מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 1

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: לוגיקה.

לוגיקה

הגדרה 1. טענה היא אמירה בעלת ערך אמת: נכונה (נסמן ב-T) או שקרית (נסמן ב-F).

דוגמה 1.

- האמירה "לא יורד גשם בימי חמישי" היא טענה.
- האמירה $a > b$ היא לא טענה.

קשרים לוגיים

1. הקשר $\vee$ ("או").

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

2. הקשר $\wedge$ ("וגם").

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

3. הקשר $\neg$ ("לא" - שלילה).

A	$\neg A$
F	T
T	F

4. הקשר $\rightarrow$ ("אם ... אז ..." - גרירה לוגית).

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

עבור טענות A, B, נסמן ב-$A \leftrightarrow B$ גרירה דו-כיוונית (אם ורק אם), והדבר שקול ל-

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\,.$$

הגדרה 2. שתי טענות A, B הן שקולות לוגית אם יש להן טבלאות אמת זהות. במקרה זה, נסמן

$$A \equiv B.$$

תרגיל 1. האם שתי הטענות הבאות שקולות לוגית?

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.
2. $(q \rightarrow p) \vee (\neg q \wedge \neg p)$.

פתרון 1. נבנה טבלת אמת עבור שתי הטענות, ונבדוק שקילות:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$q \rightarrow p$	$\neg q \wedge \neg p$	$(q \rightarrow p) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F	T	T	F	T
T	T	T	F	F	T	T	T	F	T

נשים לב שיש שוני בין שתי העמודות, ולכן הטענות לא שקולות לוגית.

הגדרה 3.

1. פסוק הוא טאוטולוגיה אם הוא נכון לכל השמה.

2. פסוק הוא פסוק שקר אם הוא לא נכון לכל השמה.

דוגמה 2. הפסוק $p \vee \neg p$ הוא טאוטולוגיה, והפסוק $p \wedge \neg p$ הוא פסוק שקר:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
F	T	T	F
T	F	T	F

מספר תכונות:

1. אסוציאטיביות (קיבוץ):

   (א) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.

   (ב) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.

2. דיסטריביוטיביות (פילוג):

   (א) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

   (ב) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

3. כללי דה-מורגן:

   (א) $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

   (ב) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

תרגיל 2.

1. הביעו את הקשר $\wedge$ באמצעות $\neg, \vee$ בלבד.
2. הביעו את הקשר $\vee$ באמצעות $\neg, \vee$ בלבד.
3. הביעו את הקשר $\rightarrow$ באמצעות $\neg, \vee$ בלבד.
4. הביעו את הקשר $\rightarrow$ באמצעות $\neg, \wedge$ בלבד.
5. הביעו את הקשר $\wedge$ באמצעות $\neg, \rightarrow$ בלבד.
6. הביעו את הקשר $\vee$ באמצעות $\neg, \rightarrow$ בלבד.

פתרון 2.

1. נשתמש בדה-מורגן ונקבל

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \implies p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q).$$

2. נשתמש בדה-מורגן ונקבל

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \implies p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

3. לפי טבלת האמת של $\rightarrow$, $p \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ אמ"מ (אם ורק אם) $p \equiv \mathrm{F}$, או ש-$q \equiv \mathrm{T}$. לכן

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

4. $p \rightarrow q \equiv \mathrm{F}$ אמ"מ $p \equiv \mathrm{T}$ וגם $q \equiv \mathrm{F}$. לכן,

$$p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q).$$

5. ניעזר בסעיף הקודם: $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, ולכן

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q).$$

6. ניעזר בסעיף הקודם: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, ולכן

$$p \vee q \equiv (\neg p) \rightarrow q.$$

תרגיל 3. נגדיר קשר חדש $\uparrow$, עם טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

1. הביעו את $p \uparrow q$ באמצעות $\neg, \vee$, ובאמצעות $\neg, \wedge$.
2. הוכיחו כי ניתן לבטא כל פסוק באמצעות $\uparrow$ בלבד.

פתרון 3.

