

本节内容

最短路径

Dijkstra算法

迪杰斯特拉



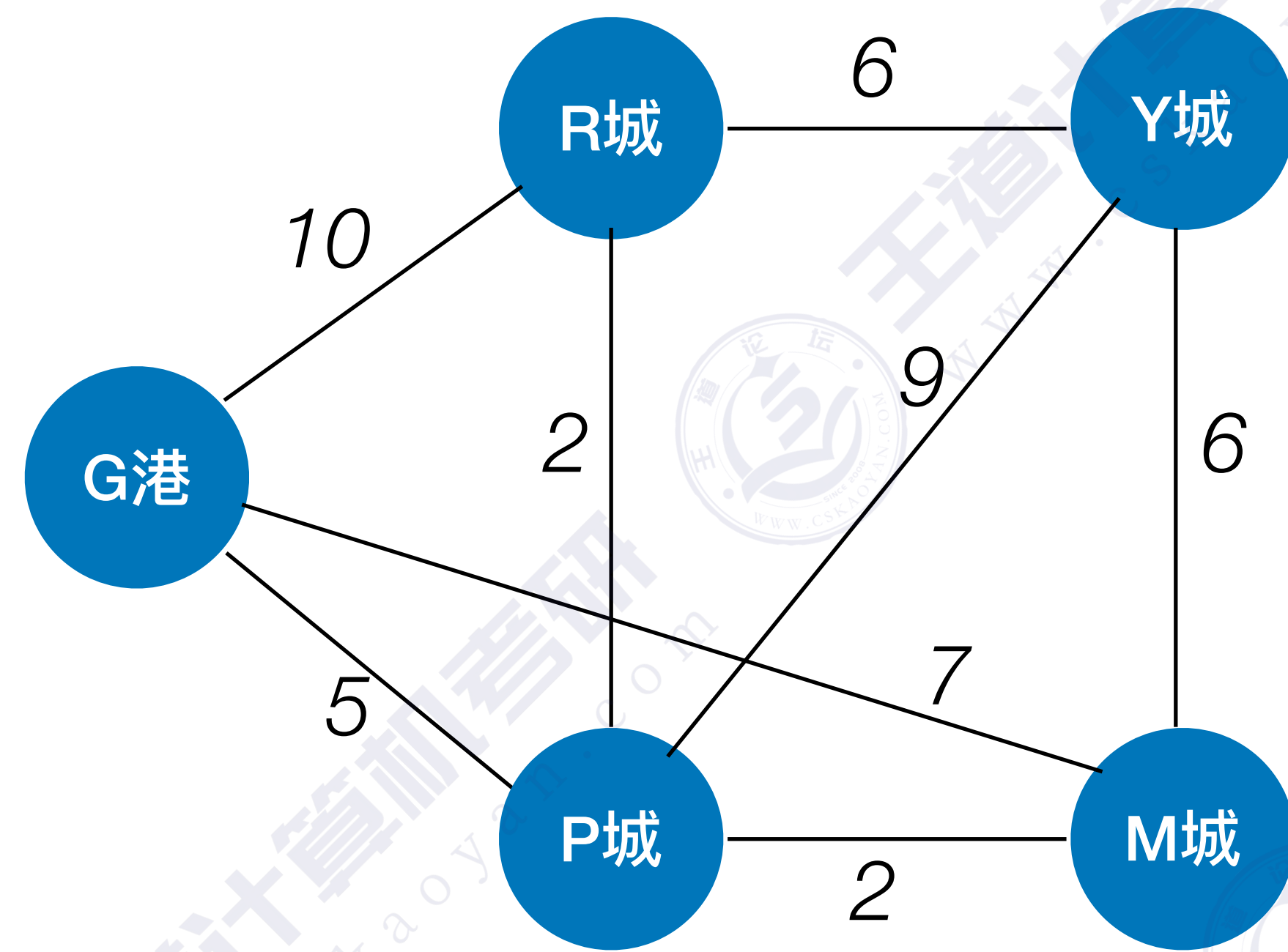
艾兹格·W·迪杰斯特拉
Edsger Wybe Dijkstra
(1930~2002)



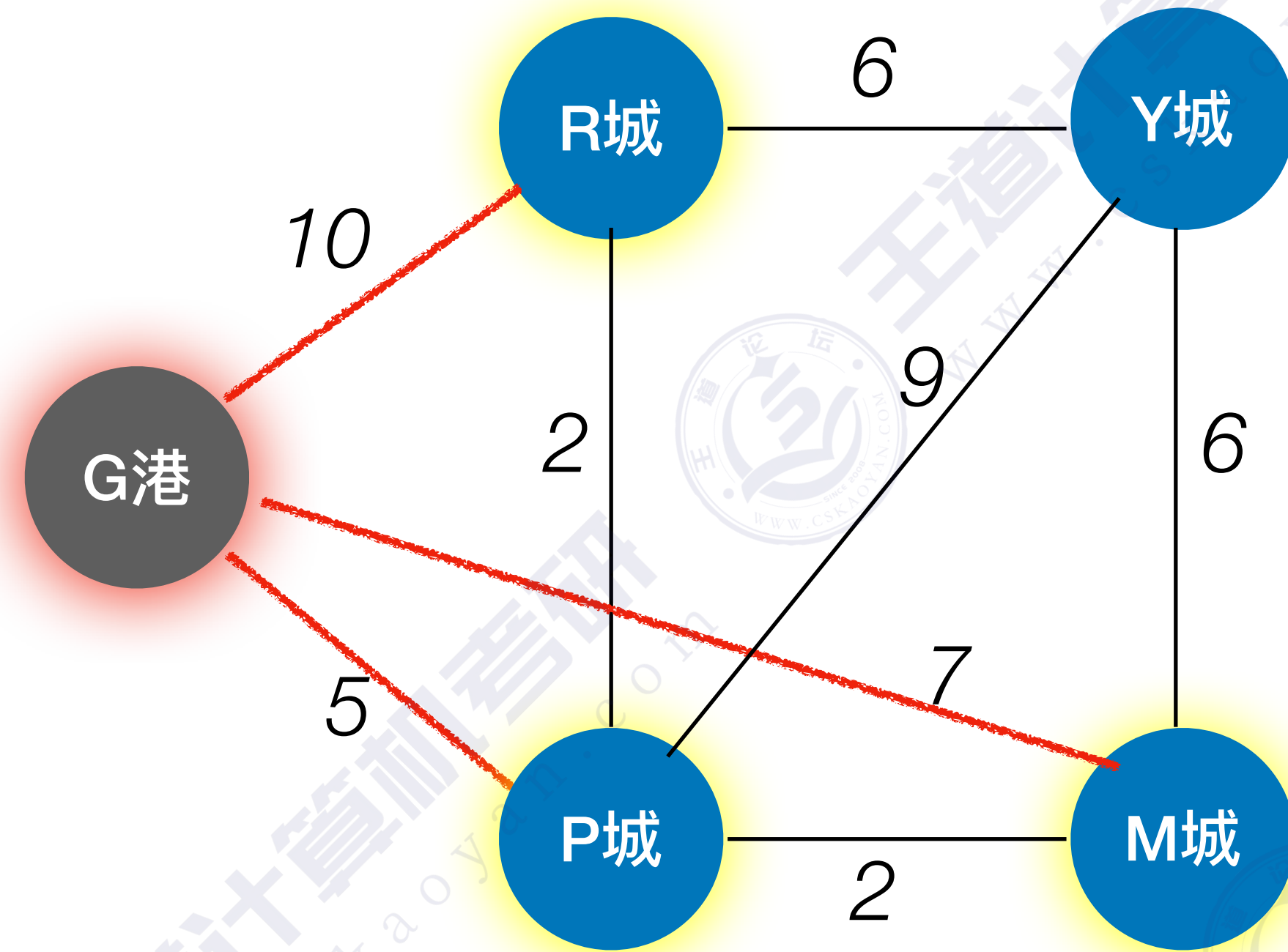
1972年图灵奖得主

- 提出“goto 有害理论”——操作系统，虚拟存储技术
- 信号量机制PV原语——操作系统，进程同步
- 银行家算法——操作系统，死锁
- 解决哲学家进餐问题——操作系统，死锁
- Dijkstra最短路径算法——数据结构大题、小题

