1 □□

1.1 □□□□

1. m □ n □□□□□ $m\times n$ □□□□ $m=n$ □□□□ A □□ n □□□□ n □□□
2. □□□□□□□□□□□□□□ 0□□□□□□□□□□□□□□□□□ **O**
3. □□ $m\times n$ □□□ $A=[a_{ij}]$□$B=[b_{ij}]$□□□□□□□□□□□□□□□ $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\dots,m;j=1,2,\dots,n)$□□□□□ A □ B □□□□□ $A=B$
4. n □□□ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ □□□□□□□□□□□□□ n □□□ A □□□□□□□ $|A|$ □ $\det A$
5. □□□ A □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ A □□□□□□□□ A^T
6. □□□□ A □□ $A^T=A$□□□ A □□□□□□
7. n □□□ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$□□□□ $|A|$ □□□□□ a_{ij} □□□□□□ A_{ij} □□□□□□□□

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

□□□□ A □□□□□

8. □□□□□□□□□□□□□□□ $A^*=[A_{ji}]=(A_{ij})^T$
9. n □□□ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$□□□□□ n □□□ B □□ $AB=BA=E$(□□□□) □□□□□ A □□□□□□□□□□□□B □ A □□□□
10. □ $m\times n$ □□□□□□□□□□
    (a) □□□□□ k □□□□□□□□□□□
    (b) □□□□□□□□□□□□□□□
    (c) □□□□□□□ k □□□□□□□□□□□

    □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
11. □□□□ A □□□□□□□□□□□□□ B□□□□□ A □□□ B □□□□□ $A\cong B$
12. □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
    (a) $E_i(k)$ □□□□□ i □□□□□ k
    (b) E_{ij} □□□□□□ i,j □
    (c) $E_{ij}(k)$ □□□□□ j □□ k □□□□ i □
13. □ $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$□$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$□□□□□$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$

14. □ A □ n □□□□□□ $AA^T = A^T A = E$□□ A □ □□□□**:**

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ A^T = A^{-1} \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ □□□□□□□□□□□□□□□□□□} \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ □□□□□□□□□□□□□□ } 1 \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ □□□□□□□□□□□□ } 1 \\
&\Leftrightarrow\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1 \\
&\Rightarrow |A|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 1 \text{ □} |A| = -1
\end{aligned}
$$

15. □ A □□□□□□ $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$□□:

    (a) $\alpha_i^T \alpha_i = 1$

    (b) $\alpha_i^T \alpha_j = 0\ (i \neq j)$

1.2 □□

1. □ A □□□□□□□□□ A □□□□□□□□□ A^{-1}

2. n □□□ A □□

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ |A| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow\ r(A) = n \\
&\Leftrightarrow\ A\text{□□□□□□□□□□□□□} \\
&\Leftrightarrow\ A = P_1 P_2 \ldots P_s, P_i (i = 1, 2, \ldots, s)\text{□□□□□} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{□□□□□□□} \\
&\Leftrightarrow\ 0\text{□□□□}A\text{□□□□}
\end{aligned}
$$

3. □ A □ n □□□□□□□ $AB = E$□□□□ $BA = E$

4. □□□□□ P □ (□) □□□ A□□□□ $PA(AP)$ □□□□□ A □□□□□□□□□ (□) □□ $\Rightarrow$ □□□□□□□□□□□□

4. □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□	$E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$	□ i □□□□□□□□□□□□ k □□□□□□ i □□□□□□□ $1/k$
□□	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	□□□ i □□□□□□□□ j □□□□□□□□□□□□□□
□□	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$	□ i □□□□□□□□ k □□ j □□□□□□□□□□□□□ i □□□□□□□ $-k$ □□ j □□□□□

5. □□ A □ B □□□□□□□□□□□□□□□□□□ P □ Q□□ $PAQ = B$

6. □ $r(A) = A$□□□ $= A$□□□

7. □□□□□□□□□□□□

1.3 □□

1. □ $A=[a_{ij}]$□$B=[b_{ij}]$ □□□ $m\times n$ □□□□ $m\times n$ □□ $C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ □□□□ A □ B □□□□□ $A+B=C$

2. □ $A=[a_{ij}]$ □ $m\times n$ □□□k □□□□□□□ $m\times n$ □□ $[ka_{ij}]$ □□□ k □□□ A □□□□□□ kA

3. □ $A,B,C,\mathbf{O}$ □□ $m\times n$ □□□k,l □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

   (a) $A+B=B+A$
   (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   (c) $A+\mathbf{O}=A$
   (d) $A+(-A)=\mathbf{O}$
   (e) $1A=A$
   (f) $k(lA)=(kl)A$
   (g) $k(A+B)=kA+kB$
   (h) $(k+l)A=kA+lA$

4. □ $A=[a_{ij}]$ □ $m\times n$ □□□$B=[b_{ij}]$ □ $n\times s$ □□□□□ $m\times s$ □□ $C=[c_{ij}]$□□□

