מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 2

הגשה ליום חמישי, 8/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

תזכורות והגדרות

א. עבור שלמים n, m, נסמן ב-$n \mid m$ את הטענה n **מחלק את** m (קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m = k \cdot n$). בנוסף, נסמן ב-$n \nmid m$ את הטענה n **לא מחלק את** m.

ב. יהיו $n, r \in \mathbb{Z}$ ו-$d \in \mathbb{N}^+$. נאמר ש-n **מתחלק ב-d עם שארית** r אם $0 \leq r < d$ וקיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$n = d \cdot q + r.$$

- למשל, 7 מתחלק ב-2 עם שארית 1: $2 > 1 \geq 0$ ועבור $q = 3$ מתקיים $7 = 2 \cdot 3 + 1$.
- נאמר ש-q היא המנה ו-r היא שארית החלוקה.
- שימו לב שעבור $r = 0$, n מתחלק ב-d עם שארית r אמ"מ n מתחלק ב-d.

שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}$, אם a מתחלק ב-b וגם b מתחלק ב-c, אז a מתחלק ב-c:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : ((b \mid a) \wedge (c \mid b)) \rightarrow (c \mid a)$$

ב. לכל $a, b, c \in \mathbb{Z}$, אם $a \cdot b$ מתחלק ב-c, אז a מתחלק ב-c או b מתחלק ב-c:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c \mid (a \cdot b)) \rightarrow (c \mid a \vee c \mid b)$$

ג.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : (b \mid a \wedge a \mid b) \rightarrow a = b$$

ד.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (c \nmid a \cdot b) \rightarrow (c \nmid a)$$

ה.

$$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}:((c\mid a)\wedge(c\nmid(a+b)))\rightarrow b\nmid c$$

ו.

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}:\left(b\mid a^2\wedge b<a\right)\rightarrow b\mid a$$

שאלה 2. בשאלה זו נוכיח את קיום ויחידות השארית.

א. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{Z},d\in\mathbb{N}^+$, n מתחלק ב-d עם שארית כלשהי, כלומר קיים $r\in\mathbb{Z}$ כך ש-n מתחלק ב-d עם שארית r.

ב. הוכיחו כי לא יכולות להיות שתי שאריות שונות עבור n,d. כלומר: לכל $n\in\mathbb{Z},d\in\mathbb{N}^+$, לא קיימים $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ כך ש-$r_2\neq r_1$, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_1, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_2.

ג. סטודנט כתב את ההוכחה הבאה עבור הסעיף הקודם. הסבירו את השגיאה בהוכחה שלהם ומדוע היא אינה נכונה.

<u>ההוכחה:</u>

- יהיו $n\in\mathbb{Z},d\in\mathbb{N}$. נניח בשלילה כי קיימים $r_1,r_2\in\mathbb{Z}$ כך ש-$r_2\neq r_1$, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_1, וגם n מתחלק ב-d עם שארית r_2.
- n מתחלק ב-d עם שארית r_1, ולכן קיים $q\in\mathbb{Z}$ כך ש-$n=d\cdot q+r_1$.
- n מתחלק ב-d עם שארית r_2, ולכן קיים $q\in\mathbb{Z}$ כך ש-$n=d\cdot q+r_2$. אזי,

$$d\cdot q+r_1=n=d\cdot q+r_2\implies r_1=r_2,$$

בסתירה לכך ש-$r_2\neq r_1$.

שאלה 3. א. חשבו את $A\cup B,A\cap B,A\setminus B,A\triangle B$ עבור כל אחד מהסעיפים הבאים:

(i) $A=\{5,8\},B=\{2,\{8\},5,10\}$

(ii) $A=[6,10)\cup\{5\},B=\mathbb{N}$

(iii) $A=\{\mathbb{N},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\mathbb{R},\{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}\},B=\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\},\mathbb{Q}\},\mathbb{Q},\mathbb{N}\}$

ב. בכל סעיף מהבאים נתונות קבוצות A,B: קבעו האם $A\in B$ והאם $A\subseteq B$.

(i) $A=\emptyset,B=\{1\}$

(ii) $A=\{\mathbb{R}\},B=\{\mathbb{N}\}$

(iii) $A=\{\{x\}\mid x\in\mathbb{N}\},B=\mathbb{R}$

(iv) $A=P(P(\emptyset)),B=P(P(P(\emptyset)))$

(v) $A=\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z},B=P(\mathbb{N})$.

שאלה 4. יהיו A, B, C קבוצות בקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A \cap C = B \cap C$ אז $A = B$.

ב. אם $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$.

ג. אם $A \cap C = B \cap C$ וגם $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$.

ד. אם $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$ אז $A \cap C \subseteq B$.

ה. אם $A \times B = B \times A$ אז $A = B$.

ו. $A \subseteq B$ אמ"מ $A^c \subseteq B^c$.

ז. $A \subseteq B$ אמ"מ $A^c \supseteq B^c$.

ח. אם $\forall x \in A : x \in B$ אז $\exists x \in A : x \in B$.