BFS算法的局限性



BFS算法的局限性



带权路径长度——当图是带权图时，一条路径上所有边的权值之和，称为该路径的带权路径长度

BFS算法求单源最短路径只适用于无权图，或所有边的权值都相同的图

最短路径问题

单源最短路径

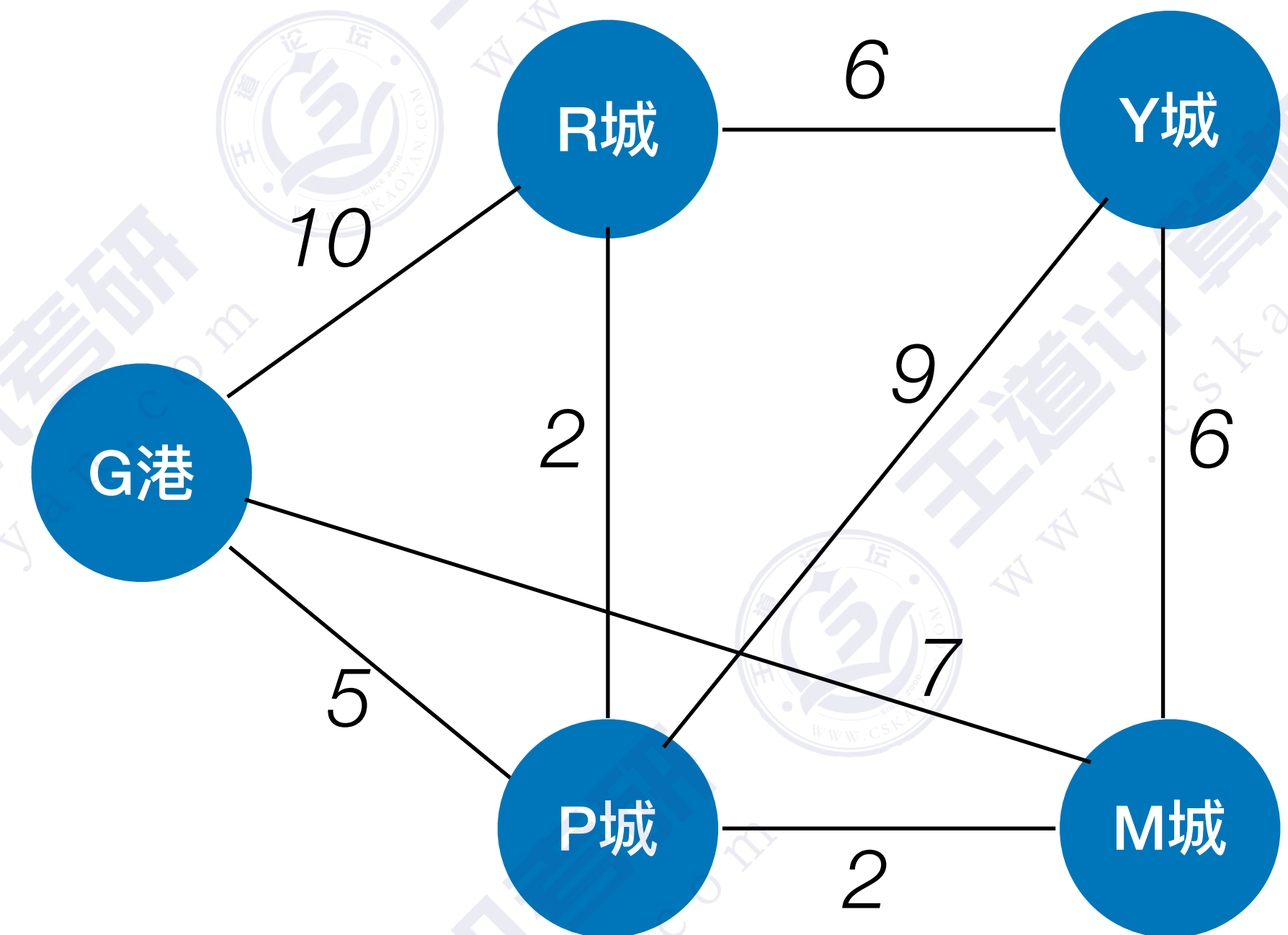
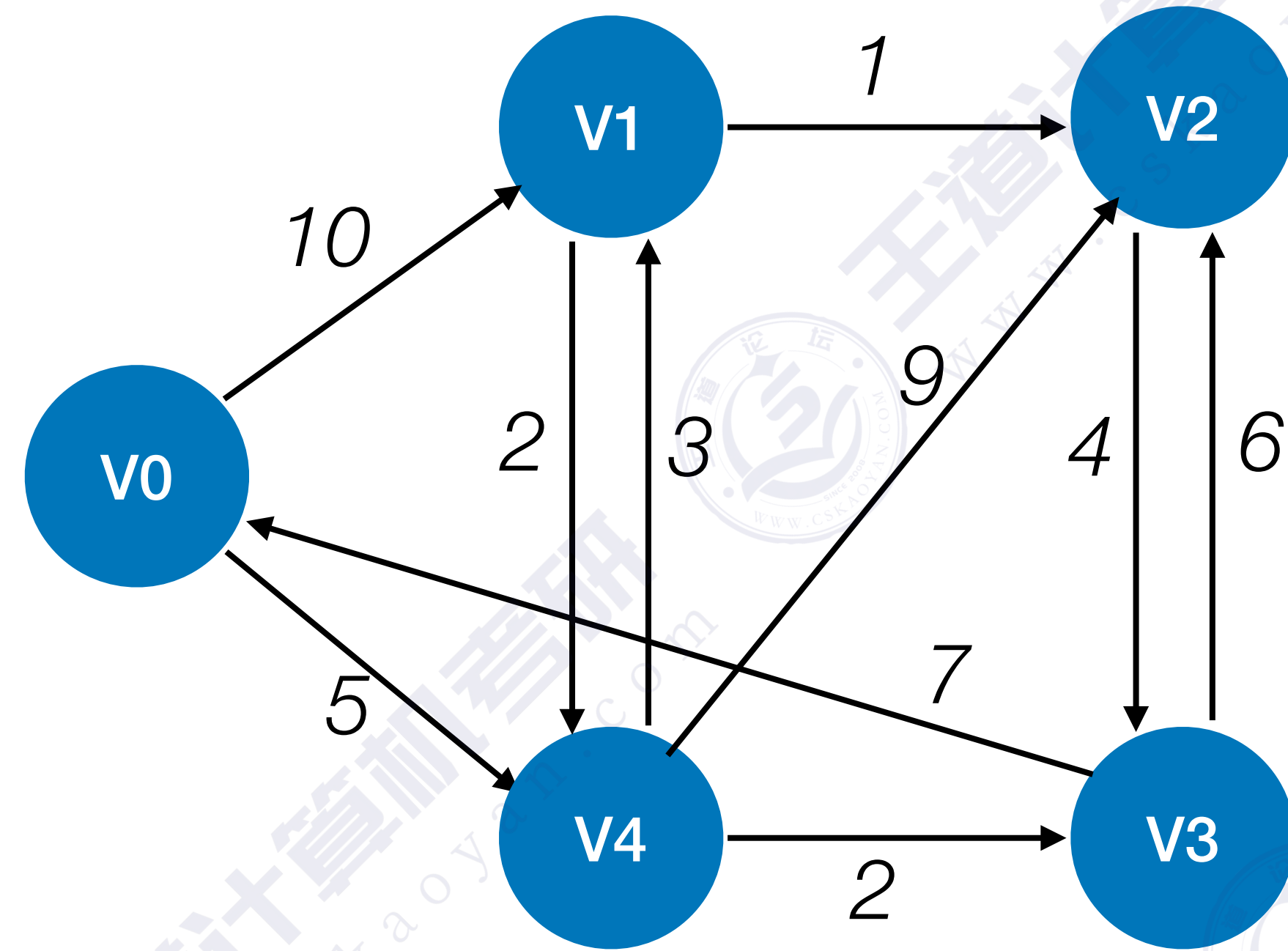
BFS 算法（无权图）

