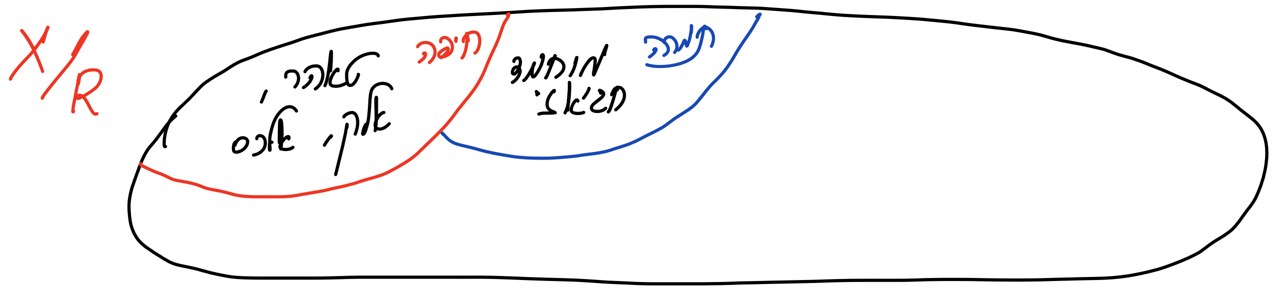
מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 5

דיון:- תהי X קבוצת כל האנשים בישראל. נניח שכל כפר/קיבוץ הם ערים. נגדיר יחס R על X באופן הבא:-
לכל $x,y\in X$ אומרים xRy אם"ם x גר באותה עיר כמו y.
R הוא יחס שקילות. מהי קבוצת המנה $X/_R$?



שימו לב [טאהר]$_R$ = [אלק ויינשטיין]$_R$

(אלק וטאהר נציגים לאותה מחלקת שקילות)

"נגדיר" פונקציה $f: X/_R \longrightarrow \{$א,ב,....,ת$\}$ ע"י

$f([a]_R) =$ האות הראשונה בשם הפרטי של a

הערה:- $f($[אלק ויינשטיין]$_R) =$ א

$\neq$

$f($[טאהר]$_R) =$ ט

לכן קוראים פונקציה לא מוגדרת היטב כי היא תלויה בנציגים.

חשוב מאוד:- כשמגדירים פונקציה מקבוצת מנה של יחס שקילות דבר ראשון שצריך לבדוק הוא שהפונקציה מוגדרת היטב.
כלומר שאם $[a]_R = [b]_R$ אז צריך להתקיים ש $f([a]_R)=f([b]_R)$

הגדרה :- תהיינה $f,g: X\to Y$ פונקציות. אז $f=g$ אם ורק אם לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=g(x)$.

תרגיל :- חשבו את $f^2=f\circ f$! - $f^3=f\circ f\circ f$ כאשר :-

א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י

$$f(n)=\begin{cases} n & 3|n \\ n-1 & \text{אחרת,} \end{cases}$$

ב. $f: P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $f(A)=A\oplus\mathbb{N}$.

פתרון :- א. $f^2(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$$f^2(1)=f(f(1))=f(0)=0$$

$$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=0$$

$$f^2(3)=f(f(3))=f(3)=3$$

באופן כללי :-

$$f^2(n)=\begin{cases} n & n=0\bmod 3 \\ n-1 & n=1\bmod 3 \\ n-2 & n=2\bmod 3 \end{cases}$$

נשים לב שלכל $n\in\mathbb{Z}$, $f^2(n)$ הוא מספר שמתחלק ב- 3 לכן $f^3(n)=f(f^2(n))=f^2(n) \Leftarrow f^3=f^2$.

ב. $f(A)=A\oplus\mathbb{N}$ לכן

$$f^2(A)=f(f(A))=f(A\oplus\mathbb{N})=(A\oplus\mathbb{N})\oplus\mathbb{N}$$

ונזכור ש $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ לכן

$$f^2(A)=(A\oplus\mathbb{N})\oplus\mathbb{N}=A\oplus\underbrace{(\mathbb{N}\oplus\mathbb{N})}_{\phi}=A\oplus\phi=A$$

$\Leftarrow$ $f^2(A)=A$ לכל $A\in P(\mathbb{R})$. כלומר $f^2=id_{P(\mathbb{R})}$ (פונקציית הזהות)

ו- $f^3(A) = f(f^2(A)) = f(A) \Leftarrow f^3=f$.

הערה: בסעיף ב' ראינו ש- f הפיכה כי $f\circ f = id_{P(\mathbb{R})}$ בנוסף $f^{-1}=f$.

תרגיל: תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f\circ g$ חח"ע אז g חח"ע.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

ג. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

פתרון: א. נכון. הוכחה: יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש- $g(a_1)=g(a_2)$. צ"ל $a_1=a_2$.
נפעיל את f על הביטוי $g(a_1)=g(a_2)$, נקבל

$$(f\circ g)(a_1) = f(g(a_1)) = f(g(a_2)) = (f\circ g)(a_2)$$

$f\circ g$ חח"ע לכן $a_1=a_2$.

