1 特征值与特征向量

1.1 基础概念

1. 设 A 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 α 使得 $A\alpha=\lambda\alpha$ 成立，则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值，称非零向量 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的一个特征向量

2. 设 $A=[a_{ij}]$ 为一个 n 阶矩阵，则行列式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的特征多项式，$|A-\lambda E|=0$ 称为 A 的特征方程

3. 设 A 和 B 都是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$ 则称矩阵 A 和 B 相似，记作 $A\sim B$。相似具有如下性质
   - 反身性: $A\sim A$
   - 对称性: $A\sim B\Leftrightarrow B\sim A$
   - 传递性: $A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C$

4. 如果 A 能与**对角矩阵**相似，则称 A可对角化

5. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，称 $\mathbf{A}$ 的**迹（trace）**为主对角线上元素之和，记作：$\operatorname{tr}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

1.2 运算

1. 设矩阵 A 的特征值为 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，即：$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 则

A	$kA+E$	$A+kE$	A^{-1}	A^*	A^T	A^n	$P^{-1}AP$	$f(A)$
λ	$k\lambda+1$	$\lambda+k$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ	λ^n	λ	$f(\lambda)$
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}^T$	$\boldsymbol{\alpha}$	$P^{-1}\boldsymbol{\alpha}$	α

1.3 定理

1. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t$ 都是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，那么当 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 非零时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 仍是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量

2. 若 α_1,α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量，则 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量

3. 设 A 是 n 阶矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，则

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum \lambda_i = \sum a_{ii} \\
&\Rightarrow |A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \\
&\Rightarrow |A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \\
&\Rightarrow |A - aE| = (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) \cdots (\lambda_n - a) \\
&\Rightarrow |A^{-1} + kE| = (\frac{1}{\lambda_1} + k)(\frac{1}{\lambda_2} + k) \cdots (\frac{1}{\lambda_n} + k)
\end{aligned}$$

4. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 分别是与之对应的特征向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关

5. 如果 A 是 n 阶矩阵，λ_i 是 A 的 m 重特征值，则属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不超过 m 个

6. 如果 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda_A = \lambda_B \\
&\Rightarrow A - \lambda E = B - \lambda E \\
&\Rightarrow |A| = |B| \\
&\Rightarrow r(A) = r(B) \\
&\Rightarrow tr_A = tr_B
\end{aligned}$$

7. 单位矩阵只和自身相似

8. n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量

9. n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于 A 的每个特征值，其线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数。即若 $A \sim \Lambda$，则

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda_i \text{ 是} A \text{ 的} n_i \text{ 重特征值，且} \lambda_i \text{ 有} n_i \text{ 个线性无关的特征向量} (n - r(A)) \\
&\Leftrightarrow r(A - \lambda_i E) = n - n_i, \quad \lambda_i \text{ 为} n_i \text{ 重特征值}
\end{aligned}$$

10. 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则 A 可相似对角化，且有：

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

其中存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP = \Lambda, \quad P = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n],$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是与特征值 λ_i 对应的特征向量

11. 实对称矩阵 A 的不同特征值 λ_1, λ_2 所对应的特征向量 α_1, α_2 比**正交**
12. 实对称矩阵 A 的特征值都是实数
13. n 阶实对称矩阵 A 必可对角化，且总存在正交阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值
14. 上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是矩阵主对角线上的元素

1.4 公式

1. $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$，则

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}$$

1.5 方法步骤

1. Schmidt 正交规范化方法: 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2, \end{aligned}$$

那么 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交，称为正交向量组，将其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 这一过程称为Schmidt 正交规范化
2. 证明 $A \sim B \Rightarrow A \sim \lambda$且$\lambda \sim B \Rightarrow A \sim B$
3. 证明 A 可相似对角化 $\Rightarrow A \sim B$且$B \sim \lambda \Rightarrow A \sim \lambda$ 即 A 可相似对角化
4. 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 有 $(\lambda E - A)\alpha = 0$，即 α 是齐次线性方程组 $(\lambda E - A)\alpha = 0$ 的非零解
   (a) 先由 $|A - \lambda E| = 0$ 求矩阵 A 的特征值 λ_i(共n个，含重根)
   (b) 再由 $(A - \lambda E)\alpha = 0$ 求基础解系，即矩阵 A 属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量

5. 判断 A 与 B 相似
   (a) 如果不满足以下条件则不相似
      - $\lambda_A = \lambda_B$
      - $A - \lambda E = B - \lambda E$
      - $|A| = |B|$
      - $r(A) = r(B)$
      - $tr_A = tr_B$
   (b) A 与 B 都可对角化
6. 若已知两个特征向量，求第三个特征向量时，可根据正交条件构造方程组求解。即
$$\boldsymbol{\alpha}_3 \perp \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \perp \boldsymbol{\alpha}_2.$$
7. 若已知一个特征向量，且另两个特征值相同（即存在重根），则可设一般形式的特征向量，并利用正交条件建立方程组，求得一组线性无关的特征向量作为基础解系
8. 对于实对称矩阵 A求正交矩阵 Q 或正交对角矩阵的时候需要对特征向量改造
   - 特征值不同⇒ 单位化
   - 特征值有重根
     - 特征向量正交⇒ 单位化
     - 特征向量不正交⇒ Schmidt 正交规范化，即正交化 + 单位化
     - 故: 计算重根特征值的特征向量时直接给出正交的特征向量
9. 矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
   特征值从主对角线上看出来，为 $1, 3, 6$ 且特征值 6 的特征向量是 $(0, 0, 1)^T$
10. 求实对称矩阵 A 的特征值（解方程 $|A - \lambda E| = 0$）的方法：
   (a) 通过行列式初等变换，将副对角线元素化为 0（对角化处理）
   (b) 对列进行操作，例如 $C_3 - C_1$，简化行列式
   (c) 对行进行操作，例如 $R_1 + R_3$，进一步化简
11. 用正交矩阵将实对称矩阵 A 化为对角矩阵的步骤
   (a) 处理一些未知参数
   (b) 求矩阵 A 的特征值
   (c) 求矩阵 A 的特征向量
   (d) 单位化，当特征值有重根时，可能还要 Schmidt 正交化
   (e) 构造正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$，其中 P 与 Λ 次序要协调一致