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum \text{□} i \text{□} \times \text{□} j \text{□}$$

   □□ A □ B □□□□□ $C=AB$

5. □□□□□□□□□□

   (a) $A(BC)=(AB)C$
   (b) $A(B+C)=AB+AC$
   (c) $(A+B)C=AC+BC$
   (d) $(kA)(lB)=klAB$
   (e) $AE=EA=A$
   (f) $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$

6. □ A □ n □□□□k □□□□□

   (a) A □ k □□□ $A^k=A\cdot A\ldots A(k$ □ $A)$
   (b) $\mathbf{A^0}=\mathbf{E}$
   (c) $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$
   (d) $(A^k)^l=A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1 & A_2+B_2\\ A_3+B_3 & A_4+B_4\end{bmatrix}$$

8.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$$

9.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $\mathbf{(A+E)^2 = A^2 + 2A + E}$

    (a) $E - A^3 = (E-A)(E+A+A^2)$

    (b) $E + A^3 = (E+A)(E-A+A^2)$

    (c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow$ (A - 2E)(B - 4E) = 8E

12. □ α □ β □□□□□□□

    (a) □□□·□□□: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$□□□□□ n □□□□□□□□□

    (b) □□□·□□□: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ □□□□

    (c)
$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} (□□□□)$$

    (d)
$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad □□□□□$$

1.4 □□

1.4.1 □□□

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n|A|$
3. $|AB| = |A||B|$, $|A^2| = |A|^2$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.4.2 □□

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A-B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E+A)^T = E + A^T$

1.4.3 □□

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

1.4.4 □□

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
   (a) □ A □□□ $(|A| = 0)$□□
      i. □ $n \geq 3$ □□$(A^*)^* = O$
      ii. □ $n = 2$ □□$(A^*)^* = A$

9.

$$
r(A^*) = \begin{cases} n, & □□ r(A) = n, \\ 1, & □□ r(A) = n-1, \\ 0, & □□ r(A) < n-1 \end{cases}
$$

10. □ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$(□□□□)□□ $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$□□□□□□□□

1.4.5 □

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$
2. □ $k \neq 0$ □□$r(kA) = r(A)$
3. $r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$
4. A □ $m \times n$ □□□B □ $n \times s$ □□□□
   (a) $r(AB) \leq r(A)$□□$r(AB) \leq r(B)$□□ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
   (b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$
   (c) □ $AB = O$□□
      i. $r(A) + r(B) \leq n$
      ii. B □□□□□□□□□□ $Ax = 0$ □□
         - □□□□□□□

           $$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

           □□

           $$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

   (d) □ $AB = C$□□
      i. □□ $C(AB)$ □□□□ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ □□ B □□□□ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ □□□□
         - □ B□C □□□□□□

           $$
           \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}
           $$

           □

           $$
           \begin{cases} a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n & = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \dots + a_{2n}\beta_n & = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n & = \alpha_n \end{cases}
           $$

ii. □□ $C(AB)$ □□□□□□ A □□□□□□□□

5. □ A □□□□ $r(AB)=r(B)=r(BA)$

6. □ A □□□□□ $r(AB)=r(B)$

7. □ A □□□□□ $r(AB)=r(A)$

8. A □ $m\times n$ □□□B □ $n\times s$ □□□C □ $s\times t$ □□□□

$$r(AB)+r(BC)\le r(ABC)+r(B)$$

9. $$r\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}=r(A)+r(B)$$

10. $$r\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\ge r(A)+r(B)$$

11. □ $A\sim B$□□

    (a) $r(A)=r(B)$

    (b) $r(A+kE)=r(B+kE)$

1.4.6 □□□□

1. □ B□C □□□ m □□ n □□□□□

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}$$

2. □ B□C □□□ m □□ n □□□□□□□

    (a) $$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$$

    (b) $$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$$

1.4.7 □□□□ n □□

1. □ $r(A)=1$□□

    (a) A □□□□□□□□□□□□□□□□□□□

    (b) $A^2=lA$ □□ $l=\sum a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

    (c) $A^n=l^{n-1}A$ □□ $l=\sum a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

2. □ A □ $n \times n$ □□□□□□□□□□□□ **0**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

□□

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ □} k \geq n$$

3. □ $B = P^{-1}AP$□□ $B^2 = P^{-1}A^2P$□□

   (a) $B^n = P^{-1}A^nP$

   (b) $A^n = PB^nP^{-1}$

1.5 □□□□□□

1. □ **A** □ $m \times n$ □□□**B** □ $n \times s$ □□□□ $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$□□

   (a) **B** □□□□□□□□□□ $\mathbf{Ax} = 0$ □□

   (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$

2. □ $a_{ij} + A_{ij} = 0$ □:

$$A_{ij} = -a_{ij}$$
$$A^* = (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T$$

3. □ $A^* = A^T$□□ $A_{ij} = a_{ij}$