מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 13

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: קומבינטוריקה 2/3.

תרגיל 1. תהיינה A, B קבוצות סופיות כך ש-$|A| = m$ ו-$|B| = n$ ($m \geq n$). חשבו כמה פונקציות על יש מ-A ל-B.

פתרון 1. נפתור את השאלה באמצעות עיקרון ההכלה וההדחה. פונקציה היא על אמ"מ לכל תמונה קיים מקור שממופה אליה. אוסף כל הפונקציות מ-A ל-B הוא בן n^m פונקציות. תחילה בשיטת המשלים - כמה פונקציות לא על קיימות - כלומר קיימת לפחות תמונה אחת שאין מקור הממופה אליה. נפריד לפי מספר המקורות שלא מכוסים:

- תחילה, נספור את כל הפונקציות שהתמונה שלהן לא מכילה איבר אחד לפחות: נבחר איבר $b \in B$ ($\binom{n}{1}$ אפשרויות), ונספור את כל הפונקציות מ-A ל-$B \setminus \{b\}$ - יש $(n-1)^m$ כאלה.
- כעת, נוריד ספירה כפולה ע"י הסרת כל הפונקציות שתמונתן לא מכילה שני איברים לפחות:

$$(-1)\binom{n}{2} \cdot (n-2)^m .$$

- נמשיך בתהליך ונקבל שמספר הפונקציות שאינן על הוא

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-1-r} \binom{n}{r} r^m,$$

ולכן מספר הפונקציות שהן על הוא

$$n^m - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-1-r} \binom{n}{r} r^m = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} r^m.$$

תרגיל 2. נתון חדר ובו $3n$ כדורים צבעוניים ו-n תינוקות (שונים). מצא את מספר הדרכים ניתן לחלק לכל תינוק 3 כדורים בדיוק (אין סדר בין הכדורים של כל תינוק).

פתרון 2. נפתור את השאלה בשתי דרכים:

- נבחר את הכדורים תינוק-תינוק. מספר הדרכים הוא

$$\underbrace{\binom{3n}{3}}_{\text{תינוק } 1} \cdot \underbrace{\binom{3n-3}{3}}_{\text{תינוק } 2} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{תינוק } n}.$$

- נסדר את התינוקות בשורה באופן שרירותי. כעת, נסתכל על כל הסידורים האפשריים של הכדורים בשורה ($(3n)!$ כאלה). עבור כל סידור, נתאים את שלושת הכדורים הראשונים לתינוק הראשון, ה-3 הבאים לשני וכן הלאה. מכיוון שאין סדר בין הכדורים של כל תינוק, נצטרך לחלק בסדר הפנימי לכל שלשה. בסך הכל, מספר הדרכים הוא

$$\frac{(3n)!}{(3!)^n}.$$

תרגיל 3. מצא את מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14,$$

כאשר $0 \leq x_1 \leq 10$, $-2 \leq x_2 \leq 8$ ו-$-5 \leq x_3 \leq 19$.

פתרון 3. תחילה, נגדיר משתנים חדשים ונמיר את השאלה למשתנים אי-שליליים:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 + 2, \quad y_3 = x_3 + 5.$$

$$\implies 0 \leq y_1 \leq 10, \quad 0 \leq y_2 \leq 10, \quad 0 \leq y_3 \leq 24$$

כעת המשוואה היא $y_1 + (y_2 - 2) + (y_3 - 5) = 14$, כלומר

$$y_1 + y_2 + y_3 = 21, \quad 0 \leq y_1 \leq 10, \quad 0 \leq y_2 \leq 10, \quad 0 \leq y_3 \leq 24.$$

נפתור באצמעות הכלה והדחה - נגדיר קבוצות באופן הבא:

- A_1 היא אוסף כל הפתרונות עבורם $y_1 > 10$, A_2 עבור $y_2 > 10$ ו-A_3 עבור $y_3 > 20$.
- העולם $\mathcal{U}$ הוא אוסף כל הפתרונות של $y_1 + y_2 + y_3 = 21$ כאשר $y_1, y_2, y_3 \geq 0$. לכן מספר הפתרונות הוא

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |\mathcal{U}| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)\,.$$

- ראינו בעבר כי $|\mathcal{U}| = \binom{21+3-1}{3-1} = \binom{23}{2}$.
- לא קיים פתרון בו $y_3 > 24$, ולכן $A_3 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. באופן דומה $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
- כעת, נחשב למשל את A_1: אוסף כל הפתרונות של $y_1+y_2+y_3 = 21$ כאשר $y_1 > 10$. הדבר שקול לאוסף כל הפתרונות של

$$z + y_2 + y_3 = 21 - 10 - 1, \quad z, y_2, y_3 \geq 0.$$

מספר הפתרונות של הנ"ל הוא $\binom{(21-10-1)+3-1}{3-1} = \binom{12}{2}$. באופן דומה נקבל ש-$|A_2| = \binom{12}{2}$.

