# דף עבודה לתרגול שפת המתמטיקה עם פתרון

**מצאו את הצורה הלוגית של הטענות הבאות**

1. כל סטודנט לומד מתמטיקה או מדעי המחשב אבל לא שניהם.
2. כל מספר ממשי הוא חיובי או שלילי או $0$.
3. לכל מספר טבעי יש מספר טבעי שגדול ממנו.
4. יש מספר ממשי $a$ כך שלכל מספר ממשי $x$ מתקיים $a+x=x$.
5. לכל מספר ממשי $x$ קיים מספר ממשי $y$ כך ש $x+y=0$.
6. $100=5\cdot k$ עבור מספר טבעי $k$ כלשהו.
7. המכפלה של מספר זוגי ומספר אי־זוגי היא זוגית.
8. הסכום של איזשהם שני מספרים טבעיים הוא $5$.

**פתרון**

1. נסמן ב $S$ את קבוצת הסטודנטים, ונסמן ב $M(x)$ וב $C(x)$ את הפרדיקטים "$x$ לומד מתמטיקה" ו "$x$ לומד מדעי המחשב". אז הצורה הלוגית היא $\forall x\in S:\ (M(x)\vee C(x))\wedge\neg(M(x)\wedge C(x))$ (או כל צורה שקולה).
2. הצורה הלוגית היא $\forall x\in\mathbb{R}:\ (x>0)\vee(x<0)\vee(x=0)$.
3. הצורה הלוגית היא $\forall n\in\mathbb{N}\exists m\in\mathbb{N}:\ m>n$.
4. הצורה הלוגית היא $\exists a\in\mathbb{R}\forall x\in\mathbb{R}:\ a+x=x$
5. הצורה הלוגית היא $\forall x\in\mathbb{R}\exists y\in\mathbb{R}:\ x+y=0$.
6. הצורה הלוגית היא $\exists k\in\mathbb{N}:\ 100=5\cdot k$.
7. נסמן ב $E$ וב $O$ את קבוצת המספרים הזוגיים ואת קבוצת המספרים האי־זוגיים. אז הצורה היא
$$\forall m\in E, n\in O: m\cdot n\in E$$
8. $\exists m,n\in\mathbb{N}: m+n=5$.

**תרגמו את הטענות לניסוח שלא מכיל משתנים**

1. $\forall x\in\mathbb{R}: x^2<2$.
2. $\exists m\in\mathbb{Z}: m^2=m$.
3. $\exists a,b\in\mathbb{R}: a^2+b^2=(a+b)^2$
4. $\exists k\in\mathbb{N}: 3\cdot k=27$.

**דוגמה:** $\forall m,n\in\mathbb{Z}: m+n\in\mathbb{Z}$: הסכום של כל שני מספרים שלמים הוא שלם.

**פתרון**

1. הריבוע של כל מספר ממשי הוא קטן מ $2$.
2. קיים מספר שלם ששווה לריבוע שלו.
3. קיימים שני מספרים ממשיים שסכום הריבועים שלהם שווה לריבוע של הסכום שלהם.
4. $27$ מתחלק ב $3$, או: קיים מספר טבעי שאם נכפיל אותו ב $3$ נקבל $27$.

**מצאו את השלילה של הטענות הבאות**

1. כל מספר ממשי הוא גדול מ $-1$או קטן מ $2$.
2. קיים מספר ממשי שקטן מ $5$ וגדול מ $7$.
3. קיים מספר טבעי שגדול יותר מכל מספר טבעי.
4. לכל מספר ממשי $\varepsilon$ קיים מספר טבעי $n$ כך ש $\varepsilon < \frac{1}{n}$.
5. יש מספר ממשי $a$ כך שלכל מספר ממשי $x$ מתקיים $a + x = x$.
6. אם מספר טבעי $n$ מתחלק ב $3$ אז $n + 5$ מתחלק ב $2$.

