תכנון וניתוח אלגוריתמים

דף עזר למבחן

תזכורת: אתה נמצא ב**מבחן סוף** בקורס **מבוא לחמרה** עם המרצה **ארז גרליץ**.

חלק I

חומרים לרענון כשאין כיוון

הפרד ומשול ותכנות דינמי

תתי בעיות קטנות קטנות קטנות פיציות. בתכנות דינמי - יחס סדר חלקי בין תתי הבעיות.

- מציאת חציון בזמן לינארי.
- אלגוריתם שמבוסס על LIS.
- לעשות רדוקציה ולהפעיל ת"ס רציפה מקס' או בסגנון.
- על גרפים: להגדיר יחס סדר חלקי (לפי מיון טופולוגי, מרחק מהמקור וכיו"ב) ולפתור את תתי הבעיות לפי סדר זה.
- תפיסת דובדבנים.

גרפים

צמצום קשתות, BFS, DFS, מיון טופולוגי, רכיבי קשירות חזקה (להפוך ל-DAG).

מסילות קצרות ביותר

שם	מקור/יעד	מגבלות	סיבוכיות
דייקסטרה	s-כולם	$w \geq 0$	$(E+V)\log V$
בלמן פורד	s-לכולם	אין	VE
ג'והנסון	כולם-כולם	אין	$VE+V^2\log V$

עץ פורש מינימלי

שלושת האלגוריתמים בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$.

- פרים.
  - בחר קודקוד כלשהו u, ומצא הקשת המינימלית $e=(u,v)$ שלו.
  - אחד את u,v לסופר-קודקוד, וחזור על התהליך עם הסופר-קודקוד.
- קרוקסל (משתמשים בUnion Find).
  - עבור על הקשתות באופן ממוין.
  - הוספת כל קשת שלא סוגרת מעגל.
- בורובקה.
  - בחר מכל צומת קשת מינימלית.
  - אחד כל שני קודקודים עם קשת מינ' ביניהם, וכווץ את הגרף.
  - הפעל רקורסיבית על הגרף המכווץ.

הערה. בבורובקה מספר הצמתים קטן פי 2 בכל פעם, לכן בגרפים בהם יש יחס קבוע בין $|V|$ ו-$|E|$ בכל כיווץ (בפרט גרפים מישוריים) יעבוד ב-$\mathcal{O}\left(|V|\right)$.

- יצירת מעגל מהעץ הפורש ע"י מעבר על כל הקשתות פעמיים.
- בעץ ה-DFS כל מעגל מיוצג על ידי קשת אחורית.

נסה כי למה לא:

- שנה את הגרף (משקלים, הוספת צמתים מיוחדים) והפעל אלגוריתם ידוע.
- עצים: השרש את העץ / טפל בכל פעם בעלים.
- פצל לגרפים לפי הסוגים השונים של הקשתות.
- שכפל את הגרף וקשתות רק בין שני הצדדים (מסילה מתחלפת).

זרימה

לכל חתך $S-T$ מתקיים:

$$|f| = f\left(S,T\right) = \sum_{e:S\to T} f\left(e\right) - \sum_{e:T\to S} f\left(e\right)$$

להסתכל על הגרף השיורי.

$$maxflow = mincut = |M_{OPT}|$$

מציאת $mincut$ בהינתן $maxflow$:

1. נסתכל על הגרף השיורי, ועל כל הצמתים ש-s יכול להגיע אליהם בו.
2. כל הקשתות (ברשת המקורית) מקבוצה זו לצמתים ש-s לא יכול להגיע אליהם מרכיבות את החתך המינימלי.

- פורד פלקרסון - לשפר לשפר לשפר.
- אגמונדס קארפ - לשפר בכל פעם את הקצרה ביותר.
- דייניץ - לשפר בכל פעם את כל הקצרות ביותר (אגמודנס קארפ אבל יותר חמוד).

הערה. כאשר קיבולות כל הקשתות הן 1 ניתן פשוט להריץ FF ב-$\mathcal{O}\left(VE\right)$.

זיווג מקסימלי בגרף דו צדדי

- נחבר צומת s לצד אחד, וצומת t לצד השני עם קיבולות 1.
- נמצא זרימה מקסימלית - כל הצלעות בין שני הצדדים שהזרימה בהן היא 1.

קבוצה ב"ת מקסימלית בגרף דו צדדי

$$|M_{OPT}|+|MaxInd|=|V(G)|$$

בחתך המינימלי אין קשתות שקיבולתן ∞, $|MaxInd|=A'+B''$ ו-$|mincut|=A''+B'$.

- זרימה מהקשתות לקודקודים.
- תמונה שחור-לבן.

