נאג'ה סעדי

214313264

מתמטיקה דיסקרטית

תרגיל בית 1

מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל בית 1

הגשה ליום חמישי, 1/8 בשעה 23:57

הגשה לפי ההנחיות כמפורט במודל

שאלה 1. יהיו p,q,r פסוקים, הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות בסעיפים הבאים. עבור הוכחה, עשו זאת בשתי דרכים: הן באמצעות טבלת אמת, והן הוכחה באמצעות זהויות.

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

ד. $q \to (r \wedge \neg p) \equiv r \to (p \to q)$

ה. $\neg (p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

שאלה 2. נגדיר קשר בינארי חדש בשם XOR (eXclusive OR), נסמן ב-$p \oplus q$) באמצעות טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

א. הביעו את $\oplus$ באמצעות $\vee, \wedge$ ו-$\neg$.

ב. הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל p,q,r מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r) \,.$$

ג. הוכיחו או הפריכו כי לכל p,q,r מתקיים

$$p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge r) \oplus (p \wedge q) \,.$$

ד. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus p \equiv q.$$

שאלה 3. עבור כל אחת מהטענות הבאות:

- כתבו את הטענה בשפה מתמטית.
- כתבו את שלילת הטענה לאחר פישוט.

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.

ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.

ג. לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש-p לא מחלק את n.

ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.

ה. קיימים מספרים ממשיים α, β כך ש-$\alpha > \beta$, $\alpha^2 < \beta^2$ וגם $\alpha^3 > \beta^3$.

שאלה 4. יהיו $x, y \in \mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a = b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a \geq b$.

ב. $x > y$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2.

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x.

ד. $a = b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a \leq b$.

שאלה 1. יהיו p, q, r פסוקים, הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות בסעיפים הבאים. עבור הוכחה, עשו זאת <u>בשתי דרכים</u>: הן באמצעות טבלת אמת, והן הוכחה באמצעות זהויות.

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

1) דרך טבלת אמת:

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T

טבלאות אמת זהות לכן יש שקילות בין שתי הטענות.

2) באמצעות זהויות: משתמשים בכלל ש: $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

$$p \to (q \to r) \equiv p \to \neg(q \wedge \neg r) \equiv \neg(p \wedge \neg\neg(q \wedge \neg r)) \underset{\text{קיבוץ}}{\equiv} \neg((p \wedge q) \wedge \neg r)$$

$$\equiv (p \wedge q) \to r$$

(התחלתי בטענה מצד ימין והגעתי לטענה בצד שמאל)

לכן שתיהן שקולות.

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

p	q	r	(לפי סעיף א) $(p\wedge q) \to r$ *	$p \to r$	לפי סעיף א' $(p \to r) \vee (q \to r)$ *
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

שני הטענות שקולות כי טבלות האמת זהות

2) דרך מפורטת:

נעזר בסעיף א'.

$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r \equiv p \to (\neg q \vee r)$

$\equiv \neg(p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) \underset{\text{קיבוץ}}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee r \underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (p \wedge q) \vee r \underset{\text{פילוג}}{\equiv} (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\equiv (\neg p \to r) \wedge (\neg q \to r) \underset{\text{דה-מורגן}}{\equiv} (p \to r) \vee (q \to r)$

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

p	q	$\neg p$	$(\neg p)\to q$	$((\neg p)\to q)\to p$ *	$p \vee \neg p$ *
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

הטענות לא שקולות בגלל שטבלאות האמת אינן זהות.

