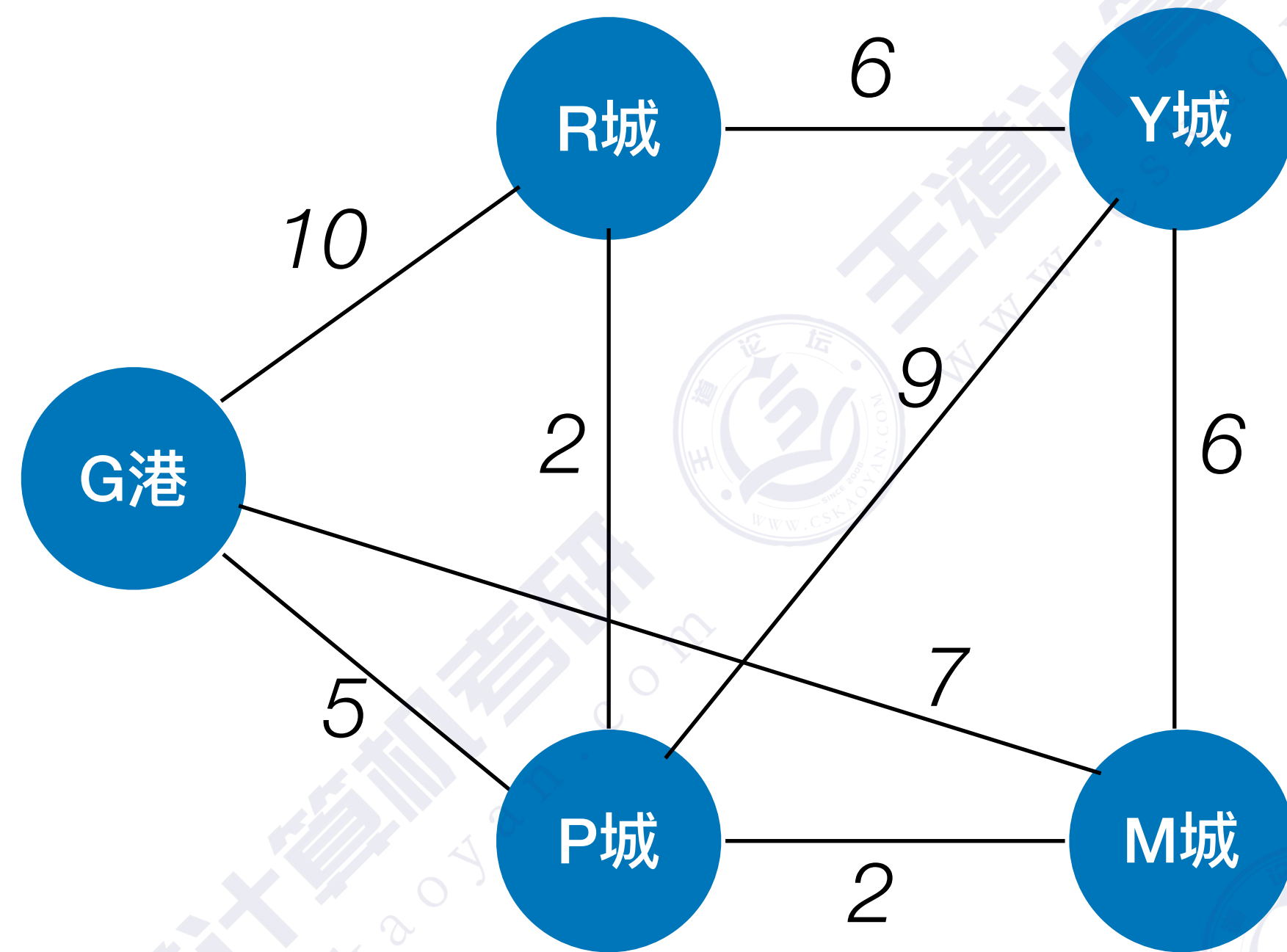


本节内容

最短路径

BFS算法

最短路径问题



“G港”是个物流集散中心，经常需要往各个城市运东西，怎么运送距离最近？——单源最短路径问题

各个城市之间也需要互相往来，相互之间怎么走距离最近？——每对顶点间的最短路径

最短路径问题