Dijkstra 算法（带权图、无权图）

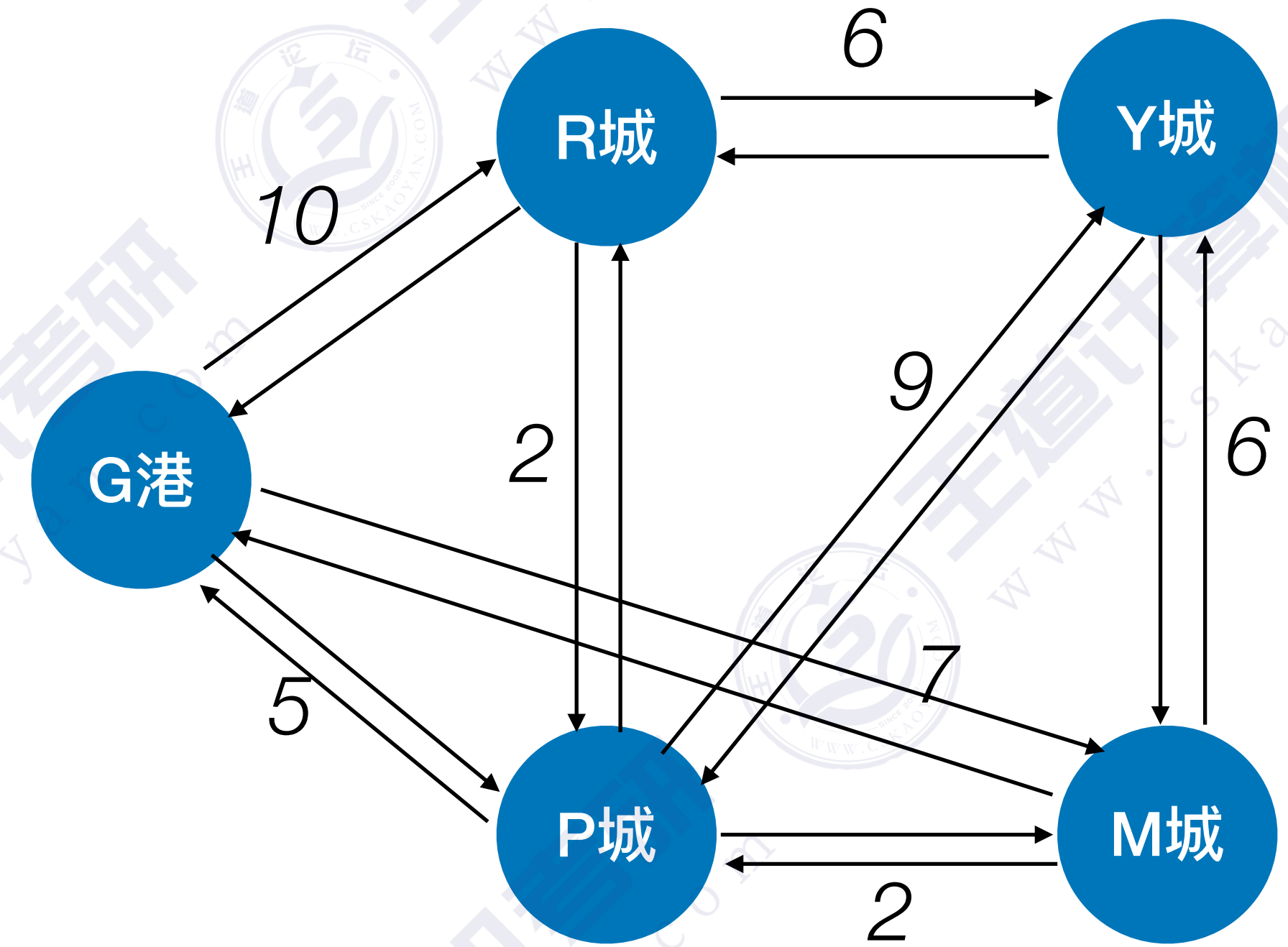
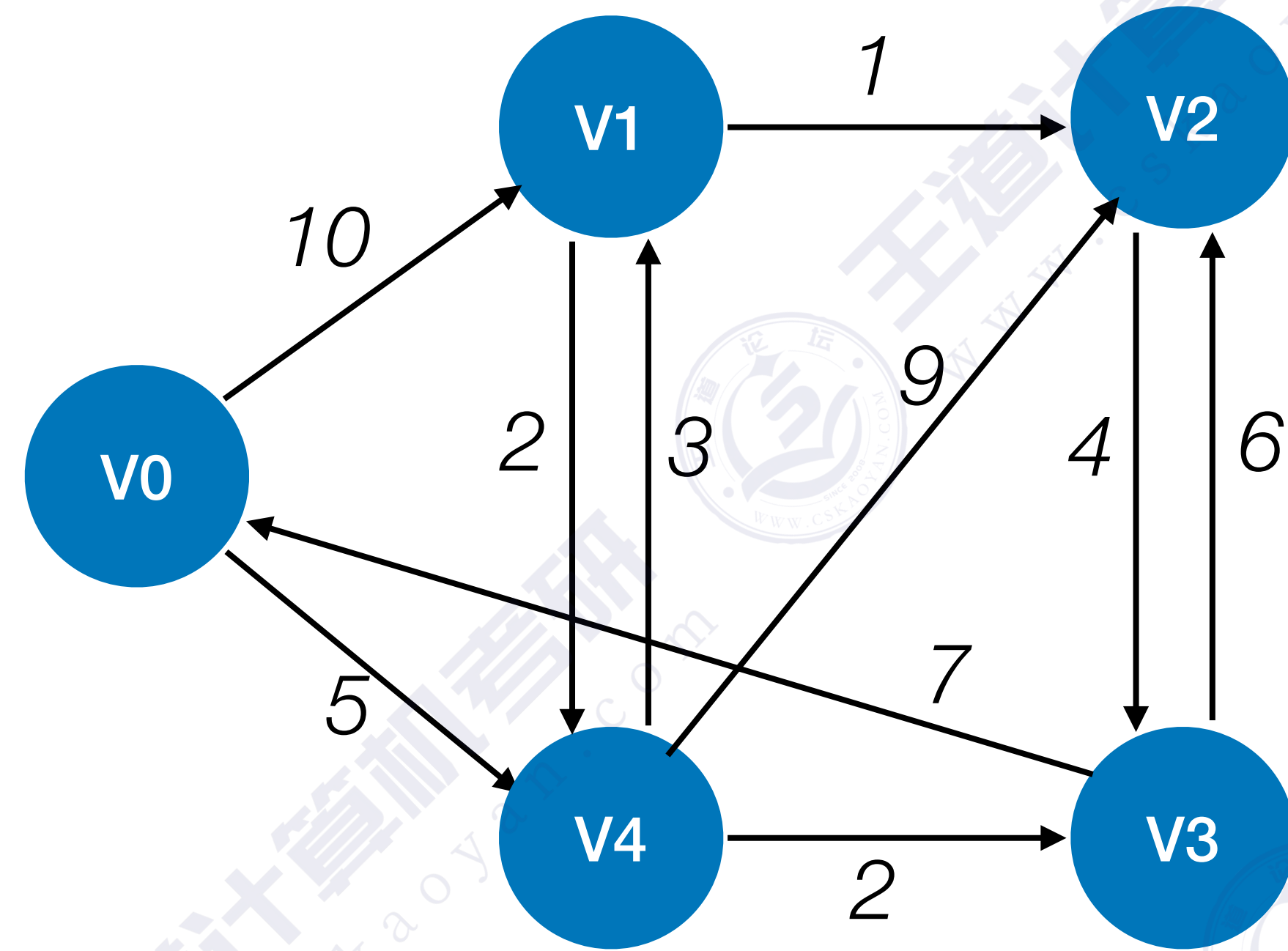
各顶点间的最短路径