כללי

- כיצד נראה הפתרון האופטימלי?
- גישה חמדנית.
- הגדרת פונקציית פוטנציאל.
- מציאת מנצח בבחירות ב-$\mathcal{O}(n)$ של גדי.
- הגדרת פונקציית מטרה והגעה לאופטימום שלה.
- אלגוריתם KMP: בהינתן טקסט T ומחרוזת W, מצא את כל ההופעות הרציפות של W ב-T בזמן לינארי.
- אם נראה שצריך FFT - להכפיל פולינומים / מספרים וכו' ב-$\mathcal{O}(n\log n)$, במקום בנאיבי $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.
- חיפוש בינארי על האורך.
- אם דרישת הסיבוכיות היא $o\left(n^3\right)$ - כפל מטריצות.
- רדוקציה מ-3 מימדים ל-2 מימדים.

חלק II

שאלות לדוגמא

מסילה צבעונית

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם קשתות שחורות ולבנות $E=E_W\sqcup E_B$ ומשקלים אי שליליים. בהינתן צמתים s,t, מצא את המסילה הקצרה ביותר $s\rightsquigarrow t$ שמכילה קשתות בשני הצבעים.

פתרון. נפצל את הגרף וניעזר בדייקסטרה.

נגדיר $G_W=(V,E_W)\,,G_B=(V,E_B)$, ונניח בה"כ כי המסילה $s\rightsquigarrow t$ מתחילה בקשת שחורה.

אזי, המסילה $s\rightsquigarrow t$ נראית כך:

$$s\underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{קשתות שחורות בלבד}}u\underbrace{\rightarrow}_{\text{קשת לבנה}}v\underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{ללא הגבלה}}t$$

נרצה למצוא את המסילה המינימלית מצורה זו. נריץ דייקסטרה על G_B מ-s, ועל $\overline{G}$ הגרף ההפוך מ-t. המסילה המינימלית שמתחילה מקשת שחורה תהיה:

$$P_B=\min_{u\to v\in E_W}\left\{d_B(s,u)+w_{u\to v}+\overline{d}(t,v)\right\}$$

לאחר הרצת דייקסטרה נוכל לחשב עבור כל קשת $u\to v\in E_W$ את עלות המסילה בזמן קבוע, כלומר נוכל למצוא את המסילה המינימלית ב-$\mathcal{O}((E+V)\log V)$.

באופן סימטרי נפתור את הבעיה עבור מסילה שמתחילה בקשת לבנה, P_E.

לבסוף, נחזיר את המינימלית מבין P_B ו-P_E.

הכללה

עבור מספר גדול יותר של צמתים, ניתן להשתמש בטכניקה הבאה (דוגמא - RGB).

- שכפל 3 עותקים נוספים של הגרף (4 בסך הכל): $G_{GB}=(V,E\setminus E_R)$, $G_{RB}=(V,E\setminus E_G)$ ו-$G_{RG}=(V,E\setminus G_B)$.
- צור סופר-גרף באופן הבא (פרמוטציה אחת מתוך 6):
  - חבר את הקשתות האדומות מ-G_{GB} אל G_{RB}.
  - חבר את הקשתות הירוקות מ-G_{RB} אל G_{RG}.
  - חבר את הקשתות הכחולות מ-G_{RG} אל G.
- הרץ דייקסטרה על הסופר-גרף, וקיבלנו מסילה קצרה ביותר שמכילה קשתות מכל הצבעים (עם סדר קבוע של גילוי הקשתות).
- יש $3!=6$ סידורים שונים של הסופר-גרף: הרץ דייקסטרה על כל אחד מהם, והחזר את המינימלי.

כך, מקבלים בסיבוכיות של דייסקטרה את המסילה המינימלית שמכילה את כל הצבעים.

סכומים שלמים של מטריצה

בהינתן מטריצה $n\times n$ כך שסכום כל שורה וכל עמודה הוא מספר שלם (המספרים בכל תא לא חייבים להיות שלמים), יש להחליף כל מספר במספר שלם (העיגול שלו מעלה/מטה) כך שהסכומים בכל שורה ובכל עמודה יישמרו.

פתרון. נמיר את הבעיה לקטע $[0,1]$, ונבנה רשת זרימה כך שכל איבר במטריצה הוא קודקוד.

מ-s יהיו מחוברים קודקודי השורות r_i עם קיבולת סכום השורה, ומהקודקוד r_i קשתות עם קיבולות 1 לכל קודקודי השורה.

מכל קודקוד העמודה ה-j תהיה קשת לקודקוד c_j עם קיבולת 1.

כל ה-c_jים מחוברים ל-t עם קיבולות c_j.

נמצא זרימה מקסימלית - אם כל הקשתות מ-s ל-r_i ומ-c_j ל-t רוויות מצאנו פתרון חוקי, ואחרת אין פתרון.

מציאת MST של G בהינתן MST של $G\setminus\{v\}$ בזמן לינארי

פתרון. תחילה, כל הקשתות הרעות ב-$G\setminus\{v\}$ עדיין יישארו רעות - הן מקסימליות במעגל והתנאי הזה לא משתנה.

לכן, נוכל להסתכל רק על הקשתות של v וה-MST של $G\setminus\{v\}$. קיבלנו גרף בו $|E|\le 2|V|$.

