1 矩阵

1.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m\times n$ 矩阵，当 $m=n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n **阶方阵**

2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 $\mathbf{O}$

3. 如果一个方阵，所有非主对角线元素都是 0，则称这个矩阵是**对角矩阵**

4. 两个 $m\times n$ 型矩阵 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$

5. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$

6. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T

7. 如果方阵 A 满足 $A^T=A$，则称 A 是**对称矩阵**，即 $a_{ij}=a_{ji}$

8. 如果方阵 A 满足 $A^T=-A$，则称 A 是**反对称矩阵**，即 $a_{ij}=-a_{ji}$

9. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

   称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

10. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置，即 $A^*=[A_{ji}]=(A_{ij})^T$

11. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB=BA=E$(单位矩阵)成立，则称 A 是**可逆矩阵或非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵

12. 对 $m\times n$ 矩阵，下列三种变换

    (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行（列）
    (b) 互换矩阵某两行（列）的位置
    (c) 把某行（列）的 k 倍加至另一行（列）

    称为矩阵的**初等行（列）变换**，统称为矩阵的**初等变换**

13. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**，记作 $A\cong B$

14. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**

(a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k

(b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行

(c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行

15. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$。向量内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

16. 向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 的长度

$$||\alpha|| = \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

17. 若 $(\alpha, \beta) = 0$ 即 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$，则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha \perp \beta$

18. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T = A^TA = E$，称 A 是 **正交矩阵:**

$\Leftrightarrow$ $A^T = A^{-1}$

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量两两正交（单位向量）

$\Leftrightarrow$ A 的每个行（列）向量长度均为 1

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量平方和为 1

$\Leftrightarrow$ $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$

$\Rightarrow$ $|A|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 1$ 或$|A| = -1$

19. 若 A 是正交矩阵且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则:

(a) $\alpha_i^T\alpha_i = 1$

(b) $\alpha_i^T\alpha_j = 0 \ (i \neq j)$

20. 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列 $(k \leq m, k \leq n)$，位于这个行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式，称其为矩阵 A 的一个 k 阶**子式**

21. 矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩，记为 $r(A)$。零矩阵的秩规定为 0

22. 矩阵秩的理解

(a) $r(A) = r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为0，任何$r+1$阶子式（若存在）必全为0

(a) $r(A) < r \Leftrightarrow A$中每一个$r$阶子式全为0

(a) $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为0

(a) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$

(a) $r(A) \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow 1 \leq r(A) \leq n$

(a) 若 A 是 n 阶矩阵

- $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆
- $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$不可逆

(b) 若 A 是 $m \times n$ 阶矩阵$\Leftrightarrow r(A) \leq min(m, n)$

1.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵，则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**，记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ |A| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow\ r(A) = n \\
&\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性无关} \\
&\Leftrightarrow\ A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s)\text{是初等矩阵} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{通过初等变换能化为单位矩阵} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{与单位矩阵等价} \\
&\Leftrightarrow\ 0\text{不是矩阵}A\text{的特征值} \\
&\Leftrightarrow\ \text{齐次线性方程组}Ax = 0\text{只有零解}
\end{aligned}
$$

3. n 阶矩阵 A不可逆

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow\ r(A) < n \\
&\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性相关} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{无法表示为初等矩阵的乘积} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{无法通过初等变换能化为单位矩阵} \\
&\Leftrightarrow\ 0\text{是矩阵}A\text{的特征值} \\
&\Leftrightarrow\ \text{齐次线性方程组}Ax = 0\text{有非零解}
\end{aligned}
$$

4. $A \cong B$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ r(A) = r(B) \\
&\Leftrightarrow\ A\text{通过初等变换能化为}B \\
&\Rightarrow\ |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0, |A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0.\text{即}A\ B\text{的行列式同时为 0 或同时不为 0}
\end{aligned}
$$

5. 若 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AB = E$，则必有 $BA = E$

6. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A，其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 $\Rightarrow$ **左乘行变换，右乘列变换**

6. 初等矩阵均可逆，其逆矩阵是同类型的初等矩阵，即

倍乘	$E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$	第 i 行（或列）乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行（或列）乘以 $1/k$
互换	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	交换第 i 行（或列）和第 j 行（或列）的**逆矩阵是其本身**
倍加	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$	第 i 行（或列）加上 k 倍第 j 行（或列）的逆矩阵是第 i 行（或列）加上 $-k$ 倍第 j 行（或列）