Floyd 算法（带权图、无权图）

Dijkstra算法



Dijkstra算法



Dijkstra算法

初始：从V₀开始，初始化三个数组信息如下👉

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗

0	10	∞	∞	5
---	----	---	---	---

-1	0	-1	-1	0
----	---	----	----	---

Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗
0	10	∞	∞	5
-1	0	-1	-1	0

Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗

0	10	∞	∞	5
---	----	----------	----------	---

-1	0	-1	-1	0
----	---	----	----	---

Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

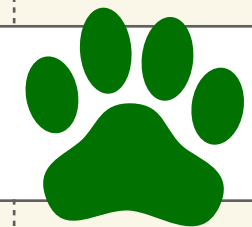
路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓
0	10	∞	∞	5
-1	0	-1	-1	0



Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓

0	10	∞	∞	5
---	----	----------	----------	---

-1	0	-1	-1	0
----	---	----	----	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓

0	10	∞	∞	5
---	----	----------	----------	---

-1	0	-1	-1	0
----	---	----	----	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法

第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓

0	8	14	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	4	4	0
----	---	---	---	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓

0	8	14	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	4	4	0
----	---	---	---	---

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

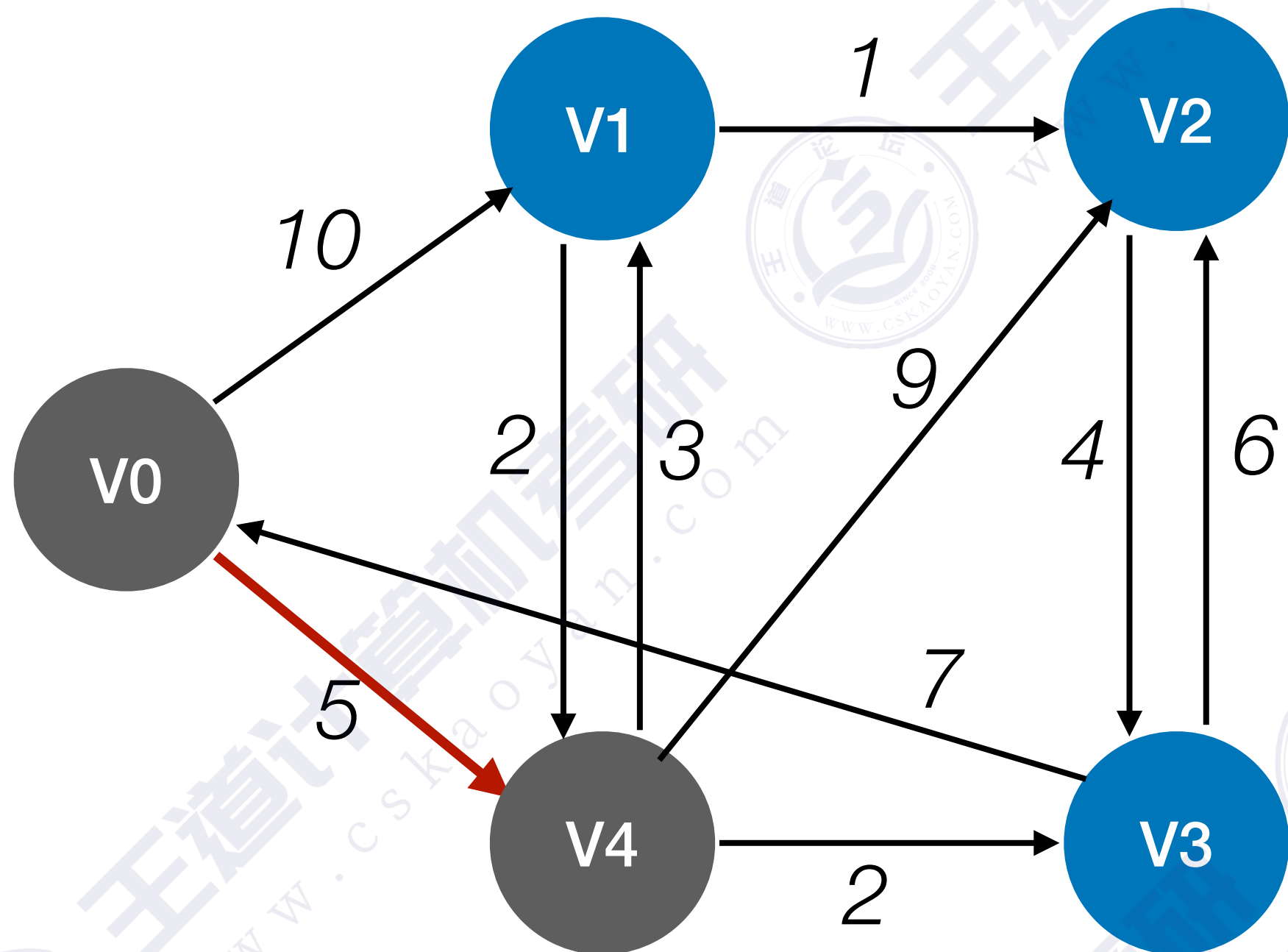
$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✓



0	8	14	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	4	4	0
----	---	---	---	---



Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✓	✓

0	8	14	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	4	4	0
----	---	---	---	---

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✓	✓

0	8	14	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	4	4	0
----	---	---	---	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✓	✓

0	8	13	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	3	4	0
----	---	---	---	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 $final$ 值为false，则更新 $dist$ 和 $path$ 信息

Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

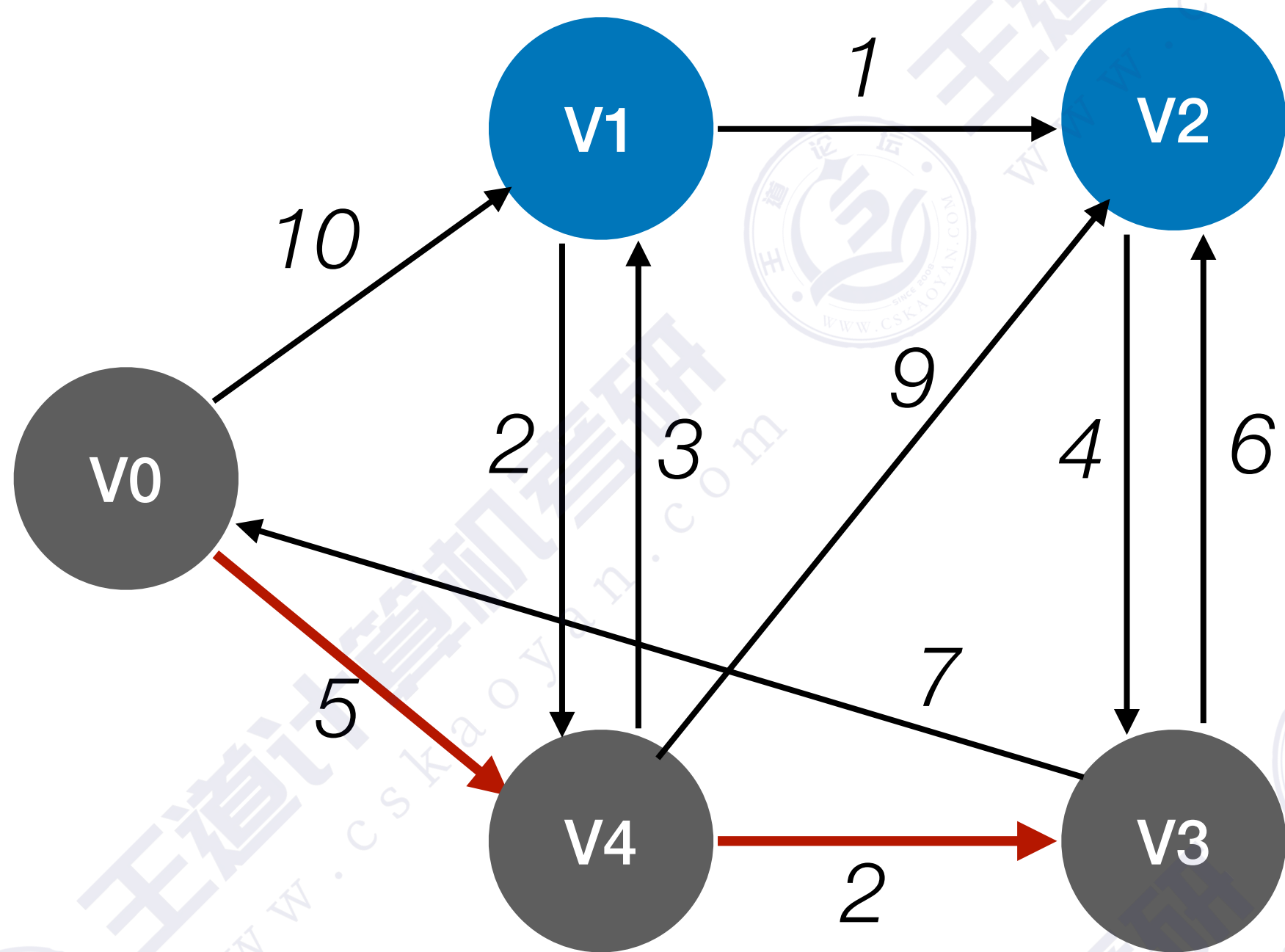
$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✓	✓

0	8	13	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	3	4	0
----	---	---	---	---



Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✓	✓
0	8	13	7	5
-1	4	3	4	0

Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓
0	8	13	7	5
-1	4	3	4	0

Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓

0	8	13	7	5
---	---	----	---	---

-1	4	3	4	0
----	---	---	---	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 $final$ 值为false，则更新 $dist$ 和 $path$ 信息

Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓
0	8	13	7	5
-1	4	3	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 $final$ 值为false，
则更新 $dist$ 和 $path$ 信息

Dijkstra算法

第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓
0	8	9	7	5
-1	4	1	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 $final$ 值为false，则更新 $dist$ 和 $path$ 信息

Dijkstra算法

第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

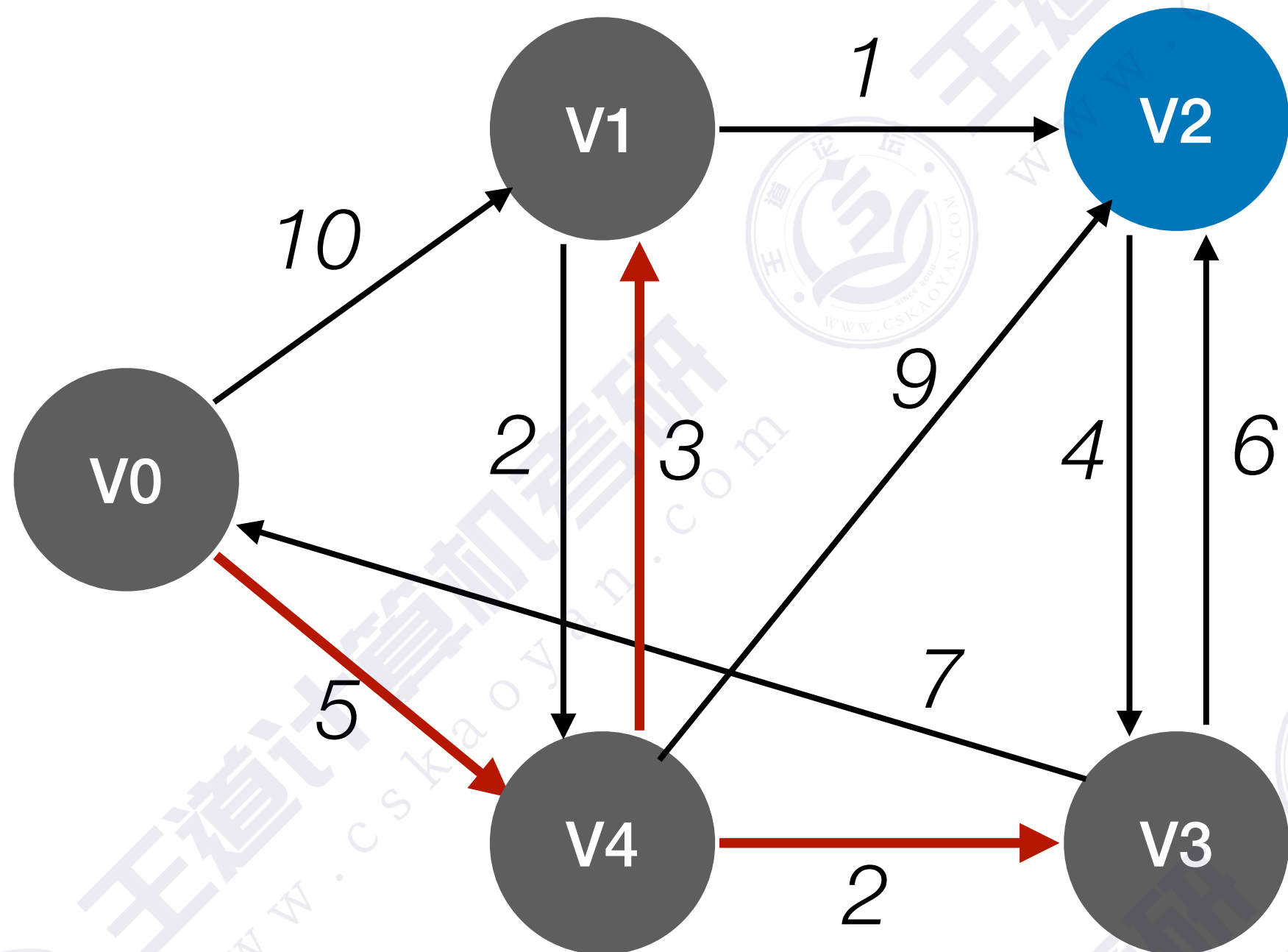
$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓

0	8	9	7	5
---	---	---	---	---

-1	4	1	4	0
----	---	---	---	---



Dijkstra算法

第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✗	✓	✓

0	8	9	7	5
---	---	---	---	---

-1	4	1	4	0
----	---	---	---	---

Dijkstra算法

第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✓	✓	✓

0	8	9	7	5
---	---	---	---	---

-1	4	1	4	0
----	---	---	---	---

Dijkstra算法

第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。

标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

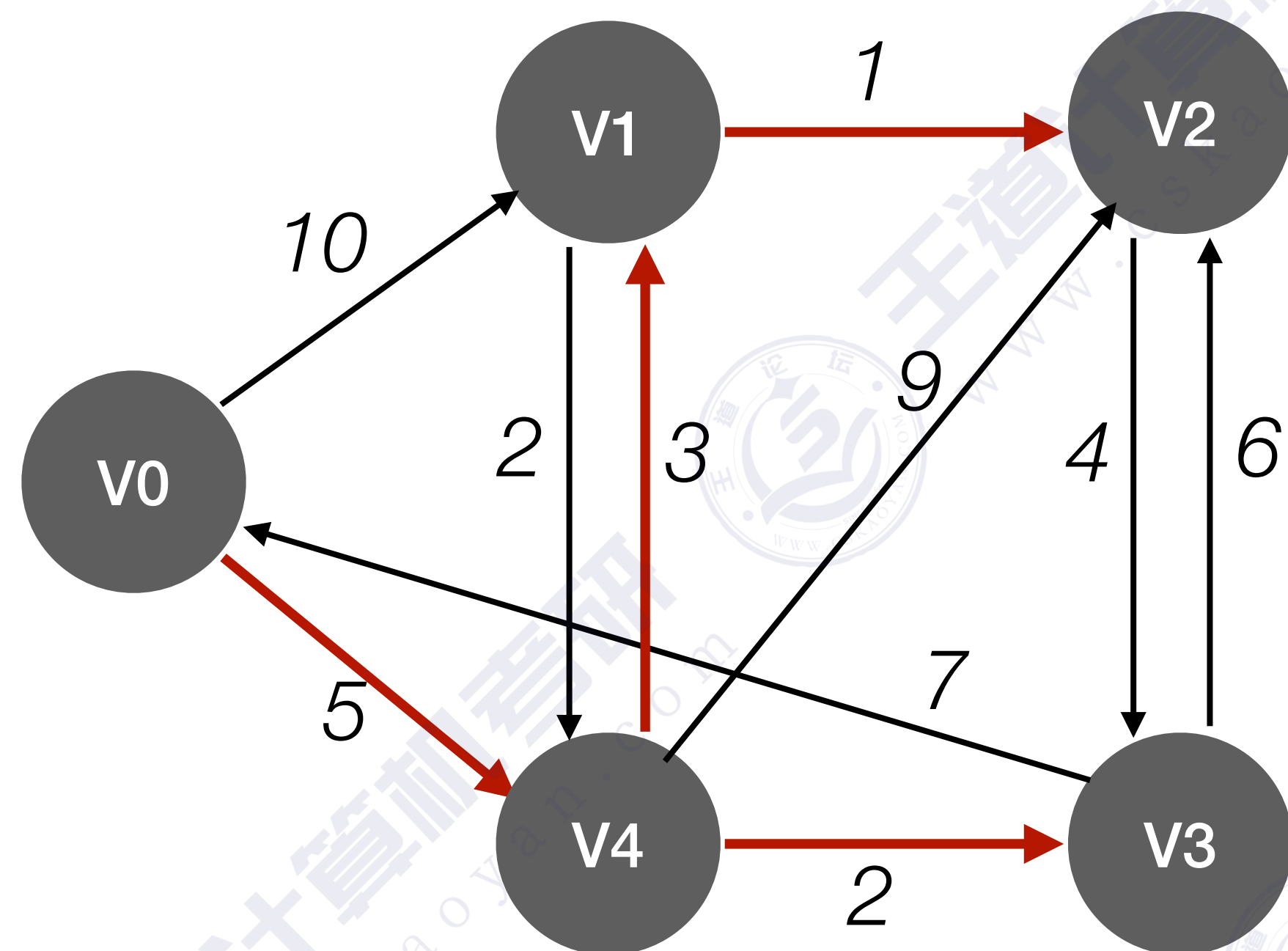
V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✓	✓	✓

0	8	9	7	5
---	---	---	---	---

-1	4	1	4	0
----	---	---	---	---

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 $final$ 值为false，
则更新 $dist$ 和 $path$ 信息

如何使用数组信息?



标记各顶点是否
已找到最短路径

$final[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✓	✓	✓	✓

最短路
径长度

$dist[5]$

0	8	9	7	5
---	---	---	---	---

路径上
的前驱

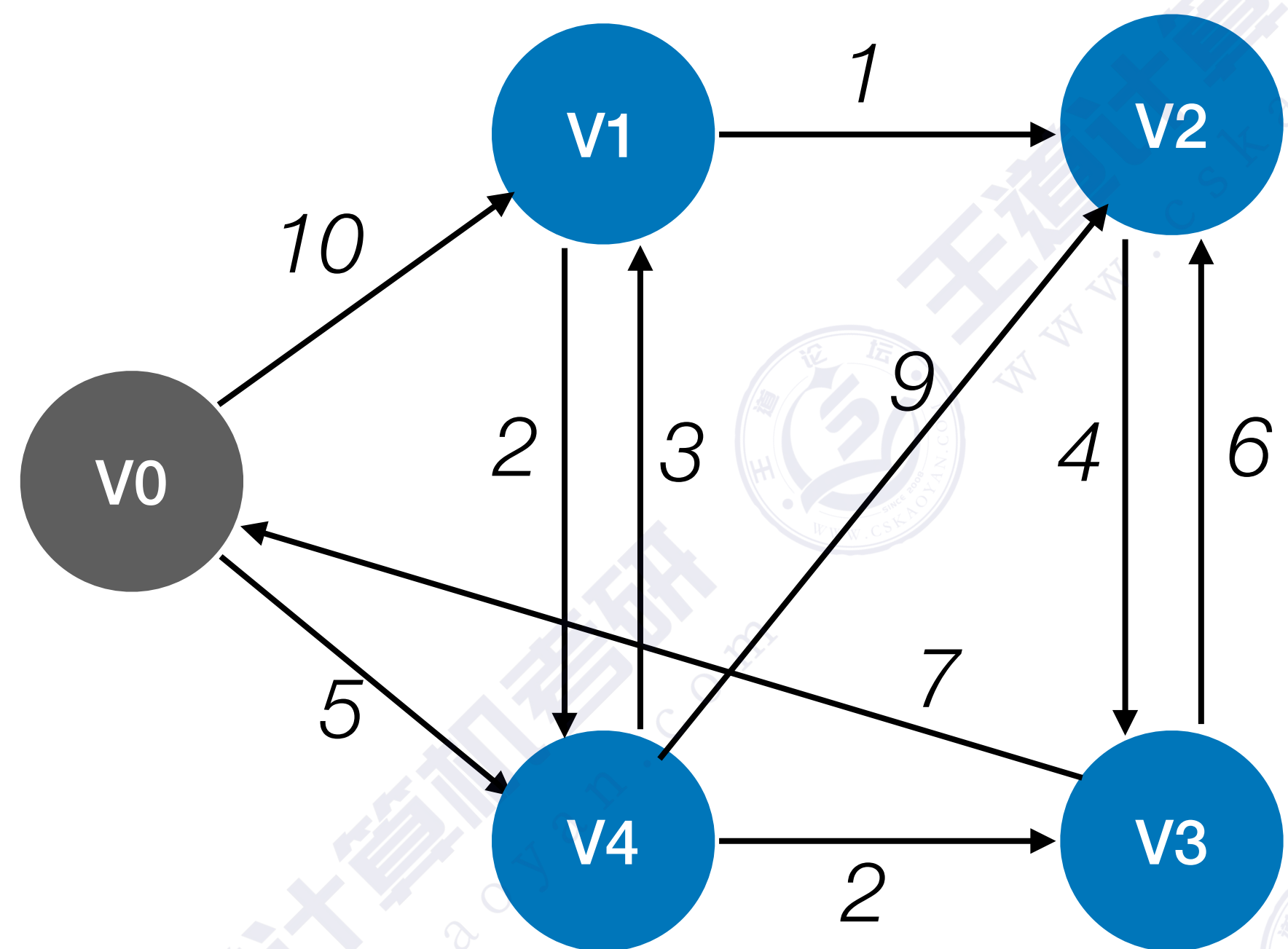
$path[5]$

-1	4	1	4	0
----	---	---	---	---

V0到V2 的最短(带权)路径长度为: $dist[2] = 9$

通过 $path[]$ 可知, V0到V2 的最短(带权)路径: $V2 \leftarrow V1 \leftarrow V4 \leftarrow V0$

Dijkstra算法的时间复杂度



标记各顶点是否
已找到最短路径

最短路
径长度

路径上
的前驱

$final[5]$

$dist[5]$

$path[5]$

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗

0	10	∞	∞	5
---	----	----------	----------	---

-1	0	-1	-1	0
----	---	----	----	---

初始：若从 V_0 开始，令 $final[0]=ture$; $dist[0]=0$; $path[0]=-1$ 。

其余顶点 $final[k]=false$; $dist[k]=arcs[0][k]$; $path[k]= (arcs[0][k]==\infty) ? -1 : 0$