2) באמצעות זהויות:

$$p \vee q \equiv (\neg p) \to q$$

$$((\neg p)\to q)\to p \equiv (p\vee q)\to p \equiv \neg(p\vee q)\vee p \underset{\text{דה-מורגן}}{\equiv} (\neg p \wedge \neg q)\vee p$$

$$\underset{\text{פילוג}}{\equiv} \underbrace{(\neg p \vee p)} \wedge (\neg q \vee p) \not\equiv \underbrace{\neg p \vee p}_{\text{תמיד} = T}$$

יש מצב שיהיה $\equiv F$

ומשום שיש בינהן $\wedge$ אז

תשפיע על נכונות הטענה ותגרום

לאי-שקילות.

$$q \to (r \wedge \neg p) \equiv r \to (p \to q)$$.ד

p ($\neg p$)	q	r	$r \wedge \neg p$	$q \to (r \wedge (\neg p))^{*}$	$p \to q$	$r \to (p \to q)^{*}$
T F	T	T	F	F	T	T
T F	T	F	F	F	T	T
T F	F	T	F	T	F	F
T F	F	F	T	T	F	T
F T	T	T	T	T	T	T
F T	T	F	F	F	T	T
F T	F	T	T	T	T	T
F T	F	F	F	T	T	T

הטענות אינן שקולות כי טבלאות האמת שלהן לא זהות.

2) דרך כפיוש

$$p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

$$q \to (r \wedge \neg p) \equiv \neg(q \wedge \neg(r \wedge \neg p)) \underset{\text{דה-מורגן}}{\equiv} \neg q \vee (r \wedge \neg p) \underset{\text{פילוג}}{\equiv}$$

$$\equiv (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p) \underset{\text{דה-מורגן}}{\equiv} (q \wedge \neg r) \wedge (q \wedge p) \equiv \neg r \wedge p \wedge q$$

$$\equiv r \to (p \wedge q) \equiv r \to \neg(p \to \neg q) \not\equiv r \to (p \to q)$$

ה. $\neg(p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

p	q	r	$\neg(p\to q)$ (סעיף ד')	$\neg(p\to q)\vee r$	$r\vee q$	$\neg p \wedge (r\vee q)$ (סעיף ג')
T	T	T	F	T	T	F
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

הטענות אינן שקולות כי טבלאות האמת שלהן לא זהות.

דרך 2 לפתרון:

$$\neg(p \to q)\vee r \equiv \neg(\neg p \vee q)\vee r \underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (p\wedge \neg q)\vee r \underset{\text{פילוג}}{\equiv}$$

$$\equiv (p\vee r)\wedge(\neg q \vee r) \underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg p \wedge \neg r)\wedge(\neg q\vee r) \underset{\text{קיבוץ}}{\equiv} \neg p \wedge (\neg r \wedge (\neg q \vee r)) \underset{\text{פילוג}}{\equiv}$$

$$\neg p \wedge \underbrace{\left((\neg r \wedge \neg q)\vee \underbrace{(\neg r \vee r)}_{\text{תמיד } \equiv T}\right)}_{\text{תמיד } \equiv T} \equiv \neg p \not\equiv \neg p \wedge (r \vee q)$$

שאלה 2. נגדיר קשר בינארי חדש בשם XOR (eXclusive OR, נסמן ב-$p \oplus q$) באמצעות טבלת האמת הבאה:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

א. הביעו את $\oplus$ באמצעות $\wedge, \vee$ ו-$\neg$.

$\oplus$ באמצעות $\wedge$, $\vee$ ו־ $\neg$:

$$p \oplus q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

ב. הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל p, q, r מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)\,.$$

p	q	r	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \oplus r$	$q \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

הטענות שקולות כי טבלות האמת זהות.

2) דרך בזהויות: $p \oplus q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$$(\neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee r) \wedge (((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee \neg r)$$

דה מורגן $\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg r) \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q) \wedge r)$

דה מורגן $\equiv (((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg r) \wedge (((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge r)$

פלוג $\equiv (((p\wedge\neg q)\wedge\neg r) \vee ((\neg p\wedge q)\wedge\neg r)) \wedge (((p\wedge\neg q)\wedge r) \vee ((\neg p\wedge q)\wedge r))$

קיבוץ $\equiv (p\wedge(\neg q\wedge\neg r)) \vee (\neg p\wedge(q\wedge\neg r)) \wedge (p\wedge(\neg q\wedge r) \vee (\neg p\wedge(q\wedge r)))$

$\equiv p\oplus(q\oplus r)$ לכן הטענה נכונה

אז חוק האסוציאטיביות עובד ב $\oplus$ XOR.