7. 矩阵 A 与 B **等价**的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q，使 $PAQ=B$
8. 秩 $r(A)=A$的列秩 $=A$的行秩
9. 矩阵经初等变换后秩不变

1.3 运算

1. 设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A+B=C$
2. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的**数乘**，记作 kA
3. 设 $A,B,C,\mathbf{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是常数，则矩阵的加法和数乘运算满足：
   (a) $A+B=B+A$
   (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   (c) $A+\mathbf{O}=A$
   (d) $A+(-A)=\mathbf{O}$
   (e) $1A=A$
   (f) $k(lA)=(kl)A$
   (g) $(kA)^n=k^nA^n$
   (h) $k(A+B)=kA+kB$
   (i) $(k+l)A=kA+lA$
4. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$，其中
$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum \text{第 } i \text{ 行}\times\text{第 } j \text{ 列}$$
   称为 A 与 B 的**乘积**，记作 $C=AB$
5. 矩阵乘法有下列法则：
   (a) $A(BC)=(AB)C$
   (b) $A(B+C)=AB+AC$
   (c) $(A+B)C=AC+BC$
   (d) $(kA)(lB)=klAB$
   (e) $AE=EA=A$
   (f) $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$
6. 设 A 是 n 阶矩阵，k 是正整数，
   (a) A 的 k 次方幂 $A^k=A\cdot A\ldots A(k\text{ 个 }A)$

(b) $\mathbf{A^0} = \mathbf{E}$

(c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$

(d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.
$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $\mathbf{(A+E)^2 = A^2 + 2A + E}$

(a) $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$

(b) $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$

(c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow$ (A - 2E)(B - 4E) = 8E

12. 设 α 和 β 都是列向量，则

(a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$，两者都是 n 阶矩阵（互为转置）

(b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数

(c)
$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \textbf{(对称矩阵)}$$

(d) $r(\alpha\alpha^T) = 1$

(e) $\alpha\alpha^T$ 特征值是$||\alpha||^2, 0, 0, \dots, 0(n-1$个$)$

(f)
$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \text{（平方和）}$$

13. 向量

- $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- $(k\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
- $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$

1.4 公式

1.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n|A|$
3. $|AB| = |A||B|$ ，$|A^2| = |A|^2$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A-B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E+A)^T = E + A^T$

1.4.3 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. A 可逆有 $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
   (a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$)，则
      i. 且 $n \geq 3$ 时，$(A^*)^* = O$
      ii. 且 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果} r(A) = n, \\ 1, & \text{如果} r(A) = n-1, \\ 0, & \text{如果} r(A) < n-1 \end{cases}$$

10. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$(二阶矩阵)，则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。**主对调，副变号**

1.4.4 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} (k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$
9.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & \frac{1}{c} \\ & \frac{1}{b} & \\ \frac{1}{a} & & \end{bmatrix}$$

1.4.5 秩

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^TA) = r(AA^T)$
2. 当 $k \neq 0$ 时，$r(kA) = r(A)$
3. $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$
4. A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，则
   (a) $r(AB) \leq r(A)$并且$r(AB) \leq r(B)$，即 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
   (b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$
   (c) $r(A, AB) = r(A)$详见理解 1
   (d) $r(B, BA) = r(B)$

(e) 且 $AB=O$，则

i. $r(A)+r(B)\leq n$

ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解

- 按列分块，有

$$B=[b_1,b_2,\dots,b_s],AB=A[b_1,b_2,\dots,b_s]=[Ab_1,Ab_2,\dots,Ab_s]=[0,0,\dots,0]$$

因此

$$Ab_i=0,\quad i=1,2,\dots,s.$$

(f) 且 $AB=C$，则

i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 线性表出

- 对 B，C 按列分块，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1+\dots+a_{1n}\beta_n & =\alpha_1, \\ a_{21}\beta_1+\dots+a_{2n}\beta_n & =\alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1+\dots+a_{nn}\beta_n & =\alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)=r(BA)$

