מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 14

תזכורת:- בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים ל-t תאים? $(k \le t)$

	כדורים שונים	כדורים זהים
בכל תא יש מקום לכדור אחד בלבד	$\frac{t!}{(t-k)!}$	$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!\cdot(t-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	t^k	$\binom{k+t-1}{k} = \binom{k+t-1}{t-1}$

תרגיל:- בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו-n כדורים צבעוניים באופן הבא:-

א) ל-$3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא.

ב) ל-$3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא.

ג) ל-n תאים, כדור לבן אחד לפחות בכל תא.

פתרון:- א) נשים את הצבעוניים ב-n תאים. לשם כך יש לנו $\frac{(3n)!}{(3n-n)!}$
כלומר $\frac{(3n)!}{(2n)!}$ אפשרויות. אחר כך נשים כל כדור לבן בתא אחד
ממה שנשאר לנו. לכך יש אפשרות אחת לעשות זאת. סה"כ יש לנו
$\frac{(3n)!}{(2n)!}$ אפשרויות לשים כדור אחד בכל תא.

ב) נבחר מתוך $3n$ התאים $2n$ תאים לשים את הכדורים הלבנים.
לשם כך יש $\binom{3n}{2n}$ אפשרויות. אחר כך לכל כדור צבעוני (יש n כאלה)
יש $3n$ תאים שונים לשים את הכדור הצבעוני. כלומר לכדורים

הצבעוניים יש $(3n)^n$ אפשרויות לשים אותם ב- $3n$ תאים (ללא הגבלה על מספר הכדורים בכל תא).

סה"כ $(3n)^n \cdot \binom{3n}{2n}$ אפשרויות.

ג) נשים כדור לבן אחד בכל תא ואז נחלק את השאר (n לבנים ו-n צבעוניים) ללא שום הגבלה.

$$\underbrace{n^n}_{\text{לצבעוניים}} \cdot \underbrace{\binom{n+n-1}{n-1}}_{\text{ללבנים}} = n^n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$

תרגיל:- הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ בדרך קומבינטורית ואלגברית.

פתרון:- נזכור ש- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. לכן, זה שקול להוכיח

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

פתרון קומבינטורי:- נתבונן בבעיה הבאה:-

כמה אפשרויות יש לבחור n אנשים מתוך קבוצה שכוללת n נשים ו- n גברים?

מצד אחד, ברור שהתשובה היא $\binom{2n}{n}$ שזה אגף ימין.

מצד שני, נבחר $0 \le k \le n$ נשים מתוך כל הנשים שיש. כלומר $\binom{n}{k}$ ואז נבחר מתוך הגברים $n-k$ (הקבוצה המשלימה ל-n). לשם כך יש $\binom{n}{n-k}$ אפשרויות. סה"כ אם נסכם על פני כל ה-k-ים האפשריים נקבל

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

פתרון אלגברי :- נזכיר את הבינום של ניוטון $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$.
בפרט, אם נציב $a=1$ ו- $b=x$ נקבל :-

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

כעת :

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j = (1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \cdot x^l\right)$$

נמצא את המקדם של x^n בשני האגפים.
באגף שמאל ברור שהמקדם של x^n הוא $\binom{2n}{n}$ (כאשר $j=n$).

באגף ימין המקדם הוא :- כנגד הביטוי $\binom{n}{k} x^k$ מהסוגריים השמאליים יש לצרף את הביטוי $\binom{n}{n-k} x^{n-k}$ מהסוגריים הימניים כדי לקבל את החזקה המבוקשת שהיא n. לאחר כינוס איברים דומים נקבל שהמקדם של x^n באגף ימין הוא $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. ולכן בגלל ששני הפולינומים שווים אז המקדמים של כל חזקה בשני הביטויים שווים. כלומר

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

תזכורת :- זהות פסקל $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

תרגיל :- הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את השוויון הבא :-
לכל $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$ כאשר $m \in \mathbb{N}^+$.

פתרון :- אלגברי :- נוכיח באינדוקציה על n :-
$n=0$:- אגף ימין שווה ל- $1 = \binom{m+1}{0}$. אגף שמאל שווה ל- $1 = \binom{m+0}{0}$

לכן עבור $n=0$ נקבל שוויון.

נניח שהטענה נכונה עבור n מסוים כלומר מניחים ש-

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$$

ונוכיח עבור $n+1$. כלומר נוכיח ש-

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+2}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}$$

$$\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}\binom{m+n+1}{n+1}+\binom{m+n+1}{n}\underset{\text{פסקל}}{=}\binom{m+n+2}{n+1}$$

פתרון קומבינטורי:- נניח שיש לנו $m+1$ אפסים ו- n אחדים ורוצים לסדר אותם בשורה. מצד אחד, ברור שמספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{m+n+1}{n}$ (בוחרים את n המקומות של האחדים).

כעת, נבחן את אגף שמאל. בכל סידור אפשרי, נסתכל ה-0 הכי ימני בשורה. כיוון שיש $m+1$ אפסים אז משמאל לאפס הזה ישנם m אפסים. כעת, אם נחליט לשים k אחדים ($0\le k\le n$) משמאל לאפס הכי ימני, אז יישאר לנו לקבוע את המקומות של k האחדים האלו מתוך $m+k$ המקומות שיש משמאל ל-0 הכי ימני. לכן אם נסכם על פני כל ה-k-ים האפשריים נקבל בדיוק $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}$.

תרגיל :- הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את השוויון הבא:-

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$$

פתרון :- אלגברי :- נשים לב $(k+1)\,k! = k\cdot k! + k!$ לכן $k\cdot k! = (k+1)! - k!$

נציב בסכום ונקבל :-

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)! - k!\right]$$

$$= \left(\cancel{1!} - 0!\right) + \left(\cancel{2!} - \cancel{1!}\right) + \left(\cancel{3!} - \cancel{2!}\right) + \dots + \left((n+1)! - \cancel{n!}\right)$$

$$= (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

לתופעה כזו קוראים טור (סכום) טלסקופי.

פתרון קומבינטורי :- נרצה לספור כמה תמורות על קבוצה בת $n+1$ איברים

נאמר $A = \{1,2,\dots,n+1\}$ ש: כך שלפחות אחד האיברים לא עובר לעצמו.

<u>המשך בתרגול הבא</u>