1 函数极限的概念与性质

1.1 基础概念

$x\backslash f(x)$	$f(x)\to A$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$	$f(x)\to\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x-x_0<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x-x_0<\delta$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x-x_0<\delta$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x-x_0<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x_0-x<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x_0-x<\delta$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x_0-x<\delta$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ $0<x_0-x<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,$ $x>N$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x>N$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x>N$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x>N$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,$ $x<-N$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x<-N$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x<-N$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $x<-N$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,$ $\lvert x\rvert>N$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $\lvert x\rvert>N$ $\Rightarrow f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $\lvert x\rvert>N$ $\Rightarrow f(x)<-M$	$\forall M>0,\ \exists N>0,$ $\lvert x\rvert>N$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$

1.2 函数极限的性质

1. 唯一性: 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么极限唯一
   - 函数极限存在的充要条件: **左右极限存在且相等**
2. 局部有界性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在正常数 M 和 δ, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$
   - 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界
3. ★局部保号性:
   - 脱帽严格不等
   - $\lim f>0\Rightarrow f>0$
   - $\lim f<0\Rightarrow f<0$
   - 带帽非严格不等
   - $f\ge 0\Rightarrow \lim f\ge 0$

- $f \le 0 \Rightarrow \lim f \le 0$

1.3 等价无穷小

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，称为等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$
5. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
6. 当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小
   - $x\sim\sin x$
   - $x\sim\tan x$
   - $x\sim\arcsin x$
   - $x\sim\arctan x$
   - $x\sim\ln(1+x)\Rightarrow\ \ln u\sim u-1\quad(u\to 1)$
   - $x\sim e^x-1$
   - $x\sim\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
   - $a^x-1\sim x\ln a\quad(a>0,\ a\neq 1)\Rightarrow\ e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$
   - $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow\ 1-(\cos x)^a\sim\dfrac{a}{2}x^2\quad(a\neq 0)$
   - $x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$
   - $(1+x)^a-1\sim ax$
   - $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^3$
7. 当 $x\to 0^+$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\sim-\dfrac{e}{2}x\Rightarrow(1+\text{狗})^{\frac{1}{\text{狗}}}-e\sim-\dfrac{e}{2}\text{狗}$
   - 当 $n\to\infty$ 时，若 $(1+\dfrac{1}{n})^n-e$ 与 $\dfrac{a}{n}$ 是等价无穷小，则 $a=-\dfrac{e}{2}$
   - 当 $n\to\infty$ 时，$(1+\dfrac{1}{n})^n-e\sim-\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$

1.4 结论

1. 极限存在必有界，有界极限不一定存在
2. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in (a, a+\delta)$ 时，$f(x)$ 有界

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1. $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$
2. $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

1.8 方法总结

1. 遇到 e^∞，需讨论 $e^{-\infty}$ 和 $e^{+\infty}$
2. 分段函数在分段点处的极限要考虑左、右极限
3. 对于 $e^{\tan x} - e^{\sin x}$，通常先提取公因式，使其化为 $e^{\square} - 1$ 的形式。

1.9 条件转换思路

1.10 理解