1 矩阵

1.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵，当 $m = n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n **阶方阵**

2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 $\mathbf{O}$

3. 如果一个方阵，所有非主对角线元素都是 0，则称这个矩阵是**对角矩阵**

4. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A = B$

5. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$

6. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T

7. 如果方阵 A 满足 $A^T = A$，则称 A 是**对称矩阵**

8. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵
$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

9. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置，即 $A^* = [A_{ji}] = (A_{ij})^T$

10. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$，如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E$(单位矩阵) 成立，则称 A 是**可逆矩阵或非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵

11. 对 $m \times n$ 矩阵，下列三种变换
    (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行（列）
    (b) 互换矩阵某两行（列）的位置
    (c) 把某行（列）的 k 倍加至另一行（列）

    称为矩阵的**初等行（列）变换**，统称为矩阵的**初等变换**

12. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**，记作 $A \cong B$

13. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**
    (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
    (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行

(c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行

14. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$。向量内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

15. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T=A^TA=E$，称 A 是 **正交矩阵:**

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ A^T=A^{-1}\\
&\Leftrightarrow\ A\text{ 的行（列）向量两两正交（单位向量）}\\
&\Leftrightarrow\ A\text{ 的每个行（列）向量长度均为 }1\\
&\Leftrightarrow\ A\text{ 的行（列）向量平方和为 }1\\
&\Leftrightarrow\ a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1\\
&\Rightarrow |A|^2=1\quad\Leftrightarrow\quad |A|=1\text{ 或}|A|=-1
\end{aligned}
$$

16. 若 A 是正交矩阵且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，则:

(a) $\alpha_i^T\alpha_i=1$

(b) $\alpha_i^T\alpha_j=0\ (i\neq j)$

1.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵，则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**，记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ |A|\neq 0\\
&\Leftrightarrow\ r(A)=n\\
&\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性无关}\\
&\Leftrightarrow\ A=P_1P_2\ldots P_s, P_i(i=1,2,\ldots,s)\text{是初等矩阵}\\
&\Leftrightarrow\ A\text{与单位矩阵等价}\\
&\Leftrightarrow\ 0\text{不是矩阵}A\text{的特征值}
\end{aligned}
$$

3. 若 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AB=E$，则必有 $BA=E$

4. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A，其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 $\Rightarrow$ **左乘行变换，右乘列变换**

4. 初等矩阵均可逆，其逆矩阵是同类型的初等矩阵，即

倍乘	$E_i^{-1}(k)=E_i(1/k)$	第 i 行（或列）乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行（或列）乘以 $1/k$
互换	$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$	交换第 i 行（或列）和第 j 行（或列）的**逆矩阵是其本身**
倍加	$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$	第 i 行（或列）加上 k 倍第 j 行（或列）的逆矩阵是第 i 行（或列）加上 $-k$ 倍第 j 行（或列）

5. 矩阵 A 与 B **等价**的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q，使 $PAQ=B$

6. 秩 $r(A)=A$的列秩 $=A$的行秩

7. 矩阵经初等变换后秩不变

1.3 运算

1. 设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A+B=C$

2. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的**数乘**，记作 kA

3. 设 $A,B,C,\mathbf{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是常数，则矩阵的加法和数乘运算满足：

   (a) $A+B=B+A$
   (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   (c) $A+\mathbf{O}=A$
   (d) $A+(-A)=\mathbf{O}$
   (e) $1A=A$
   (f) $k(lA)=(kl)A$
   (g) $(kA)^n=k^nA^n$
   (h) $k(A+B)=kA+kB$
   (i) $(k+l)A=kA+lA$

4. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$，其中

   $$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

   称为 A 与 B 的**乘积**，记作 $C=AB$

5. 矩阵乘法有下列法则：

   (a) $A(BC)=(AB)C$
   (b) $A(B+C)=AB+AC$
   (c) $(A+B)C=AC+BC$
   (d) $(kA)(lB)=klAB$
   (e) $AE=EA=A$
   (f) $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$

6. 设 A 是 n 阶矩阵，k 是正整数，

   (a) A 的 k 次方幂 $A^k=A\cdot A\ldots A(k \text{ 个 } A)$

(b) $\mathbf{A^0 = E}$
(c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
(d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.
$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $\mathbf{(A+E)^2 = A^2 + 2A + E}$

(a) $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$
(b) $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$
(c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow$ (A - 2E)(B - 4E) = 8E

12. 设 α 和 β 都是列向量，则

(a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$，两者都是 n 阶矩阵（互为转置）
(b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数
(c)
$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \text{(对称矩阵)}$$
(d)
$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \text{（平方和）}$$

