יהי $d\in\mathbb{N}$ ויהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כך שדרגה של כל צומת היא לפחות d.
הוכיחו: ב G קיים מסלול פשוט באורך לפחות d.

אפשר גם לפתור ע"י בניית מסלול בעזרת לולאה.

<u>נוכיח באינדוקציה:</u>

נגדיר פרדיקט $P(d)$:

גרף $G=(V,E)$ לא מכוון כך שדרגה של כל צומת היא לפחות d. אז יש ב G מסלול פשוט באורך לפחות d.

<u>בסיס:</u> $P(1)$: יהי $v\in V$ צומת בגרף, מהנתון דרגת צומת זו היא לפחות 1 כלומר יש לו לפחות שכן אחד נסמנו ב v'. אז יש מסלול מ v ל v' שהוא באורך 1 והוא מסלול פשוט שנמצא ב G $(v-v')$

<u>צעד:</u> נניח נכונות $P(d-1)$ לכל $d-1\geq 1$ ונוכיח נכונות $P(d)$

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כך שדרגה של כל צומת היא לפחות d.
יהי $v_0\in V$ צומת בגרף, נתבונן בתת גרף של G ללא הצומת v_0, נסמן את הגרף הזה ב $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ כאשר $\tilde{V}=V\setminus\{v_0\}$

$$\tilde{E}=\{e\in E \mid v_0 \text{ אינו קצה של } e\}$$

נשים לב שבגרף $\tilde{G}$ מתקיים שדרגה של כל צומת היא לפחות $d-1$, כי דרגת כל צומת ב G היא לפחות d, וכל צומת שהיא לא שכן של v_0 דרגתה לא השתנתה, וכל צומת שהיא שכנה של v_0 בגרף G דרגתה קטנה ב1 בגרף $\tilde{G}$)

לפי הנחת האינדוקציה, קיים ב $\tilde{G}$ מסלול פשוט באורך לפחות $d-1$.
נסמן מסלול זה ב $u_0,u_1,u_2,\dots,u_{d-1}$ ($u_0,\dots,u_{d-1}$ שונים זה מזה וכולם שונים מ v_0). אם $\{u_0,v_0\}\in E$ אז המסלול $v_0,u_0,u_1,\dots,u_{d-1}$ הינו מסלול פשוט בגרף G שהוא באורך d.

אם $\{u_0,v_0\}\notin E$ אז דרגת u_0 בגרף $\tilde{G}$ = דרגת u_0 בגרף G, כלומר דרגת u_0 היא לפחות d ולכן קיים $\tilde{u}\in\tilde{V}$ כך ש $\{\tilde{u},u_0\}\in\tilde{E}$

! $\tilde{u}\neq u_i$ לכל $0\leq i\leq d-1$ (ומכאן $\tilde{u}\neq v_0$) ולכן מצאנו מסלול $\tilde{u},u_0,u_1,\dots,u_{d-1}$ באורך d והינו מסלול פשוט (כי הצמתים שונים)

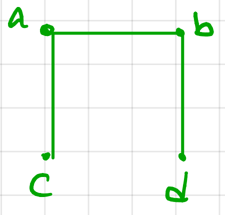
כאן יש d קשתות שונות וקיבלנו שכ"א צומת

בה"כ הוכחנו שבכל אחד מהמקרים, אם G מקיים את הנתון בשאלה, אז קיים בו מסלול פשוט באורך לפחות d.

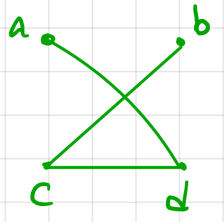
קשירות של הגרף המשלים

הוכיחו את הטענה הבאה: יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב $G'=(V,E')$ את הגרף המוגדר כך: לכל שני צמתים שונים $u,v\in V$, יש קשת בין u ל v ב G' אם ורק אם אין קשת בין u ל v ב G (G' נקרא "הגרף המשלים של G"). הוכיחו את הטענה הבאה: אם G לא קשיר, אז G' קשיר.