**פתרון**

1. קיים מספר ממשי שלא גדול מ $-1$ ולא קטן מ $2$. (או: קיים מספר ממשי שקטן או שווה ל $-1$ וגדול או שווה ל $2$).
2. כל מספר ממשי הוא לא קטן מ $5$ או לא גדול מ $7$ (או: כל מספר ממשי גדול או שווה ל $5$ או קטן או שווה ל $7$).
3. לכל מספר טבעי קיים מספר טבעי שגדול ממנו. (או: לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $n < m$).
4. קיים מספר ממשי $\varepsilon$ כך שלכל מספר טבעי $n$ מתקיים $\varepsilon \geq \frac{1}{n}$.
5. לכל מספר ממשי $a$ קיים מספר ממשי $x$ כך ש $a + x \neq x$.
6. קיים מספר טבעי $n$ כך ש $n$ מתחלק ב $3$ אבל $n + 5$ לא מתחלק ב $2$.

**האם הטענות הבאות נכונות?**

1. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x < y$.
2. $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x < y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : x > y$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R} : y > x) \wedge (\exists y \in \mathbb{R} : y < x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (y > x) \wedge (y < x)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee \left(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > y\right)$.

**פתרון**

1. נכון: למשל, לכל $x$ אפשר לבחור $y = x + 1$.
2. לא נכון: לכל $y$ שנבחר, התנאי $x < y$ תמיד יופר עבור $x = y + 1$.
3. לא נכון: למשל, הטענה לא נכונה עבור $x = -1$.
4. נכון: לכל $x \in \mathbb{R}$ אפשר למצוא גם מספר שגדול ממנו וגם מספר שקטן ממנו.
5. לא נכון: אי אפשר למצוא מספר שגם גדול מ $x$ וגם קטן מ $x$.
6. הטענה הזו לא חוקית: אי אפשר להשתמש בשם "$x$" בתוך הסוגריים כי השם הזה כבר תפוס.

**תזכורת**

נניח שיש לנו טענה "אם $A$ אז $B$". אנחנו מגדירים:

- **הכיוון ההפוך** הוא הטענה "אם $B$ אז $A$".
- **הניגוד** הוא הטענה "אם לא $A$ אז לא $B$".
- **הקונטרפוזיטיב** הוא הטענה "אם לא $B$ אז לא $A$".

**מצאו את הכיוון ההפוך והניגוד של הטענות הבאות ולמצוא להן דוגמה נגדית**

1. לכל מספר שלם $a$, אם $a$ מתחלק ב 6 אז $a$ מתחלק ב 3.
2. לכל מספר ממשי $x$, אם $x > 5$ אז $x^2 > 25$.

**דוגמה:** ניקח את הטענה: לכל מספר ממשי $x$, אם $x > 0$ אז $x^2 > 0$. הכיוון ההפוך של הטענה הזו הוא "אם $x^2 > 0$ אז $x > 0$" והניגוד הוא "אם $x \leq 0$ אז $x^2 \leq 0$". אפשר לקחת בתור דוגמה נגדית כל מספר שלילי, למשל $-1$.

**פתרון**

1. לכל מספר שלם $a$, אם $a$ מתחלק ב 3 אז הוא מתחלק 6. לכל מספר שלם $a$, אם $a$ לא מתחלק ב 6 אז הוא לא מתחלק ב 3. דוגמה נגדית: 9 מתחלק ב 3 אבל לא מתחלק ב 6.
2. לכל מספר ממשי $x$, אם $x^2 > 25$ אז $x > 5$. לכל מספר ממשי $x$, אם $x \leq 5$ אז $x^2 \leq 25$. דוגמה נגדית: נבחר $x = -6$. אז $-6 \leq 5$ אז $(-6)^2 = 36 > 25$.

**כתבו את הטענות הבאות בצורת "אם $A$ אז $B$" ולנסח את הקונטרפוזיטיב**

1. $a^b = 7$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a^2 > b^2$.
2. $a$ מחלק את $b$ רק אם $\frac{a}{b} > 2^b$.
3. $(a+b)^2 > 0$ הוא תנאי מספיק בשביל $\log a > b^2$.
4. $a$ הוא חיובי אם $a > -1$.

**פתרון**

1. אם $a^2 > b^2$ אז $a^b = 7$. אם $a^b \neq 7$ אז $a^2 \leq b^2$.
2. אם $a$ מחלק את $b$ אז $\frac{a}{b} > 2^b$. אם $\frac{a}{b} \leq 2^b$ אז $a$ לא מחלק את $b$.
3. אם $(a+b)^2 > 0$ אז $\log a > b^2$. אם $\log a \leq b^2$ אז $(a+b)^2 \leq 0$.
4. אם $a > -1$ אז הוא חיובי. אם $a$ לא חיובי אז $a \leq -1$.