$\boxed{}$

הערה: בסעיף ג' יש יותר תנאים מסעיף ב' לכן מבחינה אינטואיטיבית צריך לקבל תחושה שסעיף ב' לא נכון.

ג. (לפני ב'): יהיו $b_1,b_2\in B$ כך ש- $f(b_1)=f(b_2)$. נראה ש- $b_1=b_2$.
כיוון ש- $g:A\to B$ על אז קיימים $a_1,a_2\in A$ כך ש- $g(a_1)=b_1,\ g(a_2)=b_2$.
ואז נפעיל את f על שניהם נקבל:

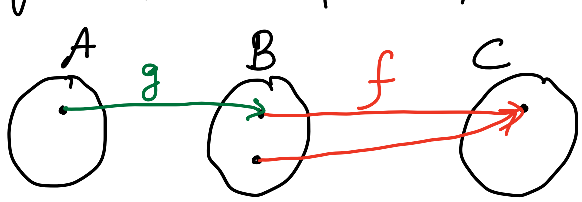
$$f(g(a_1)) = f(b_1)$$
$$f(g(a_2)) = f(b_2)$$
$$=$$

$$\Leftarrow \quad (f\circ g)(a_1) = f(g(a_1)) = f(g(a_2)) = (f\circ g)(a_2)$$

$f\circ g$ חח"ע לכן $a_1=a_2$. $g:A\to B$ פונקציה לכן $b_1=g(a_1)=g(a_2)=b_2$.

$\Leftarrow b_1=b_2 \Leftarrow f$ חח"ע.

ב. לא נכון. דוגמה נגדית:



$f\circ g$ חח"ע כי יש רק איבר אחד בתוך A. לעומת זאת f לא חח"ע.

הערה :- אם $h:C\to D,\ g:B\to C,\ f:A\to B$ פונקציות אז: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ ההרכבה אסוציאטיבית.

טענה :- תהיינה $f:A\to B,\ g:B\to C$ הפיכות. אז: $g\circ f$ הפיכה ומתקיים $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

הוכחה :- $g\circ f:A\to C$ נראה שקיימת פונקציה $h:C\to A$ כך ש- $h\circ(g\circ f)=id_A$ וגם $(g\circ f)\circ h=id_C$.

נתון ש- g,f הפיכות לכן קיימות $f^{-1}:B\to A$ ו- $g^{-1}:C\to B$ כך ש- $f\circ f^{-1}=id_B,\ f^{-1}\circ f=id_A,\ g\circ g^{-1}=id_C,\ g^{-1}\circ g=id_B$.

נתבונן בפונקציה הבאה :-

$$h=f^{-1}\circ g^{-1}:C\to A$$

מתקיים

$$h\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ g^{-1}\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{id}\circ f$$

$$=\underbrace{f^{-1}\circ id_B}_{f^{-1}}\circ f=f^{-1}\circ f=id_A$$

באותו אופן,

$$(g\circ f)\circ h=id_C$$

לכן h היא ההופכית של $g\circ f$ כלומר $g\circ f$ הפיכה!

הגדרה :- תהיינה X,Y קבוצות. נגדיר X^Y להיות קבוצת כל הפונקציות מ- Y ל- X.

$$X^Y:=\{f \mid f:Y\to X\}$$

תרגיל:- תהיינה A,B,C קבוצות ותהי $\varphi: A \to B$ פונקציה.
נגדיר $F: A^C \to B^C$ באופן הבא:-
$$\forall f \in A^C: \ F(f) = f \circ \varphi.$$
הוכיחו שאם φ חח"ע אז F חח"ע.

פתרון:- תהיינה $f \neq g \in A^C$. צ"ל $F(f) \neq F(g)$.
$f \neq g: C \to A$ לכן קיים $c \in C$ כך ש- $f(c) \neq g(c)$. עבור אותו $c \in C$
מתקיים $\varphi(f(c)) \neq \varphi(g(c))$ (כי φ חח"ע). אבל
$$(\varphi \circ f)(c) = \varphi(f(c)) \neq \varphi(g(c)) = (\varphi \circ g)(c)$$
קיבלנו שקיים $c \in C$ כך ש- $(\varphi \circ f)(c) \neq (\varphi \circ g)(c)$. לכן $\varphi \circ f \neq \varphi \circ g$
אבל $\varphi \circ f = F(f)$ ו- $\varphi \circ g = F(g)$
קיבלנו $F(g) \neq F(f) \Longleftarrow F$ חח"ע.

הגדרה:- תהי X קבוצה ותהי $A \subseteq X$. הפונקציה האופיינית של A
שמסומנת χ_A מוגדרת באופן הבא:-
$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$
$$\chi_A(b) = \begin{cases} 1 & b \in A \\ 0 & b \notin A \end{cases}$$

לדוגמה:- נתבונן ב- $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ אזי
$$\chi_{2\mathbb{N}}(0) = 1$$
$$\chi_{2\mathbb{N}}(7) = 0$$
$$\chi_{2\mathbb{N}}(17) = 0$$