1 行列式

1.1 基础概念

1. 由 $1, 2, \ldots, n$ 组成的有序数组程伟一个 n 阶排列，通常用 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ 表示 n 阶排列
2. 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成**一个逆序，一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数**，用 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 表示
3. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**

1.2 性质

1. 经转置行列式的值不变，即 $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 $0 \Rightarrow$ 行列式的值为 0
3. 两行相等 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
4. 两行成比例 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
5. 某行（列）有公因数 k，可把 k 提到行列式外
6. 两行互换，行列式变号
7. 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
8. 某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变

1.3 基础

1.3.1 完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \mathbf{a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

1.3.2 余子式 & 代数余子式

1. 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的 **余子式**，记为 $\mathbf{M_{ij}}$；称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 $\mathbf{A_{ij}}$，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2. 三阶行列式的代数余子式

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

1.4 定理

1.4.1 展开公式

1. n 阶行列式等于它的任意一行（列）的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}(k = 1, 2, \ldots, n) && \text{行} \\ &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}(k = 1, 2, \ldots, n) && \text{列} \end{aligned}$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 = 0 \quad (i \neq k \text{且} i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 = 0 \quad (j \neq k \text{且} j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

1.4.2 乘法公式

设 **A**，**B** 都是 n 阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

1.5 公式

1.5.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-2}\ldots a_{n1}$$

1.5.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

2. 副对角线

$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

m，n 分别是方阵 A，B 的阶数

1.5.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

1.5.4 特征多项式

1. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 A 的特征多项式

$$|A - | = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - s_2\lambda + |A|$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

1.6 方阵行列式

1. 若 A 是 n 阶矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^T| = |A|$
2. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{kA}| = \mathrm{k}^n|A|$
3. 若 A，B 都是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|, |\mathrm{A}^2| = |A|^2$
4. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^*| = |A|^{n-1}$
5. 若 A 是 n 阶**可逆**矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^{-1}| = |A|^{-1}$
6. 若 A 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的特征值 $\Rightarrow |\mathrm{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
7. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow |\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|, |\mathrm{A} + \mathrm{kE}| = |\mathrm{B} + \mathrm{kE}|$
7.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

1.7 克拉默法则

设有 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，则其行列式为 $|\mathbf{A}|$。**若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则方程组有唯一解**，并且第 i 个未知数 x_i 可由下式求得：

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 是将 $\mathbf{A}$ 的第 i 列替换为常数列向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 后得到的矩阵，即：

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组**只有零解**
2. 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程组**有非零解**

1.8 方法步骤

1. 对于**主对角线爪型**行列式，可用**主**对角线元素将其化为上（下）三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 对于**副对角线爪型**行列式，可用**副**对角线元素将其化为**反上（下）三角型**来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 把各行（列）均加到第一行（列）
4. 逐行（列）相加
5. 若有较多 0，可考虑直接用行（列）展开公式
6. 特殊的**三对角线**行列式
   (a) 三角化法: 逐行相加，构造上下三角型
   (b) 递推法
   (c) 归纳法
7. 数学归纳法
   - **普通数学归纳法（Mathematical Induction）**
     (a) 验证 $n=1$ 时，命题 f_n 成立；
     (b) 假设 $n=k$ 时，命题 f_n 成立；
     (c) 证明 $n=k+1$ 时，命题 f_n 成立。
   - **强（完全）归纳法（Strong Induction）**
     (a) 验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时，命题 f_n 成立；
     (b) 假设当 $n<k$ 时，命题 f_n 均成立；
     (c) 证明 $n=k$ 时，命题 f_n 成立。

1.9 条件转换思路

1. 齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ r(A)<n(\text{其中}n=\text{未知数的个数})\\&\Leftrightarrow\ |A|=0\\&\Leftrightarrow\ A\text{的列向量组线性相关}\end{aligned}$$

1.10 理解