1 一元函数微分学的概念

1.1 导数

1. 设 $y = f(x)$ 定义在区间 I 上，让自变量在 $x = x_0$ 处加一个增量 Δx（可正可负），其中 $x_0 \in I, x_0+\Delta x \in I$，则可得函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。若函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比值在 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数（变化率），记作 $f'(x_0)$，即

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{*}$$

广义化

$$\lim_{狗\to 0}\frac{f(x_0+狗)-f(x_0)}{狗}. \tag{**}$$

令 $x_0+\Delta x = x$，从而得到

$$函数式f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{***}$$

2. 下面这三种提法是等价的:
   - $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导；
   - $y = f(x)$ 在点 x_0 处导数存在；
   - $f'(x_0) = A$（A 为有限数）。

3. ★ 函数在一点可导的充要条件: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 其左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等

4. 函数在一点可导的必要条件: **若 $f(x)$ 在一点可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在该点连续**，反之未必

5. 导数的性质
   - ★求导一次，奇偶性互换（导数定义）
   - 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数，则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数（导数定义）
   - 若 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；若 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 单调递减

1.2 导数的几何意义

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值 $f'(x_0)$，就是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率 k，即 $k = f'(x_0)$，因此，曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

该点处的法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\ (f'(x_0) \neq 0)$$

2. 切线存在不代表导数存在，但导数存在切线一定存在
   - $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$，出现角点（尖点），则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，没有切线。*e.g.* $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处
   - $f(x)$ 在点 x_0 的导数是无穷导数时，在该点有切线但无导数。*e.g.* $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x = 0$ 处

1.3 微分的概念

1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内，对于增量函数

   $$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

   若存在与 Δx 无关的常数 A，使得

   $$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x).$$

   其中 $o(\Delta x)$ 是在 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 更高阶的无穷小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，并把增量的主要部分 $A\Delta x$ 称为线性主部，也叫做 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x = f'(x_0)\,dx$

2. 可微的判别
   - 一元函数可微 $\Leftrightarrow$ 可导
   - 做极限

     ① 写增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

     ② 写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

     ③ 做极限
     $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

     ④ 若该极限等于 0，则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，否则不可微

3. 可微的含义：用形式简单的“线性增量 $A\Delta x$”去代替形式复杂的“增量 Δy”，且其误差“$\Delta y - A\Delta x$”是 $o(\Delta x)$，即用“简单的量”代替了“复杂的量”，且产生的误差又可以忽略不计

4. 可微的几何意义：若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则在点 (x_0, y_0) 附近可以用切线段近似代替曲线段

1.4 基础概念

1.5 结论

1. 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，则函数 $f(x) = |x - x_0|\,\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的充要条件是 $\varphi(x_0) = 0$

2. 函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的连续性与可导性关系总结：

   - 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续；反之不成立。
   - 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则：

     (a) 若 $f(x_0) \neq 0$，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，且

     $$(|f(x)|)'|_{x=x_0} = \begin{cases} f'(x_0), & f(x_0) > 0, \\ -f'(x_0), & f(x_0) < 0. \end{cases}$$

     (b) 若 $f(x_0) = 0$，则：

     $$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| \text{ 在} x_0 \text{ 处可导，且 } \left|\,|f(x)|\,\right|'_{x=x_0} = 0, \\ f'(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| \text{ 在} x_0 \text{ 处不可导}. \end{cases}$$

     (c) 总结不可导即:

     $$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ 在} x_0 \text{ 处可导} \\ f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \implies |f(x)| \text{ 在} x_0 \text{ 处不可导}$$

3. $f^{(n)}(x_0)$ 存在 $\Rightarrow f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 附近有定义且在 x_0 处连续

4. 函数 $f(x)$ 存在与 $f'(x)$ 存在的区别

   (a) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的极限存在，不能推出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。例如，x_0 可以是 $f(x)$ 的可去间断点

   (b) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且

   $$\lim_{x \to x_0} f'(x) = a,$$

   则 $f'(x)$ 在 x_0 处连续。即

   $$\lim_{x \to x_0} f'(x) = a, \quad f'(x_0) = b \implies \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) = a = b.$$

   (c) $f(x)$ 存在不能得出 $f(x)$ 有介值性。因为“存在”不等于“连续”，而只有连续函数才具有介值性

   (d) $f'(x)$ 存在，可得 $f'(x)$ 有介值性

   达布定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，则对于任意介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数 u，存在 $\xi \in (a, b)$，使得

   $$f'(\xi) = u.$$

(e) $f'(x)$ 存在且 $\neq 0$，则 $f'(x)$ 必保号（恒正或恒负）

证

用反证法。若存在 a, b 使

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0,$$

则由达布定理，存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = 0,$$

这与 $f'(x) \neq 0$ 的假设矛盾

(f) 若 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在，则 $f'(x)$ 在该区间内**不存在第一类间断点**。

1.6 定理

1.7 运算

1.8 公式

1. $[(e^x - 1)g(x)]' = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$

1.9 方法总结

1.10 条件转换思路

1.11 理解

1. 对于连续或可导函数，只要 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$），无论 $f(x_0)$ 与 0 的距离有多小，它旁边相依相偎的 $f(x)$ 一定 > 0（或 < 0）
2. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义，且 $|f(x)| \leq 1 - \cos x$，证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续、可导且 $f'(0) = 0$

经典

证明： 分三个层次完成。

（1）求函数极限

由

$$0 \le |f(x)| \le 1-\cos x, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,$$

根据夹逼准则，有

$$\lim_{x\to 0}|f(x)|=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

（2）求函数值，验证连续性

在原不等式中令 $x=0$，得

$$|f(0)| \le 1-\cos 0=0,$$

故 $f(0)=0$。

因此

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并且有

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)| \le 1-\cos x.$$

（3）求导数（按定义）

由上述不等式可得

$$0 \le \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le \frac{1-\cos x}{|x|}.$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{|x|}=0,$$

再次由夹逼准则，

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

从而 $f'(0)=0$。

综上， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导，且 $f'(0)=0$

3. 求导数时，当函数不具备导数存在的条件时，往往只能用导数定义求

Example

设

$$f(x) = (x-a)\cdot\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 连续，求 $f'(a)$。

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot\varphi(x)-0}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\cdot\varphi(x) \\ &= \varphi(a) \end{aligned}$$

4. 证明：(1) 若 $F(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 上连续，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导，当 $\lim\limits_{x\to x_0^+} F'(x) = A$ 存在时，有 $F'_+(x_0) = A$

(2) 若 $F(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ $(\delta>0)$ 上连续,在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内可导,当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} F'(x) = A$ 存在时，有 $F'_-(x_0) = A$

证明

(1)

$$F'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to x_0^+}\frac{F'(x)}{1} = A.$$

(2)

$$F'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to x_0^-}\frac{F'(x)}{1} = A.$$