1　一元函数微分学的应用 - 中值定理

1.1　涉及函数的中值定理

1.1.1　有界与最值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $m \leq f(x) \leq M$，其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

1.1.2　介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $m \leq \mu \leq M$ 时，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \mu$

1.1.3　平均值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 时，在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

1.1.4　零点定理（介质定理的特例）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$

- 推广的零点定理: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha, \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \beta$，且 $\alpha \cdot \beta < 0$，则 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少存在一个根

1.2　涉及导数（微分）的中值定理

1.2.1　费马定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足

$$\begin{cases} (1)\ \text{可导（左右导数存在且相等）}, \\ (2)\ \text{取极值}, \end{cases}$$

则

$$f'(x_0) = 0.$$

1.2.2　导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，当 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

1.2.3　罗尔定理

设 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1)\ \text{在}[a,b]\text{上连续}, \\ (2)\ \text{在}(a,b)\text{内可导}, \\ (3)\ f(a) = f(b), \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

- 推广的罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$
- 罗尔定理的使用需要构造辅助函数，其方法总结如下: //TODO

1.2.4 拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1)\ 在[a,b]上连续, \\ (2)\ 在(a,b)内可导 \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1. 见到 $f(a)-f(b)$ 与 f 与 f' 的关系，一般想到用拉格朗日中值
2. 拉格朗日中值的作用是用导函数的值来控制函数值的增减

1.2.5 柯西中值定理

设函数 $f(x),g(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1)\ 在[a,b]上连续, \\ (2)\ 在(a,b)内可导, \\ (3)\ g'(x)\neq 0 \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

1. $f(x),g(x)$ 往往考察一个具体函数，一个抽象函数

1.2.6 泰勒公式（微分中值定理）

1. 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶导数存在，则对该邻域内任意点 x，有

   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

   其中拉格朗日余项

   $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \xi\in(x_0,x).$$

2. 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任意点 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

3. 当 $x_0=0$ 时泰勒公式称为**麦克劳林公式**

①

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \xi\in(0,x)$$

②

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

4. **说明：**

① 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式适用于区间 $[a,b]$，常在证明题中使用。如证不等式、中值等式等

② 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式适用于点 $x=x_0$ 及其邻域，常用于研究点 $x=x_0$ 处的某些结论。如求极限、判定无穷小的阶数、判定极值等

1.3 基础概念

1.4 结论

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1.8 方法总结

1. 解题方法

① 找定义式、关系式、约束式

② ★做一至两步逆运算

③ 联想经典形式

④ 恒等变形

- $a=a-0$
- $a=a+b-b$
- $e-1=e^1-e^0$

⑤ 翻译数学名词

1.9 条件转换思路

1.10 理解