6. 若 A 列满秩，则 $r(AB)=r(B)$

7. 若 A 行满秩，则 $r(AB)=r(A)$

8. A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，C 是 $s\times t$ 矩阵，则

$$r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B)$$

9.
$$r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}=r(A)+r(B)$$

10.
$$r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\geq r(A)+r(B)$$

11. 若 $A\sim B$，则

(a) $r(A)=r(B)$

(b) $r(A+kE)=r(B+kE)$

1.4.6 分块矩阵

1. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

   (a)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

   (b)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

   (a)
$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

   (b)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

   (c)
$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

   (d)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

   (a)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

   (b)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

   (c)
$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & -B^*ZC^* \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

   (d)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ -C^*ZB^* & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & -B^*ZC^* \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -C^*ZB^* & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

1.4.7 对角矩阵

1. $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$

2.
$$\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & & \\ & b_2a_2 & \\ & & b_3a_3 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

4.
$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

1.4.8 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$，则
   (a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积
   (b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
   (c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵，主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当} k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$，则 $B^2 = P^{-1}A^2P$，即
   (a) $\mathbf{B^n = P^{-1}A^nP}$
   (b) $A^n = PB^nP^{-1}$

1.5 方法步骤

1. 已知矩阵 A，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，求 P, Q
   (a) 标准型: 对角矩阵是特征值
   (b) **初等行变换**: 对 A 做初等**行变换**化为上三角矩阵 $B([A|E]- > [B|P])$ 得到 P，再对 B 做**列变换**或B^T **作行变换**化为对角矩阵 $\Lambda([B^T|E]- > [\Lambda|Q])$ 得到 Q
2. 由 A^* 求 A
   (a) $|A^*|$
   (b) $|A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow |A|$
   (b) $AA^* = |A|E \Rightarrow A = |A|(A^*)^{-1}$
3. 秩求法
   - $|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$
   - $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$
   - 初等行变换矩阵秩不变
   - 找不为 0 的子式 $\leq$ r(A)
   - A B 相似$\Rightarrow r(A) = r(B)$
4. 求特殊矩阵的 n 次方
   - 分块
   - 若 $r(A) = 1$，则 $A^n = l^{n-1}A$，其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
   - $P^{-1}AP = B \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}, B^n = P^{-1}A^nP$
   - 观察多少次幂之后是 0，之后的都是 0
   - 对角矩阵的 n 次方
5. 求伴随矩阵 A^*
   - 定义
   - $A^* = |A|A^{-1}$
6. 求可逆矩阵

- 求代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq 0)$
- 用初等行变换

$$(A\ E)\xrightarrow{\text{由上往下}}\cdots\longrightarrow(\text{上三角...})\xrightarrow{\text{由下往上}}\cdots\longrightarrow(*)\xrightarrow{\text{某行乘}k}\longrightarrow(E\ A^{-1})$$

- 分块

$$\begin{bmatrix}B&O\\O&C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1}&O\\O&C^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}O&B\\C&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{bmatrix}.$$

1.6 条件转换思路

1. n 阶矩阵 A 秩小于 $n\Rightarrow|A|=0$
2. 设 **A** 是 $m\times n$ 矩阵，**B** 是 $n\times s$ 矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则
   (a) **B** 的列向量是齐次方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 的解
   (b) $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq n$
   (c) 若 **A** 和 **B** 为方阵，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$
   (d) 且 A B 非零，则

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ r(A)<n\text{且}r(B)<n\\&\Rightarrow\ A\text{列向量线性相关}\\&\Rightarrow\ B\text{行向量线性相关}\end{aligned}$$

3. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 则:

$$A_{ij}=-a_{ij}$$
$$A^*=(A_{ij})^T=(-a_{ij})^T=-(a_{ij})^T=-A^T$$

4. 若 $A^*=A^T$，则 $A_{ij}=a_{ij}$
5. 矩阵 A 经过若干次初等**行变换**得到矩阵 B，则
   (a) $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解
   (b) $A\cong B,B=PA$
   (c) $r(A)=r(B)$
6. 矩阵 A 经过若干次初等**列变换**得到矩阵 B，则
   (a) $A\cong B,B=AQ$
   (b) $r(A)=r(B)$
7. $A^*\neq 0\Rightarrow r(A)\geq n-1(A\text{中至少有一个}n-1\text{阶子式不为 }0)$

8. 若 A, B, C 为 n 阶矩阵，且 $ABC = E$，则

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ |A||B||C| = 1 \\
&\Rightarrow \ ABC\text{均可逆} \\
&\Rightarrow \ BC = A^{-1} \Rightarrow BCA = E \\
&\Rightarrow \ AB = C^{-1} \Rightarrow CAB = E
\end{aligned}$$

