ביום ראשון הקרוב אין תרגול

מתמטיקה דיסקרטית
תרגול 9

הגדרה :- יהי $(X,\le)$ קס"ח. $\mathcal{C}\subseteq X$ נקראת שרשרת אם לכל $x,y\in\mathcal{C}$ מתקיים $x\le y$ או $y\le x$. כלומר, $(\mathcal{C},\le)$ הוא קס"ל.

דוגמאות :- אם ניקח $X=\mathbb{N}^+$ עם היחס $x\le y \iff x|y$:-

1) $\mathcal{C}=\{1\}$ זו שרשרת.
2) $\mathcal{C}=\{4,8,32\}$ זו שרשרת.
3) $\mathcal{C}=\{4,8,12\}$ זו לא שרשרת כי $8\nmid 12$ וגם $12\nmid 8$.

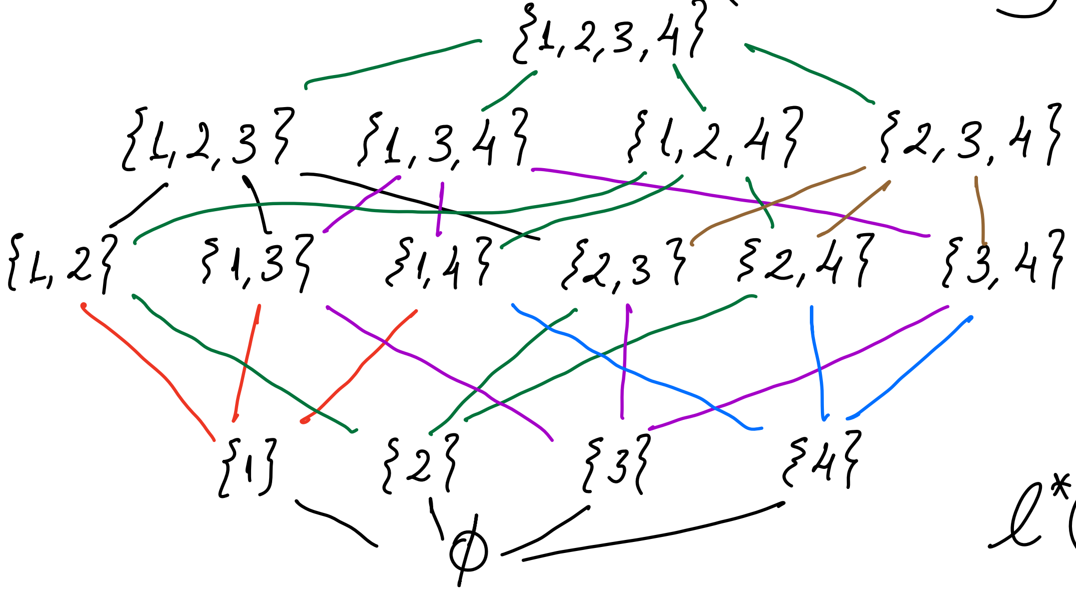
הגדרה :- יהי $(X,\le)$ קס"ח סופית. יהי $\mathcal{C}\subseteq X$ שרשרת. נגדיר $\ell(\mathcal{C})=|\mathcal{C}|$ מספר האיברים שיש ב- $\mathcal{C}$. בנוסף, נגדיר

$$\ell^*(X)=\max_{\mathcal{C}\subseteq X \text{ שרשרת}} \ell(\mathcal{C})$$

$\ell^*(X)$ גודל השרשרת הכי גדולה ב- $(X,\le)$.

לדוגמה :- יהי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי $X=P(A)$. נגדיר יחס על X להיות $MRN \iff M\subseteq N$ לכל $M,N\in X$.

אז דיאגרמת הסה של (X,R) היא :-



$\ell^*(X)=5$

הגדרה:- יהי $(X,\leq)$ קס"ח. $A\subseteq X$ נקראת אנטי-שרשרת אם כל שני איברים ב- A אינם ניתנים להשוואה. כלומר, לכל $x\neq y\in A$ לא מתקיים $x\leq y$ וגם לא מתקיים $y\leq x$.

דוגמאות:- בדוגמה האחרונה הקבוצה $A_2=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ היא אנטי שרשרת ב- (X,R). בנוסף

$$A_1=\{\phi\},\quad A_3=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

$$A_4=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$$

$$A_5=\{\{1,2,3,4\}\}$$

הערה:- כל קס"ח ניתן לחלק לאנטי-שרשראות.

