1 数列极限

1.1 数列

1. 等差数列
2. 等比数列

1.2 基础概念

1. 设 x_n 为以数列，若存在常数 a，对于任意的 $\epsilon > 0$（不论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \epsilon$，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

2. 有界数列: 若对所有正整数 n，存在正实数 M，有 $|a_n| \leq M$，则称数列 a_n 为有界数列。证明数列有界的方法
   - 找 M，使得 $|a_n| \leq M$
   - 放缩法
   - 找最值
   - 基本不等式法
3. 设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对任意 $\varepsilon > 0$（无论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** a，或者称常数 a 是数列 x_n 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.3 收敛数列的性质

1. 唯一性: 给出数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$（存在），则 a 是唯一的
2. 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，则数列 $\{x_n\}$ 有界
3. 保号性: 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，b 为任意实数。
   (a) 若 $a > b$（或 $a < b$），则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$x_n > b \quad (\text{或} x_n < b).$$

   (b) 若存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$x_n \geq b \quad (\text{或} x_n \leq b),$$

   且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

   则必有

$$a \geq b \quad (\text{或} a \leq b).$$

其中常考情形为 $b=0$

4. **脱帽（严格不等）：** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > b \Rightarrow x_n > b$ （或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b \Rightarrow x_n < b$）
5. **带帽（非严格不等）：** $x_n \geq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$ （或$x_n \leq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$）

1.4 定理

1. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2. 海涅定理（归结原则）：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n) = A$ 存在

   - 当 $x\to 0$ 时，取 $x_n = \dfrac{1}{n}$，若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n}) = A$
   - 当 $x\to +\infty$ 时，取 $x_n = n$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$
   - 当 $x\to a$ 时，且 $x_n \neq a$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

3. 单调有界准则: 若数列 x_n 单调增加（减少）且有上界（下界），则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在

   - $x_n \leq x_{n+1} \leq a$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在
   - $a \leq x_{n+1} \leq x_n$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在

1.5 结论

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

   因此，若要证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

   只需证明

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

   又由于 $|a_n| \geq 0$，可利用夹逼准则：若存在数列 $\{b_n\}$，使得

$$0 \leq |a_n| \leq b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

   则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

5. ★若 $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

1.6 运算

1.7 公式

1.8 方法步骤

1. 判断数列发散的方法
    - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到一个发散的子列，则原数列一定发散
    - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到至少两个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$，但它们收敛到不同极限，则原数列一定发散

2. **证明数列 $\{x_n\}$ 单调性的常用方法**

    a. **差分法或比值法**

    $$x_{n+1} - x_n > 0\ (\text{或} < 0), \quad \text{或} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1\ (\text{或} < 1).$$

    b. **数学归纳法**

        i. 验证 $n = 1$ 时结论成立；
        ii. 假设 $n = k$ 时结论成立；
        iii. 证明 $n = k + 1$ 时结论仍成立。

    c. **利用重要不等式**

    d. **利用递推形式** $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \cdots)$
    设 $x_n \in I$，且 $f(x)$ 在区间 I 上可导：

    - 若 $f'(x) > 0$（即 $f(x)$ 在 I 上单调增加），则数列 $\{x_n\}$ 单调（无法确定是单调递增还是单调递减），且

    $$\begin{cases} x_2 > x_1, & \text{则}\{x_n\}\text{单调递增}, \\ x_2 < x_1, & \text{则}\{x_n\}\text{单调递减}. \end{cases}$$

    - 若 $f'(x) < 0$（即 $f(x)$ 在 I 上单调减少），则数列 $\{x_n\}$ **不单调**（通常呈振荡）。

1.9 条件转换思路

1.10 理解

1. 压缩映射原理: 使用时，需写出证明过程

- 对数列 x_n，若存在常数 $k(0<k<1)$，使得 $|x_{n+1}-a| \le k|x_n-a|, n=1,2,\cdots$，则 x_n 收敛于 a
- TODO: 证
- 设数列 $\{x_n\}$ 满足

  $$x_{n+1}=f(x_n), \quad n=1,2,\ldots,$$

  其中 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，a 是方程

  $$f(x)=x$$

  的唯一解。若存在常数 k，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有

  $$|f'(x)|\le k<1,$$

  则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
- TODO: 证