1 一元函数微分学的应用 - 几何应用

1.1 极值的定义

1. 对于函数 $f(x)$，若存在点 x_0 的某个邻域，使得在该邻域内任意一点 x，均有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

成立，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的 **极大值点**（或 **极小值点**），$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值（或极小值）。

2. 极值是一个**局部**的概念。

3. 极值要求点 x_0 的左右邻域均有定义，**端点处不讨论极值，间断点不可能是极值点**。

1.2 单调性与极值的判别

1.2.1 单调性的判别

1. 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。

① 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加。

② 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减少

③ 导数为 0 仅能说明在某点处的函数值变化**充分小**，而不能说明没变化

1.2.2 一阶可导点是极值点的必要条件

1. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0) = 0$

2. 若 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的极值点，则只有以下两种情况

① 驻点: $f'(x_0) = 0$

② 不可导点: $f'(x_0)$ 不存在。如 $y = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处的情形

3. 找极值的两种情况: 驻点 | 不可导点

1.2.3 判别极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ 内可导，则:

① 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

② 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号，则点 x_0 不是极值点

④ $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不一定可导，可能出现角点

1.2.4 判别极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$。

① 若 $f''(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

② 若 $f''(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

③ 若 $f''(x_0) = 0$，则该判别法失效，需借助高阶导数或其他方法判断。如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处是极小值, $f(x) = x^3$ 在 $x_0 = 0$ 处是拐点，不是极值点

1.2.5 判别极值的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 1, 2, \ldots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0\ (n \geq 2)$，则:

① 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值

② 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

当 n 为奇数时，点 x_0 不是极值点。

1.3 凹凸性与拐点的概念

1.3.1 凹凸性的定义

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

   (a) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2，恒有

   $$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

   则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的图形是**凹的**（或称凹弧）

   (b) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2，恒有

   $$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

   则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的图形是**凸的**（或称凸弧）。

   (c) 广义化:

   $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \begin{cases} < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), & \text{凹函数}, \\ > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), & \text{凸函数}, \end{cases}$$

   其中 $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$，且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$。

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。

- 若对任意 $x_0 \in (a,b)$ 及任意 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，恒有

  $$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

  即除切点外，曲线严格位于其切线的下方，则称函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**凹的**。
- 若对任意 $x_0 \in (a,b)$ 及任意 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，恒有

  $$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

  即除切点外，曲线严格位于其切线的上方，则称函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**凸的**。

1.3.2 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**。

① 间断点不可能为拐点，拐点处函数**必须连续**。

② 判别拐点时，只需判断凹凸性的变化，**凹与凸不分先后**。

③ 极值点只写横坐标 $x = x_0$；而拐点应写 $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$，拐点在曲线上

1.4 凹凸性与拐点的判别

1.4.1 判别凹凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则：

① 若在 I 上 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是**凹的**（凹弧）。

② 若在 I 上 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是**凸的**（凸弧）。

1.4.2 二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0,\ f(x_0))$ 为曲线的拐点, 则必有 $f''(x_0) = 0$。若点 $(x_0,\ f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则只有以下两种情况

1. 二阶导数存在必为 0: $f''(x_0) = 0$。如 $y = x^3$ 在 $(0,0)$ 处的情形
2. 二阶导数不存在的点也有可能是拐点: $f''(x_0)$ 不存在。如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的情形

1.4.3 判别拐点的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ 内二阶导数存在，且在 x_0 的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号（无论是由正变负，还是由负变正），则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.4 判别拐点的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.5 判别拐点的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,且 $f^{(m)}(x_0)=0\,(m=2,3,\ldots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则当 n 为奇数时，点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点。

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=\mathbf{2},\cdot,n-1))$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则当 n 为奇数时，点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点。

1.5 基础概念

1.6 结论

1.7 定理

1.8 运算

1.9 公式

1.10 方法总结

1.11 条件转换思路

1. $f(x)\cdot f'(x) => \{[f(x)]^2\}'=2f(x)\cdot f'(x)$

1.12 理解