ג'וליאן עזאם - 212589972

ראמי ח'לאילה - 325412971

שאלה 1

1) הטענה: $\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r}$

1. טבלת אמת:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q \rightarrow r}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r}$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T

לשתי הטענות יש אותו טבלת אמת לכן הטענות שקולות לוגית

2. דרך זהויות: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

מפשטים את: $\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r)}$

צעדים:

1. נשתמש ב: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ עבור $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
(לפי טבלת האמת של $\rightarrow$, $p \rightarrow q \equiv T$, אמ"מ (אם ורק אם) $p \equiv F$, או ש $q \equiv T$)
נקבל: $\neg p \vee (q \rightarrow r)$
2. נשתמש שוב באותה תכונה **בצעד 1** עבור $(q \rightarrow r)$
נקבל: $\boldsymbol{\neg p \vee (\neg q \vee r)}$

מפשתים את: $\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r}$

צעדים:

1. נשתמש ב: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
מקבלים: $\neg(p \wedge q) \vee r$
2. שימוש בכלל דה מורגן $(\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q)$
מקבלים: $\boldsymbol{(\neg p \vee \neg q) \vee r}$

לפי חוק החילוף: $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

מקבלים ש: $\boldsymbol{\neg p \vee (\neg q \vee r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r}$

לכן הטענות שקולות לוגית

2) הטענה: $\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)}$

a) טבלת אמת

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow r}$	$\boldsymbol{q \rightarrow r}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r}$	$\boldsymbol{(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T

F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

לשתי הטענות יש אותה טבלת אמת לכן הן שקולות לוגית

(b דרך זהויות: $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r} \equiv (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})$

מפשטים את: $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}$

i. משתמשים ב: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ ומקבלים: $\neg(p \wedge q) \vee r$

ii. משתמשים ב דה מורגן: $\neg(p \wedge q) \vee r \Longrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$

iii. **קיבלנו: $(\neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$**

מפשטים את: $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})$

i. משתמשים ב: $(p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q)$ ומקבלים: $(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$

ii. משתמשים בחוק אסוציאטיביות:

$(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) \Longrightarrow \neg p \vee (r \vee \neg q \vee r)$

iii. **$\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{r}$ נהפך ל $\boldsymbol{r}$ ומקבלים: $\neg \boldsymbol{p} \vee (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$**

לפי חוק החילוף: $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

מקבלים ש: $\neg \boldsymbol{p} \vee (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \equiv (\neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$

3) הטענה: $\left((\neg \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{q}\right) \rightarrow \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p}$

(a **טבלת אמת:**

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$(\neg \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\left((\neg \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{q}\right) \rightarrow \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p}$
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T

מסקנה: לשתי הטענות טבלת האמת שונה לכן הן לא שקולות לוגית

$\left((\neg \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{q}\right) \rightarrow \boldsymbol{p} \not\equiv \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p} \Longleftarrow$

4) הטענה: $q \rightarrow (r \wedge \neg p) \equiv r \rightarrow (p \rightarrow q)$

(a טבלת אמת

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r} \wedge \neg \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \neg \boldsymbol{p})$	$\boldsymbol{r} \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$
T	*F*	*T*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*F*
T	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*F*	*T*	*F*	*T*
F	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*

מסקנה: טבלת האמת עבור שתי הטענות אינן שקולות לוגית לכן שתי הטענות אינן שקולות לוגי

$q \rightarrow (r \wedge \neg p) \not\equiv r \rightarrow (p \rightarrow q) \Longleftarrow$

5) **הטענה:** $\neg (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r} \equiv \neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q})$

a) טבלת אמת:

p	$\neg p$	r	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$r \vee q$	$\neg (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$	$\neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q})$
T	F	T	T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	F	F	F	F

מסקנה: טבלת האמת עבור שתי הטענות אינן שקולות לוגית לכן שתי הטענות אינן שקולות לוגית $\Leftarrow$ $\neg (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \not\equiv \neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q})$

שאלה 2

א. תשובה:

a. נשים לב: לפי טבלת האמת של *XOR* מקבלים *T* רק עבור
$(p = T \wedge q = F) \vee (p = F \wedge q = T)$

b. צריך שנקבל *T* רק אם $q = T$ וגם $p = F$ לכן מקבלים:

$\neg p \wedge q$

c. צריך שנקבל *T* רק אם $q = F$ וגם $p = T$ לכן מקבלים:

$p \wedge \neg q$

d. *צריך לקבל* T *עבור אחת אחת מהטענות* b,c *לכן מקבלים את הטענה:*
$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

טבלת אמת של $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$	$(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q}) \vee (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
T	*T*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*

מסקנה: $(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q}) \vee (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \equiv \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}$

ב. טבלת אמת של $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$(p \oplus q)$	$(q \oplus r)$	$(p \oplus q) \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

מסקנה: שתי הטענות שקולות לוגית

דרך זהויות:

לפני ההוכחה צריך להביע את $\neg(p \oplus q)$ ורואים שצריך ש $(p = T \wedge q = T) \vee (p = F \wedge q = F)$

לכן מקבלים: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

טבלת אמת של: $\neg(p \oplus q)$ ו $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \oplus q}$	$\neg(\boldsymbol{p \oplus q})$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	T

לכן מקבלים ש $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \oplus q)$

משפטים שנעזור בהם:

