

תרגול פונקציות

לכל פונקציה $f : X \rightarrow Y$ ולכל קבוצה $A \subseteq X$, הקבוצה $f(A)$ מוגדרת כך:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in A : f(x) = y\}$$

בטענות הבאות, W, X, Y, Z הן קבוצות, ו $f : X \rightarrow Y$ היא פונקציה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. f היא חח"ע אם ורק אם קיימת פונקציה $g : Y \rightarrow X$ כך ש $g \circ f = I_X$.
2. f היא על אם ורק אם קיימת פונקציה $g : Y \rightarrow X$ כך ש $f \circ g = I_Y$.
3. תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה. f הפיכה אם ורק אם קיימת פונקציה $g : Y \rightarrow X$ כך ש $g \circ f = I_X$ וגם $f \circ g = I_Y$, ובמקרה הזה $g = f^{-1}$.
4. לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq X$ מתקיים $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
5. אם f חח"ע אז לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq X$, אם $f(A) = f(B)$ אז $A = B$.
6. f היא חח"ע אם ורק אם לכל שתי פונקציות שונות $g_1 : W \rightarrow X$ ו $g_2 : W \rightarrow X$ מתקיים $f \circ g_1 \neq f \circ g_2$.
7. נניח שב Z יש לפחות שני איברים שונים. f היא על אם ורק אם לכל שתי פונקציות שונות $g_1 : Y \rightarrow Z$ ו $g_2 : Y \rightarrow Z$ מתקיים $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$.