1 一元函数积分学的计算

1.1 基本积分公式

1. $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C, k \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

3. 指数函数的积分

   - $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$
   - $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0$且$a \neq 1$

4. 三角函数的积分

   - $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
   - $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$
   - $\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
   - $\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
   - ★ $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \displaystyle\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$
   - $\int \frac{1}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \displaystyle\int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$
   - $\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$
   - $\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
   - $\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$
   - $\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

5. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, a > 0$

   - $\int \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$

   - $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

7. 对数型（二次根式型）

   - $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

     ① ★ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C, |x|>|a|$

  ① $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C, |x|>|a|$

8. 部分分式分解型
   - $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$
   - $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$
9. ★ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C, a>|x|\geq 0$
   - $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$
10. 三角函数降幂公式型
    - $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C,\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
    - $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
    - $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C,\ \tan^2 x = \sec^2 x - 1$
    - $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x - x + C,\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1$

1.2 不定积分的积分法

1.2.1 凑微分法

$$\int f[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f[g(x)]\,\mathrm{d}[g(x)] = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

常用的凑微分公式

1. 由于 $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，因此

$$\int xf(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int f(u)\,\mathrm{d}u$$

2. 由于 $\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})$，因此

$$\int \sqrt{x}\,f(x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int f(x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}\int f(u)\,\mathrm{d}u$$

3. 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$，故

$$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

4. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$，故

$$\int \frac{f\left(-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int f\left(-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

5. 当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$，故

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

6. 由于 $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$，故

$$\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

7. 由于 $a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}(a^x)$，$a>0,\ a\neq 1$，故

$$\int a^x f(a^x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\,\mathrm{d}(a^x)=\frac{1}{\ln a}\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

8. 由于 $\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$，故

$$\int \sin x\, f(-\cos x)\,\mathrm{d}x=\int f(-\cos x)\,\mathrm{d}(-\cos x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. 由于 $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$，故

$$\int \cos x\, f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

10. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，故

$$\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\,\mathrm{d}(\tan x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

11. 由于 $\csc^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$，故

$$\int \frac{f(-\cot x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int f(-\cot x)\,\mathrm{d}(-\cot x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

12. 由于 $\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$，故

$$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\,\mathrm{d}(\arctan x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

13. 由于 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$，故

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\,\mathrm{d}(\arcsin x)=\int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

1.2.2 换元法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=g(x)} \int f[g(u)]\,\mathrm{d}[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)\,\mathrm{d}u$$

1.2.3 分部积分法

1.2.4 有理函数的积分

1.3 定积分的计算

1.4 变限积分的计算

1.4.1 求导公式

1.4.2 重要结论

1.5 反常积分的计算

1.6 基础概念

1.7 结论

1.8 定理

1.9 运算

1.10 公式

1.11 方法总结

1.12 条件转换思路

1.13 理解