דוגמה לגרף:



גרף G



גרף G'

<u>הוכחה:</u>

- נתון שגרף G לא קשיר, נתבונן ב G' ונוכיח ש G' קשיר
כלומר צ"ל: לכל $a,b\in V$ קיימת קשת ביניהם $(a,b)\in E'$
אם $|V|=2$, ו $a,b\in V$ צ' מההנחה: ש G לא קשיר נסיק שלא
קיים קשת ביניהם $(a,b)\notin E$ ולכן $(a,b)\in E'$ כלומר G' קשיר
נניח ש $|V|>2$ ויהיו $a,b\in V$, נפריד למקרים:

- $(a,b)\notin E$ ולכן לפי הגדרת G' נקבל ש $(a,b)\in E'$.
- $(a,b)\in E$, נתון ש G לא קשיר לכן יש לו לפחות שני רכיבי
קשירות, מכיוון ש $(a,b)\in E$ אז a,b נמצאים באותו רכיב קשירות
יהי $c\in V$ צומת מרכיב האחר שונה, לכן $(a,c)\notin E$, $(b,c)\notin E$
לפי הגדרת G' נקבל ש $(a,c)\in E'$ וגם $(b,c)\in E'$
כלומר ב G' קיים מסלול בין a ל b.

סה"כ מצאנו שבכל אחד מהמקרים ולכל $a,b\in V$ קיים מסלול מ a ל b
בגרף G' ולכן G' גרף קשיר

מסלול המילטון בקוביה הבוליאנית

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}^+$. הקוביה הבוליאנית ה־n־מימדית, מסומנת H_n, היא הגרף המוגדר כך:

- הצמתים של הגרף הם כל הרצפים של n ביטים — כלומר, קבוצת הצמתים היא $\{0,1\}^n$.
- יש קשת בין שני רצפי ביטים אם ורק אם הם שונים בדיוק בביט אחד — כלומר, קיים $i \in \{1, \ldots, n\}$ כך שהביט ה i של הרצף הראשון שונה מהביט ה i של הרצף השני, ובכל שאר המקומות הביטים שווים.

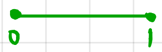
הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף. מסלול בגרף G נקרא מסלול המילטון אם ורק אם הוא מסלול פשוט שעובר דרך כל הצמתים של G (במילים אחרות, המסלול עובר דרך כל צומת בדיוק פעם אחת).

השאלה: הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים בגרף H_n מסלול המילטון.

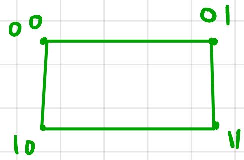
הדרכה: השתמשו באינדוקציה כדי להוכיח טענה יותר חזקה: לכל צומת $u \in \{0,1\}^n$ קיים ב H_n מסלול המילטון שמתחיל ב u. מותר לכם להשתמש בלי הוכחה בטענה הבאה: יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן ב V_0 את קבוצת הרצפים של n ביטים שהביט הראשון בהם הוא 0, ונסמן באופן דומה את V_1. נסמן ב $H_{n,0}$ את תת־הגרף המושרה של H_n על V_0, ונסמן באופן דומה את $H_{n,1}$. אם ניקח את הגרף $H_{n,0}$ ונמחק מהשם של כל צומת את הביט הראשון אז נקבל את הגרף H_{n-1}, ואותו הדבר נכון ל $H_{n,1}$.

דוגמאות ל H_n :

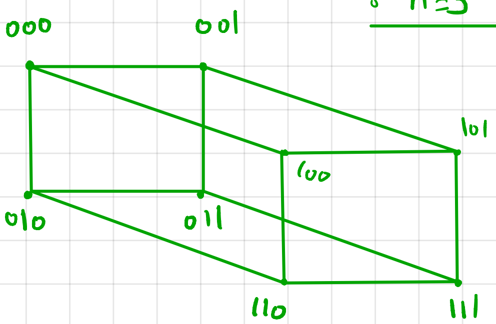
- עבור $n=1$:



- עבור $n=2$:



עבור $n=3$:



נסמן ב $P(n)$ את הפרדיקט "לכל צומת $u \in \{0,1\}^n$ קיים בגרף H_n מסלול המילטון שמתחיל ב u". נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $P(n)$. נתחיל מלהוכיח את טענת הבסיס $P(1)$: לגרף H_1 יש שני צמתים שמסומנים $0, 1$, והם מחוברים בקשת. אם $u = 0$, נבחר את המסלול שמתחיל ב 0 והולך על הקשת ל 1. אם $u = 1$, נבחר את המסלול שמתחיל ב 1 והולך על הקשת ל 0. בשני המקרים מצאנו מסלול המילטון שמתחיל ב v, כנדרש.

