

# 1 函数的连续与间断

## 1.1 连续点的定义

1. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义, 且有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$  在点  $x_0$  处连续
- 设  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 且  $f(x_0) > 0$  (或  $f(x_0) < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ )

### 2. 连续性运算法则

- 两个函数如果在同一点  $x_0$  处连续, 则它们的和差商积在这点也是连续的
- 复合函数的连续性: 设  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  处连续,  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  处连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则  $f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  处连续

## 1.2 间断点的定义与分类

### 1. 讨论间断点只看无定义点和分段点

### 2. 第一类间断点 = 可去间断点 + 跳跃间断点

- 可去间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$  ( $f(x_0)$  甚至可以无定义), 则  $x = x_0$  称为可去间断点, 或称可补间断点
- 跳跃间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , 则  $x = x_0$  称为跳跃间断点

### 3. 第二类间断点: 无穷间断点和震荡间断点都属于第二类间断点

- 无穷间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ , 则  $x = x_0$  称为无穷间断点 (左右极限至少有一个无穷大)
- 震荡间断点: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  震荡不存在, 则  $x = x_0$  称为震荡间断点

1.3 结论

1.4 定理

1.5 运算

1.6 公式

1.7 方法总结

1.8 条件转换思路

1.9 理解