מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 9

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: אינדוקציה.

בעיה: נניח שאנו רוצים להוכיח טענה מהצורה: "לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-a $n \geq a$ מתקיים $P(n)$", כאשר $a \in \mathbb{N}$ ו-$P(n)$ הוא פרדיקט. ניתן להוכיח טענה זו בשיטת האינדוקציה, שכוללת את הוכחת שתי הטענות הבאות:

1. **טענת הבסיס:** $P(a)$.
2. **טענת האינדוקציה:** לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n > a$, אם $P(n-1)$ אז $P(n)$.

במידה והוכחנו שתי טענות אלו, הוכחנו את הטענה המקורית.

אינדוקציה חזקה: באופן דומה לאינדוקציה רגילה, כדי להוכיח "לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \geq a$ מתקיים $P(n)$" שקול להוכיח את:

1. **טענות הבסיס:** $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$.
2. **טענת האינדוקציה:** לכל $b < k \in \mathbb{Z}$, אם לכל $a \leq i < k$ מתקיים $P(i)$ אז $P(k)$.

תרגיל 1. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{n-i-1} = 2^n - n - 1.$$

פתרון 1. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

- **בסיס האינדוקציה:** עבור $n = 0$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{n-i-1} = 0 = 2^n - n - 1,$$

ולכן הבסיס מתקיים.

- צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור n, ונוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{(n+1)-1} i \cdot 2^{(n+1)-i-1} &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2 \cdot 2^{n-i-1} \\
&= 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{n-i-1} + n \cdot 2^{-1} \right) \\
(\text{הנחת האינדוקציה}) &= 2 \cdot \left((2^n - n - 1) + n \cdot 2^{-1} \right) \\
&= 2 \cdot 2^n - 2n - 2 + n \\
&= 2^{n+1} - (n+1) - 1.
\end{aligned}$$

- בסך הכל, הוכחנו את בסיס וצעד האינדוקציה ולכן הטענה מתקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 2. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים ש-$7 \mid (3^{2n+1} + 4^{2n+1})$.

פתרון 2. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

- בסיס האינדוקציה - $n = 1$: עבור $n = 1$ מתקיים $3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 3^3 + 4^3 = 91 = 7 \cdot 13$ ולכן הבסיס מתקיים.
- צעד האינדוקציה: נניח כי $7 \mid (3^{2n+1} + 4^{2n+1})$ ונוכיח כי $7 \mid \left(3^{2(n+1)+1} + 4^{2(n+1)+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 4^{2(n+1)+1} &= 3^{2n+1+2} + 4^{2n+1+2} \\
&= 9 \cdot 3^{2n+1} + 16 \cdot 4^{2n+1} \\
&= 9 \cdot 3^{2n+1} + 9 \cdot 4^{2n+1} + 7 \cdot 4^{2n+1} \\
&= 9 \cdot \left(3^{2n+1} + 4^{2n+1}\right) + 7 \cdot 4^{2n+1}.
\end{aligned}$$

מהנחת האינדוקציה מתקיים $7 \mid (3^{2n+1} + 4^{2n+1})$ - נסמן ב-$k \in \mathbb{N}$ טבעי המקיים $3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 7k$. אזי

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 4^{2(n+1)+1} &= 9 \cdot \left(3^{2n+1} + 4^{2n+1}\right) + 7 \cdot 4^{2n+1} \\
&= 9 \cdot 7k + 7 \cdot 4^{2n+1} \\
&= 7 \cdot \left(9k + 4^{2n+1}\right),
\end{aligned}$$

ומכיוון ש-$9k + 4^{2n+1} \in \mathbb{Z}$ נקבל ש-$7 \mid \left(3^{2(n+1)+1} + 4^{2(n+1)+1}\right)$.

- בסך הכל, הוכחנו את בסיס וצעד האינדוקציה ולכן הטענה מתקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$.

3

תרגיל 3. (הוכחת עיקרון שובך היונים) תהיינה A, B קבוצות סופיות כך ש-$|A| > |B|$, ותהי $f : A \to B$ פונקציה. הוכיחו כי f אינה חח"ע.

פתרון 3. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $|B|$. נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}^+$, אם $|B| = n$ ו-$|A| > n$ אז $f : A \to B$ אינה חח"ע.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים $B = \{b\}$ עבור b כלשהו. מכיוון ש-$|A| > 1$ ב-A יש לפחות שני מקורות, ששניהם חייבים להיות ממופים ל-b (זו התמונה היחידה) - ולכן f אינה חח"ע.

- צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n - 1$ עבור $n > 1$ ונוכיח עבור n.

  - יהי $a \in A$, נסמן $b = f(a)$. אם קיים ל-b מקור $a \neq a' \in A$, נקבל ש-f אינה חח"ע וסיימנו.
  - אחרת, a הוא המקור היחיד של b. נסמן $A' = A \setminus \{a\}$ ו-$B' = B \setminus \{b\}$, ונגדיר פונקציה $f' : A' \to B'$ כך שלכל $a \in A'$ מתקיים $f'(a) = f(a)$. נשים לב כי $|B'| = n - 1$ וגם $|X'| = |X| - 1 > n - 1$.
  - מהנחת האינדוקציה נקבל ש-f' אינה חח"ע - כלומר קיימים $a_1 \neq a_2 \in A'$ כך ש-$f'(a_1) = f'(a_2)$, ולכן $f(a_1) = f(a_2)$ ו-f אינה חח"ע.

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ וקבוצה של n סוסים H, אזי כל הסוסים ב-H באותו הצבע.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, ברור שהסוס היחיד בקבוצה באותו הצבע כמו עצמו, ולכן יש צבע אחד לכל סוסי הקבוצה.

- צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $1 \geq n - 1$, ונוכיח עבור n - תהי $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ קבוצה בת n סוסים.

  - נגדיר שתי קבוצות חדשות בנות $n - 1$ סוסים:

$$A = \{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}\}, B = \{h_2, h_3, \ldots, h_n\}.$$

  מצעד האינדוקציה נקבל שכל הסוסים ב-A הם באותו הצבע, וכל הסוסים ב-B באותו הצבע. נשים לב ש-$h_2 \in A$ וגם $h_2 \in B$, ולכן $h_2 \in A \cap B$. לכן כל הסוסים ב-A וב-B הם באותו הצבע כמו h_2. בסך הכל, קיבלנו כי כל הסוסים ב-H באותו הצבע.

- בסך הכל, הוכחנו כי הטענה לכל קבוצה בת $n \geq 1$ סוסים.

□

מסקנה 1. כל הסוסים בעולם בעלי אותו הצבע.

הערה 1. איפה השגיאה בהוכחה? עבור $n=2$ מתקיים $A=\{h_1\}, B=\{h_2\}$ ו-$A\cap B=\emptyset$, לכן היה צריך להוכיח את בסיס האינדוקציה גם עבור $n=2$ (דבר שאינו אפשרי כמובן).

תרגיל 4. תהי M מטריצה מסדר $m\times n$ שמכילה 0-ים ו-1-ים בלבד. נאמר כי התא ה-(i,j) ב-M הוא טוב אמ"מ הוא מכיל 1 (כלומר $M_{i,j}=1$) וגם מתקיים לפחות אחד משלושת התנאים הבאים:

- התא נמצא בשורה הראשונה (כלומר $i=1$).
- התא נמצא בעמודה הראשונה (כלומר $j=1$).
- מתקיים ש-$i,j>1$ וגם $M_{i,j-1}=M_{i-1,j}=0$.

הוכיחו כי אם $M_{m,n}=1$ אז קיים במטריצה תא טוב.

פתרון 4. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $s=n+m$.

- בסיס האינדוקציה: עבור $s=2$ נקבל ש-$n=m=1$. ידוע כי $M_{m,n}=1$, ומכיוון ש-$m=1$ $(1,1)$ הוא תא טוב.
- צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $s-1\geq 2$ ונוכיח עבור s.
  - אם (m,n) הוא תא טוב, סיימנו.
  - אחרת, מכיוון ש-$M_{m,n}=1$ בוודאות $m>1$ וגם $n>1$ (אחרת אחד משני התנאים הראשונים היו מתקיימים), ובנוסף $M_{m-1,n}=1$ או $M_{n-1,m}=1$.
  - אם $M_{n-1,m}=1$ (המקרה שבו $M_{m-1,n}=1$ זהה), תהי M' המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה ה-m מ-M. אזי M מסדר $n\times(m-1)$ וגם $M'_{m-1,n}=M_{m-1,n}=1$. מכיוון ש-$(m-1)+n=s-1$, מהנחת האינדוקציה נקבל כי קיים ב-M' תא טוב. מכיוון שהתנאים לא מתייחסים לנמצא מימין או מתחת לתא טוב, אותו תא הוא טוב גם ב-M.

תרגיל 5. תהי $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$ כך ש-$f(2)=2$ ולכל $n,m\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $f(mn)=f(m)f(n)$ וגם אם $n<m$ אז $f(n)<f(m)$. הוכיחו כי $f=I_{\mathbb{N}^+}$.

פתרון 5. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$. נשים לב כי מתקיים $f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$, ולכן $f(1)=1$ (כי $0\notin \text{range}(f)$).
- צעד האינדוקציה: יהי $n>1$. נניח את נכונות הטענה לכל $1\leq k\leq n$, ונוכיח עבור $n+1$.

- אזי לכל $1 \le k \le n$ מתקיים $f(k) = k$. נפריד למקרים:
  - $*$ אם n אי-זוגי, נקבל ש-$n+1$ זוגי, ולכן קיים $1 \le k \le n$ כך ש-

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(2k) \\ &= f(2) \cdot f(k) \\ \text{(הנחת האינדוקציה)} &= 2k \\ &= n+1. \end{aligned}$$

  - $*$ אחרת, n זוגי ולכן $n+1$ אי-זוגי. אזי קיים $1 \le k < n$ כך ש-$n = 2k$. אזי,

$$2k \underset{(*)}{=} f(2k) < f(2k+1) < f(2k+2) = f(2 \cdot (k+1)) \underset{(*)}{=} f(2) \cdot f(k+1) = 2k+2$$

כאשר מעברים המסומנים ב-$(*)$ נובעים מההנחת האינדוקציה. לכן

$$2k < f(n+1) < 2k+2 \implies f(n+1) = 2k+1 = n+1.$$

תרגיל 6. נגדיר סדרה a_n כך ש-$a_0 = 0, a_1 = 1$ ולכל $n \ge 2$ מתקיים $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (סדרת פיבונאצ'י). הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

פתרון 6. נוכיח את הטענה באינדוקציה מעל n. נגדיר סדרה b_n כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

ונוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = b_n$.

- בסיס האינדוקציה: עבור $n = 0$ ו-$n = 1$, נקבל

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = 0 = a_0$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 1 = a_1$$

- **צעד האינדוקציה:** נניח כי לכל $n > k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k = b_k$, ונוכיח כי $a_n = b_n$. מהנחת האינדוקציה:

$$a_n = b_n \iff a_{n-1} + a_{n-2} = b_n \iff b_{n-1} + b_{n-2} = b_n$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

$$\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

$$\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

$$\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} + 1}_{0}\right)$$
$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1} + 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}_{0}\right)$$
$$\iff 0 = 0$$

ולכן הטענה נכונה.