

1 矩阵

1.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵, 当 $m = n$ 时, 矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0, 则称这个矩阵是**零矩阵**, 可简记为 \mathbf{O}
3. 如果一个方阵, 所有非主对角线元素都是 0, 则称这个矩阵是**对角矩阵**
4. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, 如果对应的元素都相等, 即 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$
5. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$
6. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 称为矩阵 A 的**转置矩阵**, 记作 A^T
7. 如果方阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 是**对称矩阵**, 即 $a_{ij} = a_{ji}$
8. 如果方阵 A 满足 $A^T = -A$, 则称 A 是**反对称矩阵**, 即 $a_{ij} = -a_{ji}$
9. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

10. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置, 即 $A^* = [A_{ji}] = (A_{ij})^T$
11. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E$ (单位矩阵) 成立, 则称 A 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**, B 是 A 的逆矩阵
12. 对 $m \times n$ 矩阵, 下列三种变换
 - (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行 (列)
 - (b) 互换矩阵某两行 (列) 的位置
 - (c) 把某行 (列) 的 k 倍加至另一行 (列)

称为矩阵的**初等行 (列) 变换**, 统称为矩阵的**初等变换**

13. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**, 记作 $A \simeq B$
14. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**

- (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
 (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行
 (c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行
15. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 。向量内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$
16. 向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$
17. 若 $(\alpha, \beta) = 0$ 即 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$, 则称 α 与 β 正交, 记为 $\alpha \perp \beta$
18. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = A^T A = E$, 称 A 是 **正交矩阵**:

$$\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的行 (列) 向量两两正交 (单位向量)}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的每个行 (列) 向量长度均为 } 1$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的行 (列) 向量平方和为 } 1$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = -1$$
19. 若 A 是正交矩阵且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则:
 (a) $\alpha_i^T \alpha_i = 1$
 (b) $\alpha_i^T \alpha_j = 0 \ (i \neq j)$
20. 在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行与 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这个行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式, 称其为矩阵 A 的一个 k 阶子式
21. 矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的**秩**, 记为 $r(A)$ 。零矩阵的秩规定为 0
22. 矩阵秩的理解
- (a) $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 任何 $r+1$ 阶子式 (若存在) 必全为 0
- (a) $r(A) < r \Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为 0
- (a) $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0
- (a) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$
- (a) $r(A) \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow 1 \leq r(A) \leq n$
- (a) 若 A 是 n 阶矩阵
- $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
 - $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆
- (b) 若 A 是 $m \times n$ 阶矩阵 $\Leftrightarrow r(A) \leq \min(m, n)$

1.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵, 则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**, 记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

$\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性无关

$\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 是初等矩阵

$\Leftrightarrow A$ 通过初等变换能化为单位矩阵

$\Leftrightarrow A$ 与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow 0$ 不是矩阵 A 的特征值

\Leftrightarrow 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解

3. n 阶矩阵 A **不可逆**

$$\Leftrightarrow |A| = 0$$

$$\Leftrightarrow r(A) < n$$

$\Leftrightarrow A$ 的列 (行) 向量组线性相关

$\Leftrightarrow A$ 无法表示为初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow A$ 无法通过初等变换能化为单位矩阵

$\Leftrightarrow 0$ 是矩阵 A 的特征值

\Leftrightarrow 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解

4. $A \cong B$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$$

$\Leftrightarrow A$ 通过初等变换能化为 B

$\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0, |A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$. 即 A, B 的行列式同时为 0 或同时不为 0

5. 若 A 是 n 阶矩阵, 且满足 $AB = E$, 则必有 $BA = E$

6. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A , 其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 \Rightarrow **左乘行变换, 右乘列变换**

6. 初等矩阵均可逆, 其逆矩阵是同类型的初等矩阵, 即

倍乘 $E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$ 第 i 行 (或列) 乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 乘以 $1/k$

互换 $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ 交换第 i 行 (或列) 和第 j 行 (或列) 的**逆矩阵是其本身**

倍加 $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$ 第 i 行 (或列) 加上 k 倍第 j 行 (或列) 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 加上 $-k$ 倍第 j 行 (或列)

7. 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q , 使 $PAQ = B$
8. 秩 $r(A) = A$ 的列秩 $= A$ 的行秩
9. 矩阵经初等变换后秩不变

1.3 运算

1. 设 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记作 $A + B = C$
2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记作 kA
3. 设 A, B, C, \mathbf{O} 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:
 - (a) $A + B = B + A$
 - (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
 - (c) $A + \mathbf{O} = A$
 - (d) $A + (-A) = \mathbf{O}$
 - (e) $1A = A$
 - (f) $k(lA) = (kl)A$
 - (g) $(kA)^n = k^n A^n$
 - (h) $k(A + B) = kA + kB$
 - (i) $(k + l)A = kA + lA$
4. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = [b_{ij}]$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = [c_{ij}]$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

称为 A 与 B 的乘积, 记作 $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则:
 - (a) $A(BC) = (AB)C$
 - (b) $A(B + C) = AB + AC$
 - (c) $(A + B)C = AC + BC$
 - (d) $(kA)(lB) = klAB$
 - (e) $AE = EA = A$
 - (f) $\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \mathbf{O}$
6. 设 A 是 n 阶矩阵, k 是正整数,
 - (a) A 的 k 次方幂 $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k 个 A)

