מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 1 עם פתרון

הגשה ליום חמישי, 1/8 בשעה 23:57, לפי ההנחיות במודל

סמסטר קיץ תשפ"ד

שאלה 1. יהיו p, q, r פסוקים, הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות בסעיפים הבאים. עבור הוכחה, עשו זאת בשתי דרכים: הן באמצעות טבלת אמת, והן הוכחה באמצעות זהויות.

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

ד. $q \to (r \wedge \neg p) \equiv r \to (p \to q)$

ה. $\neg (p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

פתרון 1. **א.** הוכחה באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$q \to r$	$p \wedge q$	$\boldsymbol{p \to (q \to r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \to r}$
F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T

הוכחה באמצעות זהויות:

$$\begin{aligned} p \to (q \to r) &\equiv \neg p \vee (q \to r) \\ (\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta) &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ (\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \\ (\text{דה-מורגן}) &\equiv \neg (p \wedge q) \vee r \\ (\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta) &\equiv (p \wedge q) \to r. \end{aligned}$$

ב. הוכחה באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$p \wedge q$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \to r}$	$p \to r$	$q \to r$	$\boldsymbol{(p \to r) \vee (q \to r)}$
F	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T

הוכחה באמצעות זהויות:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to r &\equiv \neg (p \wedge q) \vee r \\
(\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
(\text{אידמפוטנטיות: } \alpha \vee \alpha \equiv \alpha) &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \vee r \\
(\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות}) &\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) \\
(\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta) &\equiv (p \to r) \vee (q \to r)\,.
\end{aligned}
$$

ג. הפרכה - טבלאות האמת שונות ולכן הטענות לא שקולות.

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \to q$	$\boldsymbol{((\neg p) \to q) \to p}$	$\boldsymbol{p \vee \neg p}$
F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T

ד. הפרכה - טבלאות האמת שונות ולכן הטענות לא שקולות.

p	q	r	$\neg p$	$r \wedge \neg p$	$\boldsymbol{q \to (r \wedge \neg p)}$	$p \to q$	$\boldsymbol{r \to (p \to q)}$
F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T

ה. הפרכה - טבלאות האמת שונות ולכן הטענות לא שקולות.

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\boldsymbol{\neg(p \to q) \vee r}$	$\neg p$	$r \vee q$	$\boldsymbol{\neg p \wedge (r \vee q)}$
F	F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	F
T	T	F	T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	F	T	F	T	F

שאלה 2. נגדיר קשר בינארי חדש בשם XOR (eXclusive OR), נסמן ב-$p \oplus q$) באמצעות טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

א. הביעו את $\oplus$ באמצעות $\wedge, \vee$ ו-$\neg$.

ב. הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל p, q, r מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r) .$$

ג. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q, r מתקיים

$$p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge r) \oplus (p \wedge q) .$$

ד. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus p \equiv q.$$

פתרון 2. א. נשים לב ש-$p \oplus q$ הוא T אמ"מ בדיוק אחד מ-p או q הוא T. כלומר, לפחות אחד מ-p, q הוא T אך לא שניהם. לכן,

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg (p \wedge q)) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) .$$

ב. הוכחה באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$p \oplus q$	$\boldsymbol{(p \oplus q) \oplus r}$	$q \oplus r$	$\boldsymbol{p \oplus (q \oplus r)}$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F
T	T	T	F	T	F	T

הוכחה באמצעות זהויות - נפתח כל אחד מהאגפים:

$$\begin{aligned}
(p \oplus q) \oplus r &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \oplus r \\
&\equiv (((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg r) \vee (\neg ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge r) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee ((\neg (p \wedge \neg q) \wedge \neg (\neg p \wedge q)) \wedge r) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \wedge r) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \wedge r) \\
&\equiv ((p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge r) \\
&\equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \oplus (q \oplus r) &\equiv p \oplus ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \\
&\equiv (p \wedge \neg ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))) \vee (\neg p \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))) \\
&\equiv (p \wedge (\neg (q \wedge \neg r) \wedge \neg (\neg q \wedge r))) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
&\equiv (p \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
&\equiv (p \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r))) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
&\equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) .
\end{aligned}$$

ולכן מתקיים שוויון.

