

1 函数极限的计算

1.1 方法

1. 极限四则运算规则: 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 极限都存在时, 函数的加减乘除的极限分别等于极限的加减乘除 (除要求分母的极限不为零)
2. 洛必达法则一 ($\frac{0}{0}$ 型)

设当

$$x \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow \infty$$

时, 函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于0, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

若在点 a 的某去心邻域内 (或当 $|x| > X$, 其中 X 为充分大的正数时), $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x) \neq 0,$$

并且极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

存在或为无穷大,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

3. 洛必达法则二 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设当

$$x \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow \infty$$

时, 函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于无穷大, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$

若在点 a 的某去心邻域内 (或当 $|x| > X$, 其中 X 为充分大的正数时), $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x) \neq 0,$$

并且极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

存在或为无穷大,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

4. 泰勒公式: 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处 n 阶可导, 则存在 $x = a$ 的一个邻域, 对于该邻域内的任一点 x , 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o(x^n)$$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \text{狗} - \sin \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^3}{6}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \arcsin \text{狗} - \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^3}{6}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \Rightarrow 1 - \cos \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^2}{2}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow \tan \text{狗} - \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^3}{3}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \text{狗} - \arctan \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^3}{3}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow e^{\text{狗}} - 1 - \text{狗} \sim \frac{\text{狗}^2}{2}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \text{狗} - \ln(1 + \text{狗}) \sim \frac{\text{狗}^2}{2}, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2) \Rightarrow (1 + \text{狗})^a - 1 - a\text{狗} \sim \frac{a(a-1)}{2}\text{狗}^2, \quad \text{狗} \rightarrow 0$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

5. 无穷小计算 (记号运算): 设 m, n 为正整数, $x \rightarrow 0$, 则

- $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^{\min\{m,n\}})$ (对无穷小而言, 次数越小, 量级越大; 对无穷大而言, 次数越大, 量级越大)
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(kx^m) = o(x^m), \quad k o(x^m) = o(x^m), \quad k \neq 0$ 为常数

6. 泰勒公式应用时的展开原则:

- $\frac{A}{B}$ 型, 适用“上下同阶”原则: 如果分母 (或分子) 是 x 的 k 次幂, 则应把分子 (或分母) 展开到 x 的 k 次幂
- $A - B$ 型, 适用“幂次最低”原则: 将 A, B 分别展开到他们的系数不相等的 x 的最低次幂为止

7. 两个重要极限:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{\text{狗} \rightarrow 0} \frac{\sin \text{狗}}{\text{狗}} = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{\text{狗} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{狗}}\right)^{\text{狗}} = e$
- 狗 = $\frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

8. 夹逼准则: 如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
- $\lim h(x) = \lim g(x) = A$

则 $\lim f(x)$ 存在, 且 $\lim f(x) = A$

1.2 七种未定式的计算

1. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$

2. 解题思路

- 化简先行
 - (a) 提出极限不为 0 的因式
 - (b) 等价无穷小替换
 - (c) 恒等变形: 提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂
+ 换元法 (负代换、倒代换)
- 判断类型 (运算类型)
- 选择方法: 泰勒公式、洛必达法则、夹逼准则

3. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- 泰勒公式
- 洛必达法则
-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m, \\ \infty, & n > m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

抓大头法:

当 $x \rightarrow \infty$, 则应抓分子和分母中关于 x 的**最高次项**即可判断极限;

当 $x \rightarrow 0$, 则应抓分子和分母中关于 x 的**最低次项**

- 脱帽法: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$

4. $0 \cdot \infty$: 设置分母, 简单因式下放

- $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

- $\frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty}$
 $\frac{0}{0}$

- 简单因式: $x^\alpha, e, \sin rx$
- 复杂因式: $\arctan x, \arcsin x, \ln x$

5. $\infty - \infty$

- 如果函数是有分母, 则通分, 将加减法变形为乘除法, 以便使用其他计算工具 $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$
- 如果函数中没有分母, 则可以通过**提取公因式**或者**做倒代换 (创造分母再通分)**, 出现分母后, 再利用通分等恒等变形的方法, 将加减法变形为乘除法

6. $\infty^0, 0^0: \lim u^v = e^{\lim v \ln u}$

7. $1^\infty: \lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$

Example

$$\lim u^v = \lim \{[1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v}$$

8. 泰勒公式

1.3 结论

- 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$, 且 $\lim g(x) = 0$, 则 $\lim f(x) = 0$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(0) = 0$.

- 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim f(x) = 0$, 则 $\lim g(x) = 0$

- (连续型) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x, \quad \alpha, \beta > 0, a > 1$$

- (离散型) 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \alpha, \beta > 0, a > 1$$

5. 当 $\alpha > 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \stackrel{\text{洛必达求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0.$$

一般形式: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$, 其中 $\alpha, \beta > 0$ 。思考: 当 $x \rightarrow +\infty$

6. 狗 - 1 < [狗] ≤ 狗

1.4 定理

1.5 运算

1.6 公式

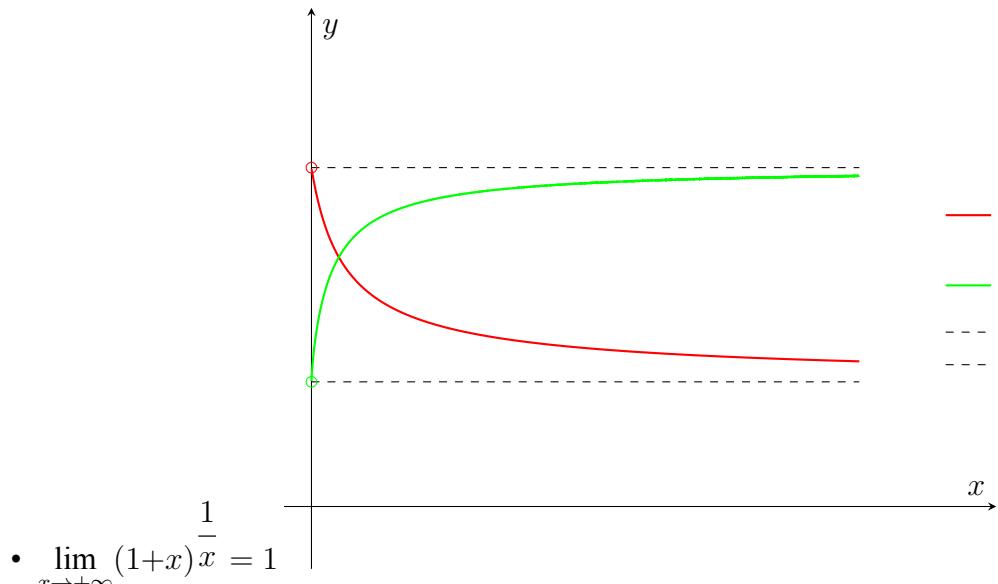
1.7 方法总结

1. 遇到幂指函数, 用 e 括起来, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$

2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x > 0$ 时有以下性质

- $f(x)$ 单调减少

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

1.8 条件转换思路

1.9 理解

1. 对于

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

右极限存在，则左极限存在；但左极限存在，并不意味着右极限一定存在。

e.g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$