9. $r(A + AB) \Rightarrow$ 加法，找可逆，若A可逆，则$r(AB) = r(B)$

10. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，$r(A)$ 为秩

    - **基本定义：**秩 = 列向量或行向量的最大线性无关个数
    - **行列式：**方阵 A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
    - **线性相关性：**
      - 列满秩 $\Rightarrow$ 列向量线性无关
      - 行满秩 $\Rightarrow$ 行向量线性无关
    - **齐次方程：** $Ax = 0$
      - 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = n$
      - 非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$, 解空间维数 $n - r(A)$
    - **矩阵运算：**
      - $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
      - $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
    - **逆矩阵：**列满秩 $\rightarrow$ 左逆，行满秩 $\rightarrow$ 右逆；方阵满秩 $\rightarrow$ 可逆
    - **特征值：**方阵秩 < n $\Rightarrow$ 0 是特征值；方阵满秩 $\Rightarrow$ 0 不是特征值

11. A 为 n 阶矩阵，A 各行元素之和都为 0，则

    - 列向量都是 1 是 $Ax = 0$ 的解
    - A 的行向量线性相关
    - $r(A) < n$

1.7 理解

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵，记 (XY) 表示分块矩阵，则 $r(A, AB) == r(A)$ 且 C 的列向量组与 A 的列向量组等价

解析

记 $AB=C$，对 A,C 按列分块有

$$[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]$$

即 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表出，矩阵的秩就是列向量组的秩，故

$$r(A,AB)=r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=r(A)$$

同理 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 线性表出
故 C 的列向量组与 A 的列向量组等价

2. A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=E$，则$r(A)=m,r(B)=m$

解析

已知 $AB=E_m$，则

$$\because AB=E_m\Rightarrow r(AB)=r(E_m)=m,$$

又因为

$$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\},\quad r(A)\le m,\ r(B)\le m,$$

$$\therefore r(A)=m,\quad r(B)=m.$$

3. 矩阵相乘 $\Leftrightarrow$ 两个数的积相加

4. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，且 A B 非零，则 A 列向量线性相关，B 行向量线性相关

解析

已知 $AB=O$

$$\therefore r(A)+r(B)\le n$$

由于 A,B 非零

$$\therefore 0<r(A)<n, 0<r(B)<n$$

故:
$r(A)=A$ 的列秩，即 A 的列向量组线性相关
$r(B)=B$ 的行秩，即 B 的行向量组线性相关

5. 秩

(a) 给定一个矩阵 A，它的秩就是矩阵中**线性无关的行（或列）的最大个数**

(b) 秩 == 矩阵所包含的“独立信息量”

(c) *e.g.* 如果你有 10 行数据，但其中 5 行其实是由另外 5 行“复制”或“线性组合”出来的，那么这些重复的信息是“冗余的”，真正“独立”的信息只有 5 行$\Rightarrow r(A)=5$

(c) 解线性方程组: 判断方程有没有解、是不是唯一解

  i. 方程 $Ax=b$ 有解$\Leftrightarrow r(A)=r(A|b)=r(\bar{A})$

  i. 唯一解$\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})=$ 变量数

  i. 多解$\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<$ 变量数

(d) 判断向量独立性: 度量“向量空间中有多少个独立方向”

  i. 如果列向量组成的矩阵 $r(A)=$ 列数$\Rightarrow$ 向量组线性无关

  i. 否则线性相关

(e) 维度的桥梁: 刻画了“变换的本质效果”

  i. 秩本质上就是矩阵对应线性映射的像空间（列空间）的维数

  ii. 这告诉我们，线性变换把空间压缩到了几维。

  iii. *e.g.* 3×3 矩阵 A

  - $r(A)=3\Rightarrow$ 保留三维空间的全部信息（可能只是旋转或缩放）
  - $r(A)=2\Rightarrow$ 把三维空间压缩成二维平面
  - $r(A)=1\Rightarrow$ 压缩成一条直线
  - $r(A)=0\Rightarrow$ 全部压缩成原点

(f) 与行列式、可逆性关系: 可逆性的根本判据

  i. 如果 n 阶矩阵 A，$r(A)=n$，那么 A 可逆，$|A|\neq 0$

  ii. 如果 $r(A)<n$，矩阵 A 不可逆