- בסך הכל, מספר הפתרונות של המשוואה הוא

$$\binom{23}{2} - 2 \cdot \binom{12}{2}.$$

תרגיל 4. מצא את מספר הפתרונות הטבעיים של אי-השוויון הבא:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k, \quad \forall 1 \leq i \leq k : x_i \geq 0.$$

פתרון 4. אי השוויון שקול ל-$y = k - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq 0$. לכן, נהפוך את אי-השוויון למשוואה ע"י הוספת המשתנה y:

$$x_1 + \cdots + x_n + y = k, \quad \forall 1 \leq i \leq k : x_i \geq 0, y \geq 0.$$

לכן, מספר הפתרונות של המשוואה הוא

$$\binom{n+k}{n}.$$

תרגיל 5. נתונים n זוגות של אנשים ושולחן עגול בן $2n$ מקומות. נרצה להושיב את הזוגות בשולחן כך שאף אדם לא ישב על יד בן זוגו.

פתרון 5. נפתור את השאלה באמצעות הכלה והדחה.

- יש $(2n-1)!$ סידורים אפשריים של $2n$ האנשים במעגל.
- לכל $1 \leq r \leq n$, נסתכל על מספר הסידורים בהם r זוגות יושבים אחד ליד השני:
  - תחילה, נבחר את r הזוגות: $\binom{n}{r}$.

- נתייחס לכל זוג כאובייקט אחד. נותרנו עם $2n-r$ אובייקטים, ולכן מספר הדרכים לסדר אותם במעגל הוא $(2n-r-1)!$.
- בנוסף, לכל זוג יש $2!$ אפשרויות לסידור הפנימי. בסך הכל,

$$\binom{n}{r}2^r\left(2n-r-1\right)!.$$

- לכן, מספר הסידורים הטובים הוא

$$(2n-1)!-\sum_{r=1}^{n}\left(-1\right)^{r+1}\binom{n}{r}2^r\left(2n-r-1\right)!=\sum_{r=0}^{n}\left(-1\right)^{r}\binom{n}{r}2^r\left(2n-r-1\right)!.$$

משפט 1. (הבינום של ניוטון) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אזי,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

תרגיל 6. הוכיח באופן קומבינטורי ואלגברי כי

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

פתרון 6.
- הוכחה קומבינטורית: נגדיר את הבעיה הבאה: נתונים n גברים ו-n נשים, ונרצה לבחור קבוצה של n אנשים מתוכם.
  - מצד אחד, ברור כי התשובה היא $\binom{2n}{n}$.
  - מצד שני - נפריד למקרים לפי מספר הנשים שנבחרו: אם נבחרו k נשים, נצטרך לבחור k גברים שלא ייבחרו לקבוצה, ושאר הגברים ילכו לקבוצה. לכן יש $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$ דרכים, ובסך הכל

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

- הוכחה אלגברית: מהבינום של ניוטון נקבל ש-

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

ולכן

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=(1+x)^{2n}=((1+x)^n)^2=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i.$$

נחשב את המקדם של x^n בשני האגפים: באגף שמאל המקדם הוא $\binom{2n}{n}$. באגף ימין, המקדם נסכם מ-x^k ו-x^{n-k} עבור k כלשהו. לכן המקדם הוא

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

משפט 2. (זהות פסקל)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

תרגיל 7. הוכיח באופן קומבינטורי ואלגברי כי

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}.$$

פתרון 7.

- הוכחה קומבינטורית: סידור $m+1$ 0-ים ו-n 1-ים בשורה.
  - מצד אחד, ברור שהפתרון הוא $\binom{m+n+1}{n}$.
  - מצד שני: לכל סידור, נסתכל על ה-0 הימני ביותר בו. משמאל ל-0 נמצאים $0\le k\le n$ 1-ים ו-m 0-ים, ומימין לו רק 1-ים. לכן, נותר לרצף את k ה-1-ים ו-m ה-0-ים: $\binom{m+k}{k}$ דרכים. בסך הכל נקבל

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}.$$

- הוכחה אלגברית - באינדוקציה על n:
  - עבור $n=0$ נקבל $\binom{m+0}{0}=1=\binom{m+1}{0}$ והשוויון מתקיים.
  - נניח את נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור $n+1$: נניח שמתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}.$$

כעת,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}+\binom{m+n+1}{n+1}\\ \text{(הנחת האינדוקציה)} &= \binom{m+n+1}{n}+\binom{m+n+1}{n+1}\\ \text{(זהות פסקל)} &= \binom{m+n+2}{n+1}\\ &= \binom{m+(n+1)+1}{(n+1)},\end{aligned}$$

והוכחנו את הטענה עבור $n+1$.

תרגיל 8. הוכח כי מספר הזוגות של קבוצות A, B כך ש-$A \subseteq B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ הוא 3^n.

פתרון 8. נסתכל על מספר הזוגות הסדורים הנ"ל כאשר $|B| = k$.

- תחילה, נבחר k איברים ל-B: $\binom{n}{k}$ דרכים.
- כעת, A יכולה להיות כל תת-קבוצה של B: יש 2^k אפשרויות.

בסך הכל, מספר האפשרויות הוא

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k \cdot 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$