לביא אלגאוס 213970817
דניאל וולודרסקי 318170958

**שאלה 1.** יהיו $p, q, r$ פסוקים, הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות בסעיפים הבאים. עבור הוכחה, עשו זאת <u>בשתי דרכים</u>: הן באמצעות טבלת אמת, והן הוכחה באמצעות זהויות.

א. $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

ב. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

ג. $((\neg p) \to q) \to p \equiv p \vee \neg p$

ד. $q \to (r \wedge \neg p) \equiv r \to (p \to q)$

ה. $\neg (p \to q) \vee r \equiv \neg p \wedge (r \vee q)$

א)

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \to r$ | $p \to (q \to r)$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \to r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | f | f | f | T | f |
| T | f | f | T | T | f | T |
| f | T | f | f | T | f | T |
| f | f | f | T | T | f | T |
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | f | T | T | T | f | T |
| f | T | T | T | T | f | T |
| f | f | T | T | T | f | T |

לפי טבלת האמת שני העמודות $p \to (q \to r)$ ו- $(p \wedge q) \to r$ שקולות ולכן הטענה נכונה.

עכשיו נוכיח את זה באמצעות זהויות:

$$p \to (q \to r) = p \to \neg(q \wedge \neg r) = \neg\left(p \wedge \neg\neg(q \wedge \neg r)\right) = \neg\left(p \wedge (q \wedge \neg r)\right)$$

כי $\neg(\neg A) = A$

$\Rightarrow$ לפי כללי דה-מורגן $\neg p \vee \neg(q \wedge \neg r) = \neg p \vee \neg q \vee \neg r.$

$$(p\wedge q)\to\neg r = \neg((p\wedge q)\wedge \neg r) = \neg(p\wedge q)\vee\neg r = \neg p\vee\neg q\vee\neg r$$

לפי כללי דה-מורגן   לפי כללי דה-מורגן

קיבלנו שהטענה נכונה

ג)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p\wedge q)$ | $(p\wedge q)\to r$ | $p\to r$ | $q\to r$ | $(p\to r)\vee(q\to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | f | T | f | T | T | T | T |
| f | T | T | f | T | T | T | T |
| f | f | T | f | T | T | T | T |
| T | T | f | T | f | f | f | f |
| T | f | f | f | T | f | T | T |
| f | T | f | f | T | T | f | T |
| f | f | f | f | T | T | T | T |

לפי טבלת האמת, שתי העמודות $(p\to r)\vee(q\to r)$ ו- $(p\wedge q)\to r$ שקולות ולכן הטענה נכונה.

עכשו נוכיח באמצעות זהויות:

$$(p\wedge q)\to r = \neg((p\wedge q)\wedge\neg r) = \neg(p\wedge q)\vee\neg\neg r = \neg(p\wedge q)\vee r$$

לפי כללי דה-מורגן

$$= \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p \to r) \lor (q \to r) = \neg(p \land \neg r) \lor \neg(q \land \neg r) \underset{\text{לפי כללי דה-מורגן}}{=} \neg p \lor r \lor \neg q \lor r$$

$$= \neg p \lor \neg q \lor r$$

ולכן קיבלנו ששני הביטויים שווים.

ב)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \to \neg q$ | $(\neg p \to \neg q) \to p$ | $p \lor \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | f | f | T | T | T |
| T | f | f | T | T | T | T |
| f | T | T | f | f | T | T |
| f | f | T | T | T | f | T |

לפי טבלת האמת קיבלנו ששני העמודות שונות ולכן הטענה לא נכונה.

ג)

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p$ | $(r \land \neg p)$ | $q \to (r \land \neg p)$ | $p \to q$ | $r \to (p \to q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | f | f | f | T | T |
| T | f | T | f | f | T | f | f |
| f | T | T | T | T | T | T | T |
| f | f | T | T | T | T | T | T |
| T | T | f | f | f | f | T | T |
| T | f | f | f | f | T | f | T |
| f | T | f | T | f | f | T | T |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | f | T | f | T | T | T |
| | | | | | | | |

לפי טבלת האמת הטענה לא נכונה.

