

# 1 一元函数微分学的计算

## 1.1 基本求导公式

1.  $(x^a)' = ax^{a-1}$  ( $a$  为常数)

2.  $(a^x)' = a^x \ln a$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

3.  $(e^x)' = e^x$

4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

5.  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

### 6. 三角函数求导

- $(\sin x)' = \cos x$

- $(\cos x)' = -\sin x$

- $(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- $(\sec x)' = \sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

- $(\csc x)' = -\csc x \cot x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7.  $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8.  $[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

## 1.2 四则运算

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2.  $d[u(x) \pm v(x)] = d[u(x)] \pm d[v(x)]$

3.  $(uv)' = u'v + uv'$

4.  $d[u(x)v(x)] = u(x)d[v(x)] + v(x)d[u(x)]$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$6. d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)d[u(x)] - u(x)d[v(x)]}{[v(x)]^2} \quad v(x) \neq 0$$

### 1.3 复合函数的导数与微分形式不变性

设  $u = g(x)$  在点  $x$  处可导,  $y = f(u)$  在点  $u = g(x)$  处可导, 则

- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$
- $d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx = f'[g(x)]d[g(x)]$

### 1.4 分段函数的导数

设

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$$

其中  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  分别在  $x > x_0$  与  $x < x_0$  时可导, 则:

① 在分段点  $x_0$  处, 用导数定义求导:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f_2(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

根据  $f'_+(x_0)$  是否等于  $f'_-(x_0)$  来判定  $f'(x_0)$

② 在非分段点用导数公式求导:

$$\begin{cases} x > x_0, & f'(x) = f'_1(x), \\ x < x_0, & f'(x) = f'_2(x). \end{cases}$$

### 1.5 反函数的导数

1. 设  $y = f(x)$  为单调且可导函数, 并且  $f'(x) \neq 0$ , 则存在反函数  $x = \varphi(y)$ , 且

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

即

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

### Example

设  $y = \arcsin x$ ,  $-1 < x < 1$ , 则其反函数为

$$x = \sin y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

根据反函数求导公式,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

其中  $-1 < x < 1$ 。

2.

$$3. \quad y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}, \quad \text{即 } y = f(x), x = \varphi(y), \varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

### 解析

在  $y = f(x)$  单调且二阶可导的情况下, 若  $f'(x) \neq 0$ , 则存在反函数  $x = \varphi(y)$ 。

记

$$f'(x) = y'_x, \quad \varphi'(y) = x'_y,$$

则有

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

进一步,

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x'_y} \right) \\ &= \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{x'_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \left( -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2} \right) \cdot \frac{1}{x'_y} \\ &= -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}. \end{aligned}$$

$$4. \quad x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

## 1.6 隐函数求导法

设函数  $y = f(x)$  是由方程  $F(x, y) = 0$  确定的可导函数, 则

① 方程  $F(x, y) = 0$  两边对自变量  $x$  求导, 注意  $y = y(x)$ , 即将  $y$  看作中间变量, 得到一个关于  $y'$  的方程

② 解该方程便可求出  $y'$

## 1.7 参数方程所确定的函数的导数

设函数  $y = y(x)$  由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定, 其中  $t$  为参数, 且  $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$  均可导, 并且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

## 1.8 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子, 一般先取对数再求导。设  $y = f(x)$  (其中  $f(x) > 0$ ), 则

① 等式两边取自然对数, 得

$$\ln y = \ln f(x).$$

② 两边对自变量  $x$  求导 (注意  $y = y(x)$ , 将  $y$  视为中间变量), 得

$$\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]'.$$

因此

$$y' = y \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

## 1.9 幂指数函数求导法

对于  $u(x)^{v(x)}$  ( $u(x) > 0$ , 且  $u(x) \neq 1$ ), 除了用上面的对数求导法, 还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

然后求导

## 1.10 ★ 高阶导数

1. 归纳法: 逐次求导, 探索规律, 得出通式

2. 莱布尼茨公式: 设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  均  $n$  阶可导, 则

$$\bullet (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$\bullet \star (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$\bullet C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

•

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \end{array}$$

### 3. 泰勒展开式

- ① 抽象展开：任何一个在点  $x_0$  的邻域内无穷阶可导的函数，都可以表示为其泰勒级数

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

特别地，当  $x_0 = 0$  时，称为麦克劳林展开式：

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- ② 具体展开：当题目给出具体的无穷阶可导函数  $y = f(x)$  时，可利用已知基本函数的展开式，将其展开为幂级数（此处使用  $m$ ）。
- ③ 函数泰勒展开式的唯一性：无论  $f(x)$  通过何种方法展开，其泰勒展开式具有唯一性。因此可通过比较①、②中幂级数的系数，求出  $f^{(n)}(x_0)$  或  $f^{(n)}(0)$
- $x$  的幂数相等，得到  $m$  和  $n$  的关系式
  - $x^n$  的系数相等，得到  $f^{(n)}(x_0)$  或  $f^{(n)}(0)$
  - 消去  $m$

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, & |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, & |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, & |x| < 1 \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots, & |x| < 1 \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots, & |x| < \frac{\pi}{2} \\
\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots, & |x| \leq 1 \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, & |x| \leq 1
\end{aligned}$$

## 1.11 基础概念

## 1.12 结论

## 1.13 定理

## 1.14 运算

## 1.15 公式

1.  $[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
2.  $[\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x^2 - a^2 > 0$
3.  $(x \ln x)' = \ln x + 1$
4.  $(\frac{1}{x} \ln x)' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$

## 5. 常用的高阶导数

- $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}.$
- $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
- $[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
- $[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$
- $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

### 1.16 方法总结

1. 对于  $g(x) = x^k f(x)$  型, 可以考虑用泰勒公式求  $g^{(n)}(0)$

### 1.17 条件转换思路

### 1.18 理解