时间复杂度：
 $O(n^2)$ 即 $O(|V|^2)$

n-1轮处理：循环遍历所有顶点，找到还没确定最短路径，且 $dist$ 最小的顶点 V_i ，令 $final[i]=ture$ 。并检查所有邻接自 V_i 的顶点，对于邻接自 V_i 的顶点 V_j ，若 $final[j]==false$ 且 $dist[i]+arcs[i][j] < dist[j]$ ，则令 $dist[j]=dist[i]+arcs[i][j]$; $path[j]=i$ 。（注： $arcs[i][j]$ 表示 V_i 到 V_j 的弧的权值）

对比：Prim 算法的实现思想

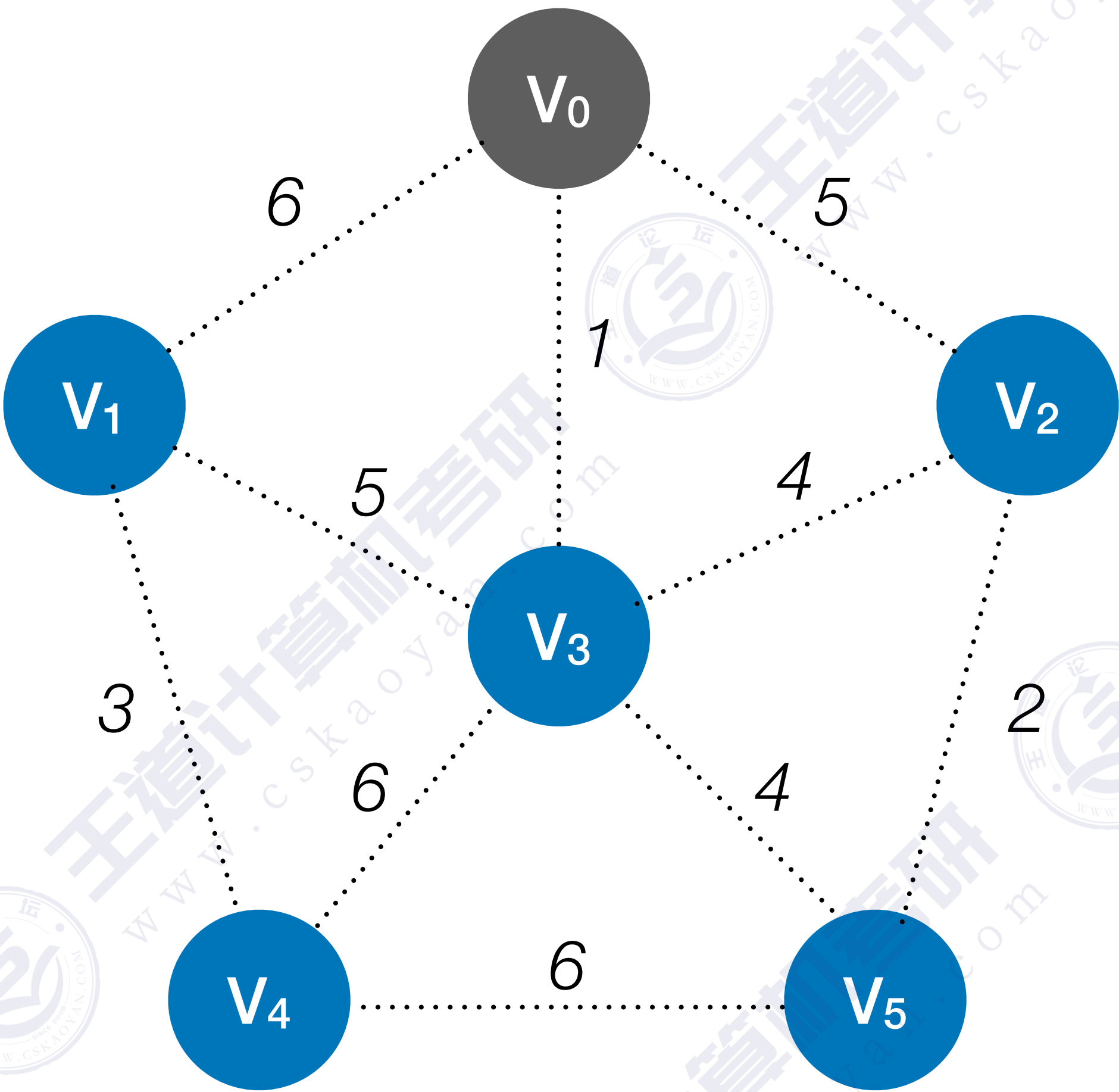
总时间复杂度
 $O(n^2)$ ，即 $O(|V|^2)$

从 V_0 开始，总共需要 $n-1$ 轮处理

每一轮处理：循环遍历所有个结点，找到lowCost最低的，且还没加入树的顶点。

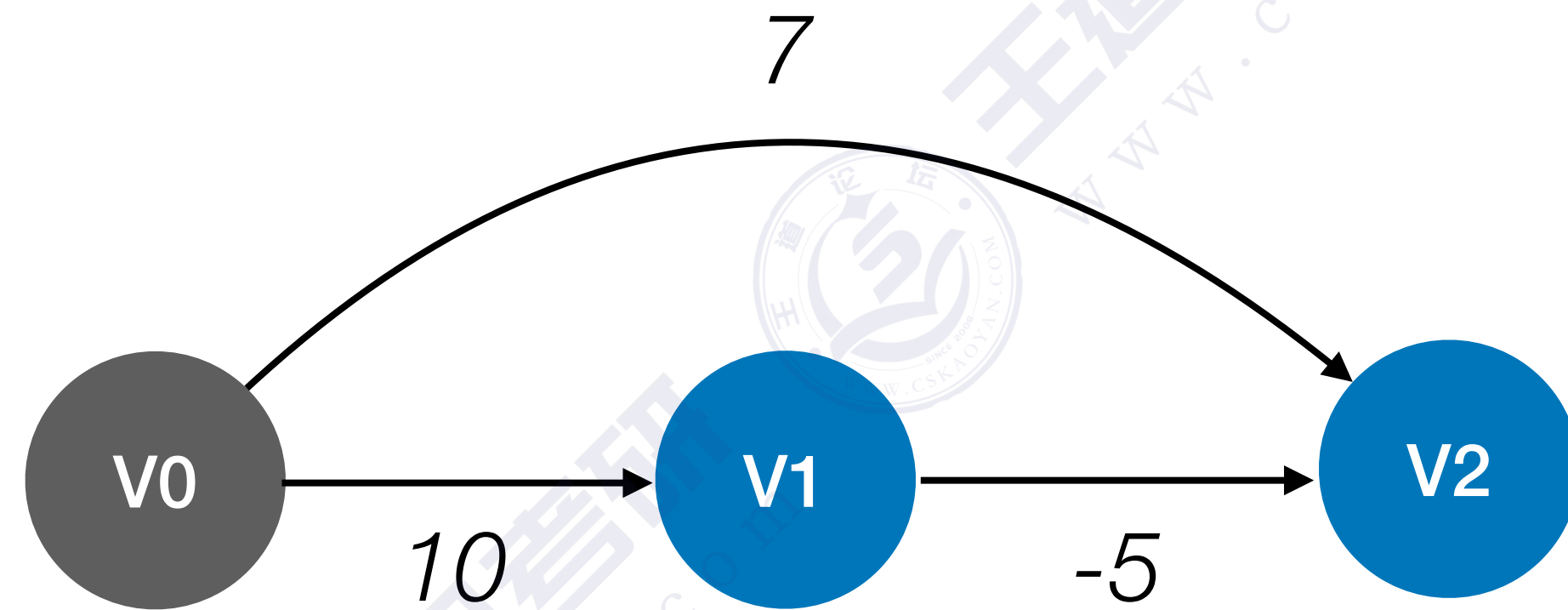
再次循环遍历，更新还没加入的各个顶点的lowCost值

每一轮时间复杂度 $O(2n)$



	V0	V1	V2	V3	V4	V5
<i>isJoin</i> [6]	✓	✗	✗	✗	✗	✗