- (b) $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$
 (c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
 (d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

- (a) $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$
 (b) $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$
 (c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{B} - 4\mathbf{E}) = 8\mathbf{E}$

12. 设 α 和 β 都是列向量, 则

- (a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$, 两者都是 n 阶矩阵 (互为转置)
 (b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数
 (c)

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \text{ (对称矩阵)}$$

- (d) $r(\alpha\alpha^T) = 1$
 (e) $\alpha\alpha^T$ 特征值是 $\|\alpha\|^2, 0, 0, \dots, 0$ ($n-1$ 个)
 (f)

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ (平方和)}$$

13. 向量

- $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- $(k\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
- $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$

1.4 公式

1.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|AB| = |A||B|$, $|A^2| = |A|^2$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E + A)^T = E + A^T$

1.4.3 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. A 可逆有 $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$), 则

- i. 且 $n \geq 3$ 时, $(A^*)^* = O$
- ii. 且 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果 } r(A) = n, \\ 1, & \text{如果 } r(A) = n - 1, \\ 0, & \text{如果 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

10. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (二阶矩阵), 则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 。主对调, 副变号

1.4.4 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0)$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

9.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} & a \\ b & \\ c & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & b \end{bmatrix}$$

1.4.5 秩

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$

2. 当 $k \neq 0$ 时, $r(kA) = r(A)$

3. $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

4. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则

(a) $r(AB) \leq r(A)$ 并且 $r(AB) \leq r(B)$, 即 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$

(b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

(c) $r(A, AB) = r(A)$ 详见理解 1

(d) $r(B, BA) = r(B)$

(e) 且 $AB = O$, 则

- i. $r(A) + r(B) \leq n$
- ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解
 - 按列分块, 有

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

因此

$$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

(f) 且 $AB = C$, 则

- i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出
 - 对 B, C 按列分块, 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \dots + a_{2n}\beta_n = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

- ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B) = r(BA)$

6. 若 A 列满秩, 则 $r(AB) = r(B)$

7. 若 A 行满秩, 则 $r(AB) = r(A)$

8. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, C 是 $s \times t$ 矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B)$$

9.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

10.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

11. 若 $A \sim B$, 则

(a) $r(A) = r(B)$

(b) $r(A + kE) = r(B + kE)$

1.4.6 分块矩阵

1. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & -B^*ZC^* \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ -C^*ZB^* & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C'^* \\ |C|B^* & -B^*ZC'^* \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -C^*ZB^* & |B|C'^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

1.4.7 对角矩阵

1. $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$

2.

$$\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & & \\ & b_2 a_2 & \\ & & b_3 a_3 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

1.4.8 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$, 则

(a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

(b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵, 主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当 } k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$, 则 $B^2 = P^{-1}A^2P$, 即

$$(a) \mathbf{B}^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}$$

$$(b) A^n = PB^nP^{-1}$$

1.5 方法步骤

1. 已知矩阵 A , 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为对角矩阵, 求 P, Q

(a) 标准型: 对角矩阵是特征值

(b) 初等行变换: 对 A 做初等行变换化为上三角矩阵 $B([A|E] \rightarrow [B|P])$ 得到 P , 再对 B 做列变换或 B^T 作行变换化为对角矩阵 $\Lambda([B^T|E] \rightarrow [\Lambda|Q])$ 得到 Q

2. 由 A^* 求 A

$$(a) |A^*|$$

$$(b) |A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow |A|$$

$$(b) AA^* = |A|E \Rightarrow A = |A|(A^*)^{-1}$$

3. 秩求法

$$\bullet |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$$

$$\bullet |A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$$

• 初等行变换矩阵秩不变

• 找不为 0 的子式 $\leq r(A)$

• A, B 相似 $\Rightarrow r(A) = r(B)$

4. 求特殊矩阵的 n 次方

• 分块

• 若 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A$, 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

• $P^{-1}AP = B \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}, B^n = P^{-1}A^nP$

• 观察多少次幂之后是 0, 之后的都是 0

• 对角矩阵的 n 次方

5. 求伴随矩阵 A^*

• 定义

$$\bullet A^* = |A|A^{-1}$$

6. 求可逆矩阵

- 求代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} (k \neq 0)$
- 用初等行变换

$$(A \ E) \xrightarrow{\text{由上往下}} \cdots \rightarrow (\text{上三角} \dots) \xrightarrow{\text{由下往上}} \cdots \rightarrow (*) \xrightarrow{\text{某行乘} k} \rightarrow (E \ A^{-1})$$

