1　一元函数微分学的计算

1.1　基本求导公式

1. $(x^a)' = ax^{a-1}\,(a$ 为常数$)$
2. $(a^x)' = a^x \ln a\,(a > 0,\ a \neq 1)$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\,(a > 0,\ a \neq 1)$
5. $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$
6. 三角函数求导
    - $(\sin x)' = \cos x$
    - $(\cos x)' = -\sin x$
    - $(\tan x)' = \sec^2 x$
    - $(\cot x)' = -\csc^2 x$
    - $(\sec x)' = \sec x \tan x$
    - $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
    - $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
    - $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
    - $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
    - $(x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
7. $\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $\left[\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.2　四则运算

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $d[u(x) \pm v(x)] = d[u(x)] \pm d[v(x)]$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $d[u(x)v(x)] = u(x)d[v(x)] + v(x)d[u(x)]$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

6. $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)d[u(x)] - u(x)d[v(x)]}{[v(x)]^2} \qquad v(x) \neq 0$

1.3 复合函数的导数与微分形式不变性

设 $u = g(x)$ 在点 x 处可导，$y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导，则

- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$
- $d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx = f'[g(x)]d[g(x)]$

1.4 分段函数的导数

设

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$$

其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 分别在 $x > x_0$ 与 $x < x_0$ 时可导，则：

① 在分段点 x_0 处，用导数定义求导：

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f_2(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$

② 在非分段点用导数公式求导：

$$\begin{cases} x > x_0, & f'(x) = f'_1(x), \\ x < x_0, & f'(x) = f'_2(x). \end{cases}$$

1.5 反函数的导数

1. 设 $y = f(x)$ 为单调且可导函数，并且 $f'(x) \neq 0$，则存在反函数 $x = \varphi(y)$，且

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

即

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

2. $y = f(x), x = \varphi(y), \varphi'(y) = -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

3. $y''_{xx} = -\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. $x''_{yy} = -\dfrac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$

1.6　隐函数求导法

设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的可导函数，则

① 方程 $F(x, y) = 0$ 两边对自变量 x 求导，注意 $y = y(x)$，即将 y 看作中间变量，得到一个关于 y' 的方程

② 解该方程便可求出 y'

1.7　参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定，其中 t 为参数，且 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 均可导，并且 $\varphi'(t) \neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

1.8　对数求导法

对于**多项相乘、相除、开方、乘方**的式子，一般**先取对数再求导**。设 $y = f(x)$（其中 $f(x) > 0$），则

① 等式两边取自然对数，得

$$\ln y = \ln f(x).$$

② 两边对自变量 x 求导（注意 $y = y(x)$，将 y 视为中间变量），得

$$\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]'.$$

因此

$$y' = y \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

1.9　幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}(u(x) > 0, 且 u(x) \neq 1)$，除了用上面的对数求导法，还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

然后求导

1.10 ★ 高阶导数

1. 归纳法：逐次求导，探索规律，得出通式

2. 莱布尼茨公式：设 $u=u(x), v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

   - $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
   - ★$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \, v^{(n-k)}$
   - $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
   - $$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

3. 泰勒展开式

   ① 抽象展开：任何一个在点 x_0 的邻域内无穷阶可导的函数，都可以表示为其泰勒级数
   $$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$
   特别地，当 $x_0 = 0$ 时，称为麦克劳林展开式：
   $$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

   ② 具体展开：当题目给出具体的无穷阶可导函数 $y=f(x)$ 时，可利用已知基本函数的展开式，将其展开为幂级数。

   ③ 函数泰勒展开式的唯一性：无论 $f(x)$ 通过何种方法展开，其泰勒展开式具有唯一性。因此可通过比较❶、❷中幂级数的系数，求出 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $f^{(n)}(0)$。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots, \qquad |x| \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad |x| \le 1$$

1.11 基础概念

1.12 结论

1.13 定理

1.14 运算

1.15 公式

1. $[\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
2. $(x \ln x)' = \ln x + 1$
3. $(\dfrac{1}{x} \ln x)' = -\dfrac{1}{x^2} \ln x + \dfrac{1}{x^2}$
4. 常用的高阶导数
   - $\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}$.

- $\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
- $\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
- $\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\dfrac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$
- $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n a^n\dfrac{n!}{(ax+b)^{n+1}}\Rightarrow(\dfrac{1}{1+x})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

1.16 方法总结

1. 对于 $g(x)=x^k f(x)$ 型，可以考虑用泰勒公式求 $g^{(n)}(0)$

1.17 条件转换思路

1.18 理解