נריץ בורובקה ונסתכל על הגרף לאחר כל צמצום: העץ נשאר עץ, וכל הצמתים ש-v יתחבר אליהם הופכים לסופר-קודקוד החיצוני, וכך נשארו עם יחס לינארי קבוע בין $|E|$ ו-$|V|$.

לכן, כאשר נריץ בורובקה על הקשתות שבחרנו נקבל זמן ריצה לינארי.

מחרוזות עם מרחק Hamming מינימלי

יהיו $\{s_i\}_1^n$ מחרוזות בינאריות באורך n. המטרה: מציאת זוג מחרוזות s_i, s_j ($i \neq j$) כך שמרחק ההאמינג ביניהם מינימלי אפשרי, בסיבוכיות $o\left(n^3\right)$.

פתרון. נפתור את הבעיה באמצעות כפל מטריצות.
נגדיר מטריצה M כך:

$$M\left[i\right]\left[j\right] = \begin{cases} 1 & s_i\left[j\right] = 1 \\ -1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נסתכל על המכפלה $M \times M^T$: התא ה-(i,j) מכיל את מספר ההסכמות של s_i, s_j פחות מספר אי ההסכמות.
בנוסף, ידוע כי מספר ההסכמות ועוד מספר אי ההסכמות הוא n (אורך המחרוזות).
נפתור את מערכת המשוואות, וכך נקבל עבור כל זוג מחרוזות את מספר ההסכמות ביניהם ואת זוג המחרוזות בעל מספר הסכמות מירבי - כלומר מרחק האמינג מינימלי.
ראינו כי ניתן להכפיל מטריצות ב-$o\left(n^3\right)$, ושאר הפעולות ב-$\mathcal{O}\left(n^2\right)$. כלומר, בסך הכל $o\left(n^3\right)$ עבודה.

תת-מלבן רציף עם סכום מינימלי

יהי Q ריבוע $n \times n$, בו בכל משבצת מספר חיובי או שלילי. מצא בזמן $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ תת מלבן רציף של Q בעל סכום ערכים מינימלי אפשרי.

פתרון. נבצע רדוקציה לבעיית מציאת ת"ס רציפה בעל סכום מינימלי.
נסתכל על העמודות i, j ב-Q. נסכום כל שורה, ונקבל מערך.
נמצא במערך זה את תת הסדרה הרציפה בעלת סכום מינימלי בזמן לינארי: גבולות תת הסדרה הן השורות שמגדירות את המלבן המינימלי בין העמודות i, j.
נעבור על כל זוג $i < j$ ($\mathcal{O}\left(n^2\right)$ אפשרויות) ומכל זוג נמצא את המלבן בעל סכום מינימלי, וכך נקבל את תת המלבן הרציף בעל סכום מינימלי בכל Q.

- מציאת ת"ס רציפה בעלת סכום מקסימלי (שקול עבור מינימלי): תכנות דינמי - P_i ייצג את סכום הת"ס רציפה בעלת סכום מקסימלי שמסתיימת באיבר ה-i.

$$P_i = a_i + \max\left\{0, P_{i-1}\right\}$$

שאלת 132

בהינתן סדרת איברים $\{a_i\}_1^n$, מצא שלושה אינדקסים $i < j < k$ כך ש-$a_i < a_j > a_k$ בזמן לינארי.

פתרון. ניעזר במחסנית.
תחילה, ניצור מערך $prev$, בו $prev\left[i\right]$ יכיל את המינימום ב-$A\left[0 \ldots i\right]$, אם המינימום הוא $A\left[i\right]$ בעצמו $prev\left[i\right] = -1$.
כעת, נאתחל מחסנית ריקה ונעבור על המערך בסדר הפוך $i = n \ldots 1$:
כל עוד המחסנית לא ריקה וראש המחסנית גדול או שווה מ-$prev\left[i\right]$, הוצא מהמחסנית את ראשה.
כעת, אם המחסנית לא ריקה וגם ראש המחסנית קטן מ-$A\left[i\right]$, מצאנו סדרה 132: $prev\left[i\right]$ הקטן ביותר ו-$A\left[i\right]$ הגדול ביותר.

נו השאלה הזאת עם $i < j$ וגם $M_j \geq M_i$

נתון מערך $M\left[1 \ldots n\right]$, מצא שני אינדקסים $j > i$ כך ש-$j - i$ מקסימלי וגם $M\left[i\right] < M\left[j\right]$ בזמן לינארי.

פתרון. נתחזק שני מערכים: מקסימום סיפות ומינימום רישות.
שני המערכים הם ממויינים - נאתחל שני מצביעים לתחילת המערכים.
כל עוד המצביעים לא הגיעו לסוף המערך:

- קדם את המצביע למקסימום כל עוד הוא גדול מהמינימום.
- כאשר המקסימום נהיה קטן מהמינימום, שמור את האורך הנוכחי (ההפרש בין שני האינדקסים), קדם את המינימום וחזור לשלב הקודם.