ה)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $\neg(p \to q) \to r$ | $\neg p$ | $r \vee q$ | $\neg p \wedge (r \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | f | T | f | T | f |
| T | f | T | f | T | T | f | T | f |
| f | T | T | T | f | T | T | T | T |
| f | f | T | T | f | T | T | T | T |
| T | T | f | T | f | T | f | T | f |
| T | f | f | f | T | f | f | f | f |
| f | T | f | T | f | T | T | T | T |
| f | f | f | T | f | T | T | f | f |
| | | | | | | | | |

לכן לפי טבלת האמת הטענה לא נכונה.

**שאלה 2.** נגדיר קשר בינארי חדש בשם XOR (eXclusive OR), נסמן ב-$p \oplus q$) באמצעות טבלת האמת הבאה:

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

**א.** הביעו את $\oplus$ באמצעות $\wedge$, $\vee$ ו-$\neg$.

**ב.** הפריכו או הוכיחו באמצעות טבלת אמת ובאמצעות זהויות (שתי דרכים) כי לכל $p, q, r$ מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)\,.$$

**ג.** הוכיחו או הפריכו כי לכל $p, q, r$ מתקיים

$$p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge r) \oplus (p \wedge q)\,.$$

**ד.** הוכיחו או הפריכו כי לכל $p, q$ מתקיים

$$(p \oplus q) \oplus p \equiv q.$$

א) $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

ב)

| $q$ | $p$ | $r$ | $q \oplus p$ | $r \oplus q$ | $r \oplus (q \oplus p)$ | $(r \oplus q) \oplus p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | f | f | T | T |
| T | f | T | T | f | f | f |
| f | T | T | T | T | f | f |
| f | f | T | f | T | T | T |
| T | T | f | f | T | f | f |
| T | f | f | T | T | T | T |
| f | T | f | T | f | T | T |
| f | f | f | f | f | f | f |

לפי טבלת האמת הטענה לא נכונה:

באמצעות זהויות מקבלים:

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$$

$$(p \oplus q) \oplus r = (\neg p \land q) \lor (\neg q \land p) \oplus r = \neg\big((\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)\big) \land r \lor \neg r \land (\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$$

לפי כלל דה-מורגן $\Rightarrow \big(\neg(\neg p \land q) \land \neg(\neg q \land p)\big) \land r \lor \neg r \land (\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$

$$(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg p) \land r \lor \neg r \land \big((\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)\big)$$

$$\big((p \lor \neg q) \land (q \lor \neg p) \land r\big) \lor (\neg r \land \neg p \land q) \lor (\neg r \land \neg q \land p)$$

$$p \oplus (q \oplus r) = p \oplus (\neg q \land r) \lor (\neg r \land q) = \neg p \land \big((\neg q \land r) \lor (\neg r \land q)\big) \lor \neg\big((\neg q \land r) \lor (\neg r \land q)\big) \land p$$

לפי כלל דה-מורגן $= \neg p \land \big((\neg q \land r) \lor (\neg r \land q)\big) \lor \big(\neg(\neg q \land r) \land \neg(\neg r \land q)\big) \land p$

$$\neg p \land \big((\neg q \land r) \lor (\neg r \land q)\big) \lor (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg q) \land p$$

$$(\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg r \land q) \lor (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg q) \land p$$

$$(\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg r \land q) \lor \big(p(q \lor \neg r) \land p(r \lor \neg q)\big)$$

ג)

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\oplus r$ | $p\wedge(q\oplus r)$ | $p\wedge r$ | $p\wedge q$ | $(p\wedge r)\oplus(p\wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | f | f | T | T | f |
| T | f | T | T | T | T | f | T |
| f | T | T | f | f | f | f | f |
| f | f | T | T | f | f | f | f |
| T | T | f | T | T | f | T | T |
| T | f | f | f | f | f | f | f |
| f | T | f | T | f | f | f | f |
| f | f | f | f | f | f | f | f |

ולכן לפי טבלת האמת נקבל שהטענה נכונה.

