1 一元函数积分学的概念与性质

1.1 不定积分

1.1.1 原函数与不定积分

设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上，若存在可导函数 $F(x)$，对于该区间上任意一点都有 $F'(x) = f(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**。称 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分（全体原函数）**

注：

1. $F'(x) = f(x)$。由 $f(x)$ 处处有定义得 $F(x)$处处可导，即 $F(x)$处处连续

1.1.2 原函数（不定积分）存在定理

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$

$$\bigstar f(x)\text{连续} \Rightarrow \begin{cases} \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C, \\ [\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t]' = f(x) \end{cases}$$

2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$

3. 可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x) = f(x)$ 不一定是连续函数，也可能有震荡间断点

$$\text{若}F(x)\text{处处可导} \Rightarrow F'(x) \begin{cases} \text{连续函数或含有震荡间断点的函数} \\ \text{有介值性（达布性质）} \\ \lim\limits_{x\to x_0} F'(x)\ \text{存在} \iff F'(x)\ \text{在}x_0\ \text{处连续；} \\ \neq 0 \implies F(x)\ \text{单调.} \end{cases}$$

4. 导函数 $f'(x)$ 性质
   - 如果导函数 $f'(x)$ 存在，当导函数在一点极限存在时，导函数在这一点必连续
   - 如果导函数在一点存在，则这一点一定不会是导函数的第一类间断点
   - 若 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 可能连续，也可能含有震荡间断点

1.2 定积分

1.2.1 定义

1. 概念：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 x_i $(i = 1,2,3,\cdots,n-1)$，定义 $x_0 = a$ 和 $x_n = b$，且

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

记

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n,$$

并任取一点

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],$$

记

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\},$$

若当 $\lambda \to 0$ 时，极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

存在且与分点 x_i 及点 ξ_k 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

① 分隔: 分隔方法不唯一，只要分成 n 份即可

② 近似: $f(\xi_k)$

③ 求和

④ 取极限

2. 几何意义

   - 若 $f(x) \ge 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示面积
   - 若 $f(x) \le 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示面积的负值
   - 若 $f(x)$ 有正有负，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形的面积减去 x 轴下方图形的面积

3. 定积分的精确定义：当定积分存在时，存在两个任取：分点 x_i 任取，一点 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 任取，故可做两个特取，即将 $[a,b]$ n 等分且取每个小区间的右端点为 ξ_i，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$$

若将式子中的 a, b 特殊化为 $0, 1$ 这两个数，即

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

4. 定积分的值与字母无关：定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

1.2.2 存在定理

1. 定积分存在的充分条件

   ① 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调（$f(a),f(b)$ 即为函数的界，对任意 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 一定介于 $f(a),f(b)$ 之间），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ③ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点（不包含无穷间断点），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ④ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个第一类间断点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

2. 定积分存在的必要条件：可积函数必有界。即若定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界

1.2.3 性质（假设以下积分均存在）

1. 当 $b=a$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$

2. 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. 求区间长度：假设 $a<b$，则 $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a=L$，其中 L 为区间 $[a,b]$ 的长度

4. 积分的线性性质：设 k_1,k_2 为常数，则 $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\,\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. 积分的可加（拆）性：无论 a,b,c 的大小如何，总有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6. 积分的保号性：若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。特殊地，有

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负的连续函数，只要 $f(x)$不恒等于零，则必有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$$

8. 估值定理：设 M,m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，L 为区间 $[a,b]$ 的长度，则有

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x=mL\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le ML=\int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

9. ★积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$

1.3 变限积分

本质是一个由定积分定义的函数

1.3.1 概念

当 x 在区间 $[a,b]$ 上变动时，对应于每一个 x 值，积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 都有一个确定的值，因此 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是一个关于 x 的函数，记作

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a\le x\le b)$$

称函数 $F(x)$ 为变上限的定积分。同理，可以定义变下限的定积分以及上、下限都变化的定积分，这些统称为**变限积分**。事实上，变限积分就是定积分的推广。

1.3.2 性质

1. 函数 $f(x)$ 在 I 上**可积**，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 I 上连续（$F(x)$ 若存在，则其一定连续。与 $f(x)$ 作区分：$f(x)$ 存在但其不一定连续)
2. ★函数 $f(x)$ 在 I 上**连续**, 则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 I 上可导且 $F'(x)=f(x)$
3. 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则有：
   - 若 $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的跳跃间断点，则函数 $F(x)$ 在 x_0 处不可导，且
   $$\begin{cases} F'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \\ F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x). \end{cases}$$
   - 若 $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的可去间断点，则函数 $F(x)$ 在 x_0 处可导，且
   $$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0).$$
   - 上述两种情形中，$F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数，而是变限积分，因为第一类间断点的函数不存在原函数

1.4 反常积分

1.4.1 概念

1.4.2 敛散性的判别法

1.5 基础概念

1.6 结论

1. $f(x)$ 可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 有界

1.7 定理

1.8 运算

1.9 公式

1.10 方法总结

1.11 条件转换思路

1.12 理解

1. 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$，即 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$

证

若 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，则

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= F(x+\Delta x)-F(x)\\
&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由积分中值定理，有 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$，其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，故

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$$

当 $x=a$ 时，取 $\Delta x>0$，同理可证 $F'(a)=f(a)$；当 $x=b$ 时，取 $\Delta x<0$，同理可证 $F'(b)=f(b)$。
综上，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$。

2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为不定积分，表示全体原函数

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为定积分，表示面积

4. $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 称为变上限积分，表示动态的面积

5. 证明：函数 $f(x)$ 在 I 上**可积**，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 I 上连续（$F(x)$ 若存在，则其一定连续。与 $f(x)$ 作区分：$f(x)$ 存在但其不一定连续)

证

对任意 x，若 $x+\Delta x \in I$，有

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由可积的必要条件可知，存在 $M>0$，使得在 I 上有

$$|f(x)| \le M.$$

因此，

$$0 \le \big|F(x+\Delta x) - F(x)\big| \le M\,|\Delta x|.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big[F(x+\Delta x) - F(x)\big] = 0,$$

即

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(x+\Delta x) = F(x).$$

根据函数在 x 点连续的充要条件，$F(x)$ 在 x 点连续。
由此可见，对于变限积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

只要它存在，就必然是连续的

6. 证明：函数 $f(x)$ 在 I 上**连续**，则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 I 上可导且 $F'(x) = f(x)$

证

对任意的 x，若 $x+\Delta x \in I$，由于函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，因此

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}\end{aligned}$$

由积分中值定理，存在

$$\xi \in (x,\, x+\Delta x),$$

使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\,\Delta x.$$

因此，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

由于 $\xi \to x$ 且 $f(x)$ 连续，故

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

由此可见，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。