- 分块

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

1.6 条件转换思路

1. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则

- (a) \mathbf{B} 的列向量是齐次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解
- (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$
- (c) 若 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为方阵, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$
- (d) 且 $A \ B$ 非零, 则

$$\Rightarrow r(A) < n \text{ 且 } r(B) < n$$

$$\Rightarrow A \text{ 列向量线性相关}$$

$$\Rightarrow B \text{ 行向量线性相关}$$

2. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 则:

$$A_{ij} = -a_{ij}$$

$$A^* = (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T$$

3. 若 $A^* = A^T$, 则 $A_{ij} = a_{ij}$

4. 矩阵 A 经过若干次初等行变换得到矩阵 B , 则

- (a) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解
- (b) $A \cong B, B = PA$
- (c) $r(A) = r(B)$

5. 矩阵 A 经过若干次初等列变换得到矩阵 B , 则

- (a) $A \cong B, B = AQ$
- (b) $r(A) = r(B)$

6. $A^* \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq n - 1$ (A 中至少有一个 $n - 1$ 阶子式不为 0)

7. 若 A, B, C 为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 则

$$\Rightarrow |A||B||C| = 1$$

$$\Rightarrow ABC \text{ 均可逆}$$

$$\Rightarrow BC = A^{-1} \Rightarrow BCA = E$$

$$\Rightarrow AB = C^{-1} \Rightarrow CAB = E$$

8. $r(A + AB) \Rightarrow$ 加法, 找可逆, 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B)$

9. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $r(A)$ 为秩

- **基本定义:** 秩 = 列向量或行向量的最大线性无关个数
- **行列式:** 方阵 A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
- **线性相关性:**
 - 列满秩 \Rightarrow 列向量线性无关
 - 行满秩 \Rightarrow 行向量线性无关
- **齐次方程:** $Ax = 0$
 - 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = n$
 - 非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$, 解空间维数 $n - r(A)$
- **矩阵运算:**
 - $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
 - $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- **逆矩阵:** 列满秩 \rightarrow 左逆, 行满秩 \rightarrow 右逆; 方阵满秩 \rightarrow 可逆
- **特征值:** 方阵秩 $< n \Rightarrow 0$ 是特征值; 方阵满秩 $\Rightarrow 0$ 不是特征值

10. A 为 n 阶矩阵, A 各行元素之和都为 0, 则

- 列向量都是 1 是 $Ax = 0$ 的解
- A 的行向量线性相关
- $r(A) < n$

1.7 理解

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 (XY) 表示分块矩阵, 则 $r(A, AB) = r(A)$ 且 C 的列向量组与 A 的列向量组等价

解析

记 $AB = C$, 对 A, C 按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 矩阵的秩就是列向量组的秩, 故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(A)$$

同理 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出
故 C 的列向量组与 A 的列向量组等价

2. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 $r(A) = m, r(B) = m$

解析

已知 $AB = E_m$, 则

$$\therefore AB = E_m \Rightarrow r(AB) = r(E_m) = m,$$

又因为

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, \quad r(A) \leq m, \quad r(B) \leq m,$$

$$\therefore r(A) = m, \quad r(B) = m.$$

3. 矩阵相乘 \Leftrightarrow 两个数的积相加
4. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $AB = O$, 且 A, B 非零, 则 A 列向量线性相关, B 行向量线性相关

解析

已知 $AB = O$

$$\therefore r(A) + r(B) \leq n$$

由于 A, B 非零

$$\therefore 0 < r(A) < n, \quad 0 < r(B) < n$$

故:

$r(A) = A$ 的列秩, 即 A 的列向量组线性相关

$r(B) = B$ 的行秩, 即 B 的行向量组线性相关

5. 秩

- (a) 给定一个矩阵 A ，它的秩就是矩阵中线性无关的行（或列）的最大个数
- (b) 秩 == 矩阵所包含的“独立信息量”
- (c) Case: 如果你有 10 行数据，但其中 5 行其实是由另外 5 行“复制”或“线性组合”出来的，那么这些重复的信息是“冗余的”，真正“独立”的信息只有 5 行 $\Rightarrow r(A) = 5$
- (c) 解线性方程组: 判断方程有没有解、是不是唯一解
 - i. 方程 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = r(\bar{A})$
 - i. 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = \text{变量数}$
 - i. 多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < \text{变量数}$
- (d) 判断向量独立性: 度量“向量空间中有多少个独立方向”
 - i. 如果列向量组成的矩阵 $r(A) = \text{列数} \Rightarrow$ 向量组线性无关
 - i. 否则线性相关
- (e) 维度的桥梁: 刻画了“变换的本质效果”
 - i. 秩本质上就是矩阵对应线性映射的像空间（列空间）的维数
 - ii. 这告诉我们，线性变换把空间压缩到了几维。
 - iii. Case: 3×3 矩阵 A
 - $r(A) = 3 \Rightarrow$ 保留三维空间的全部信息（可能只是旋转或缩放）
 - $r(A) = 2 \Rightarrow$ 把三维空间压缩成二维平面
 - $r(A) = 1 \Rightarrow$ 压缩成一条直线
 - $r(A) = 0 \Rightarrow$ 全部压缩成原点
- (f) 与行列式、可逆性关系: 可逆性的根本判据
 - i. 如果 n 阶矩阵 A ， $r(A) = n$ ，那么 A 可逆， $|A| \neq 0$
 - ii. 如果 $r(A) < n$ ，矩阵 A 不可逆