ג. הוכיחו או הפריכו כי לכל p,q,r מתקיים

$$p\wedge(q\oplus r)\equiv(p\wedge r)\oplus(p\wedge q).$$

סוגר כי

p	q	r	$p\wedge(q\oplus r)$	$p\wedge r$	$p\wedge q$	$(p\wedge r)\oplus(p\wedge q)$*
T	T	T	F	T	T	F
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

הטענות שקולות, הוכחנו ע״י טבלת אמת

משום שיצאו ששתי טבלות האמת זהות אז הטענות שקולות

ד. הוכיחו או הפריכו כי לכל p, q מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus p \equiv q.$$

p	q	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \oplus p$
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F

בעזרת טבלת אמת
הוכחנו שתמיד הטענה
הנתונה שקולה ל q
אשר טבלאות האמת שלהן זהות.
אז הטענה נכונה.

שאלה 3. עבור כל אחת מהטענות הבאות:

- כתבו את הטענה בשפה מתמטית.
- כתבו את שלילת הטענה לאחר פישוט.

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.

$\neg A \wedge B$

• נסמן: A - אין סטודנט שמצליח במבחן
$\Leftarrow$ B - לעשות את תרגילי הבית.

• השלילה: $\neg(\neg A \wedge B) \equiv A \vee \neg B$

ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.

נסמן: A - בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית.

B - אוכל גלידה.

$\forall A \wedge B$

שלילת הטענה:

$\exists A \vee \neg B$

ג. לכל שלם n וראשוני p מתקיים ש-p לא מחלק את n.

הטענה:

$\forall (n \in \mathbb{Z} \wedge p \in P) : \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$

אשר P קבוצת המס' הראשונים

שלילת הטענה:

$\exists (n \in \mathbb{Z} \vee p \in P) : \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$

ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.

נסמן: A - יש בניין

B - בן יותר מ-100 קומות.

C - לא נמצא באוניברסיטה.

$(\exists A \in B) \wedge C$

שלילת הטענה:

$(\exists A \notin B) \wedge \neg C$

ה. קיימים מספרים ממשיים α, β כך ש-$\alpha > \beta$, $\alpha^2 < \beta^2$ וגם $\alpha^3 > \beta^3$.

הטענה:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : (\alpha > \beta) \wedge (\alpha^2 < \beta^2) \wedge (\alpha^3 > \beta^3)$

שלילת הטענה:

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : (\alpha < \beta) \vee (\alpha^2 > \beta^2) \vee (\beta^3 > \alpha^3)$

.2 .1

שאלה 4. יהיו $x,y\in\mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a=b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a\geq b$.

.1 אם $a=b$ אז $a\geq b$.

.2 $\neg(a=b) \rightarrow \neg(a\geq b)$

ב. $x>y$ רק אם x הוא זוגי וגדול מ-2.

נגדיר E קבוצת הזוגיים

$(\forall x\in E)\wedge(x>2) : x>y$

.1 אם x זוגי וגדול מ 2 אז $x>y$.

.2 $(\exists x\notin E)\vee(x<2) : y>x$.

ג. y ראשוני אם הוא קטן מ-x.

נגדיר : P קבוצת הראשונים

$(x>y)\rightarrow y\in P$

.1 אם y קטן מx אז הוא ראשוני .

.2 $y\geq x \rightarrow y\notin P$

ד. $a=b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a\leq b$.

$(a=b)\rightarrow a\leq b$

.1 אם $a\leq b$ אז $a=b$.

.2 $a\neq b \rightarrow a>b$