1.4 公式

1.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n|A|$
3. $|AB| = |A||B|$ ，$|A^2| = |A|^2$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A-B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E+A)^T = E + A^T$

1.4.3 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

1.4.4 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
   (a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$)，则
      i. 且 $n \geq 3$ 时，$(A^*)^* = O$
      ii. 且 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{如果} r(A)=n, \\ 1, & \text{如果} r(A)=n-1, \\ 0, & \text{如果} r(A)<n-1 \end{cases}$$

10. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$(二阶矩阵)，则 $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。**主对调，副变号**

1.4.5 秩

1. $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$
2. 当 $k\neq 0$ 时，$r(kA)=r(A)$
3. $r(A+B)\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$
4. A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则
   (a) $r(AB)\leq r(A)$并且$r(AB)\leq r(B)$，即 $r(AB)\leq \min(r(A),r(B))$
   (b) $r(A)+r(B)-n\leq r(AB)$
   (c) 且 $AB=O$，则
      i. $r(A)+r(B)\leq n$
      ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解
         - 按列分块，有

           $$B=[b_1,b_2,\dots,b_s],AB=A[b_1,b_2,\dots,b_s]=[Ab_1,Ab_2,\dots,Ab_s]=[0,0,\dots,0]$$

           因此

           $$Ab_i=0,\quad i=1,2,\dots,s.$$
   (d) 且 $AB=C$，则
      i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 线性表出
         - 对 B，C 按列分块，有

           $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

           即

           $$\begin{cases} a_{11}\beta_1+\cdots+a_{1n}\beta_n & =\alpha_1, \\ a_{21}\beta_1+\cdots+a_{2n}\beta_n & =\alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1+\cdots+a_{nn}\beta_n & =\alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)=r(BA)$

6. 若 A 列满秩，则 $r(AB)=r(B)$

7. 若 A 行满秩，则 $r(AB)=r(A)$

8. A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，C 是 $s\times t$ 矩阵，则

$$r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B)$$

9. $$r\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}=r(A)+r(B)$$

10. $$r\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\geq r(A)+r(B)$$

11. 若 $A\sim B$，则

    (a) $r(A)=r(B)$

    (b) $r(A+kE)=r(B+kE)$

1.4.6 分块矩阵

1. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}$$

2. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

    (a) $$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$$

    (b) $$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$$

3. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

    (a) $$\begin{bmatrix}B & Z\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1}\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$$

    (b) $$\begin{bmatrix}B & O\\ Z & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1}\end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

(a)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} |C|B^{*} & O \\ O & |B|C^{*} \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{*} = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^{*} \\ |C|B^{*} & O \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} |C|B^{*} & -B^{*}ZC^{*} \\ O & |B|C^{*} \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} |C|B^{*} & O \\ -C^{*}ZB^{*} & |B|C^{*} \end{bmatrix}$$

(e)
$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{*} = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^{*} \\ |C|B^{*} & -B^{*}ZC^{*} \end{bmatrix}$$

(f)
$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{*} = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -C^{*}ZB^{*} & |B|C^{*} \\ |C|B^{*} & O \end{bmatrix}$$

1.4.7 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$，则

   (a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

   (b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

   (c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵，主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

则：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当} k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$，则 $B^2 = P^{-1}A^2P$，即
   (a) $\mathbf{B^n} = \mathbf{P^{-1}A^nP}$
   (b) $A^n = PB^nP^{-1}$

1.5 方法步骤

1. 已知矩阵 A，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，求 P, Q
   (a) 标准型: 对角矩阵是特征值
   (b) **初等行变换**: 对 A 做初等**行变换**化为上三角矩阵 $B([A|E]- > [B|P])$ 得到 P，再对 B 做**列变换**或B^T **作行变换**化为对角矩阵 $\Lambda([B^T|E]- > [\Lambda|Q])$ 得到 Q

1.6 条件转换思路

1. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$，则
   (a) $\mathbf{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解
   (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$
2. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 则:

$$A_{ij} = -a_{ij}$$
$$A^* = (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T$$

3. 若 $A^* = A^T$，则 $A_{ij} = a_{ij}$
4. 矩阵 A 经过若干次初等**行变换**得到矩阵 B，则
   (a) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解
   (b) $A \cong B, B = PA$
   (c) $r(A) = r(B)$
5. 矩阵 A 经过若干次初等**列变换**得到矩阵 B，则
   (a) $A \cong B, B = AQ$
   (b) $r(A) = r(B)$