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \oplus q)$ נסמן ב #

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \oplus q$ נסמן ב $

צעדי ההוכחה:

a. ניקח הטענה $p \oplus (q \oplus r)$ ונשתמש ב $ עבורו

$$\left(\boldsymbol{p} \wedge \neg(\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r})\right) \vee \left(\neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r})\right)$$

b. נשתמש ב # עבור $\neg(q \oplus r)$

$$\left(\boldsymbol{p} \wedge \left((\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})\right)\right) \vee \left(\neg \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r})\right)$$

c. נשתמש ב $ עבור $(q \oplus r)$

$$\left(\boldsymbol{p} \wedge \left((\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})\right)\right) \vee \left(\neg \boldsymbol{p} \wedge \left((\neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})\right)\right)$$

d. נשתמש בחוק הפילוג "וגם" עבור שתי הטענות

$$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})$$

e. נסמן את ארבע הטענות באופן הבאה:

(i) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

(ii) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})$

(iii) $\boldsymbol{C} = (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

(iv) $\boldsymbol{D} = (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})$

f. נארגן מחדש את הטענות באופן הבאה: $A \vee C \vee B \vee D$
$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r})$

g. נשתמש בחוק הפילוג "וגם" עבור r וגם $\neg r$
$\left(\boldsymbol{r} \wedge \left((\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})\right)\right) \vee \left(\neg \boldsymbol{r} \wedge \left((\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})\right)\right)$

h. רואים שהטענה $p \oplus q \equiv \left((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)\right)$ לפי משפט $, והטענה $\left((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\right) \equiv \neg(p \oplus q)$ לפי משפט # לכן אנחנו מקבלים הטענה הבאה:
$\left(r \wedge \neg(p \oplus q)\right) \vee \left(\neg r \wedge (p \oplus q)\right)$

i. רואים שהטענה שקיבלנו היא מצורה $ לכן מקבלים:
$(p \oplus q) \oplus r$

j. לכן הוכחנו ש $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$ כמו שנדרש

ג. **טבלת אמת של** $\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r}) \equiv (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$(\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})$	$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$\left(\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{r})\right)$	$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$
T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

מסקנה: טבלת האמת עבור שתי הטענות שווה לכן שתי הטענות שקולות לוגית

ד. **טבלת האמת של** $(\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}) \oplus \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}) \oplus \boldsymbol{p}$
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F

מסקנה: לשתי הטענות יש אותו טבלת אמת לכן הטענות שקולות לוגית

שאלה 3

א. הטענה: "אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית."

- **בשפה מתמטית**
  - i. נגדיר קבוצה סטודנטים S
  - ii. נגדיר פרדיקט P(s) : s עבר המבחן
  - iii. נגדיר פרדיקט H(s) : s עשה תרגילי הבית
  - iv. **הטענה הופכת ל:** $\neg \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$
- **השלילה של הטענה:** $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

ב. הטענה: "כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה."

- **בשפה מתמטית**
  - i. נגדיר קבוצה בני אדם H

ii. נגדיר פרדיקט D(h) : h אוהב מתמטיקה דיסקרטית
iii. נגדיר פרדיקט C(h) : h אוכל גלידה
iv. **הטענה הופכת ל:** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}: \boldsymbol{D}(\boldsymbol{h}) \rightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{h})$

- **השלילה של הטענה:** $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}: \boldsymbol{D}(\boldsymbol{h}) \wedge \neg\, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{h})$

ג. הטענה: "לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש p-לא מחלק את n."

- **בשפה מתמטית**

i. נגדיר קבוצת הראשונים $P = \{p \in \mathbb{N}: (\forall b \in \mathbb{N} \wedge (1 < b < p)) : b \nmid p\}$
ii. **הטענה הופכת ל:** $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\, \forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}: \boldsymbol{p} \nmid \boldsymbol{n}$

- **השלילה של הטענה:** $\exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\, \exists \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}: \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{n}$

ד. הטענה: "יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה."

- **בשפה מתמטית**

i. נגדיר קבוצת בניינים B
ii. נגדיר פרדיקט T(x) : x בניין בן יותר מ-100 קומה
iii. נגדיר פרדיקט U(x) : x בניין שנמצא באוניברסיטה
iv. **הטענה הופכת ל:** $\exists \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}: \boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}) \wedge \neg \boldsymbol{U}(\boldsymbol{b})$

- **השלילה של הטענה:** $\forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}: \neg \boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{U}(\boldsymbol{b})$

ה. הטענה: "קיימים מספרים ממשיים $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ כך ש-$\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}^2 < \boldsymbol{b}^2$, וגם $\boldsymbol{a}^3 > \boldsymbol{b}^3$

- **בשפה מתמטית**

i. **הטענה הופכת ל:** $\exists \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}: (\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}) \wedge \left(\boldsymbol{\alpha}^2 < \boldsymbol{\beta}^2\right) \wedge (\boldsymbol{\alpha}^3 > \boldsymbol{\beta}^3)$

- **השלילה של הטענה:** $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R} : (\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}) \vee \left(\boldsymbol{\alpha}^2 > \boldsymbol{\beta}^2\right) \vee (\boldsymbol{\alpha}^3 < \boldsymbol{\beta}^3)$

שאלה 4

א. a = b הוא תנאי מספיק בשביל $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$

a. "אם אז" $(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$
b. הקונטרפוזיטיב $(\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}) \rightarrow (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b})$

ב. x > y רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2

a. "אם אז": $(x > y) \rightarrow \left((x > 2) \wedge (2 \mid x)\right)$
b. הקונטרפוזיטיב $\left((\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{2}) \vee (\boldsymbol{2} \nmid \boldsymbol{x})\right) \rightarrow (\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x})$

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x

a. "אם אז"

i. נגדיר קבוצת מספרים ראשונים P
ii. הטענה הופכת ל: $(y < x) \rightarrow (y \in P)$

b. הקונטרפוזיטיב $(y \notin P) \rightarrow (y \geq x)$

ד. a = b הוא תנאי הכרחי בשביל $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$

a. "אם אז" $(a = b) \rightarrow (a \leq b)$
b. הקונטרפוזיטיב $(a \neq b) \rightarrow (a > b)$