

1 函数的概念与特性

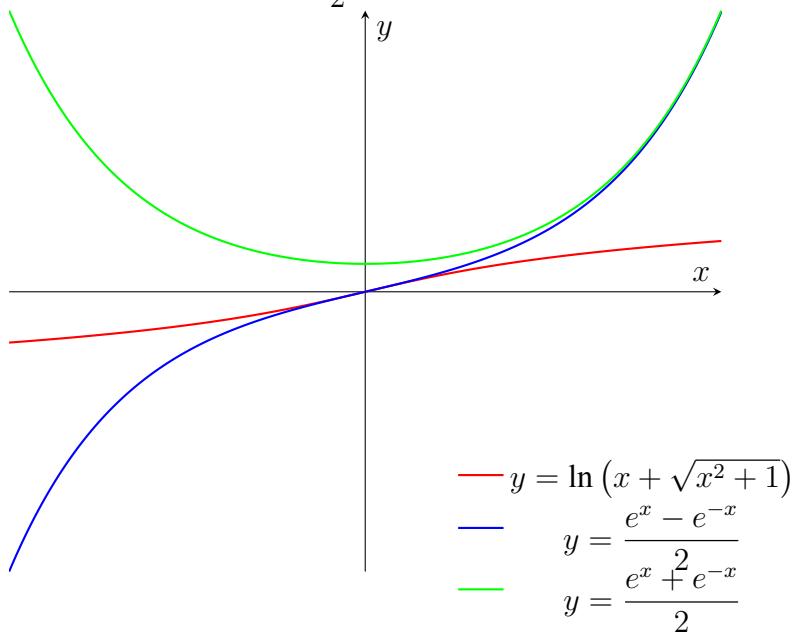
1.1 基础概念

1. 反双曲正弦函数: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 常见的奇函数

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ & \bullet \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C \\ & \bullet \quad \int_{-1}^1 [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^2] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

2. 双曲正弦函数: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. 双曲余弦函数: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



4. 函数奇偶性

- $f(x) + f(-x)$ 必是偶函数
- $f(x) - f(-x)$ 必是奇函数
- 任意定义在关于原点对称区间上的函数, 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

对任一函数 $f(x)$, 定义

$$u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad v(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

则有 $u(x)$ 是偶函数, $v(x)$ 是奇函数。并且

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = u(x) + v(x).$$

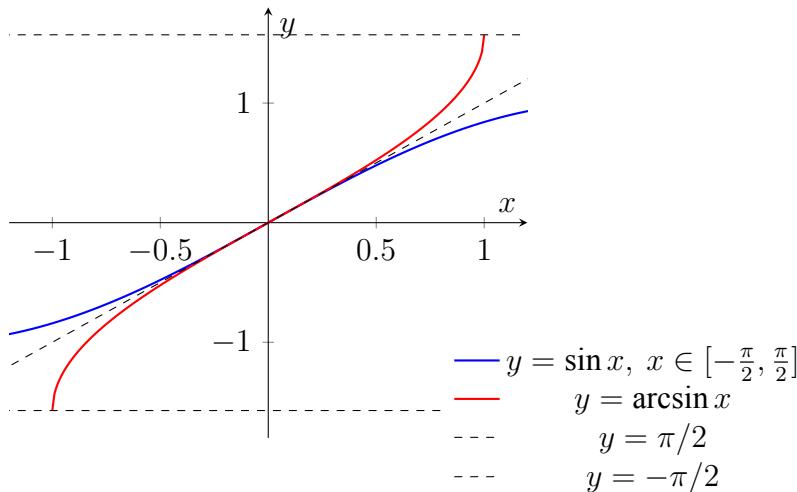
- $f[\psi(x)]$ 内偶则偶, 内奇同外
- ★求导一次, 奇偶性互换
- 设对任意的 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 是奇函数
- 常见的奇函数
 - (a) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$
 - (b) $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$
- 常见的偶函数

5. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 是函数

$$y = \sin x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

的反函数, 其主值区间为

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$



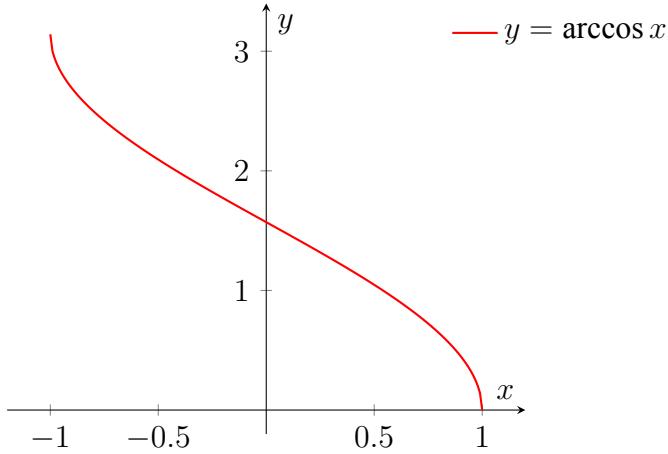
若 $y = \sin x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$, 则 $x = \pi - \arcsin y$

6. 反余弦函数 $y = \arccos x$ 是函数

$$y = \cos x \quad (x \in [0, \pi])$$

的反函数, 其主值区间为

$$\arccos x \in [0, \pi].$$



1.2 结论

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小

- $x \sim y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $x \sim \sin x$
- $x \sim \tan x$

2. $x - [x]$ 是 x 的小数部分, 是以 1 为周期的函数

1.3 定理

1.4 运算

1.5 公式

$$1. x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

2.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

广义化:

$$2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}.$$

3. $[x + n] = [x] + n$. 特别地, 当 $n = 1$ 时, $[x + 1] = [x] + 1$

1.6 方法总结

1.7 条件转换思路

1.8 理解