1 一元函数微分学的应用 - 几何应用

1.1 极值的定义

1. 对于函数 $f(x)$，若存在点 x_0 的某个邻域，使得在该邻域内任意一点 x，均有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

成立，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的 **极大值点**（或 **极小值点**），$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值（或极小值）。

2. 极值是一个**局部**的概念。

3. 极值要求点 x_0 的左右邻域均有定义，**端点处不讨论极值，间断点不可能是极值点。**

1.2 单调性与极值的判别

1.2.1 单调性的判别

1. 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。

① 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加。

② 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减少

③ 导数为 0 仅能说明在某点处的函数值变化**充分小**，而不能说明没变化

1.2.2 一阶可导点是极值点的必要条件

1. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0) = 0$

2. 若 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的极值点，则只有以下两种情况

① 驻点: $f'(x_0) = 0$

② 不可导点: $f'(x_0)$ 不存在。如 $y = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处的情形

3. 找极值的两种情况: 驻点 | 不可导点

1.2.3 判别极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ 内可导，则：

① 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

② 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号，则点 x_0 不是极值点

④ $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不一定可导，可能出现角点

1.2.4 判别极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$。

① 若 $f''(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

② 若 $f''(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

③ 若 $f''(x_0) = 0$,则该判别法失效,需借助高阶导数或其他方法判断。如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处是极小值, $f(x) = x^3$ 在 $x_0 = 0$ 处是拐点，不是极值点

1.2.5 判别极值的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 1, 2, \ldots, n - 1), f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n \geq 2)$，则：

① 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

② 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

当 n 为奇数时，点 x_0 不是极值点。

1.3 凹凸性与拐点的概念

1.3.1 凹凸性的定义

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

(a) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形是**凹的**（或称凹弧）

(b) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图形是**凸的**（或称凸弧）。

(c) 广义化:

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\begin{cases} < \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2), & \text{凹函数}, \\ > \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2), & \text{凸函数}, \end{cases}$$

其中 $0<\lambda_1, \lambda_2<1$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$。

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

- 若对任意 $x_0 \in (a,b)$ 及任意 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，恒有

$$f(x) < f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

即除切点外，曲线严格位于其切线的下方，则称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**凹的**。

- 若对任意 $x_0 \in (a,b)$ 及任意 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，恒有

$$f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

即除切点外，曲线严格位于其切线的上方，则称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**凸的**。

1.3.2 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**。

① 间断点不可能为拐点，拐点处函数**必须连续**。

② 判别拐点时，只需判断凹凸性的变化，**凹与凸不分先后**。

③ 极值点只写横坐标 $x=x_0$；而拐点应写 $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$，拐点在曲线上

1.4 凹凸性与拐点的判别

1.4.1 判别凹凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则：

① 若在 I 上 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是**凹的**（凹弧）。

② 若在 I 上 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是**凸的**（凸弧）。

1.4.2 二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在，且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点，则必有 $f''(x_0) = 0$。若点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则只有以下两种情况

1. 二阶导数存在必为 0: $f''(x_0) = 0$。如 $y = x^3$ 在 $(0,0)$ 处的情形
2. 二阶导数不存在的点也有可能是拐点: $f''(x_0)$ 不存在。如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的情形

1.4.3 判别拐点的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ 内二阶导数存在，且在 x_0 的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号（无论是由正变负，还是由负变正），则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.4 判别拐点的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.5 判别拐点的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ $(m = 2, 3, \dots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$，则当 n 为奇数时，点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

1.5 极值点与拐点的重要结论

① 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点；曲线的不可导点可同时为极值点和拐点

② 设多项式函数 $f(x) = (x-a)^n g(x) (n > 1)$，且 $g(a) \neq 0$，则当 n 为偶数时，$x = a$ 是 $f(x)$ 的极值点；当 n 为奇数时，$x = a$ 是 $f(x)$ 的拐点

③ 设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}$，其中 n_i 为正整数，a_i 为实数，且 $a_i\ (i=1,2,\ldots,k)$ 两两不等。记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数，k_2 为满足 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数，k_3 为满足 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数。则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$，拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$

1.6 渐近线

当曲线上的点远离原点时，曲线与某直线充分靠近，则称该直线为曲线的渐近线

1.6.1 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线。x_0 的可能情况为：

1. 函数的无定义点。e.g.：函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义。
2. 函数定义区间的端点。e.g.：函数 $y=\ln x\ (x>0)$ 在 $x\to 0^+$ 处。
3. 分段函数的分段点。e.g.：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处为分段点。

1.6.2 水平渐近线

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_1$，则 $y=y_1$ 为函数 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线；
2. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_2$，则 $y=y_2$ 为函数 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线；
3. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线

