1 向量

1.1 基本概念

1. n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量

2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，如果存在不全为零的数 k，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

   (a) 有零向量
   (b) 两向量成比例
   (c) $n+1$ 个 n 维向量

3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2})^T, \ldots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{s2})^T, \ldots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{sm})^T$，其中 $s \le r$，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组

4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 β，若存在实数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \beta$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ **线性表出(示)**

5. 设有两个 n 维向量组 $(I)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s; (II)\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出

6. 如果 $(I)(II)$ 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**

7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $a_j(j = 1, 2, \ldots,)$，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**
   - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
   - 极大线性无关组不唯一，但其内的向量个数一致，即向量组的秩

8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩
   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \le r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \le n$

9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，也不会改变它们之间的线性组合系数

10. 线性表示具有传递性

1.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{其次线性方程组}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = 0\text{有非零解}\\&\Leftrightarrow \text{向量组的秩}r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < s, s\text{表示}\textbf{未知数的个数或向量个数}\\&\Leftrightarrow \text{若向量组是方阵}(n\text{ 个 }n\text{ 维向量})\text{，则}|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| = 0\end{aligned}$$

2. 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

3. $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关

4. 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 相关$\Rightarrow$ 整体组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots \alpha_s$ 相关

5. 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots \alpha_s$ 无关$\Rightarrow$ 部分组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 无关

6. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关$\Rightarrow$ 延伸组$\widetilde{\alpha_\mathbf{1}}, \widetilde{\alpha_\mathbf{2}}, \ldots, \widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性无关

7. $\widetilde{\alpha_\mathbf{1}}, \widetilde{\alpha_\mathbf{2}}, \ldots, \widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性相关$\Rightarrow$ 缩短组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关

8. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s]^T = \beta\text{有解}\\&\Leftrightarrow \text{秩}r[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta]\end{aligned}$$

9. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(s \geq 2)$ 线性相关，则其中**必有一个向量**可用其余向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s - 1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关

10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，且**表示法唯一**

11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，且 $s > t$，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关。即**如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关**

12. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，且它可由可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则 $s \leq t$

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$

14. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组，则 $r(I) = r(II)$

15. 如果 $r(A) = r$，则 A 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(A) = A$ 的列秩

16. 一般地，$r(A) = A\text{的列秩} = A\text{的行秩}$

17. A 是 $m \times n$ 矩阵，则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $\mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$

1.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$，则

   (a) $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)^T$

   (b) $k\alpha=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)^T$

   (c) $0\alpha=0$

   (d) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

   (e) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

   (f) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

   (g) $\alpha+0=\alpha$

   (h) $\alpha+(-\alpha)=0$

   (i) $1\alpha=\alpha$

   (j) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

   (k) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

   (l) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

1.4 公式

1.5 方法步骤

1. 判断多个向量是否线性相关

   - 含有零向量 **0** $\Rightarrow$ 线性相关
   - 两个向量成比例 $\Rightarrow$ 线性相关
   - 存在关系 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$(定义) $\Rightarrow$ 线性相关

2. 线性无关的判定与证明：若向量的坐标没有给出，通常用**定义法**或 **秩的理论** 或 **反证法**

   (a) **定义法**证 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关

      i. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

      ii. $\Downarrow$ 恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件或重组)

      ii. $k_1=0,k_2=0,\ldots,k_s=0$

   (b) **秩**证 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关

      i. $\Leftrightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s][x_1,x_2,\ldots,x_s]^T=0$ 只有零解

      ii. $\Leftrightarrow$ 秩r$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=s$

      - $r(A)=A$的列秩 $=A$的行秩
      - $r(AB)\le r(A)$且$r(AB)\le r(B)$
      - 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(BA)=r(B)$
      - 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$

- 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, 且 $AB=\mathbf{O}$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$

(c) **反证法**

(d) 线性方程组 $Ax=0$

- 只有零解⇔ 线性无关
- 有非零解⇔ 线性相关

(e) 若是 n 个 n 维向量

- $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|=0\Leftrightarrow$ 相关
- $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|\neq 0\Leftrightarrow$ 无关

3. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体 $\Rightarrow$ 非齐次线性方程组是否有解

- 有解 $\Rightarrow$ 能线性表出
- 无解 $\Rightarrow$ 不能线性表出

(b) 若向量坐标没有 $\Rightarrow$ 线性相关或秩

- $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)\Rightarrow$ 线性表出
- $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)\Rightarrow$ 不能线性表出
- 线性相关

4. 求向量组的秩

- 设向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ 的矩阵为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]$ 对 A 作初等行变换得到行最简形矩阵 A'，则

$$r(A')=r(A)=\text{向量组}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\text{的秩}$$

- 若存在 r 阶子式不为零，则 r 为矩阵的秩，对应的 r 个向量构成一组最大线性无关组

1.6 条件转换思路

1. 向量组$(I)(II)$等价

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ (I)\text{可由}(II)\text{线性表出且}(II)\text{可由}(I)\text{线性表出}\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)=r(I,II)\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)\text{且}(I)\text{可由}(II)\text{线性表出}\end{aligned}$$

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \text{三者线性无关}\\&\Leftrightarrow\ \text{三者是一组基底}\\&\Leftrightarrow\ (a,b,c)^T\text{能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表示}\end{aligned}$$

3. 如果 $\gamma=(a,b,c)^T$(任意向量) 不能由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 线性表出

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{不可表示任意一个三维向量}\\&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\\&\Leftrightarrow\ |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0\end{aligned}$$

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$如果线性相关 $\Rightarrow$ 构成一个平面或一条直线

5. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则
   (a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性相关
   (b) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关
   (c) 对于任意实数 k，有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关
   (d) 对于任意实数 k，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$
      - $k=0\Rightarrow$ 相关
      - $k\neq 0\Rightarrow$ 无关

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示 $\Rightarrow$ r$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\leq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

7. β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法不唯一

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{有无穷多解}\\&\Leftrightarrow\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)<3\\&\Rightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\end{aligned}$$

8. $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{无解}\\&\Rightarrow\ \beta\text{不能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\end{aligned}$$

1.7 理解

1. 线性相关无关 $\Rightarrow$ $Ax=0$齐次方程组非零解的问题

2. 线性表示 $\Rightarrow$ $Ax=\beta$(其中$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$)非齐次方程组解的问题
   - 非齐次方程组的解向量 x 即为线性表示的系数
   - 对于 n 维向量，有 n 个方程，未知数个数等于向量个数
   - 根据秩的不同，线性表示有三种情况：
     (a) **唯一表示:** $r(A)=r(A,\beta)=n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性无关
     (b) **无穷多表示:** $r(A)=r(A,\beta)<n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性相关
     (c) **无表示:** $r(A)<r(A,\beta)$，β 不能由 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 线性表示