1 函数极限的计算

1.1 方法

1. **极限四则运算规则**: 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 极限都存在时，函数的加减乘除的极限分别等于极限的加减乘除（除要求分母的极限不为零）

2. **洛必达法则一（$\frac{0}{0}$ 型）**

   设当
   $$x \to a \quad 或 \quad x \to \infty$$
   时，函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于0，即
   $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = 0 \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 0.$$
   若在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x| > X$，其中 X 为充分大的正数时），$f'(x)$ 与 $F'(x)$ 存在，且
   $$F'(x) \neq 0,$$
   并且极限
   $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$
   存在或为无穷大，

   则有
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

3. **洛必达法则二（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）** 设当
   $$x \to a \quad 或 \quad x \to \infty$$
   时，函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于无穷大，即
   $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = \infty \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$
   若在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x| > X$，其中 X 为充分大的正数时），$f'(x)$ 与 $F'(x)$ 存在，且
   $$F'(x) \neq 0,$$
   并且极限
   $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$
   存在或为无穷大，

   则有
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

4. **泰勒公式**: 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处 n 阶可导，则存在 $x=a$ 的一个邻域，对于该邻域内的任一点 x，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots++\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x^n)$$

- $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Rightarrow \text{狗}-\sin\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^3}{6},\quad \text{狗}\to 0$
- $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Rightarrow \arcsin\text{狗}-\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^3}{6},\quad \text{狗}\to 0$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\Rightarrow 1-\cos\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^2}{2},\quad \text{狗}\to 0$
- $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\Rightarrow \tan\text{狗}-\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^3}{3},\quad \text{狗}\to 0$
- $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\Rightarrow \text{狗}-\arctan\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^3}{3},\quad \text{狗}\to 0$
- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Rightarrow e^{\text{狗}}-1-\text{狗}\sim\frac{\text{狗}^2}{2},\quad \text{狗}\to 0$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\Rightarrow \text{狗}-\ln(1+\text{狗})\sim\frac{\text{狗}^2}{2},\quad \text{狗}\to 0$
- $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+o(x^2)\Rightarrow (1+\text{狗})^a-1-a\text{狗}\sim\frac{a(a-1)}{2}\text{狗}^2,\quad \text{狗}\to 0$
- $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$

5. **无穷小计算（记号运算）**：设 m,n 为正整数，$x\to 0$，则

- $o(x^m)\pm o(x^n)=o\big(x^{\min\{m,n\}}\big)$（对无穷小而言，次数越小，量级越大；对无穷大而言，次数越大，量级越大）
- $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),\quad x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$
- $o(kx^m)=o(x^m),\quad k\,o(x^m)=o(x^m),\quad k\neq 0$ 为常数

6. **泰勒公式应用时的展开原则:**

- $\frac{A}{B}$ 型，适用" 上下同阶" 原则: 如果分母（或分子）是 x 的 k 次幂，则应把分子（或分母）展开到 x 的 k 次幂
- $A-B$ 型，适用" 幂次最低" 原则: 将 A,B 分别展开到他们的系数不相等的 x 的最低次幂为止

7. **两个重要极限:**

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{\text{狗}\to 0}\frac{\sin\text{狗}}{\text{狗}}=1$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e \Rightarrow \lim\limits_{狗\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{狗}\right)^{狗}=e$
- 狗 $=\dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

8. **夹逼准则:** 如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：
    - $h(x)\le f(x)\le g(x)$
    - $\lim h(x)=\lim g(x)=A$

    则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$

1.2 七种未定式的计算

1. $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$
2. 解题思路
    - 化简先行
        (a) 提出极限不为 0 的因式
        (b) 等价无穷小替换
        (c) 恒等变形：提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂 + 换元法（负代换、倒代换）
    - 判断类型（运算类型）
    - 选择方法：泰勒公式、洛必达法则、夹逼准则
3. $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$
    - 泰勒公式
    - 洛必达法则
    - $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m, \\ \infty, & n>m, \\ 0, & n<m. \end{cases}$$