1.6.3 斜渐近线

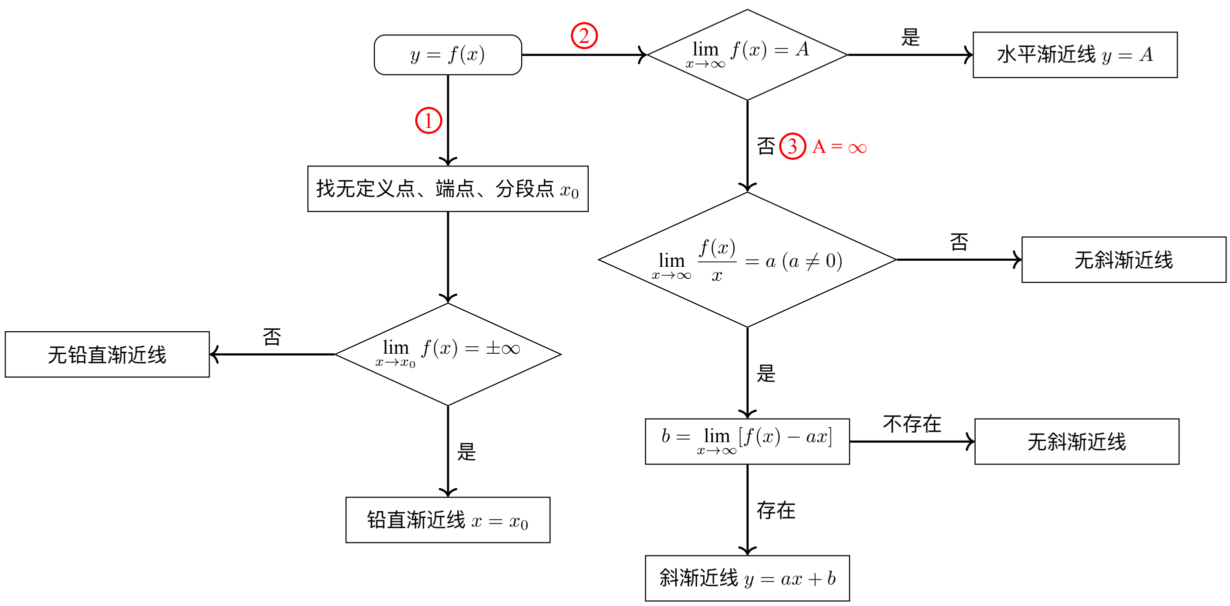
1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1\ (a_1\neq 0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_1x\right]=b_1$，则直线 $y=a_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

2. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2\,(a_2\neq 0)$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\big[f(x)-a_2x\big]=b_2$，则直线 $y=a_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

3. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\,(a\neq 0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[f(x)-ax\big]=\lim\limits_{x\to-\infty}\big[f(x)-ax\big]=b$，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

1.6.4 方法总结

1. 寻找渐近线顺序：铅直渐近线、水平渐近线、斜渐近线
2. 求斜渐近线时，a 与 b 均应求出来才可能，仅求出 a 不能确定有斜渐近线
3. ★ 曲线与渐近线可能会有交点。e.g. $y=\frac{\sin x}{x}$



1.7 最值或取值范围

1.7.1 最值的定义

设 x_0 为函数 $f(x)$ 定义域内的一点。若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x，均有

$$f(x)\leq f(x_0)\quad (\text{或}f(x)\geq f(x_0))$$

成立，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的最大值（或最小值）。

1.7.2 求区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m

① 求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

② 求出端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$；

③ 比较以上所求得的所有函数值, 其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M，最小者为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m

1.7.3 求区间 (a,b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或取值范围

① 求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

② 求区间 (a,b) 两端的单侧极限:若 a,b 为有限常数,则求 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to b^-} f(x)$；若 $a=-\infty$，则求 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$；若 $b=+\infty$，则求 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$，记以上所求左端极限为 A，右端极限为 B；

