

# 1 一元函数微分学的概念

## 1.1 导数

1. 设  $y = f(x)$  定义在区间  $I$  上, 让自变量在  $x = x_0$  处加一个增量  $\Delta x$  (可正可负), 其中  $x_0 \in I, x_0 + \Delta x \in I$ , 则可得函数的增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。若函数增量  $\Delta y$  与自变量增量  $\Delta x$  的比值在  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限存在, 即  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称这个极限为  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的 **导数 (变化率)**, 记作  $f'(x_0)$ , 即

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (*)$$

广义化

$$\lim_{\text{狗} \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \text{狗}) - f(x_0)}{\text{狗}}. \quad (**)$$

令  $x_0 + \Delta x = x$ , 从而得到

$$\text{函数式 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (***)$$

2. 下面这三种提法是等价的:

- $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导;
- $y = f(x)$  在点  $x_0$  处导数存在;
- $f'(x_0) = A$  ( $A$  为有限数)。

3. ★ 函数在一点可导的充要条件:  $f'(x_0)$  存在  $\Leftrightarrow$  其左导数  $f'_-(x_0)$  与右导数  $f'_+(x_0)$  均存在且相等

4. 函数在一点可导的必要条件: 若  $f(x)$  在一点可导  $\Rightarrow f(x)$  在该点连续, 反之未必

5. 导数的性质

- ★求导一次, 奇偶性互换 (导数定义)
- 若  $f(x)$  是可导的周期为  $T$  的周期函数, 则  $f'(x)$  也是以  $T$  为周期的周期函数 (导数定义)
- 若  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 若  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  单调递减

## 1.2 导数的几何意义

1. 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数值  $f'(x_0)$ , 就是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  处切线的斜率  $k$ , 即  $k = f'(x_0)$ , 因此, 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

该点处的法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

## 2. 切线存在不代表导数存在，但导数存在切线一定存在

- $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ , 出现角点(尖点), 则  $f(x)$  在  $x_0$  处不可导, 没有切线。e.g.  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处
- $f(x)$  在点  $x_0$  的导数是无穷导数时, 在该点有切线但无导数。e.g.  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  在  $x = 0$  处

## 1.3 微分的概念

1. 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义, 且  $x_0 + \Delta x$  在该邻域内, 对于增量函数

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

若存在与  $\Delta x$  无关的常数  $A$ , 使得

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x).$$

其中  $o(\Delta x)$  是在  $\Delta x \rightarrow 0$  时比  $\Delta x$  更高阶的无穷小, 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 并把增量的主要部分  $A \Delta x$  称为线性主部, 也叫做  $f(x)$  在点  $x_0$  处的微分, 记  $dy|_{x=x_0} = A \Delta x = f'(x_0) dx$

### 2. 可微的判别

- 一元函数可微  $\Leftrightarrow$  可导
- 做极限

① 写增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

② 写线性增量  $A \Delta x = f'(x_0) \Delta x$

③ 做极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A \Delta x}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = A \Delta x + o(\Delta x)$$

④ 若该极限等于 0, 则  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 否则不可微

3. 可微的含义: 用形式简单的“线性增量  $A \Delta x$ ”去代替形式复杂的“增量  $\Delta y$ ”, 且其误差“ $\Delta y - A \Delta x$ ”是  $o(\Delta x)$ , 即用“简单的量”代替了“复杂的量”, 且产生的误差又可以忽略不计

4. 可微的几何意义: 若  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 则在点  $(x_0, y_0)$  附近可以用切线段近似代替曲线段

## 1.4 基础概念

## 1.5 结论

1. 若函数  $\varphi(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 则函数  $f(x) = |x - x_0| \varphi(x)$  在  $x = x_0$  处可导的充要条件是  $\varphi(x_0) = 0$
2. 函数  $f(x)$  与  $|f(x)|$  的连续性与可导性关系总结:
  - 若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $|f(x)|$  在  $x_0$  处连续; 反之不成立。
  - 若  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则:
    - (a) 若  $f(x_0) \neq 0$ , 则  $|f(x)|$  在  $x_0$  处可导, 且

$$(|f(x)|)'|_{x=x_0} = \begin{cases} f'(x_0), & f(x_0) > 0, \\ -f'(x_0), & f(x_0) < 0. \end{cases}$$

(b) 若  $f(x_0) = 0$ , 则:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导, 且 } |f(x)|'_{x=x_0} = 0, \\ f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处不可导.} \end{cases}$$

(c) 总结不可导即:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \\ f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处不可导}$$

3.  $f^{(n)}(x_0)$  存在  $\Rightarrow f^{(n-1)}(x)$  在  $x_0$  附近有定义且在  $x_0$  处连续

## 1.6 定理

## 1.7 运算

## 1.8 公式

1.  $[(e^x - 1)g(x)]' = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$

## 1.9 方法总结

## 1.10 条件转换思路

## 1.11 理解

1. 对于连续或可导函数, 只要  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ), 无论  $f(x_0)$  与 0 的距离有多小, 它旁边相依相偎的  $f(x)$  一定  $> 0$  (或  $< 0$ )

2. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内有定义, 且  $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ , 证明  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续、可导且  $f'(0) = 0$

### 经典

**证明:** 分三个层次完成。

#### (1) 求函数极限

由

$$0 \leq |f(x)| \leq 1 - \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0,$$

根据夹逼准则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

#### (2) 求函数值, 验证连续性

在原不等式中令  $x = 0$ , 得

$$|f(0)| \leq 1 - \cos 0 = 0,$$

故  $f(0) = 0$ 。

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

即  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 并且有

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq 1 - \cos x.$$

#### (3) 求导数 (按定义)

由上述不等式可得

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \frac{1 - \cos x}{|x|}.$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{|x|} = 0,$$

再次由夹逼准则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

从而  $f'(0) = 0$ 。

综上,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续、可导, 且  $f'(0) = 0$