1. נשים לב ש-$\mathrm{F} \equiv p \uparrow q$ אמ"מ $p \equiv \mathrm{T}$ וגם $q \equiv \mathrm{T}$, כלומר אמ"מ $p \wedge q \equiv \mathrm{T}$. לכן,

$$p \uparrow q \equiv \neg (p \wedge q) .$$

נשתמש בדה-מורגן כדי לבטא את $\uparrow$ באמצעות $\neg, \vee$:

$$p \uparrow q \equiv \neg (p \wedge q) \equiv \neg (\neg (\neg p \vee \neg q)) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

2. ראינו מדה-מורגן כי ניתן לבטא את $\vee$ באמצעות $\neg, \wedge$. לכן, מספיק להוכיח שניתן לבטא את $\neg, \wedge$ באמצעות $\uparrow$. נסתכל על טבלת האמת הבאה:

p	$p \uparrow p$
F	T
T	F

לכן, $p \uparrow p \equiv \neg p$ וניתן להביע את $\neg$ עם $\uparrow$. בנוסף, ראינו כי $p \uparrow q \equiv \neg (p \wedge q)$, ולכן

$$p \wedge q \equiv \neg (p \uparrow q) ,$$

וניתן להביע את $\wedge$ עם $\uparrow$.

הגדרה 4. פרדיקט הוא אמירה שמכילה משתנים, שמקבלת ערך אמת לכל הצבה של המשתנים.

הערה 1. נסמן את הפרדיקט באות לעז, ובסוגריים את משתני הפרדיקט. למשל:

- נסמן ב-$P(x)$ את הפרדיקט "$x > 5$".
- נסמן ב-$P(x,y)$ את הפרדיקט "$x = y$".

תרגיל 4. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בשפה מתמטית ואת שלילתה ללא הקשר $\neg$. בנוסף, קבעו את נכונות הטענות.

1. כל מספר ממשי שהוא ריבוע שלם הוא זוגי.
2. קיימים ממשיים x, y כך ש-$x^2 + y^2 = 1$ ו-$x = y + 1$.
3. יש מספר טבעי שמתחלק ב-5.
4. לכל ראשוני p קיים ממשי r כך ש-$p + r$ פריק.
5. לכל רציונלי α קיימים $x, y \in \mathbb{Q}$ כך ש-$\alpha = x/y$.
6. לכל ממשי x קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x > y$.
7. קיים $x \in \mathbb{R}$ כך שלכל טבעי y מתקיים $x > y$.

8. לכל $q \in \mathbb{Q}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$q = n$.

פתרון 4.

1. הפרדיקט "x ריבוע שלם" הוא $S(x) = \exists y \in \mathbb{N} : x = y^2$, ו-"$x$ זוגי" הוא $E(x) = \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y$. הטענה היא $\forall x \in \mathbb{R} : S(x) \to E(x)$, כלומר

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(\left(\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\right) \to (\exists y \in \mathbb{N} : x = 2y)\right),$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists x \in \mathbb{R} : \left(\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\right) \wedge (\forall y \in \mathbb{N} : x \neq 2y).$$

הטענה אינה נכונה.

2. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : \left(x^2 + y^2 = 1\right) \wedge (x = y + 1),$$

ושלילת הטענה היא (נשתמש בדה-מורגן)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \left(x^2 + y^2 \neq 1\right) \vee (x \neq y + 1).$$

הטענה נכונה: עבור $x = 1, y = 0$ מתקיים $(x^2 + y^2 = 1) \wedge (x = y + 1)$.

3. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\exists n \in \mathbb{N} \, (\exists k \in \mathbb{N} : n = 5k),$$

ושלילת הטענה היא

$$\forall n \in \mathbb{N} \, (\forall k \in \mathbb{N} : n \neq 5k).$$

הטענה נכונה.

4. תהי P קבוצת המספרים הראשוניים. אזי, הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\forall p \in P \exists r \in \mathbb{R} : (p + r) \notin P,$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists p \in P \forall r \in \mathbb{R} : (p + r) \in P.$$

הטענה נכונה: לכל ראשוני p, נבחר $r = 4 - p \in \mathbb{R}$ ונקבל ש-$p + r = 4 \notin P$.

5. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q} \exists x, y \in \mathbb{Q} : \alpha = x/y,$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists \alpha \in \mathbb{Q} \forall x, y \in \mathbb{Q} : \alpha \neq x/y.$$

הטענה נכונה.

6. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y,$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y.$$

הטענה אינה נכונה.

7. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : x > y,$$

ושלילת הטענה היא

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y.$$

הטענה אינה נכונה.

8. הטענה בניסוח מתמטי היא

$$\forall q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : n = q,$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists q \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N} : n \neq q.$$

הטענה אינה נכונה.