

1 一元函数微分学的应用 - 中值定理

1.1 涉及函数的中值定理

1.1.1 有界与最值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $m \leq f(x) \leq M$, 其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值

1.1.2 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 当 $m \leq \mu \leq M$ 时, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$

1.1.3 平均值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 时, 在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

1.1.4 零点定理 (介值定理的特例)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

- 推广的零点定理: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \beta$, 且 $\alpha \cdot \beta < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个根

1.2 涉及导数 (微分) 的中值定理

1.2.1 费马定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足

$$\begin{cases} (1) \text{ 可导 (左右导数存在且相等) }, \\ (2) \text{ 取极值,} \end{cases}$$

则

$$f'(x_0) = 0.$$

1.2.2 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 当 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

1.2.3 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续,} \\ (2) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导,} \\ (3) f(a) = f(b), \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ (驻点)

1. 推广的罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$

2. 罗尔定理的使用需要构造辅助函数, 其方法总结如下:

• 乘积求导公式 $u'v + uv' = (uv)'$ 的逆用

$$\textcircled{1} \quad 2f(x) \cdot f'(x) = [f^2(x)]' = [f(x)f(x)]' = F'(x)$$

$$\textcircled{2} \quad [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]' = F'(x)$$

$$\textcircled{3} \quad [f'(x) + f(x)\varphi'(x)]e^{\varphi(x)} = f'(x)e^{\varphi(x)} + f(x)e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = [f(x)e^{\varphi(x)}]'$$

\Rightarrow 见到 $f'(x) + f(x)\varphi'(x)$, 令 $F(x) = f(x)e^{\varphi(x)}$ 。如:

$$(a) \quad \varphi(x) = x \Rightarrow \text{见到 } f'(x) + f(x), \text{ 令 } F(x) = f(x)e^x$$

$$(b) \quad \varphi(x) = -x \Rightarrow \text{见到 } f'(x) - f(x), \text{ 令 } F(x) = f(x)e^{-x}$$

$$(c) \quad \varphi(x) = kx \Rightarrow \text{见到 } f'(x) + kf(x), \text{ 令 } F(x) = f(x)e^{kx}$$

$$\textcircled{4} \quad u''v + 2u'v' + uv'' = (uv)''$$

• 商的求导公式 $\frac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\frac{u}{v}\right)'$

$$\textcircled{1} \quad \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \left[\frac{f(x)}{x}\right]'$$

$$\Rightarrow \text{见到 } xf'(x) - f(x), x \neq 0, \text{ 令 } F(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'$$

$$\Rightarrow \text{见到 } f''(x)f(x) - [f'(x)]^2, f(x) \neq 0, \text{ 令 } F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = [\ln f(x)]''$$

$$\Rightarrow \text{见到 } f''(x)f(x) - [f'(x)]^2, f(x) > 0, \text{ 可考虑令 } F(x) = \ln f(x)$$

1.2.4 拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续,} \\ (2) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导} \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

或者写成

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1. 见到 $f(b) - f(a)$ 与 f 与 f' 的关系, 一般想到用拉格朗日中值
2. 拉格朗日中值定理的作用是用导函数的值来控制函数值的增减

1.2.5 柯西中值定理

设函数 $f(x), g(x)$ 满足

$$\begin{cases} (1) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续,} \\ (2) \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导,} \\ (3) g'(x) \neq 0 \end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

1. $f(x), g(x)$ 往往考察一个具体函数, 一个抽象函数

1.2.6 泰勒公式 (微分中值定理)

1. 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 则对该邻域内任意点 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

2. 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任意点 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

3. 当 $x_0 = 0$ 时泰勒公式称为麦克劳林公式

(a)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x)$$

(b)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

(c) 重要函数的麦克劳林展开式

① 指数函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

② 正弦函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

③ 余弦函数 $== \sin' x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

④ 几何级数 (一)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

⑤ 几何级数 (二) $== [\ln(1+x)]'$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

⑥ 对数函数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

⑦ 二项式展开

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

4. 说明:

① 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式适用于区间 $[a, b]$, 常在证明题中使用。如证不等式、中值等式等

② 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式适用于点 $x = x_0$ 及其邻域, 常用于研究点 $x = x_0$ 处的某些结论。如求极限、判定无穷小的阶数、判定极值等

1.3 基础概念

1.4 结论

1. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1.8 方法总结

1. 解题方法

① 找定义式、关系式、约束式

② ★做一至两步逆运算

③ 联想经典形式

④ 恒等变形

- $a = a - 0$
- $a = a + b - b$
- $e - 1 = e^1 - e^0$

⑤ 翻译数学名词

1.9 条件转换思路

1. 函数 $f(x)$, 过点 $A(0, f(0))$ 与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c)) \Rightarrow$ 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \ell(x)$, $\ell(x)$ 是 A, B, C 三点的直线
2. 若证 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 用罗尔定理可能性大
3. 若证 $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ (不等式) 用泰勒公式可能性大
4. 遇到 f 与 $f^{(n)}(n \geq 2)$ 的关系, 考虑泰勒公式

1.10 理解

1. $f(x)$ 在 x_0 处连续:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) &\Rightarrow f(x) - f(x_0) = o(1) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)\end{aligned}$$

2. $f(x)$ 在 x_0 处可导:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

3. $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导:

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

2 一元函数微分学的应用 - 微分等式

方程 $f(x) = 0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的零点。从几何上讲, 方程的根作为两条曲线的交点。基于此, 讨论方程的根 == 讨论曲线的交点。方法步骤如下

1. 讨论存在性

- 观察, 带入特殊值 (0, 1, 端点), 判断 $f(x)$ 正负
- 使用零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个根
- ★实系数奇次方程至少有一个实根

2. 讨论唯一性

- 单调性: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至多有一个根
- 罗尔定理的推论: 若 $f^{(n)}(x) = 0$ 至多有 k 个根, 则 $f(x) = 0$ 至多有 $k + n$ 个根

3 一元函数微分学的应用 - 微分不等式

3.1 用函数性态 (包括单调性、凹凸性和最值等) 证明不等式

1. 若 $f'(x) \geq 0$, $a < x < b$, 则 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

2. 若有 $f''(x) \geq 0$, $a < x < b$, 则有 $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$

① 当 $f'(a) > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调增加

② 当 $f'(b) < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调减少

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续, 且在 I 内只有一个极值点 x_0 , 则

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 \text{ 为极大值点时, 即为 } I \text{ 内的最大值点 } (f(x_0) = M), \\ \quad f(x_0) \geq f(x), \quad x \in I; \\ \text{当 } x_0 \text{ 为极小值点时, 即为 } I \text{ 内的最小值点 } (f(x_0) = m), \\ \quad f(x_0) \leq f(x), \quad x \in I. \end{cases}$$

4. 若有 $f''(x) > 0$ (凹), $a < x < b, f(a) = f(b) = 0$, 则有 $f(x) < 0$
5. 若有 $f''(x) < 0$ (凸), $a < x < b, f(a) = f(b) = 0$, 则有 $f(x) > 0$

3.2 用常数变量化证明不等式

如果欲证的不等式中都是常数 (常数不可直接求导), 则可以将其中一个或者几个 **常数变量化**, 再利用上面所述的导数工具去证明

Example

证明

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

令

$$f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x - a}{\sqrt{ax}}.$$

3.3 用中值定理证明不等式

主要用拉格朗日中值定理或者泰勒公式

Example

证明

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}.$$

令 $f(x) = \ln x$, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(\xi).$$

3.4 结论

1. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$