\frac{B_{n-1}}{B_n}$ (נעשה בשנים האחרונות, אך הערכה של $\frac{B_{n+k}}{B_n}$).
ידוע כי

$$B_n < \left(\frac{0.792n}{\ln(n+1)}\right)^n$$

בנוסף, יודעים כי

$$B_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{W(n)}\right)^{n+1/2} e^{\frac{n}{W(n)}-n-1}$$

עבור $W(n)$ של Lambert.

$$\frac{\ln B_n}{n} \sim \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + \cdots$$

$$W(n)\,e^{W(n)} = n$$
$$\ln W(n) + W(n) = \ln n$$
$$W(n) = \ln n - \ln W(n)$$

מכאן, הערכה ראשונה: $W_1(n) = \ln n$.

$$W_{j+1}(n) = \ln n - \ln W_j(n)$$

$$W_2(n) = \ln n - \ln\ln n$$

$$\begin{aligned} W_3(n) &= \ln n - \ln(\ln n - \ln\ln n) \\ &= \ln n - \ln\left(\ln n\left(1 - \frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\right) \\ &= \ln n - \ln\ln n - \ln\left(1 - \frac{\ln\ln n}{\ln n}\right) \\ &\approx \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} \end{aligned}$$

<u>בעיה:</u> יהי X אופרטור, $X(f) = xf$.
יהי D אופרטור $D(f) = f'$.

1. מצאו $[D,X] = DX - XD$.

$$\begin{aligned} (DX - XD)(f) &= DX(f) - XD(f) \\ &= (xf)' - xf' \\ &= f \end{aligned}$$

לכן $\boxed{DX - DX = I}$.

כתיבת מילה ב-normal ordering form: החוק הוא $DX=1+XD$.

$$(DX)^1 = 1+XD$$

$$\begin{aligned}(DX)^2 &= DX\cdot DX\\ &= (1+XD)(1+XD)\\ &= 1+2XD+XDXD\\ &= 1+2XD+X(1+XD)D\\ &= X^0D^01+3X^1D^1+X^2D^2\end{aligned}$$

ננחש ש-

$$(DX)^n=\sum_{j=0}^{n}a_{n,j}X^jD^J$$

כאשר $a_{n,j}$ מקדמים כלשהם.

$$\begin{aligned}(DX)^{n+1} &= DX\,(DX)^n\\ \sum_{j=0}^{n+1}a_{n+1,j}X^jD^j &= DX\sum_{j=0}^{n}a_{n,j}X^jD^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}a_{n,j}\left(DX^{j+1}D^j\right)\end{aligned}$$

למה.

$$\begin{aligned}DXD^j &= (1+XD)\,D^j\\ &= D^j+XD^{j+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DX^2D^j &= (1+XD)\,XD^j\\ &= XD^j+XDXD^j\\ &= 2xD^j+X^2D^{j+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow DX^nD^j = nX^{n-1}D^j+X^nD^{j+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} a_{n+1,j} X^j D^j &= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \left(DX^{j+1}D^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \left((j+1) XD^j + X^{j+1}D^{j+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DX^{n+1} &= (DX) X^n \\ &= (XD+I) x^n \\ &= X^n + XDX^n\end{aligned}$$

$$DX = XD + I$$
$$DX^2 = X + XDX = 2X + X^2D$$
$$DX^3 = X^2 + XDX^2 = 3X^2 + X^3D$$
$$\boxed{DX^{n+1} = (n+1) X^n + X^{n+1}D}$$

נראה באינדוקציה:

$$\begin{aligned}DX^{n+2} &= DXX^{n+1} \\ &= (XD+I) X^{n+1} \\ &= X^{n+1} + X\left((n+1) X^n + X^{n+1}D\right) \\ &= (n+2) X^{n+1} + X^{n+2}D\end{aligned}$$

כעת, נחשב את $(DX)^n$:

$$\begin{aligned}(DX)^{n+1} &= \sum_{j=0}^{n+1} a_{n+1,j} X^j D^j \\ &= DX \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^j D^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} D X^{j+1} D^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \left((j+1)\, X^j + X^{j+1} D \right) D^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \left((j+1)\, X^j D^j + X^{j+1} D^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, a_{n,j} X^j D^j + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^{j+1} D^{j+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[X^j D^j\right] &= a_{n+1,j} \\ &= (j+1)\, a_{n,j} + a_{n,j-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1,0} = a_{n,0} = \cdots = a_{0,0} = 1 \\ a_{n+1,1} = 2a_{n,1} + 1 \\ \Rightarrow a_{n,j} = S_{n,j}\end{aligned}$$