

1 线性方程组

1.1 基础概念

1. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

2. 如果 $b_i = 0 (\forall i = 1, 2, \dots, m)$, 则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为**齐次线性方程组**

3. 若用一组数 c_1, c_2, \dots, c_n 分别代替方程组中的 x_1, x_2, \dots, x_n , 使 m 个等式都成立, 则称有序数组 (c_1, c_2, \dots, c_n) 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解

4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**, 而由全体系数组成的矩阵

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

5. 如果两个方程组有相同的解集合, 则称它们是**同解方程组**

6. 下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**

(a) 用一个非零常数乘方程的两边

- (b) 把某方程的 k 倍加到另一方程上
- (c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换化为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量**通常**称为主变量，其余的未知量称为自由变量

7. 选择自由变量准则: 去掉自由变量后主变量行列式不能为 0

8. 向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，如果

- (a) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 $Ax = 0$ 的解
- (b) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关
- (c) $Ax = 0$ 的任一解都有由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性表出
- (d) 解向量个数

= 无关解个数

= 自由变量个数

= $t = n - r(A)$ ，其中 $n = A$ 的列向量个数

9. 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组基础解系，那么对任意常数 c_1, c_2, \dots, c_n ,

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_t\eta_t$$

是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解

10. $Ax = 0$ 的基础解系是不唯一的

11. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 既是方程组 (I) 的解，也是方程组 (II) 的解，则称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的公共解

12. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 是方程组 (I) 的解，则 α 必是 (II) 的解；反过来，如果 α 是方程组 (II) 的解，则 α 必是 (I) 的解，则称 (I) 和 (II) 同解

13. $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$ 且 $Ax = 0$ 的解全是 $Bx = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

\Leftrightarrow 矩阵 A 和 B 的行向量组等价

14. 矩阵乘法一般没有交换律，若 $AB = BA$ ，就称 A 与 B 可交换

1.2 定理

1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组
2. 设 n 元非齐次线性方程组, 对它的增广矩阵施行高斯消元法, 得到梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & a_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) 如果 $d_{r+1} \neq 0$, 方程组**无解**
 - (b) 如果 $d_{r+1} = 0$, 方程组**有解**, 并且
 - i. 当 $r = n$ 时有**唯一解**
 - ii. 当 $r < n$ 时有**无穷多解**
3. 齐次线性方程组只有**零解 (唯一解)**

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

4. 齐次线性方程组有**非零解 (有无穷多解)**

$$\Leftrightarrow r(A) < n$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的列向量线性无关}$$

$$\Leftrightarrow \text{若 } m = n, \text{ 则 } |A| = 0$$

5. 当 $m < n$ (即方程的个数 $<$ 未知数的个数) 时, 齐次线性方程组必有**非零解 (有无穷多解)**
6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A) = r < n$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系由 $n - r(A)$ 个线性无关的解向量所构成
7. **有解判定定理:** 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解的充分必要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相等, 即 $r(A) = r(\bar{A})$:

$$\text{若 } r(A) = r(\bar{A}) = n$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组有唯一解}$$

$$\text{若 } r(A) = r(\bar{A}) < n$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组有无穷解}$$

方程组有解

$$\begin{cases} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow A \text{ 的行向量组线性无关} \\ \text{原因: } r(A) \leq r(\bar{A}) \leq m \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = m \end{cases}$$

非齐次线性方程组 $Ax = b$ 无解

$$\begin{cases} \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow b \text{ 不能由 } A \text{ 的列向量线性表出} \\ \Rightarrow |A| = 0 \end{cases}$$

8. 解的性质

- (a) 如果 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解, 那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解
- (b) 如果 α, β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个解, 则 $\alpha - \beta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 有无穷多解}$$

- (c) 如果 α 是齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, η 是导出组 $Ax = 0$ 的解, 则 $\alpha + \eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解
- (d) 使用 **最小公约数** 构造解:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{是两个解}, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad \text{是三个解},$$

故可构造:

$$3(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

- (e) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = b$ 的解
- i. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = b$ 的解
- ii. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = 0$ 的解

9. 解的结构: 对非齐次线性方程组 $Ax = b$, 若 $r(A) = r(\bar{A}) = r$, 且已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, ζ_0 是 $Ax = b$ 的每个已知解, 则 $Ax = b$ 的通解为

$$\zeta_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_{n-r} 为任意常数

10. 通解表示为:

$$\begin{aligned} \text{通解} &= \text{特解} + k_1\text{解向量}_1 + k_2\text{解向量}_2 + \dots \\ &= \text{特解} + \text{齐次方程 } Ax = 0 \text{ 的通解} \end{aligned}$$

特解构造方法:

特解 = 令自由变量为 0, 主元为常数项

特解 \Leftarrow 通过单个 b 构造, 即除/减 $(n+1)$ 个解 $- n$ 个解)

齐次方程 $Ax = 0$ 的通解:

通解 = 自由变量列的相反数

通解 = $\alpha - \beta$ 或通过 **最小公倍数** 法构造

- (a) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解
 - (b) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关
 - (c) $t = n - r(A)$
3. 非齐次线性方程组求解方法
- (a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
 - (b) 求导出组的几个基础解系
 - (c) 求方程组的一个特解 (为简捷, 可令自由变量全为 0)
 - (d) 按解的结构写出通解
 - (e) 注: 当方程组中含有参数时, 分析讨论要严谨不要丢情况
4. 公共解处理方法 (例 4.16)
- (a) (I)(II) 联立求解
 - (b) 通过 (I) 与 (II) 各自的通解, 寻找非零公共解
 - (c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中, 如果仍是解, 寻找 k_1, k_2 所对应满足的关系式而求出公共解
5. 证明两方程同解
- (a) 定义
 - (b) $r(A) = r(B)$ 且 $Ax = 0$ 的解全是 $Bx = 0$ 的解

1.6 条件转换思路

1. 抽象方程组 (例 4.9)
- (a) 解的结构
 - (b) 解的性质
 - (c) 秩