

# 1 函数极限的概念与性质

## 1.1 基础概念

$x \setminus f(x)$	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 <  x - x_0  < \delta$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 <  x - x_0  < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 <  x - x_0  < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 <  x - x_0  < \delta$ $\Rightarrow  f(x)  > M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow  f(x)  > M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow  f(x)  > M$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow  f(x)  > M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow  f(x)  > M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $ x  > N$ $\Rightarrow  f(x) - A  < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x  > N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x  > N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x  > N$ $\Rightarrow  f(x)  > M$

## 1.2 函数极限的性质

1. 唯一性: 如果极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么极限唯一

• 函数极限存在的充要条件: 左右极限存在且相等

2. 局部有界性: 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则存在正常数  $M$  和  $\delta$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$

• 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内必定有界

3. ★★局部保号性:

• 脱帽严格不等

①  $\lim f > 0 \Rightarrow f > 0$

②  $\lim f < 0 \Rightarrow f < 0$

• 带帽非严格不等

$$\textcircled{1} \quad f > 0 \Rightarrow \lim f \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad f < 0 \Rightarrow \lim f \leq 0$$

### 1.3 等价无穷小

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ , 则  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的低阶无穷小
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷小
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ , 则  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶无穷小
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 称为等价无穷小, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$
5. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小
6. 当  $x \rightarrow 0$  时, 常用的等价无穷小

- $x \sim \sin x$
- $x \sim \tan x$
- $x \sim \arcsin x$
- $x \sim \arctan x$
- $x \sim \ln(1+x) \Rightarrow \ln u \sim u-1 \quad (u \rightarrow 1)$
- $x \sim e^x - 1$
- $x \sim \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1 - (\cos x)^a \sim \frac{a}{2}x^2 \quad (a \neq 0)$
- $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$
- $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$$7. \text{ 当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } (1+x)^{\frac{1}{x}} - e \sim -\frac{e}{2}x \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n - e \sim -\frac{e}{2}$$

- 当  $n \rightarrow \infty$  时, 若  $(1+\frac{1}{n})^n - e$  与  $\frac{a}{n}$  是等价无穷小, 则  $a = -\frac{e}{2}$

## 1.4 结论

1. 极限存在必有界，有界极限不一定存在
2. 若  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  存在，则存在  $\delta > 0$ ，当  $x \in (a, a + \delta)$  时， $f(x)$  有界

## 1.5 定理

## 1.6 运算

## 1.7 公式

1.  $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$
2.  $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

## 1.8 方法总结

1. 遇到  $e^\infty$ ，需讨论  $e^{-\infty}$  和  $e^{+\infty}$
2. 分段函数在分段点处的极限要考虑左、右极限
3. 对于  $e^{\tan x} - e^{\sin x}$ ，通常先提取公因式，使其化为  $e^\square - 1$  的形式

## 1.9 条件转换思路

## 1.10 理解

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ ，在定义中  $x \neq x_0$ ，但  $f(x)$  可以等于  $A$  (绝对值是非负的)