מתמטיקה דיסקרטית - תרגול 6

סמסטר קיץ תשפ"ד

נושאים: פונקציות.

פונקציות

הגדרה 1. תהיינה A, B קבוצות. פונקציה f מ-A ל-B, $f : A \to B$ היא יחס מ-A ל-B ($f \subseteq A \times B$) כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש-$(a,b) \in f$. עבור $a \in A$, נסמן ב-$f(a)$ את ה-$b \in B$ היחיד שמקיים $(a,b) \in f$, ונאמר ש-"b הוא הערך של f ב-a", או ש-"f ממפה את a ל-b". A היא התחום (domain) של f, B היא הטווח (range) של f, ונסמן $A := \text{dom}(f)$ ו-$B := \text{range}(f)$. לכל קבוצה $S \subseteq A$, נגדיר

$$f(S) := \{f(s) \mid s \in S\} = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}.$$

בנוסף, התמונה של f מוגדרת להיות $\text{Im}(f) = f(A)$: אוסף כל התמונות האפשרויות של f.

תרגיל 1. מצאו את תמונת כל אחת מהפונקציות הבאות.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = -n$.
2. $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$, כך שלכל $w \in \{0,1\}^*$ מתקיים $f(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i$.
3. $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$, כך שלכל $w \in \{0,1\}^*$ מתקיים $f(w) = \prod_{i=1}^{|w|} w_i$.

פתרון 1. 1. התמונה של f היא אוסף כל השלמים האי-שליליים: $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

2. כל מספר טבעי הוא תמונה אפשרית: לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר את המילה $w = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n \text{ פעמים}} = 1^n \in \{0,1\}^*$ ונקבל $f(w) = n$. לכן $\text{Im}(f) = \mathbb{N}$.

3. התמונות היחידות האפשריות הן 0 ו-1, מכיוון שכל תמונה היא מכפלה של 0-ים ו-1-ים. בנוסף, $f(0) = 0$ ו-$f(\varepsilon) = 1$, ולכן $\text{Im}(f) = \{0,1\}$.

הגדרה 2. תהיינה A, B קבוצות ותהי $f : A \to B$ פונקציה.

1. f היא על אמ"מ לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש-$f(a) = b$ (באופן שקול $\mathrm{Im}(f) = B$).
2. f היא חד-חד ערכית (חח"ע) אמ"מ לכל $a \neq a' \in A$ מתקיים $f(a) \neq f(a')$. הקונטרפוזיטיב:
$$\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'.$$
3. f הפיכה אמ"מ קיימת פונקציה הופכית $g : B \to A$ של f, כלומר לכל $a \in A, b \in A$ מתקיים ש-$f(a) = b$ אמ"מ $g(b) = a$.

הגדרה 3. תהיינה A, B, C קבוצות ותהיינה $f : A \to B$ ו-$g : B \to C$ פונקציות. פונקציית ההרכבה $g \circ f : A \to C$ מוגדרת באופן הבא:
$$\forall a \in A : g \circ f(a) := g(f(a)).$$

1. f היא על אמ"מ לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כ

תרגיל 2. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם היא חח"ע ועל. במידה והפונקציה הפיכה, מצאו את הפונקציה ההופכית.

1. $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ כך שלכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ כך שלכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $g(x) = x + \frac{1}{x}$.
3. $h : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך שלכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $h(A) = A \cap \mathbb{N}$.

פתרון 2. **1.** $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ כך שלכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

(א) f חח"ע: יהיו $x, y \in (0, \infty)$ כך ש-$f(x) = f(y)$. אזי,
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y} \iff 1 + y = 1 + x \iff y = x.$$

(ב) f על: יהי $y \in (0, 1)$. נרצה למצוא $x \in (0, \infty)$ כך ש-$f(x) = y$:
$$f(x) = y \iff \frac{1}{1+x} = y \underset{(y \neq 0)}{\iff} \frac{1}{y} = 1 + x \iff x = \frac{1}{y} - 1.$$

קיבלנו כי עבור $x = 1/y - 1$ (שנמצא ב-$(0, \infty)$ מכיוון ש-$0 < y < 1$) מתקיים $f(x) = y$, ולכן f על.

(ג) קיבלנו ש-f הפיכה מכיוון שהיא חח"ע ועל. קודם לכן ראינו שלכל $y\in(0,1)$, $x\in(0,\infty)$ מתקיים

$$f(x)=y \iff x=\frac{1}{y}-1.$$

לכן, נבחר $g:(0,1)\to(0,\infty)$ להיות $g(y)=1/y-1$, ונקבל ש-g היא הפונקציה ההופכית ל-f.

2. $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ כך שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $g(x)=x+\frac{1}{x}$.

(א) g אינה חח"ע: למשל $g(2)=g(1/2)=2+\frac{1}{2}$.

(ב) g אינה על: לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $x\geq1$ או $1/x\geq1$, ולכן $1/x+x\geq1$ - כלומר אין מקור ל-$y=0.5$ למשל.

(ג) הראנו כי g אינה על ולכן אינה הפיכה.

3. $h:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך שלכל $A\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ מתקיים $h(A)=A\cap\mathbb{N}$.

(א) h אינה חח"ע: עבור $A=\mathbb{Z},B=\mathbb{Q}$ מתקיים $h(A)=h(B)=\mathbb{N}$, אבל $A\neq B$.

(ב) h אינה על: לא קיים מקור ל-$Y=\{0.5\}$. נניח בשלילה שקיים $X\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש-$h(X)=Y$. אזי $X\cap\mathbb{N}=\{0.5\}$, ומהגדרת חיתוך $0.5\in\mathbb{N}$ - סתירה!

