

1 矩阵

1.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵, 当 $m = n$ 时, 矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0, 则称这个矩阵是**零矩阵**, 可简记为 \mathbf{O}
3. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, 如果对应的元素都相等, 即 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$
4. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$
5. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 称为矩阵 A 的**转置矩阵**, 记作 A^T
6. 如果方阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 是**对称矩阵**
7. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

8. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置, 即 $A^* = [A_{ji}] = (A_{ij})^T$
9. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E$ (单位矩阵) 成立, 则称 A 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**, B 是 A 的逆矩阵
10. 对 $m \times n$ 矩阵, 下列三种变换
 - (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行 (列)
 - (b) 互换矩阵某两行 (列) 的位置
 - (c) 把某行 (列) 的 k 倍加至另一行 (列)

称为矩阵的**初等行 (列) 变换**, 统称为矩阵的**初等变换**

11. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**, 记作 $A \cong B$
12. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**
 - (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
 - (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行
 - (c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行

13. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 。向量内积: $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

14. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = A^T A = E$, 称 A 是 **正交矩阵**:

$$\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$\Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量两两正交 (单位向量)

$\Leftrightarrow A$ 的每个行 (列) 向量长度均为 1

$\Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量平方和为 1

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = -1$$

15. 若 A 是正交矩阵且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则:

(a) $\alpha_i^T \alpha_i = 1$

(b) $\alpha_i^T \alpha_j = 0 \ (i \neq j)$

1.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵, 则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**, 记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

$\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性无关

$\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 是初等矩阵

$\Leftrightarrow A$ 与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow 0$ 不是矩阵 A 的特征值

3. 若 A 是 n 阶矩阵, 且满足 $AB = E$, 则必有 $BA = E$

4. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A , 其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 \Rightarrow **左乘行变换, 右乘列变换**

4. 初等矩阵均可逆, 其逆矩阵是同类型的初等矩阵, 即

倍乘 $E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$ 第 i 行 (或列) 乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 乘以 $1/k$

互换 $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ 交换第 i 行 (或列) 和第 j 行 (或列) 的逆矩阵是其本身

倍加 $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$ 第 i 行 (或列) 加上 k 倍第 j 行 (或列) 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 加上 $-k$ 倍第 j 行 (或列)

5. 矩阵 A 与 B **等价** 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q , 使 $PAQ = B$

6. 秩 $r(A) = A$ 的列秩 $= A$ 的行秩

7. 矩阵经初等变换后秩不变

1.3 运算

1. 设 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记作 $A + B = C$
2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记作 kA
3. 设 A, B, C, \mathbf{O} 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:
 - (a) $A + B = B + A$
 - (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
 - (c) $A + \mathbf{O} = A$
 - (d) $A + (-A) = \mathbf{O}$
 - (e) $1A = A$
 - (f) $k(lA) = (kl)A$
 - (g) $k(A + B) = kA + kB$
 - (h) $(k + l)A = kA + lA$
4. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = [b_{ij}]$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = [c_{ij}]$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

称为 A 与 B 的乘积, 记作 $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则:
 - (a) $A(BC) = (AB)C$
 - (b) $A(B + C) = AB + AC$
 - (c) $(A + B)C = AC + BC$
 - (d) $(kA)(lB) = klAB$
 - (e) $AE = EA = A$
 - (f) $\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \mathbf{O}$
6. 设 A 是 n 阶矩阵, k 是正整数,
 - (a) A 的 k 次方幂 $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k 个 A)
 - (b) $A^0 = \mathbf{E}$
 - (c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
 - (d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

(a) $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$

(b) $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$

(c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{B} - 4\mathbf{E}) = 8\mathbf{E}$

12. 设 α 和 β 都是列向量, 则

(a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$, 两者都是 n 阶矩阵 (互为转置)

(b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数

(c)

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \text{ (对称矩阵)}$$

(d)

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ (平方和)}$$

1.4 公式

1.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$

2. $|kA| = k^n|A|$

3. $|AB| = |A||B|$, $|A^2| = |A|^2$

4. $|A^*| = |A|^{n-1}$

5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E + A)^T = E + A^T$

1.4.3 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

1.4.4 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$), 则

- i. 且 $n \geq 3$ 时, $(A^*)^* = O$
- ii. 且 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果 } r(A) = n, \\ 1, & \text{如果 } r(A) = n - 1, \\ 0, & \text{如果 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

10. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (二阶矩阵), 则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 。主对调, 副变号

1.4.5 秩

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$

2. 当 $k \neq 0$ 时, $r(kA) = r(A)$

3. $r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

4. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则

(a) $r(AB) \leq r(A)$ 并且 $r(AB) \leq r(B)$, 即 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$

(b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

(c) 且 $AB = O$, 则

i. $r(A) + r(B) \leq n$

ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解

• 按列分块, 有

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

因此

$$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

(d) 且 $AB = C$, 则

i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出

• 对 B, C 按列分块, 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \dots + a_{2n}\beta_n = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B) = r(BA)$

6. 若 A 列满秩, 则 $r(AB) = r(B)$

7. 若 A 行满秩, 则 $r(AB) = r(A)$

8. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, C 是 $s \times t$ 矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B)$$

9.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

10.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

11. 若 $A \sim B$, 则

(a) $r(A) = r(B)$

(b) $r(A + kE) = r(B + kE)$

1.4.6 分块矩阵

1. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

1.4.7 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$, 则

(a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

(b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵, 主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当 } k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$, 则 $B^2 = P^{-1}A^2P$, 即

(a) $B^n = P^{-1}A^nP$

(b) $A^n = PB^nP^{-1}$

1.5 条件转换思路

1. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则

(a) \mathbf{B} 的列向量是其次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解

(b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$

2. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 则:

$$A_{ij} = -a_{ij}$$

$$A^* = (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T$$

3. 若 $A^* = A^T$, 则 $A_{ij} = a_{ij}$