③ 比较前两步所得结果，确定函数的最值或取值范围。

1.8 作函数图像

1.8.1 给出函数 $f(x)$，作图的一般步骤

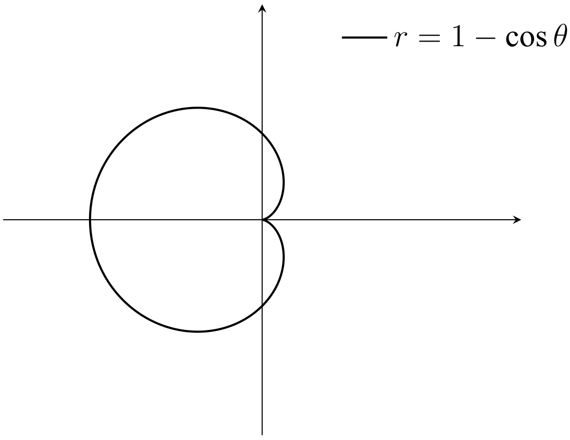
① 确定定义域，考查函数是否具有奇偶性、周期性，并合理利用图像变换；

② 利用导数工具：一阶导数确定函数的单调区间与极值点，二阶导数确定曲线的凹凸区间与拐点；

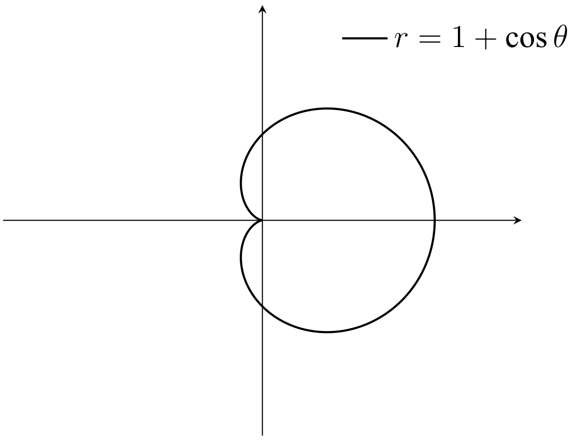
③ 考查函数的渐近线；

④ 作出函数图像

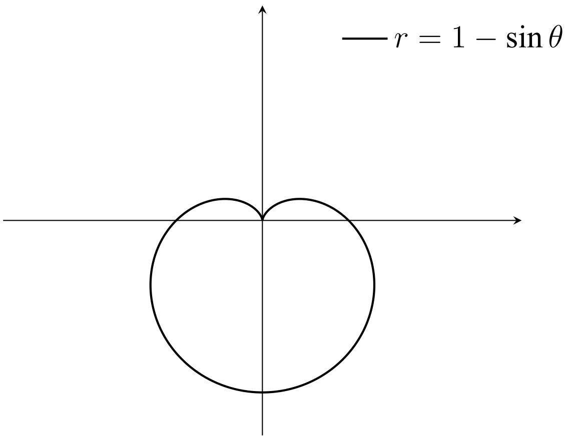
1.8.2 常用平面图像



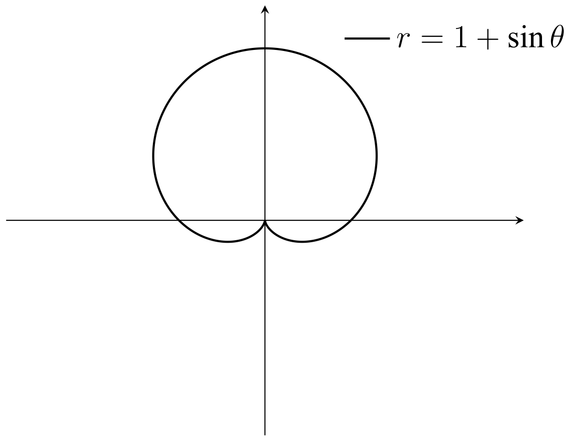
1. 心形线



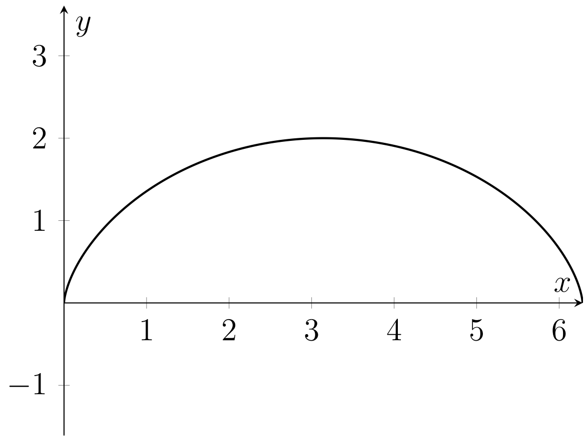
2. 心形线



3. 心形线



4. 心形线



5. 摆线（平摆线）TODO

6. 星形线

1.8.3　直角坐标系的观点画极坐标的图

1. 直角坐标系的观点下，视 θ 为 x，γ 为 y，即可画出图像

2. 用描点法（看变化趋势）可画出其在极坐标下的图像

1.9　曲率及曲率半径

设函数 $y(x)$ 二阶可导,则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(x,\, y(x))$ 处的曲率（表示曲线弯曲程度）公式为

$$k = \frac{|y''|}{\left[1 + \left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率半径的计算公式为

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\left[1 + \left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.\ y'' \neq 0$$

弯曲程度越大，曲率越大，曲率圆的半径越小

1.10 结论

1. 如 α 是 $f(x) = 0$ 的 $m(\geq 1)$ 重根，则 α 是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根
2. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0，并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点，那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点

1.11 条件转换思路

1. $f(x) \cdot f'(x)$ => $\{[f(x)]^2\}' = 2f(x) \cdot f'(x)$