הגדרה 4. תהי A קבוצה. פונקציית הזהות של A, $I_A:A\to A$ מוגדרת באופן הבא:

$$\forall a\in A: I_A(a)=a.$$

תרגיל 3. תהיינה X,Y,Z קבוצות ותהי $f:X\to Y$ פונקציה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. f היא חח"ע אמ"מ קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$g\circ f=I_X$.
2. f היא על אמ"מ קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$f\circ g=I_Y$.
3. תהיינה $A,B\subseteq X$ תתי-קבוצות. אזי $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
4. אם f חח"ע אז לכל $A,B\subseteq X$ שמקיימות $f(A)=f(B)$ מתקיים $A=B$.
5. f היא חח"ע אמ"מ לכל שתי פונקציות <u>שונות</u> $g_1:Z\to X$ ו-$g_2:Z\to X$ מתקיים $f\circ g_1\neq f\circ g_2$.

פתרון 3. 1. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(א) אם f חח"ע אז קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$I_X=g\circ f$: נניח ש-f חח"ע.

- מכיוון ש-f חח"ע, לכל $y\in Y$ מתקיים שלא קיים $x\in X$ כך ש-$y=f(x)$, או שקיים $x\in X$ יחיד כזה. בנוסף, יהי $x_0\in X$ שרירותי. נגדיר g באופן הבא:

$$\forall y\in Y:g(y)=\begin{cases}x & \exists x\in X:f(x)=y\\ x_0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

- יהי $x\in X$, נסתכל על $g\circ f(x)=g(f(x))$: נסמן $y=f(x)$. מכיוון ש-f חח"ע x הוא האיבר היחיד בתחום שממופה ל-y, ולכן $g\circ f(x)=x$.

(ב) אם קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$I_X=g\circ f$, אז f חח"ע.

- נניח שקיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$I_X=g\circ f$. יהיו $x,x'\in X$ כך ש-$f(x)=f(x')$. אזי,

$$g\circ f(x)=g\circ f(x'),$$

ומכיוון ש-$I_X=g\circ f$ נקבל ש-$x=x'$.

2. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(א) אם f היא על אז קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$f\circ g=I_Y$.

- נניח ש-f היא על. נגדיר פונקציה $g:Y\to X$ באופן הבא: מכיוון ש-f על, לכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך ש-$y=f(x)$. נגדיר את $g(y)$ להיות $x\in X$ שרירותי שמקיים זאת.
- יהי $y\in Y$, נסמן $x=g(y)$. מההגדרת g, x מקיים $y=f(x)$ ולכן $f\circ g(y)=f(g(y))=f(x)=y$.
- לכן $f\circ g=I_Y$.

(ב) אם קיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$f\circ g=I_Y$ אז f היא על.

- נניח שקיימת פונקציה $g:Y\to X$ כך ש-$f\circ g=I_Y$.
- יהי $y\in Y$. נשים לב שמתקיים $y=f\circ g(y)=f(g(y))$. נסמן $x=g(y)\in X$ ונקבל ש-$y=f(x)$.
- לכן לכל $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך ש-$y=f(x)$, וכך f היא על.

3. הוכחה:

$$\begin{aligned}f(A\cup B)&=\{f(x)\mid x\in A\cup B\}\\&=\{f(x)\mid x\in A\vee x\in B\}\\&=\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{f(x)\mid x\in B\}\\&=f(A)\cup f(B).\end{aligned}$$

4. **הוכחה:** נניח ש-f חח"ע. נניח בשלילה שקיימות $A \neq B \subseteq X$ כך ש-$f(A) = f(B)$. נניח בה"כ כי קיים $x \in A \setminus B$, אזי $f(x) \in A$. מכיוון ש-f חח"ע, לכל $x \neq x' \in X$ מתקיים $f(x) \neq f(x')$. לכן, מכיוון ש-$x \notin B$, לכל $x' \in B$ מתקיים $f(x) \neq f(x')$, ולכן $f(x) \notin f(B)$, בסתירה לכך ש-$f(A) = f(B)$.

5. נוכיח את שני כיווני הטענה.

(א) אם f היא חח"ע אז לכל שתי פונקציות שונות $g_1 : Z \to X$ ו-$g_2 : Z \to X$ מתקיים $f \circ g_1 \neq f \circ g_2$.

- נניח ש-f חח"ע, ויהיו $g_1 : Z \to X$ ו-$g_2 : Z \to X$ פונקציות שונות. אזי קיים $z \in Z$ כך ש-$g_1(z) \neq g_2(z)$.
- מכיוון ש-f חח"ע ו-$g_1(z) \neq g_2(z)$, נקבל ש-$f \circ g_1(z) = f(g_1(z)) \neq f(g_2(z)) = f \circ g_2(z)$ ולכן $f \circ g_1 \neq f \circ g_2$.

(ב) אם לכל שתי פונקציות שונות $g_1 : Z \to X$ ו-$g_2 : Z \to X$ מתקיים $f \circ g_1 \neq f \circ g_2$ אז f היא חח"ע.

- נניח ש-f אינה חח"ע, כלומר קיימים $x_1 \neq x_2 \in X$ כך ש-$f(x_1) = f(x_2)$.
- נגדיר פונקציות $g_1 : Z \to X$ ו-$g_2 : Z \to X$ באופן הבא:

$$\forall z \in Z : g_1(z) = x_1, g_2(z) = x_2.$$

ברור כי $g_1 \neq g_2$. עם זאת, לכל $z \in Z$ מתקיים

$$f \circ g_1(z) = f(g_1(z)) = f(x_1) = f(x_2) = f(g_2(z)) = f \circ g_2(z),$$

ולכן $f \circ g_1 = f \circ g_2$ - סתירה.