1 数列极限

1.1 基础概念

1. 设 x_n 为一数列，若存在常数 a，对于任意的 $\epsilon > 0$（不论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \epsilon$，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

2. 有界数列: 若对所有正整数 n，存在正实数 M，有 $|a_n| \leq M$，则称数列 a_n 为有界数列。证明数列有界的方法
   - 找 M，使得 $|a_n| \leq M$
   - 放缩法
   - 找最值
   - 基本不等式法

3. 数列收敛于 a 的速度问题：设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 在 $n \to \infty$ 的过程中同时趋于 a，记 $u_n = |x_n - a|, v_n = |y_n - a|$，且当 $n \to \infty$ 时，u_n 和 v_n 都是无穷小量。若 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ 存在，则有
   - **高阶无穷小**：当 $I = 0$ 时，称 u_n 是 v_n 的高阶无穷小，记作 $u_n = o(v_n)$。此时 $\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 更快收敛于 a
   - **同阶无穷小**：当 $I = c \neq 0$ 时（c 为常数），称 u_n 与 v_n 是同阶无穷小，记作 $u_n = O(v_n)$。此时 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 以相同速度收敛于 a
   - **等价无穷小**：当 $I = 1$ 时，称 u_n 与 v_n 是等价无穷小，记作 $u_n \sim v_n$。这是同阶无穷小的特例
   - **低阶无穷小**：当 $I = \infty$ 时，称 u_n 是 v_n 的低阶无穷小（或 v_n 是 u_n 的高阶无穷小）。此时 $\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 更慢收敛于 a

示例

设 $x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，则

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n} - 0\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

故 $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，即 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 比 $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 更快收敛于 0。

1.2 收敛数列的性质

1. 唯一性: 给出数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$（存在），则 a 是唯一的
2. 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，则数列 $\{x_n\}$ 有界
3. 保号性: 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，b 为任意实数。
   (a) 若 $a > b$（或 $a < b$），则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有
   $$x_n > b \quad (\text{或} x_n < b).$$
   (b) 若存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有
   $$x_n \geq b \quad (\text{或} x_n \leq b),$$
   且
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$
   则必有
   $$a \geq b \quad (\text{或} a \leq b).$$
   其中常考情形为 $b = 0$
4. **脱帽（严格不等）：** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > b \Rightarrow x_n > b \quad (\text{或} \lim\limits_{n\to\infty} x_n < b \Rightarrow x_n < b)$
5. **带帽（非严格不等）：** $x_n \geq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b \quad (\text{或} x_n \leq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b)$

1.3 定理

1. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且
   $$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
2. 海涅定理（归结原则）：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n) = A$ 存在（**在极限存在的条件下，函数极限和数列极限可以相互转化**）
   - 当 $x \to 0$ 时，取 $x_n = \dfrac{1}{n}$，若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n}) = A$
   - 当 $x \to +\infty$ 时，取 $x_n = n$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$。

Example

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

- 当 $x \to a$ 时，且 $x_n \neq a$ 时，若 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

3. 单调有界准则: 若数列 x_n 单调增加（减少）且有上界（下界），则 $\lim_{x\to\infty} x_n$ 存在
   - $x_n \leq x_{n+1} \leq a$，则 $\lim_{x\to\infty} x_n$ 存在
   - $a \leq x_{n+1} \leq x_n$，则 $\lim_{x\to\infty} x_n$ 存在

1.4 结论

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$
   因此，若要证明
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$
   只需证明
   $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$
   又由于 $|a_n| \geq 0$，可利用夹逼准则：若存在数列 $\{b_n\}$，使得
   $$0 \leq |a_n| \leq b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$
   则有
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
5. ★若 $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 0$，则
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

1.5 运算

1.6 公式

1.7 方法步骤

1. 判断数列发散的方法
   - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到一个发散的子列，则原数列一定发散
   - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到至少两个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$，但它们收敛到不同极限，则原数列一定发散

2. **证明数列 $\{x_n\}$ 单调性的常用方法**

   a. **差分法或比值法**

$$x_{n+1} - x_n > 0 \,(\text{或} < 0), \quad \text{或} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \,(\text{或} < 1).$$

   b. **数学归纳法**

      i. 验证 $n = 1$ 时结论成立；

      ii. 假设 $n = k$ 时结论成立；

      iii. 证明 $n = k + 1$ 时结论仍成立。

   c. **利用重要不等式**

   d. **利用递推形式** $x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2, \cdots)$

   设 $x_n \in I$，且 $f(x)$ 在区间 I 上可导：

   - 若 $f'(x) > 0$（即 $f(x)$ 在 I 上单调增加），则数列 $\{x_n\}$ 单调（无法确定是单调递增还是单调递减），且

$$\begin{cases} x_2 > x_1, & \text{则}\{x_n\}\text{ 单调递增}, \\ x_2 < x_1, & \text{则}\{x_n\}\text{ 单调递减}. \end{cases}$$

   - 若 $f'(x) < 0$（即 $f(x)$ 在 I 上单调减少），则数列 $\{x_n\}$ **不单调**（通常呈振荡）。

1.8 条件转换思路

1.9 理解

1. 压缩映射原理: 使用时，需写出证明过程

   - **原理一（压缩不等式）**设数列 $\{x_n\}$，若存在常数 k $(0 < k < 1)$，使得对一切 $n = 1, 2, \ldots$，

$$|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|,$$

   则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

   证：由已知条件，

$$0 \leq |x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|.$$

   递推可得

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - a| &\leq k|x_n - a| \\ &\leq k^2|x_{n-1} - a| \\ &\vdots \\ &\leq k^n|x_1 - a|. \end{aligned}$$

   又因为 $0 < k < 1$，

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0.$$

由夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - a| = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

- **原理二（迭代函数收敛原理）** 设数列 $\{x_n\}$ 由

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

定义，其中 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且方程

$$f(x) = x$$

有唯一解 a。若存在常数 $k\,(0 < k < 1)$，使得对任意 $x \in \mathbb{R}$，

$$|f'(x)| \leq k,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

证：由于 $f(a) = a$，有

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)|.$$

由拉格朗日中值定理，存在 ξ 介于 x_n 与 a 之间，使得

$$|f(x_n) - f(a)| = |f'(\xi)|\,|x_n - a|.$$

又由条件 $|f'(x)| \leq k < 1$，可得

$$|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|.$$

由原理一（压缩不等式），得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

2. 极限定义中 ϵ 的含义：ϵ 必须是不依赖于 n 的任意小正数。若 ϵ 与 n 有关，相当于对收敛速度提出了额外要求，而极限定义并不限制收敛速度。下面的示例说明了在推理过程中，ϵ 必须作为一个与 n 无关的常数来使用。

示例

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = a &\Rightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N:\ |a_n - a| < \epsilon \\
&\Rightarrow \big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \epsilon \quad \text{(由绝对值不等式)} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|. \\
&\Rightarrow |a| - \epsilon < |a_n| < |a| + \epsilon
\end{aligned}$$