

# 1 函数极限的计算

## 1.1 方法

1. 极限四则运算规则: 当  $f(x)$  和  $g(x)$  极限都存在时, 函数的加减乘除的极限分别等于极限的加减乘除 (除要求分母的极限不为零)

2. 洛必达法则一 ( $\frac{0}{0}$  型)

设当

$$x \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow \infty$$

时, 函数  $f(x)$  与  $F(x)$  都趋于 0, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

若在点  $a$  的某去心邻域内 (或当  $|x| > X$ , 其中  $X$  为充分大的正数时),  $f'(x)$  与  $F'(x)$  存在, 且

$$F'(x) \neq 0,$$

并且极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

存在或为无穷大,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

3. 洛必达法则二 ( $\frac{\infty}{\infty}$  型) 设当

$$x \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow \infty$$

时, 函数  $f(x)$  与  $F(x)$  都趋于无穷大, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$

若在点  $a$  的某去心邻域内 (或当  $|x| > X$ , 其中  $X$  为充分大的正数时),  $f'(x)$  与  $F'(x)$  存在, 且

$$F'(x) \neq 0,$$

并且极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

存在或为无穷大,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

4. 泰勒公式: 设  $f(x)$  在点  $x = a$  处  $n$  阶可导, 则存在  $x = a$  的一个邻域, 对于该邻域内的任一点  $x$ , 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x^n)$$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}, \quad x \rightarrow 0$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x \rightarrow 0$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$
- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad x \rightarrow 0$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \arctan x - x \sim -\frac{x^3}{3}, \quad x \rightarrow 0$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$
- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2) \Rightarrow (1+x)^a - 1 - ax \sim \frac{a(a-1)}{2}x^2, \quad x \rightarrow 0$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

5. 无穷小计算 (记号运算): 设  $m, n$  为正整数,  $x \rightarrow 0$ , 则

- $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^{\min\{m,n\}})$  (对无穷小而言, 次数越小, 量级越大; 对无穷大而言, 次数越大, 量级越大)
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(kx^m) = o(x^m), \quad k o(x^m) = o(x^m), \quad k \neq 0$  为常数

6. 泰勒公式应用时的展开原则:

- $\frac{A}{B}$  型, 适用”上下同阶”原则: 如果分母 (或分子) 是  $x$  的  $k$  次幂, 则应把分子 (或分母) 展开到  $x$  的  $k$  次幂
- $A - B$  型, 适用”幂次最低”原则: 将  $A, B$  分别展开到他们的系数不相等的  $x$  的最低次幂为止

7. 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{\text{狗} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{狗}}\right)^{\text{狗}} = e \\ & \bullet \text{狗} = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \end{aligned}$$

8. 夹逼准则: 如果函数  $f(x), g(x)$  及  $h(x)$  满足下列条件:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
- $\lim h(x) = \lim g(x) = A$

则  $\lim f(x)$  存在, 且  $\lim f(x) = A$

## 1.2 七种未定式的计算

1.  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$

2. 解题思路

- 化简先行
  - (a) 提出极限不为 0 的因式
  - (b) 等价无穷小替换
  - (c) 恒等变形: 提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂 + 换元法 (负代换、倒代换)
- 判断类型 (运算类型)
- 选择方法: 泰勒公式、洛必达法则、夹逼准则

3.  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- 泰勒公式
- 洛必达法则
- 

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ \infty, & n > m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

**抓大头法:**

当  $x \rightarrow \infty$ , 则应抓分子和分母中关于  $x$  的**最高次项**即可判断极限;

当  $x \rightarrow 0$ , 则应抓分子和分母中关于  $x$  的**最低次项**

- 脱帽法: 若  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ , 则  $f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$

4.  $0 \cdot \infty$ : 设置分母, 简单因式下放

$$\bullet \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

- $\frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty}$
- 简单因式:  $x^\alpha, e, \sin rx$
- 复杂因式:  $\arctan x, \arcsin x, \ln x$

5.  $\infty - \infty$

- 如果函数是有分母, 则通分, 将加减法变形为乘除法, 以便使用其他计算工具 ( $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ )
- 如果函数中没有分母, 则可以通过**提取公因式**或者做**倒代换** (**创造分母再通分**), 出现分母后, 再利用通分等恒等变形的方法, 将加减法变形为乘除法

6.  $\infty^0, 0^0$ :  $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$

7.  $1^\infty$ :  $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$

Example

$$\lim u^v = \lim \{ [1 + (u - 1)]^{\frac{1}{u-1}} \}^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v}$$

8. 泰勒公式

### 1.3 结论

1. 若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$ , 且  $\lim g(x) = 0$ , 则  $\lim f(x) = 0$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

若  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 则  $f(0) = 0$ .

2. 若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ , 且  $\lim f(x) = 0$ , 则  $\lim g(x) = 0$

3. (连续型) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x, \quad \alpha, \beta > 0, a > 1$$

4. (离散型) 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \alpha, \beta > 0, a > 1$$

5. 当  $\alpha > 0$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \stackrel{\text{洛必达求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0.$$

一般形式:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$ , 其中  $\alpha, \beta > 0$ 。思考: 当  $x \rightarrow +\infty$

6. 狗  $-1 < [\text{狗}] \leq \text{狗}$

## 1.4 定理

## 1.5 运算

## 1.6 公式

## 1.7 方法总结

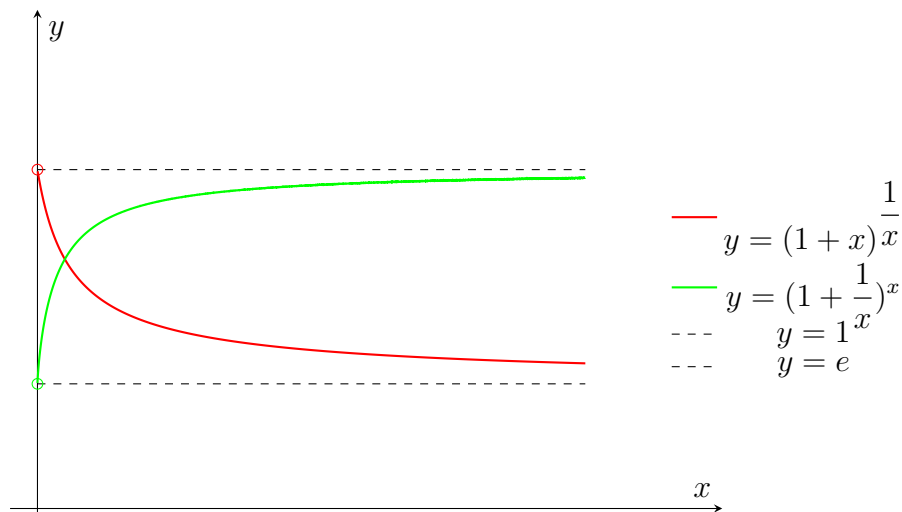
1. 遇到幂指函数, 用  $e$  括起来,  $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$

2.  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  在  $x > 0$  时有以下性质

- $f(x)$  单调减少

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$



## 1.8 条件转换思路

## 1.9 理解

1. 对于

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

右极限存在，则左极限存在；但左极限存在，并不意味着右极限一定存在。

e.g.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$