תרגיל:- יהי $X=\{2,3,4,\dots,20\}$ עם יחס החלוקה. חלקו את X לאנטי שרשראות בשתי דרכים שונות.

פתרון:-

$$A_1=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

$$A_2=\{4,6,9,10,14,15\}$$

$$A_3=\{8,12,18,20\}$$

$$A_4=\{16\}$$

$$X=\bigcup_{i=1}^{4}A_i \implies \text{יש 4 קבוצות}$$

$$B_1=\{2,3\},\ B_2=\{4,5\},\ B_3=\{6,7\},\dots$$

זו גם חלוקה של X לאנטי-שרשראות.

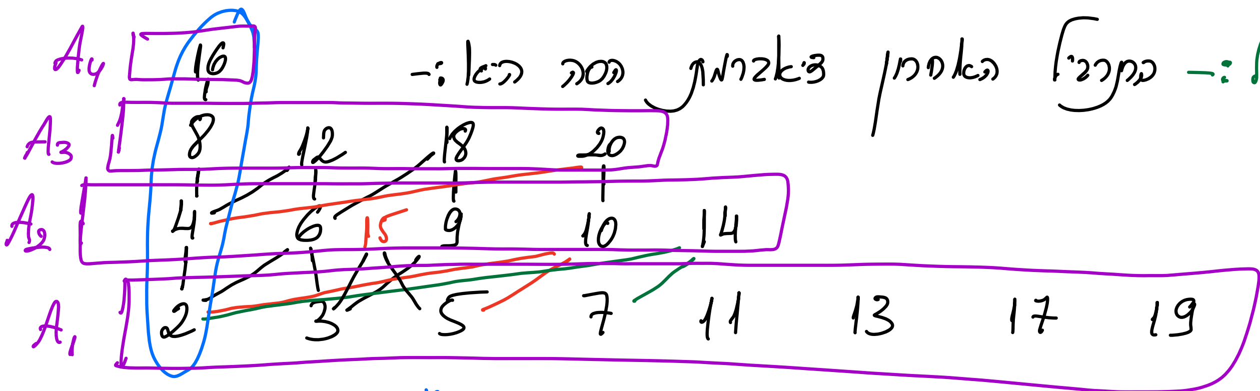
$$X=\bigcup_{i=1}^{10}B_i$$

הגדרה :- תהי $(X,\le)$ קס"ח סופית. נניח כי $X=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ חלוקה של X לאנטי-שרשראות. אז: $a\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=n$.

בנוסף, נגדיר $a_*(X)=\min\limits_{\substack{S \text{ חלוקה} \\ \text{של } X \text{ לאנטי-שרשראות}}} a(S)$

משפט מינימקס :- לכל קס"ח $(X,\le)$ סופית מתקיים $a_*(X)=\ell^*(X)$.

למשל :- בתרגיל האחרון דיאגרמת הסה היא :-



$\ell^*(X)=4$

$a_*(X)=4$

משפט האינדוקציה הכפולה :- תהי $P(n,m)$ תכונה כלשהי של איברים $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים :-

1) בסיס האינדוקציה :- הטענה $P(0,0)$ נכונה.

2) שלב האינדוקציה :- לכל $(0,0)\le_{cart}(n,m)\in\mathbb{N}^2$, נכונות הטענה $P(s,t)$ לכל $(s,t)\le_{cart}(n,m)$ גוררת נכונות הטענה $P(n,m)$.

אז: הטענה $P(n,m)$ נכונה לכל $(n,m)\in\mathbb{N}^2$.

$\left((x,y)\le_{cart}(a,b) \iff x\le a \text{ וגם } y\le b\right)$

הגדרות רקורסיביות :-

הגדרה :- הגדרה רקורסיבית של קבוצה כוללת שני חלקים :-

1. בסיס :- הגדרה כי איברים מסוימים שייכים לקבוצה המוגדרת.

2. כלל רקורסיבי :- שימוש באיברים שכבר ידוע שהם נמצאים בקבוצה
על מנת להגדיר עוד איברים בקבוצה.

תרגיל :- מצאו הגדרות רקורסיביות לקבוצות הבאות :-
א. קבוצת המספרים הטבעיים.
ב. קבוצת כל השלמים החיוביים האי-זוגיים.
ג. " " השליליים הזוגיים.

