מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 7

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: עוצמות 1/2.

עוצמות

הגדרה 1. תהיינה A, B קבוצות. נאמר ש-A שוות עוצמה ל-B, ונסמן $|A| = |B|$ או $A \sim B$, אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B.

עבור הקבוצה האוניברסלית U, יחס שוויון העוצמות מעל $\mathcal{P}(U)$ הוא יחס שקילות.

תהיינה A, B קבוצות.

1. אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז $|A| \leq |B|$.
2. A היא בת מניה אמ"מ היא סופית, או ש-$|A| = |\mathbb{N}^{+}|$.

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו: תהיינה A, B קבוצות שוות עוצמה, אזי $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

פתרון 1. נתון כי $|A| = |B|$, ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$. נגדיר פונקציה $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ באופן הבא:

$$\forall X \in \mathcal{P}(A) : g(X) = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

נראה כי g חח"ע ועל:

- g חח"ע: בתרגול 6 הוכחנו את הטענה: "אם f חח"ע אז לכל $S, T \subseteq A$ שמקיימות $f(S) = f(T)$ מתקיים $S = T$". לכן לכל $S, T \in \mathcal{P}(A)$ שמקיימות $g(S) = f(S) = f(T) = g(T)$ מתקיים $S = T$.
- g על: תהי $T \in \mathcal{P}(B)$. מכיוון ש-f על, לכל $t \in T \subseteq B$ קיים $a \in A$ כך ש-$f(a) = t$. נגדיר

$$S = \{a \in A \mid \exists t \in T : f(a) = t\} = \{a \in A \mid f(a) \in T\},$$

ונקבל ש-$g(S) = \{f(s) \mid s \in S\} = \{t \mid t \in T\} = T$.

מכאן g חח"ע ועל, ולכן היא הפיכה ומתקיים $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

תרגיל 2. הוכיחו כי $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$.

פתרון 2. נגדיר 3 פונקציות, $g_1 : (0,1) \to (0,\pi)$, $g_2 : (0,\pi) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ו-: g_3 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\begin{array}{c} g_1(x) = \pi \cdot x \\ g_2(x) = x - \frac{\pi}{2} \\ g_3(x) = \tan(x) \end{array}.$$

שלוש הפונקציות הן הפיכות: הפונקציות ההופכיות שלהן הן $g_1^{-1} : (0,\pi) \to (0,1)$, $g_2^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,\pi)$ ו-$g_3^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, כך ש-

$$\begin{array}{c} g_1^{-1}(x) = \frac{x}{\pi} \\ g_2^{-1}(x) = x + \frac{\pi}{2} \\ g_3^{-1}(x) = \arctan(x) \end{array}.$$

לכן הפונקציה $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1 : (0,1) \to \mathbb{R}$ היא הפיכה (הרכבה של פונקציות הפיכות). לכן קיימת פונקציה הפיכה מ-$(0,1)$ ל-$\mathbb{R}$ ומתקיים $|(0,1)| = |\mathbb{R}| = \aleph$.

תרגיל 3. תהי $X = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S \text{ סופית}\}$. מהי $|X|$?

פתרון 3. $|X| = \aleph_0$. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to X$ באופן הבא: ניתן לייצג כל מספר טבעי באופן יחיד באמצעות סכום סופי של חזקות שונות של 2 - זהו הייצוג הבינארי של מספרים טבעיים. למשל,

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0.$$

תוכיחו בתרגיל הבית ניתן לייצג כל מספר טבעי באופן יחיד. כעת נגדיר $f : \mathbb{N} \to X$ באופן הבא: לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן את הייצוג הבינארי שלו ב-$X_n = (x_i)_{i=0}^r$, כך ש-$x_i \in \{0,1\}$ לכל i, $x_r \neq 0$ וגם

$$n = x_0 + 2x_1 + 2^2 x_2 + \cdots + 2^r x_r = \sum_{i=0}^{r} 2^r x_r.$$

אזי נגדיר

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \{i \in \mathbb{N} : x_i = 1\},$$

כלומר אוסף כל החזקות שנסכמות בייצוג הבינארי של n. יהיו $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$. אזי בה"כ קיים $j \in \mathbb{N}$ כך ש-2^j נסכמת בייצוג הבינארי של n_1 ולא בשל n_2, ולכן $j \in f(n_1) \setminus f(n_2)$ ומתקיים $f(n_1) \neq f(n_2)$. לכן f חח"ע. תהי $S \subseteq \mathbb{N}$. נגדיר $n = \sum_{i \in S} 2^i$ ונקבל מהגדרת f ש-$f(n) = S$ - לכן f על. בסך הכל, הוכחנו כי קיימת פונקציה חח"ע ועל (ולכן הפיכה) מ-$\mathbb{N}$ ל-X, וכך $|X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

תרגיל 4. תהי $Y = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S \text{ אינסופית}\}$. מהי $|Y|$?

פתרון 4. מכיוון ש-$Y \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ מתקיים $\aleph_0 \leq |Y| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph$, ולכן $|Y| \in \{\aleph_0, \aleph\}$. נניח בשלילה כי $|Y| = \aleph_0$. נשים לב שעבור X מהתרגיל הקודם מתקיים $X \cup Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נניח בשלילה כי $|Y| = \aleph_0$, אזי ממשפט מתקיים $|X \cup Y| = \aleph_0$ ולכן $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_0$ - סתירה! מכאן מתקיים $|Y| = \aleph$.

תרגיל 5. תהיינה A, B קבוצות כך ש-$|A| = |B|$ ותהי $f : A \to B$ פונקציה. אזי, אם f על אז f חח"ע. ענו על השאלה עבור:

1. A, B סופיות.
2. A, B אינסופיות.

פתרון 5. **1.** A, B סופיות. הוכחה: נניח ש-f לא חח"ע, כלומר קיימים $a \neq b \in A$ כך ש-$f(a) = y = f(b)$. אזי, מכיוון ש-A סופית מתקיים

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}(f)| &= |f(A)| \\ &= |f(A \setminus \{a,b\}) \cup f(\{a,b\})| \\ &= |f(A \setminus \{a,b\})| + |\{y\}| \leq |A| - 1 \\ &< |A| = |B|,\end{aligned}$$

ולכן f לא על (הוכחנו את הקונטרפוזיטיב).

2. A, B אינסופיות. הטענה לא נכונה: נגדיר $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (עוצמות התחום והטווח שוות) כך שלכל $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מתקיים $f(a,b) = a$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n,0) = n$ ולכן f על, אבל f לא חח"ע: עבור $(1,0) \neq (1,1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מתקיים $f(1,0) = f(1,1)$.