ג. הוכחה באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$q \oplus r$	$\boldsymbol{p \wedge (q \oplus r)}$	$p \wedge r$	$p \wedge q$	$\boldsymbol{(p \wedge r) \oplus (p \wedge q)}$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F

ד. הוכחה באמצעות טבלת אמת:

p	$\boldsymbol{q}$	$p \oplus q$	$\boldsymbol{(p \oplus q) \oplus p}$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	F
T	T	F	T

שאלה 3. עבור כל אחת מהטענות הבאות:

- כתבו את הטענה בשפה מתמטית.
- כתבו את שלילת הטענה לאחר פישוט.

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.

ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.

ג. לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש-p לא מחלק את n.

ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.

ה. קיימים מספרים ממשיים α, β כך ש-$\alpha > \beta$, $\alpha^2 < \beta^2$ וגם $\alpha^3 > \beta^3$.

פתרון 3. א. תהי S קבוצת הסטודנטים, פרדיקט $T(x)$ ל-"x מצליח במבחן" ופרדיקט $H(x)$ ל-"x עושה את תרגילי הבית". הטענה היא

$$\forall x \in S : (T(x) \to H(x)),$$

ושלילת הטענה לאחר פישוט היא

$$\exists x \in S : (T(x) \wedge \neg H(x)).$$

ב. תהי H קבוצת בני האדם, פרידקט $D\left(x\right)$ ל-"x אוהב מתמטיקה דיסקרטית" ופרידקט $I\left(x\right)$ ל-"x אוכל גלידה". הטענה היא

$$\forall x\in H:\left(D\left(x\right)\rightarrow I\left(x\right)\right),$$

ושלילת הטענה לאחר פישוט היא

$$\exists x\in H:\left(D\left(x\right)\wedge\neg I\left(x\right)\right).$$

ג. תהי P קבוצת הראשוניים, ונגדיר פרידקט $D\left(x,y\right)$ ל-"x מחלק את y" **(כלומר $x\mid y$).**
הטענה היא

$$\forall n\in\mathbb{Z}\forall p\in P:\neg D\left(p,n\right),$$

ושלילת הטענה היא

$$\exists n\in\mathbb{Z}\exists p\in P:D\left(p,n\right).$$

ד. תהי B קבוצת הבניינים, פרידקט $T\left(b\right)$ ל-"b בן יותר מ-100 קומות" ופרדיקט $U\left(b\right)$ ל-"b נמצא באוניברסיטה". הטענה היא

$$\exists b\in B:\left(T\left(b\right)\wedge\neg U\left(b\right)\right),$$

ושלילת הטענה היא

$$\forall b\in B:\left(\neg T\left(b\right)\vee U\left(b\right)\right),$$

או לחילופין $\forall b\in B:T\left(b\right)\rightarrow U\left(b\right)$.

ה. הטענה היא

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\left(\alpha>\beta\wedge\alpha^{2}<\beta^{2}\wedge\alpha^{3}>\beta^{3}\right),$$

ושלילת הטענה היא

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\left(\alpha\leq\beta\vee\alpha^{2}\geq\beta^{2}\vee\alpha^{3}\leq\beta^{3}\right).$$

שאלה 4. יהיו $x,y\in\mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a=b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a\geq b$.

ב. $x>y$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2.

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x.

ד. $a=b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a\leq b$.

פתרון 4.

טענה	ניסוח "אם-אז"	קונטרפוזיטיב
$a = b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a \geq b$	אם $a = b$ אז $a \geq b$	אם $a < b$ אז $a \neq b$
$x > y$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2	אם $x > y$ אז x זוגי ו-$2 < x$	אם x אי-זוגי או $x \leq 2$ אז $x \leq y$
y ראשוני אם הוא קטן מ-x	אם $y < x$ אז y ראשוני	אם y פריק אז $y \geq x$
$a = b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a \leq b$	אם $a \leq b$ אז $a = b$	אם $a \neq b$ אז $a > b$