1 向量

1.1 基本概念

1. n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量

2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，如果存在不全为零的数 k，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

   (a) 有零向量
   (b) 两向量成比例
   (c) $n+1$ 个 n 维向量

3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2})^T, \ldots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{s2})^T, \ldots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{sm})^T$，其中 $s \leq r$，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组

4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 β，若存在实数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \beta$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ **线性表出(示)**

5. 设有两个 n 维向量组 $(I)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s; (II)\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出

6. 如果 $(I)(II)$ 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**

7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $a_j(j = 1, 2, \ldots,)$，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**

   - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
   - 极大线性无关组不唯一，但其内的向量个数一致，即向量组的秩

8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩

   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq n$

9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，也不会改变它们之间的线性组合系数

10. 线性表示具有传递性

1.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关

   $\Leftrightarrow$ 其次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = 0$有非零解

   $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < s$, s表示**未知数的个数或向量个数**

   $\Leftrightarrow$ $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| = 0$

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关

   $\Leftrightarrow$ 其次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = 0$只有零解

   $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s$, s表示**未知数的个数或向量个数**

   $\Leftrightarrow$ $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| \neq 0$

3. 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

4. $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关

5. 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 相关$\Rightarrow$ 整体组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots \alpha_s$ 相关

6. 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots \alpha_s$ 无关$\Rightarrow$ 部分组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 无关

7. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关$\Rightarrow$ 延伸组$\widetilde{\alpha_\mathbf{1}}, \widetilde{\alpha_\mathbf{2}}, \ldots, \widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性无关

8. $\widetilde{\alpha_\mathbf{1}}, \widetilde{\alpha_\mathbf{2}}, \ldots, \widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性相关$\Rightarrow$ 缩短组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关

9. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出

   $\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s]^T = \beta$有解

   $\Leftrightarrow$ 秩$r[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta]$

10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关，则其中**必有一个向量**可用其余向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关

11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，且**表示法唯一**

12. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，且 $s > t$，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。即**如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关**

13. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，且它可由可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则 $s \leq t$

14. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$

15. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组，则 $r(I) = r(II)$

16. 如果 $r(A) = r$，则 A 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(A) = A$ 的列秩

17. 一般地，$r(A) = A$的列秩 $= A$的行秩

18. A 是 $m \times n$ 矩阵，则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $\mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$

1.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$，则

   (a) $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$
   (b) $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$
   (c) $0\alpha = 0$
   (d) $(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$
   (e) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
   (f) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
   (g) $\alpha + 0 = \alpha$
   (h) $\alpha + (-\alpha) = 0$
   (i) $1\alpha = \alpha$
   (j) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
   (k) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
   (l) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

1.4 公式

1.5 方法步骤

1. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，求表达式???

2. 判断多个向量是否线性相关

   - 含有零向量 **0** $\Rightarrow$ 线性相关
   - 两个向量成比例 $\Rightarrow$ 线性相关
   - 存在关系 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$(定义) $\Rightarrow$ 线性相关

3. 线性无关的判定与证明: 若向量的坐标没有给出，通常用**定义法**或 **秩的理论**或 **反证法**

   (a) **定义法**证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

      i. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
      ii. $\Downarrow$ 恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件或重组)
      ii. $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$

   (b) **秩**证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

      i. $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_s]^T = 0$ 只有零解
      ii. $\Leftrightarrow$ 秩r$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$
         - $r(A) = A$的列秩 $= A$的行秩
         - $r(AB) \le r(A)$且$r(AB) \le r(B)$
         - 若 A 可逆，则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$

- 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，且 $r(A) = n$，则 $r(AB) = r(B)$
- 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = \mathbf{O}$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

(c) **反证法**

(d) 线性方程组 $Ax = 0$

- 只有零解$\Leftrightarrow$ 线性无关
- 有非零解$\Leftrightarrow$ 线性相关

(e) 若是 n 个 n 维向量

- $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$ 相关
- $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ 无关

4. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体 $\Rightarrow$ 非齐次线性方程组是否有解

- 有解 $\Rightarrow$ 能线性表出
- 无解 $\Rightarrow$ 不能线性表出

(b) 若向量坐标没有 $\Rightarrow$ 线性相关或秩

- $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 线性表出
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 不能线性表出
- 线性相关

5. 求向量组的秩

- 设向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 的矩阵为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s]$ 对 A 作初等行变换得到行最简形矩阵 A'，则

$$r(A') = r(A) = \text{向量组}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)\text{的秩}$$

- 若存在 r 阶子式不为零，则 r 为矩阵的秩，对应的 r 个向量构成一组最大线性无关组

6. 分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 能够由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

(a) 定义: 是否存在系数 c_1, c_2, c_3 使得

$$\beta_i = c_{1i}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_{3i}\alpha_3$$

对每一个 $i = 1, 2, 3$ 都成立

(b) 向量组 $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 能由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ B中的每个向量都是A的线性组合
$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A, B)$加上B中的向量后秩不变，说明这些向量能有A线性表出
$\Leftrightarrow$ 若B线性无关 $\Rightarrow$ A线性无关
$\Leftrightarrow$ 若B线性相关 $\Rightarrow$ A线性相关

1.6 条件转换思路

1. 向量组$(I)(II)$等价

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ (I)\text{可由}(II)\text{线性表出且}(II)\text{可由}(I)\text{线性表出}\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)=r(I,II)\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)\text{且}(I)\text{可由}(II)\text{线性表出}\end{aligned}$$

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \text{三者线性无关}\\&\Leftrightarrow\ \text{三者是一组基底}\\&\Leftrightarrow\ (a,b,c)^T\text{能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表示}\end{aligned}$$

3. 如果 $\gamma=(a,b,c)^T$(任意向量) 不能由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 线性表出

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{不可表示任意一个三维向量}\\&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\\&\Leftrightarrow\ |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0\end{aligned}$$

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$如果线性相关 $\Rightarrow$ 构成一个平面或一条直线

5. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则

   (a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性相关

   (b) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关

   (c) 对于任意实数 k，有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关

   (d) 对于任意实数 k，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$

   - $k=0\Rightarrow$ 相关
   - $k\neq0\Rightarrow$ 无关

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示 $\Rightarrow$ r$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

7. β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法不唯一

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{有无穷多解}\\&\Leftrightarrow\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)<3\\&\Rightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\end{aligned}$$

8. $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{无解}\\&\Rightarrow\ \beta\text{不能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\end{aligned}$$

1.7 理解

1. 线性相关无关 $\Rightarrow$ $Ax=0$齐次方程组非零解的问题
2. 线性表示 $\Rightarrow$ $Ax=\beta$(其中$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$)非齐次方程组解的问题
   - 非齐次方程组的解向量 x 即为线性表示的系数
   - 对于 n 维向量，有 n 个方程，未知数个数等于向量个数
   - 根据秩的不同，线性表示有三种情况：
     (a) **唯一表示:** $r(A)=r(A,\beta)=n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性无关
     (b) **无穷多表示:** $r(A)=r(A,\beta)<n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性相关
     (c) **无表示:** $r(A)<r(A,\beta)$，β 不能由 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 线性表示
3. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示。求 a 的值并将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

解析

$$\because |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1\neq 0$$

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，
4 个三维向量必线性相关，若 β_1,β_2,β_3 线性无关，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必可由 β_1,β_2,β_3 线性表出
所以 β_1,β_2,β_3 线性相关
即 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$
故 $a=5$
对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 作初等变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right]$$

所以 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$