

1 不等式

1.1 基础概念

1.2 结论

1.3 定理

1.4 运算

1.5 公式

1. 若 $b > a > 0$, 则 $a \leq |x| < b \Leftrightarrow a \leq x < b$ 或 $-b < x \leq -a$

2. 均值不等式: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad a, b > 0$

3. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$\bullet \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a, b > 0$$

$$\bullet \frac{a}{b} \leq \frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{2}$$

$$\bullet a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0$$

$$\bullet \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

4. 三角不等式: $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

$$\bullet ||a| - |b|| = |a + b| \Leftrightarrow ab \leq 0$$

$$\bullet |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$\bullet ||a| - |b|| = |a - b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$\bullet |a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \leq 0$$

5. 柯西不等式:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

令 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$, 则有

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$$

注: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

6. Bernoulli (伯努利) 不等式: $(1+x)^n \geq 1+nx, x > -1$

7. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$

8. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

9. $\sin x < x, \quad x > 0$

10. ★当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x$

11. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1$

12. $e^x \geq x + 1, \quad x$ 为任意值

13. $x > 0$ 时, $x - 1 \geq \ln x$ 或 $x \geq \ln x + 1$

14.

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

或等价地,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0.$$

证明

令 $f(t) = \ln t$, 在 $[x, 1+x]$ 用拉格朗日中值定理

1.6 方法步骤

1.7 条件转换思路

1. $x_n > 0, a > 0, \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}$

1.8 理解