1 一元函数微分学的概念

1.1 导数

1. 设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，让自变量在 $x=x_0$ 处加一个增量 Δx（可正可负），其中 $x_0\in I, x_0+\Delta x\in I$，则可得函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。若函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比值在 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数（变化率），记作 $f'(x_0)$，即

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{*}$$

广义化

$$\lim_{狗\to 0}\frac{f(x_0+狗)-f(x_0)}{狗}. \tag{**}$$

令 $x_0+\Delta x=x$，从而得到

$$函数式 f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{***}$$

2. 下面这三种提法是等价的:
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导；
   - $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数存在；
   - $f'(x_0)=A$（A 为有限数）。

3. ★ 函数在一点可导的充要条件: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 其左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等

4. 函数在一点可导的必要条件: **若 $f(x)$ 在一点可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在该点连续**，反之未必

5. 导数的性质
   - ★求导一次，奇偶性互换（导数定义）
   - 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数，则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数（导数定义）
   - 若 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减

1.2 导数的几何意义

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数值 $f'(x_0)$，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率 k，即 $k=f'(x_0)$，因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

该点处的法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\ (f'(x_0) \neq 0)$$

2.

1.3 基础概念

1.4 结论

1. 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，则函数 $f(x) = |x - x_0|\,\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的充要条件是 $\varphi(x_0) = 0$

2.

3. 函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的连续性与可导性关系总结：

4.

5. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续；反之不成立。

6. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则：

   (a) 若 $f(x_0) \neq 0$，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，且

   $$|\,|f(x)|\,'_{x=x_0} = \begin{cases} f'(x_0), & f(x_0) > 0, \\ -f'(x_0), & f(x_0) < 0. \end{cases}$$

   (b) 若 $f(x_0) = 0$，则：

   $$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \ \Rightarrow\ |f(x)|\ \text{在} x_0\ \text{处可导，且}\ |\,|f(x)|\,'_{x=x_0} = 0, \\ f'(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ |f(x)|\ \text{在} x_0\ \text{处不可导}. \end{cases}$$

   (c) 总结不可导即:

   $$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{在} x_0\ \text{处可导} \\ f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x)|\ \text{在} x_0\ \text{处不可导}$$

7. 切线存在不代表导数存在，但导数存在切线一定存在

8. 若 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ 即在点 x_0 处出现角点（或尖点），则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，且不存在切线

9. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有无穷导数，则该点处存在切线，但导数不存在

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1. $[(e^x-1)g(x)]' = e^x g(x) + (e^x-1)g'(x)$

1.8 方法总结

1.9 条件转换思路

1.10 理解

1. 对于连续或可导函数，只要 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$），无论 $f(x_0)$ 与 0 的距离有多小，它旁边相依相偎的 $f(x)$ 一定 > 0（或 < 0）
2. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义，且 $|f(x)| \leq 1 - \cos x$，证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续、可导且 $f'(0) = 0$

经典

证明： 分三个层次完成。

（1）求函数极限

由

$$0 \le |f(x)| \le 1-\cos x, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,$$

根据夹逼准则，有

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

（2）求函数值，验证连续性

在原不等式中令 $x=0$，得

$$|f(0)| \le 1-\cos 0=0,$$

故 $f(0)=0$。

因此

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并且有

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)| \le 1-\cos x.$$

（3）求导数（按定义）

由上述不等式可得

$$0 \le \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le \frac{1-\cos x}{|x|}.$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{|x|}=0,$$

再次由夹逼准则，

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

从而 $f'(0)=0$。

综上， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导，且 $f'(0)=0$。□

3.