ד)

| $p$ | $q$ | $(p\oplus q)$ | $(p\oplus q)\oplus p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | f | T |
| T | f | T | f |
| f | T | T | T |
| f | f | f | f |

לפי טבלת האמת קיבלנו שהטענה נכונה

**שאלה 3.** עבור כל אחת מהטענות הבאות:

- כתבו את הטענה בשפה מתמטית.
- כתבו את שלילת הטענה לאחר פישוט.

א. אין סטודנט שמצליח במבחן בלי לעשות את תרגילי הבית.

ב. כל בן אדם שאוהב מתמטיקה דיסקרטית אוכל גלידה.

ג. לכל שלם $n$ וראשוני $p$ מתקיים ש-$p$ לא מחלק את $n$.

ד. יש בניין בן יותר מ-100 קומות שלא נמצא באוניברסיטה.

ה. קיימים מספרים ממשיים $\alpha, \beta$ כך ש-$\alpha > \beta$, $\alpha^2 < \beta^2$ וגם $\alpha^3 > \beta^3$.

א) נסמן: $P(x)$ סטודנט שמצליח במבחן.

$Q(x)$ סטודנט שעושה תרגילי הבית

$$\forall x: x \in P(x) \rightarrow x \in Q(x)$$

שלילת הטענה:

$$\exists x: x \in P(x) \wedge x \notin Q(x)$$

ב) נסמן: $P(x)$ קבוצת כל האנשים שאוהבים מתמטיקה דיסקרטית

$Q(x)$ קבוצת כל האנשים שאוכלים גלידה.

$$\forall x: x \in P(x) \rightarrow x \in Q(x)$$

שלילת הטענה:

$$\exists x: x \in P(x) \wedge x \notin Q(x)$$

א) נסמן: $X$ קבוצת כל המספרים הראשונים

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \land p \in X \longrightarrow p \nmid n$$

שלילה של הטענה:
$$\exists n \in \mathbb{Z}, \land p \in X \longrightarrow p \mid n$$

ב) נסמן: $P(x)$ הבניין בן יותר מ 100 דירות.
$Q(x)$ הבניין נמצא באוניברסיטה.

$$\exists X : X \in P(x) \longrightarrow X \notin Q(x)$$

שלילה של הטענה:
$$\forall X : X \in P(x) \longrightarrow X \in Q(x)$$

ג)

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : \alpha > \beta \land \alpha^2 < \beta^2 \land \alpha^3 > \beta^3$$

שלילה של הטענה:
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : \alpha \leq \beta \lor \alpha^2 \geq \beta^2 \lor \alpha^3 \leq \beta^3$$

**שאלה 4.** יהיו $x, y \in \mathbb{N}$. כתבו כל אחת מהטענות הבאות בצורת "אם-אז" ובצורת הקונטרפוזיטיב.

א. $a = b$ הוא תנאי מספיק בשביל $a \geq b$.

ב. $y < x$ רק אם $x$ הוא זוגי וגדול מ-2.

ג. $y$ ראשוני אם הוא קטן מ-$x$.

ד. $a = b$ הוא תנאי הכרחי בשביל $a \leq b$.

א) $\forall a,b \in \mathbb{N}: a=b \rightarrow a \geq b$

קונטרפוזיטיב: $\forall a,b \in \mathbb{N}: a<b \rightarrow a \neq b$

ב) נסמן: $P(x)$ קבוצת כל המספרים הזוגיים

$\forall x,y \in \mathbb{R}: (x \in P(x) \wedge x>2) \rightarrow x \rightarrow y$

קונטרפוזיטיב: $\forall x,y \in \mathbb{R}: x<y \rightarrow x \notin P(x) \vee x \leq 2$

ג) נסמן $P(x)$ קבוצת המספרים הראשונים

$\forall y \in \mathbb{N}: y<x \rightarrow y \in P(x)$

קונטרפוזיטיב: $\forall y \in \mathbb{N}: y \notin P(x) \rightarrow y \geq x$

ד) $\forall a,b \in \mathbb{R}: a=b \rightarrow a \leq b$

קונטרפוזיטיב: $\forall a,b \in \mathbb{R}: a>b \rightarrow a \neq b$