פתרון :- א. בסיס :- $0\in\mathbb{N}$.
כלל רקורסיבי :- אם $x\in\mathbb{N}$ אז $x+1\in\mathbb{N}$.

ב. בסיס :- $1\in 2\mathbb{N}+1$.
כלל רקורסיבי :- אם $x\in 2\mathbb{N}+1$ אז $x+2\in 2\mathbb{N}+1$
ג. בסיס :- $-2\in A$
כלל רקורסיבי :- אם $x\in A$ אז $x-2\in A$.

נוסחאות נסיגה :-
הגדרה :- תהי A קבוצה סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ של איברים ב-A היא פונקציה
$f:\mathbb{N}\to A$ המוגדרת ע"י $\forall k\in\mathbb{N}: f(k)=a_k$.

הגדרה :- תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f:\mathbb{N}\to A$ פונקציה.
הגדרה רקורסיבית של f כוללת :-
1. ערכי התחלה : קביעת הערכים $\underset{a_0}{f(0)},\underset{a_1}{f(1)},\dots,\underset{a_k}{f(k)}$ כאשר $k\in\mathbb{N}$
כלשהו.
2. כלל רקורסיבי :- הגדרת $f(n)$, לכל $n>k$ בעזרת
$f(0), f(1), \dots, f(k)$ או בעזרת חלק מערכים אלה.
ההגדרה של $f(n)$ ע"י ערכים קודמים נקראת נוסחת נסיגה או נוסחה

רקורסיביות.

תרגיל:- נגדיר $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י $f(0)=1$

$\forall n>0 : f(n) = 2f(n-1)$

א. הוכיחו שלכל $0 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=2^n$.

ב. מצאו נוסחה רקורסיבית אחרת שנותנת אותה פונקציה.

פתרון:- א. נוכיח באינדוקציה על n:-

① בסיס:- $n=0$, $f(0)=1$ $= 2^0 = 1$ ✓

② צעד:- נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$. נוכיח עבור n:-

$f(n) = 2f(n-1) \underset{\text{הנחה}}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

ב. נשים לב שאם n זוגי אז $2^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^n$. אם n אי-זוגי אז: $2^n = 2\left(2^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

לכן משילוב שתי העובדות האלו נקבל את הנוסחה:-

① ערך התחלתי:- $f(0)=1$.

② כלל רקורסיבי:-

$f(n) = \left(f\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2$, n זוגי.

$f(n) = 2\left(f\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2$, n אי-זוגי:

עוד דרך:- 1) $f(0)=1$.

2) $\forall n>0: f(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$

תרגיל:- תהי $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י:-

1) תנאי התחלה:- $f(0,0)=1$.

2) כלל רקורסיבי :-

$f(n,m) = 2f(n-1,m)$ לכל $n>0,\ m\geq 0$.

$f(n,m) = 3f(n,m-1)$ לכל $n\geq 0,\ m>0$.

א. חשבו את $f(3,2)$.

ב. מצאו נוסחה מפורשת עבור $f(n,m)$ והוכיחו אותה.

פתרון:- א. $f(3,2) = 2f(2,2) = 2\cdot 2f(1,2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(0,2)$

$= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3f(0,1) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3f(0,0) = 2^3\cdot 3^2 = 72$

ב. $f(n,m) = 2^n\cdot 3^m$. הוכחה :- נוכיח באינדוקציה כפולה :-

1) בסיס :- $1 = 2^0\cdot 3^0 = f(0,0) = 1$ ✓

2) שלב :- נניח שהטענה נכונה לכל הזוגות (s,t) שקטנים לפי היחס $\leq_{Cart}$ מ- (n,m). ונוכיח עבור $(0,0) \leq_{Cart} (n,m)$.

לכן $(0,0) \leq_{Cart} (n,m)$ לכן $0\leq n$ וגם $0\leq m$. $(n,m)\neq(0,0)$

לכן $0<m$ או $0<n$. בה"כ נניח ש- $0<n$. אז:

$f(n,m) = 2\cdot f(n-1,m) = 2\cdot 2^{n-1}\cdot 3^m = 2^n\cdot 3^m$

$(n-1,m) \leq_{Cart} (n,m)$ והנחת אינדוקציה

$\Leftarrow f(n,m) = 2^n\cdot 3^m$. באותו אופן אם $0<m$ (תשתמשו בכלל $f(n,m) = 3f(n,m-1)$).