

1 一元函数微分学的计算

1.1 基本求导公式

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$ (a 为常数)
2. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)
5. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

6. 三角函数求导

- $(\sin x)' = \cos x$
 - $(\cos x)' = -\sin x$
 - $(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
 - $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
 - $(\sec x)' = \sec x \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
 - $(\csc x)' = -\csc x \cot x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
 - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
 - $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7. $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 8. $[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1.2 四则运算

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $d[u(x) \pm v(x)] = d[u(x)] \pm d[v(x)]$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $d[u(x)v(x)] = u(x)d[v(x)] + v(x)d[u(x)]$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$6. d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)d[u(x)] - u(x)d[v(x)]}{[v(x)]^2} \quad v(x) \neq 0$$

1.3 复合函数的导数与微分形式不变性

设 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导, 则

- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$
- $d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx = f'[g(x)]d[g(x)]$

1.4 分段函数的导数

设

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$$

其中 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 分别在 $x > x_0$ 与 $x < x_0$ 时可导, 则:

① 在分段点 x_0 处, 用导数定义求导:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f_2(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$

② 在非分段点用导数公式求导:

$$\begin{cases} x > x_0, & f'(x) = f'_1(x), \\ x < x_0, & f'(x) = f'_2(x). \end{cases}$$

1.5 反函数的导数

1. 设 $y = f(x)$ 为单调且可导函数, 并且 $f'(x) \neq 0$, 则存在反函数 $x = \varphi(y)$, 且

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

即

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Example

设 $y = \arcsin x$, $-1 < x < 1$, 则其反函数为

$$x = \sin y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

根据反函数求导公式,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

其中 $-1 < x < 1$ 。

2. 3. $y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$, 即 $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, $\varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

解析

在 $y = f(x)$ 单调且二阶可导的情况下, 若 $f'(x) \neq 0$, 则存在反函数 $x = \varphi(y)$ 。

记

$$f'(x) = y'_x, \quad \varphi'(y) = x'_y,$$

则有

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

进一步,

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x'_y} \right) \\ &= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \left(-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2} \right) \cdot \frac{1}{x'_y} \\ &= -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}. \end{aligned}$$

4. $x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$

1.6 隐函数求导法

设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的可导函数, 则

① 方程 $F(x, y) = 0$ 两边对自变量 x 求导, 注意 $y = y(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得到一个关于 y' 的方程

② 解该方程便可求出 y'

1.7 参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定, 其中 t 为参数, 且 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 均可导, 并且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

1.8 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子, 一般先取对数再求导。设 $y = f(x)$ (其中 $f(x) > 0$), 则

① 等式两边取自然对数, 得

$$\ln y = \ln f(x).$$

② 两边对自变量 x 求导 (注意 $y = y(x)$, 将 y 视为中间变量), 得

$$\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]'.$$

因此

$$y' = y \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

1.9 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0$, 且 $u(x) \neq 1$), 除了用上面的对数求导法, 还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

然后求导

1.10 ★ 高阶导数

1. 归纳法: 逐次求导, 探索规律, 得出通式

2. 莱布尼茨公式: 设 $u = u(x), v = v(x)$ 均 n 阶可导, 则

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

- $\star (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$
 - $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
 -
- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | | | | | |

3. 泰勒展开式

- ① 抽象展开：任何一个在点 x_0 的邻域内无穷阶可导的函数，都可以表示为其泰勒级数

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，称为麦克劳林展开式：

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- ② 具体展开：当题目给出具体的无穷阶可导函数 $y = f(x)$ 时，可利用已知基本函数的展开式，将其展开为幂级数（此处使用 m ）。
- ③ 函数泰勒展开式的唯一性：无论 $f(x)$ 通过何种方法展开，其泰勒展开式具有唯一性。因此可通过比较①、②中幂级数的系数，求出 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $f^{(n)}(0)$
- x 的幂数相等，得到 m 和 n 的关系式
 - x^n 的系数相等，得到 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $f^{(n)}(0)$
 - 消去 m

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, & |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, & |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, & |x| < 1 \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, & -\infty < x < +\infty \\
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots, & |x| < 1 \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots, & |x| < \frac{\pi}{2} \\
\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots, & |x| \leq 1 \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, & |x| \leq 1
\end{aligned}$$

1.11 基础概念

1.12 结论

1.13 定理

1.14 运算

1.15 公式

1. $[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
2. $[\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x^2 - a^2 > 0$
3. $(x \ln x)' = \ln x + 1$
4. $\left(\frac{1}{x} \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$

5. 常用的高阶导数

- $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}.$
- $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$
- $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

1.16 方法总结

1. 对于 $g(x) = x^k f(x)$ 型, 可以考虑用泰勒公式求 $g^{(n)}(0)$

1.17 条件转换思路

1.18 理解