1 线性方程组

1.1 基础概念

1. 方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$,

2. 如果 $b_i = 0(\forall i = 1, 2, \ldots, m)$，则称方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
为**齐次线性方程组**

3. 若用一组数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 分别代替方程组中的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，使 m 个等式都成立，则称有序数组 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解

4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵
$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$
称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**，而由全体系数组成的矩阵
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

5. 如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**

6. 下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**
   (a) 用一个非零常数乘方程的两边

(b) 把某方程的 k 倍加到另一方程上

(c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换华为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量通常称为**主变量**，其余的未知量称为**自由变量**

7. 选择自由变量准则: **去掉自由变量后主变量行列式不能为 0**

8. 向量组 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的**基础解系**，如果

   (a) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是 $Ax = 0$ 的解

   (b) $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 线性无关

   (c) $Ax = 0$ 的任一解都有由 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 线性表出

   (d) 解向量个数

$$\begin{aligned} &= \text{无关解个数} \\ &= \text{自由变量个数} \\ &= t = n - r(A)\text{，其中}n = A\text{的列向量个数} \end{aligned}$$

9. 如果 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组基础解系，那么对任意常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$,

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_t\eta_t$$

   是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的**通解**

10. $Ax = 0$ **的基础解系是不唯一的**

11. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 既是方程组 (I) 的解，也是方程组 (II) 的解，则称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的**公共解**

12. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 是方程组 (I) 的解，则 α 必是 (II) 的解；反过来，如果 α 是方程组 (II) 的解，则 α 必是 (I) 的解，则称 (I) 和 (II) **同解**

13. $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r(A) = r(B)\text{且}Ax = 0\text{的解全是}Bx = 0\text{的解} \\ &\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) \\ &\Leftrightarrow \text{矩阵}A\text{和}B\text{的行向量组等价} \end{aligned}$$

14. 矩阵乘法一般没有交换律，若 $AB = BA$，就称 A 与 B **可交换**

1.2 定理

1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组
2. 设 n 元非齐次线性方程组，对它的增广矩阵施行高斯消元法，得到阶梯形矩阵

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & a_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) 如果 $d_{r+1}\neq 0$，方程组**无解**
   (b) 如果 $d_{r+1}=0$，方程组**有解**，并且
      i. 当 $r=n$ 时有唯一解
      ii. 当 $r<n$ 时有无穷多解
3. 齐次线性方程组只有**零解 (唯一解)**

$$\Leftrightarrow\ r(A)=n$$

4. 齐次线性方程组有**非零解 (有无穷多解)**

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ r(A)<n\\&\Leftrightarrow\ A\text{的列向量线性无关}\\&\Leftrightarrow\ \text{若}m=n,\text{则}|A|=0\end{aligned}$$

5. 当 $m<n$(即方程的个数 < 未知数的个数) 时，齐次线性方程组必有**非零解 (有无穷多解)**
6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$，则 $Ax=0$ 的基础解系由 $n-r(A)$ 个线性无关的解向量所构成
7. **有解判定定理**: 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等，即 $\mathbf{r}(\mathbf{A})=\mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}})$:

$$\begin{aligned}&\text{若}r(A)=r(\bar{A})=n && \Leftrightarrow\ \textbf{方程组有唯一解}\\&\text{若}r(A)=r(\bar{A})<n && \Leftrightarrow\ \textbf{方程组有无穷解}\end{aligned}$$

$$\textbf{方程组有解}\quad\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})\\ \Leftrightarrow A\text{的行向量组线性无关}\\ \text{原因:}r(A)\leq r(\bar{A})\leq m\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=m\end{cases}$$

$$\text{非齐次线性方程组}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\text{无解}\quad\begin{cases}\Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{A})+\mathbf{1}=\mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}})\\ \Leftrightarrow b\text{不能由}A\text{的列向量线性表出}\\ \Rightarrow |A|=0\end{cases}$$

8. **解的性质**

   (a) 如果 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解，那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解

   (b) 如果 α, β 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的两个解，则 $\alpha - \beta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ r(A) = r(\overline{A}) < n \\ &\Leftrightarrow\ Ax = 0 \text{有无穷多解} \end{aligned}$$

   (c) 如果 α 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，η 是导出组 $Ax = 0$ 的解，则 $\alpha + \eta$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解

   (d) 使用 **最小公约数** 构造解：

$$\alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{是两个解，} \qquad \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad \text{是三个解，}$$

   故可构造：

$$3(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

   (e) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解

      i. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1 \Leftrightarrow \mathrm{k}_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{b}$ 的解

      ii. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \Leftrightarrow \mathrm{k}_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解

9. **解的结构**: 对非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，若 $r(A) = r(\bar{A}) = r$，且已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系，ζ_0 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的每个已知解，则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\zeta_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

   其中 $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ 为任意常数

10. 通解表示为：

$$\begin{aligned} \text{通解} &= \text{特解} + k_1\text{解向量}_1 + k_2\text{解向量}_2 + \dots \\ &= \text{特解} + \text{齐次方程}Ax = 0 \text{ 的通解} \end{aligned}$$

   特解构造方法：

$$\begin{aligned} &\text{特解} = \text{令自由变量为 } 0\text{，主元为常数项} \\ &\text{特解} \Leftarrow \text{通过单个}b\text{ 构造，即除/减}(n+1 \text{ 个解} - n \text{ 个解}) \end{aligned}$$

   齐次方程 $Ax = 0$ 的通解：

$$\begin{aligned} &\text{通解} = \text{自由变量列的相反数} \\ &\text{通解} = \alpha - \beta \text{ 或通过最小公倍数 法构造} \end{aligned}$$

1.3 运算

1.4 公式

1.5 方法步骤

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

   (a) 判断何时 $a = 0$

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \ddots & & \\ & a & \end{array}\right]$$

   若 $a = 0$ 则有可能无解

   i. $\forall a$ 均有解

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \ddots & & \\ & a & 0 \end{array}\right]$$

   ii. 若 $b \neq 0$ 必无解

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \ddots & & \\ & 0 & b \end{array}\right]$$

   (b) Case:

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ & \underline{a-1} & a+2 & -3 \\ & & \underline{2a+6} & a-9 \end{array}\right]$$

   从下向上依次检查与 0 的关系

   i. 先看 $2a + 6 = 0$

   ii. 再看 $a - 1 = 0$

唯一解	$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$	$\Leftrightarrow a \neq 1$ 且$a \neq -3$
无穷解	$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$	$\Leftrightarrow a = 1$
无解	$\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$	$\Leftrightarrow a = -3$

2. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，需要

(a) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解
(b) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关
(c) $t = n - r(A)$

3. 非齐次线性方程组求解方法

(a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
(b) 求导出组的几个基础解系
(c) 求方程组的一个特解（为简捷，可令自由变量全为 0）
(d) 按解的结构写出通解
(e) 注: **当方程组中含有参数时，分析讨论要严谨不要丢情况**

4. 公共解处理方法 (例 4.16)

(a) (I)(II) 联立求解
(b) 通过 (I) 与 (II) 各自的通解，寻找非零公共解
(c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中，如果仍是解，寻找 k_1, k_2 所对应满足的关系式而求出公共解

5. 证明两方程同解

(a) 定义
(b) $r(A) = r(B)$ 且 $Ax = 0$ 的解全是 $Bx = 0$ 的解

1.6 条件转换思路

1. 抽象方程组 (例 4.9)

(a) 解的结构
(b) 解的性质
(c) 秩

1.7 理解