        抓大头法:
        当 $x\to\infty$，则应抓分子和分母中关于 x 的最高次项即可判断极限；
        当 $x\to 0$，则应抓分子和分母中关于 x 的最低次项
    - 脱帽法: 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$
4. $0\cdot\infty$: 设置分母，简单因式下放
    - $\dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}}=\dfrac{0}{0}$

- $\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty}$
- 简单因式: $x^{\alpha}, e, \sin rx$
- 复杂因式: $\arctan x, \arcsin x, \ln x$

5. $\infty - \infty$

   - 如果函数是有分母，则通分，将加减法变形为乘除法，以便使用其他计算工具（$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$）
   - 如果函数中没有分母，则可以通过提取公因式或者做倒代换（创造分母再通分），出现分母后，再利用通分等恒等变形的方法，将加减法变形为乘除法

6. $\infty^0, 0^0$: $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$

7. 1^{∞}: $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$

   Example

   $$\lim u^v = \lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v} = e^{\lim(u-1)v}$$

8. 泰勒公式

1.3 结论

1. 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$，且 $\lim g(x) = 0$，则 $\lim f(x) = 0$

2. 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$，且 $\lim f(x) = 0$，则 $\lim g(x) = 0$

3. (连续型）当 $x \to +\infty$ 时，

   $$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^x, \qquad \alpha, \beta > 0,\ a > 1$$

4. (离散型）当 $n \to \infty$ 时，

   $$\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^n \ll n! \ll n^n, \qquad \alpha, \beta > 0,\ a > 1$$

5. 当 $\alpha > 0$ 时，

   $$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{洛必达求导}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0.$$

   一般形式: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} \ln^{\beta} x = 0$，其中 $\alpha, \beta > 0$。思考：当 $x \to +\infty$

6. 狗 $- 1 <$ [狗] $\leq$ 狗

1.4 定理

1.5 运算

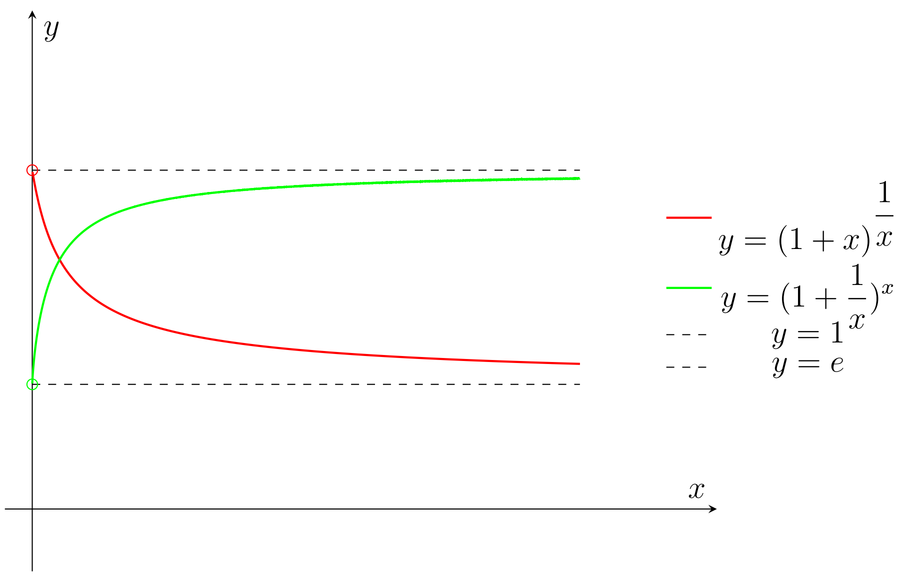
1.6 公式

1.7 方法总结

1. 遇到幂指函数，用 e 括起来，$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$

2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x > 0$ 时有以下性质

   - $f(x)$ 单调减少
   - $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$



   - $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

1.8 条件转换思路

1.9 理解

1. 对于

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

右极限存在，则左极限存在；但左极限存在，并不意味着右极限一定存在。

$e.g.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$