1.6 条件转换思路

1. 实对称矩阵

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \text{必与对角矩阵相似}\\
&\Leftrightarrow \text{可用正交矩阵对角化}\\
&\Leftrightarrow \text{不同特征值的特征向量必正交}\\
&\Leftrightarrow \text{特征值必是实数}\\
&\Leftrightarrow k\text{重特征值必是实数必有}k\text{个线性无关的特征向量}
\end{aligned}
$$

2. $A \sim B$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ A^n = PB^nP^{-1}\\
&\Rightarrow \lambda_A = \lambda_B\\
&\Rightarrow A - \lambda E = B - \lambda E\\
&\Rightarrow |A| = |B|\\
&\Rightarrow r(A) = r(B)\\
&\Rightarrow tr_A = tr_B\\
&\Rightarrow\ A + kE \sim B + kE\\
&\Rightarrow\ (A + kE)^n \sim (B + kE)^n\\
&\Rightarrow\ f(A) \sim f(B)\\
&\Rightarrow\ |A + kE| = |B + kE|\\
&\Rightarrow\ r(A + kE) = r(B + kE)\\
&\Rightarrow\ A^n \sim B^n\\
&\Rightarrow\ A^T \sim B^T\\
&\Rightarrow\ A^* \sim B^*\\
&\Rightarrow\ A^{-1} \sim B^{-1}\\
&\Rightarrow\ \text{若}A\boldsymbol{\alpha}_A = \lambda\boldsymbol{\alpha}_A,\ \text{则}B(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_A) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_A) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_B = P^{-1}\boldsymbol{\alpha}_A\\
&\Rightarrow\ \text{若}B\boldsymbol{\alpha}_B = \lambda\boldsymbol{\alpha}_B,\ \text{则}A(P\boldsymbol{\alpha}_B) = \lambda(P\boldsymbol{\alpha}_B) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_A = P\boldsymbol{\alpha}_B
\end{aligned}
$$

3. $P_1^{-1}AP_1 = B, P_2^{-1}BP_2 = C \Rightarrow P^{-1}AP = C$,其中$P = P_1P_2$

4. $r(A) < n \Rightarrow 0$是A的特征值

5. A 是 n 阶矩阵，若 $r(A) = 1$，则

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \text{矩阵 } A \text{ 的行向量组线性相关，且秩为 } 1\\
&\Rightarrow\ |A - \lambda E| = \lambda^n - \sum a_{ii}\lambda^{n-1}\\
&\Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0\\
&\Rightarrow\ \lambda_n = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}
\end{aligned}
$$

6. 求矩阵 A 中参数

- 已知特征向量 α
  (a) 构造方程组
  (b) $A\alpha = \lambda\alpha$
  (c) 解 A 中变量和 λ
- 相似于对角矩阵（可以对角化）
  (a) 需要有 n 个线性无关的特征向量
  (b) 若有重根，则 $n - r(A - \lambda E) =$ 重根个数
  (c) $|A - \lambda E| = 0$ 计算特征值和特征向量
- 特征值 $\lambda \Rightarrow |A - \lambda E| = 0$

7. 抽象矩阵思考:
   - 线性相关 + 线性方程组
   - 秩
8. $A^2 = A \Rightarrow A$ 的特征值只能取 1 或 0

1.7 理解

1. 在求参数的问题中，可以由特征向量可构造方程组
2. 特征向量 = k 基础解系，其中 k 为非零常数
3. $a \neq 0$，矩阵 A 如下

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$$

解析

$$A = (1-a)E + aJ_4,$$

其中 J_4 是 4×4 全 1 矩阵。已知 J_4 的特征值为 $4,0,0,0$

$$\because J_4\boldsymbol{\alpha}_1 = 4\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\therefore \text{特征值4的特征向量是}(1,1,1,1)^T$$

对于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，它们满足 $J_4\boldsymbol{\alpha}_i = 0$，因为四个分量和为零，因此它们属于零特征值的特征空间，故取标准基

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,0,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,0,0,-1)^T$$

利用线性性质求 A 的特征值：

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{\alpha}_1 &= (1-a)\boldsymbol{\alpha}_1 + aJ_4\boldsymbol{\alpha}_1 = (1-a)\boldsymbol{\alpha}_1 + a\cdot 4\boldsymbol{\alpha}_1 = (1+3a)\boldsymbol{\alpha}_1,\\
A\boldsymbol{\alpha}_2 &= (1-a)\boldsymbol{\alpha}_2 + aJ_4\boldsymbol{\alpha}_2 = (1-a)\boldsymbol{\alpha}_2 + a\cdot 0 = (1-a)\boldsymbol{\alpha}_2,\\
A\boldsymbol{\alpha}_3 &= (1-a)\boldsymbol{\alpha}_3 + aJ_4\boldsymbol{\alpha}_3 = (1-a)\boldsymbol{\alpha}_3,\\
A\boldsymbol{\alpha}_4 &= (1-a)\boldsymbol{\alpha}_4 + aJ_4\boldsymbol{\alpha}_4 = (1-a)\boldsymbol{\alpha}_4.
\end{aligned}$$

故 A 的特征值为$1+3a, 1-a, 1-a, 1-a,\quad$ 对应特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.