נעבור להוכיח את טענת האינדוקציה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ כך ש $n > 1$. נניח שמתקיים $P(n-1)$ ונוכיח שמתקיים $P(n)$. יהי $u \in \{0,1\}^n$ צומת ב H_n. נוכיח שקיים ב H_n מסלול המילטון שמתחיל ב u. נניח שהביט הראשון של u הוא 0 (אם הוא 1 אז ההוכחה דומה).

נגדיר את $H_{n,0}, V_0, H_{n,1}, V_1$ כמו בהדרכה, ונשים לב ש $u \in V_0$. לפי ההדרכה, אם נמחק את הביט הראשון מהשם של כל צומת ב V_0 נקבל את הגרף H_{n-1}. יהי $u' \in \{0,1\}^{n-1}$ הצומת של H_{n-1} שמ תקבל מ u ע"י מחיקת הביט הראשון. לפי הנחת האינדוקציה, קיים ב H_{n-1} מסלול המילטון $\overline{p}'$ שמתחיל ב u'. נסמן ב $v' \in \{0,1\}^{n-1}$ את הצומת האחרון של המסלול $\overline{p}'$. לפי הנחת האינדוקציה, קיים ב H_{n-1} מסלול המילטון $\overline{q}'$ שמתחיל ב v'. נסמן ב w' את הצומת האחרון של המסלול $\overline{q}'$.

נסמן ב $v_0, v_1 \in \{0,1\}^n$ את הצמתים של H_n שמתקבלים מ v' ע"י הוספת 0 ו 1 בתור הביט הראשון בהתאמה, ונסמן ב $w \in \{0,1\}^n$ את הצומת של H_n שמתקבל מ w' ע"י הוספת 1 בתור הביט הראשון. נסמן ב $\overline{p}$ וב $\overline{q}$ את המסלולים ב H_n שמתקבלים מ p ומ q ע"י הוספת 0 ו 1 בתור הביט הראשון בכל צומת בהתאמה. נשים לב ש $\overline{p}$ הוא מסלול המילטון ב $H_{n,0}$ שמתחיל ב u ונגמר ב v_0, וש $\overline{q}$ הוא מסלול המילטון ב $H_{n,1}$ שמתחיל ב v_1 ונגמר ב w. כמו כן, נשים לב ש v_0 ו v_1 הם שכנים ב H_n.

נבנה טיול $\overline{r}$ ב H_n כך: הטיול יתחיל מהצומת u, ילך מ u ל v_0 על המסלול $\overline{p}$, ילך מ v_0 ל v_1 על הקשת ביניהם, ואז ילך מ v_1 ל w על המסלול $\overline{q}$. הטיול $\overline{r}$ הוא מסלול פשוט כי בחלק של $\overline{p}$ הוא עובר בכל צומת לכל היותר פעם אחת (כי $\overline{p}$ הוא מסלול פשוט) ובחלק של $\overline{q}$ הוא עובר בכל צומת לכל היותר פעם אחת (כי $\overline{q}$ הוא מסלול פשוט). המסלול $\overline{r}$ הוא מסלול המילטון ב H_n כי בחלק של $\overline{p}$ הוא עובר בכל הצמתים ב V_0 (בגלל ש $\overline{p}$ הוא מסלול המילטון ב $H_{n,0}$) ובחלק של $\overline{q}$ הוא עובר בכל הצמתים ב V_1 (בגלל ש $\overline{q}$ הוא מסלול המילטון ב $H_{n,1}$), וכי V_0 ו V_1 ביחד מכילות את כל הצמתים של H_n. קיבלנו ש $\overline{r}$ הוא מסלול המילטון ב H_n שמתחיל ב u, כנדרש.