<i>lowCost</i> [6]	0	6	5	1	∞	∞

用于负权值带权图



标记各顶点是否
已找到最短路径

$final[3]$

V0	V1	V2
✓	✗	✗

最短路
径长度

$dist[3]$

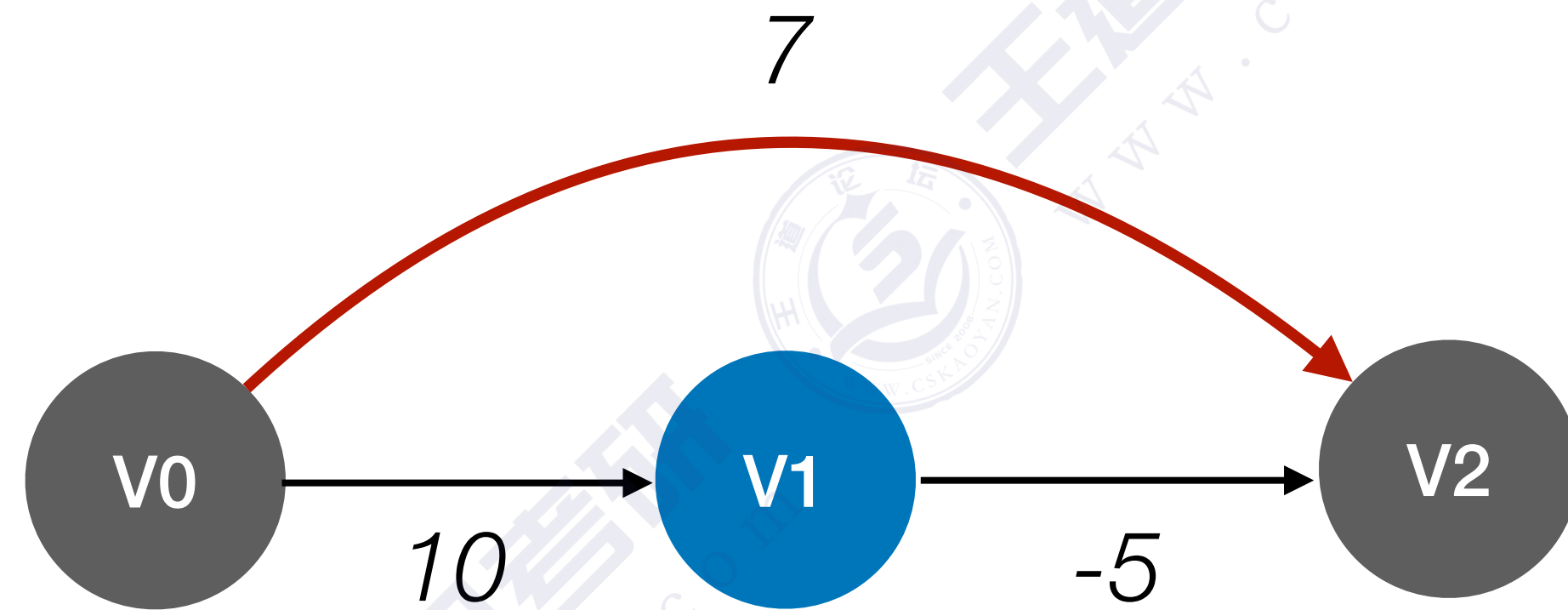
0	10	7
---	----	---

路径上
的前驱

$path[3]$

-1	0	0
----	---	---

用于负权值带权图



标记各顶点是否
已找到最短路径

$final[3]$

V0	V1	V2
✓	✗	✓

最短路
径长度

$dist[3]$

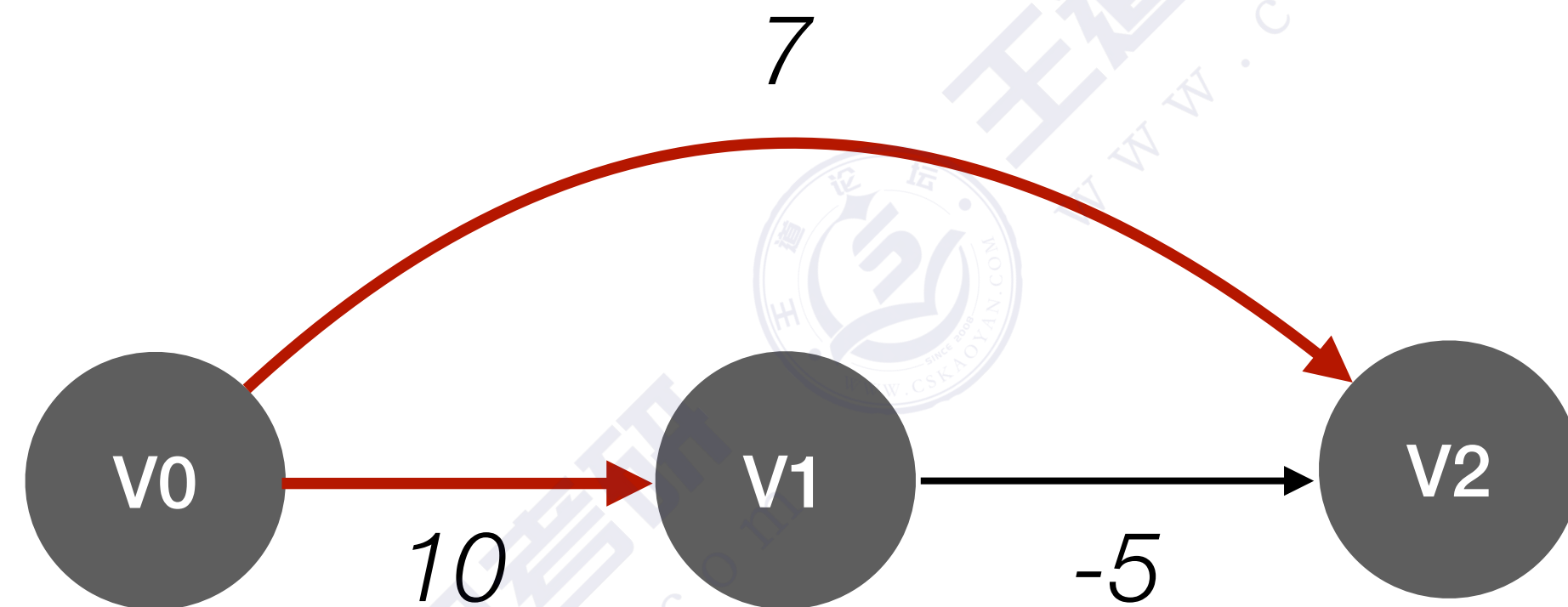
0	10	7
---	----	---

路径上
的前驱

$path[3]$

-1	0	0
----	---	---

用于负权值带权图



标记各顶点是否
已找到最短路径

$final[3]$

V0	V1	V2
✓	✓	✓

最短路
径长度

$dist[3]$

0	10	7
---	----	---

路径上
的前驱

$path[3]$

-1	0	0
----	---	---

事实上V0到V2 的最短带权路径长度为 5

结论: Dijkstra 算法不适用于有负权值的带权图