单源最短路径

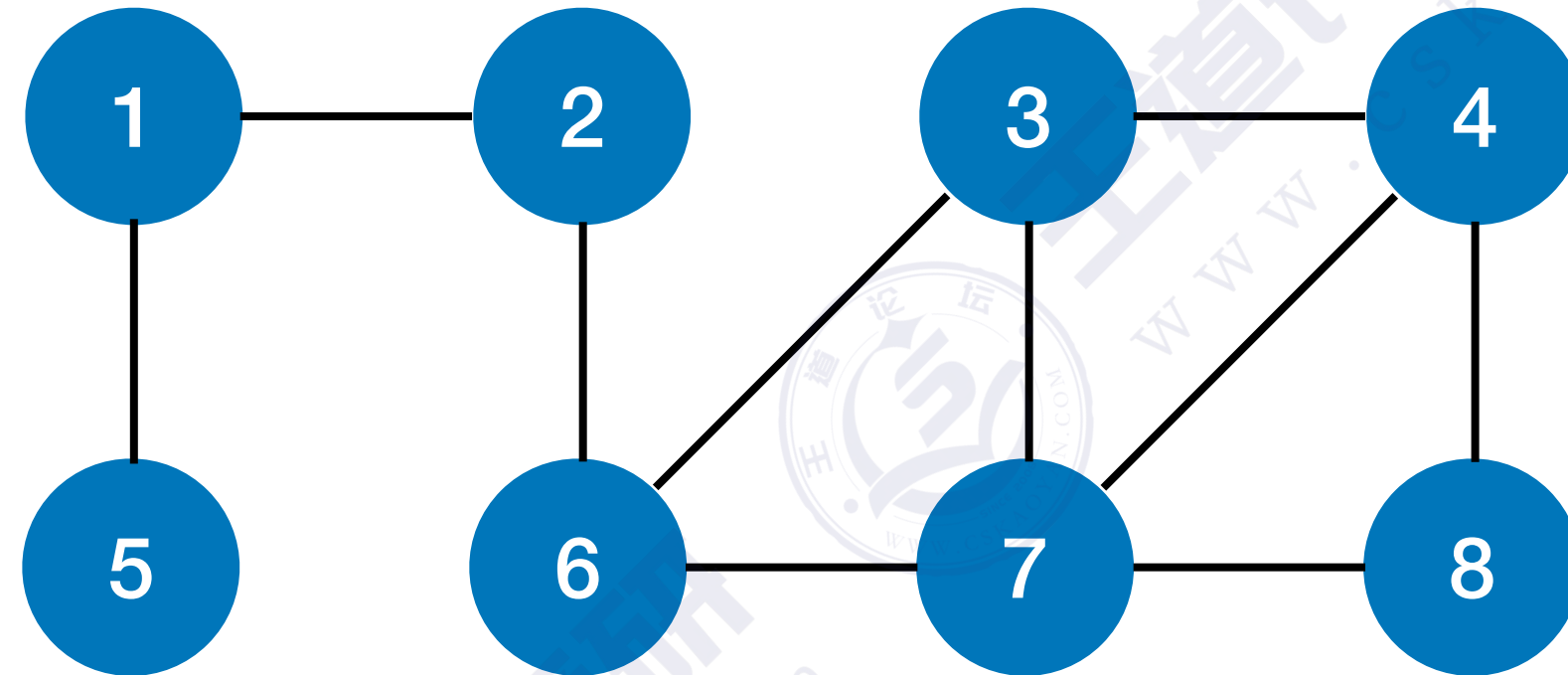
BFS 算法（无权图）

Dijkstra 算法（带权图、无权图）

各顶点间的最短路径

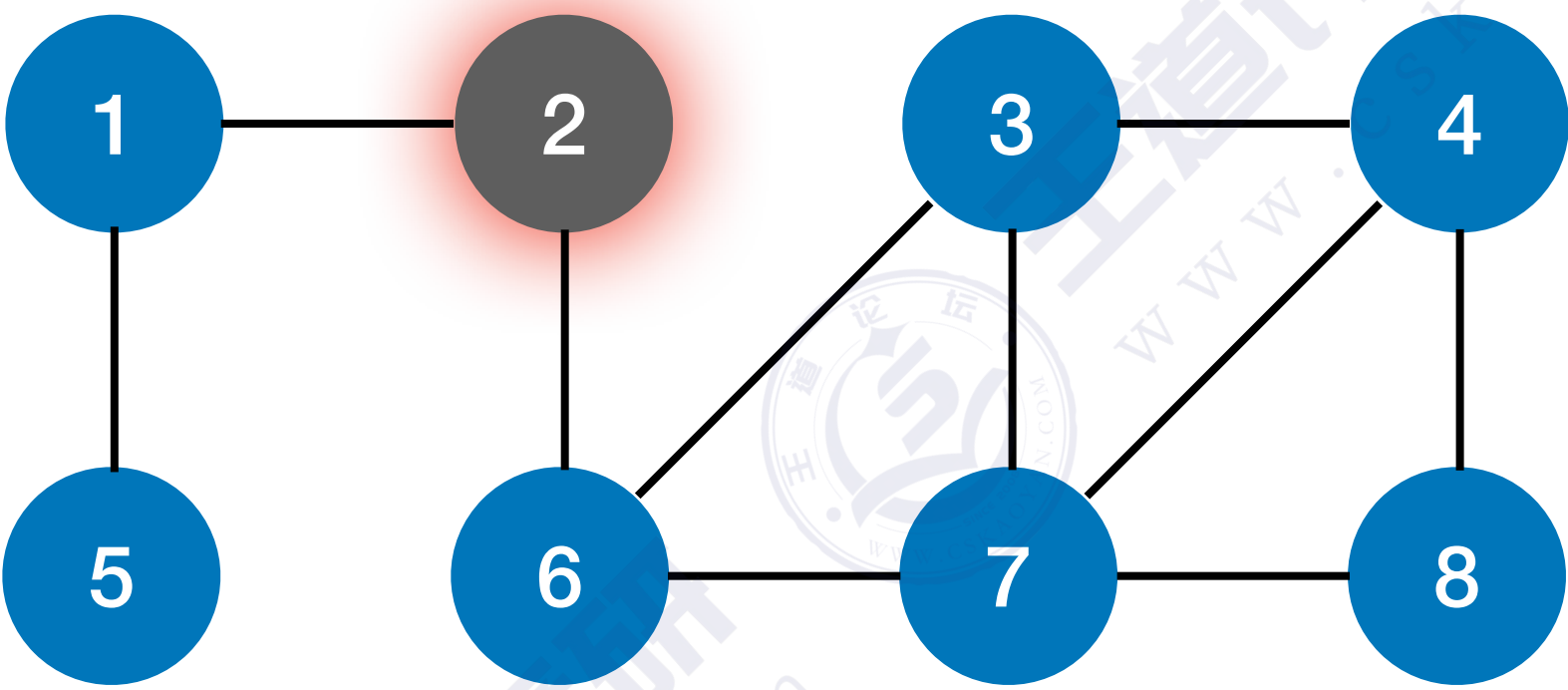
Floyd 算法（带权图、无权图）

BFS求无权图的单源最短路径

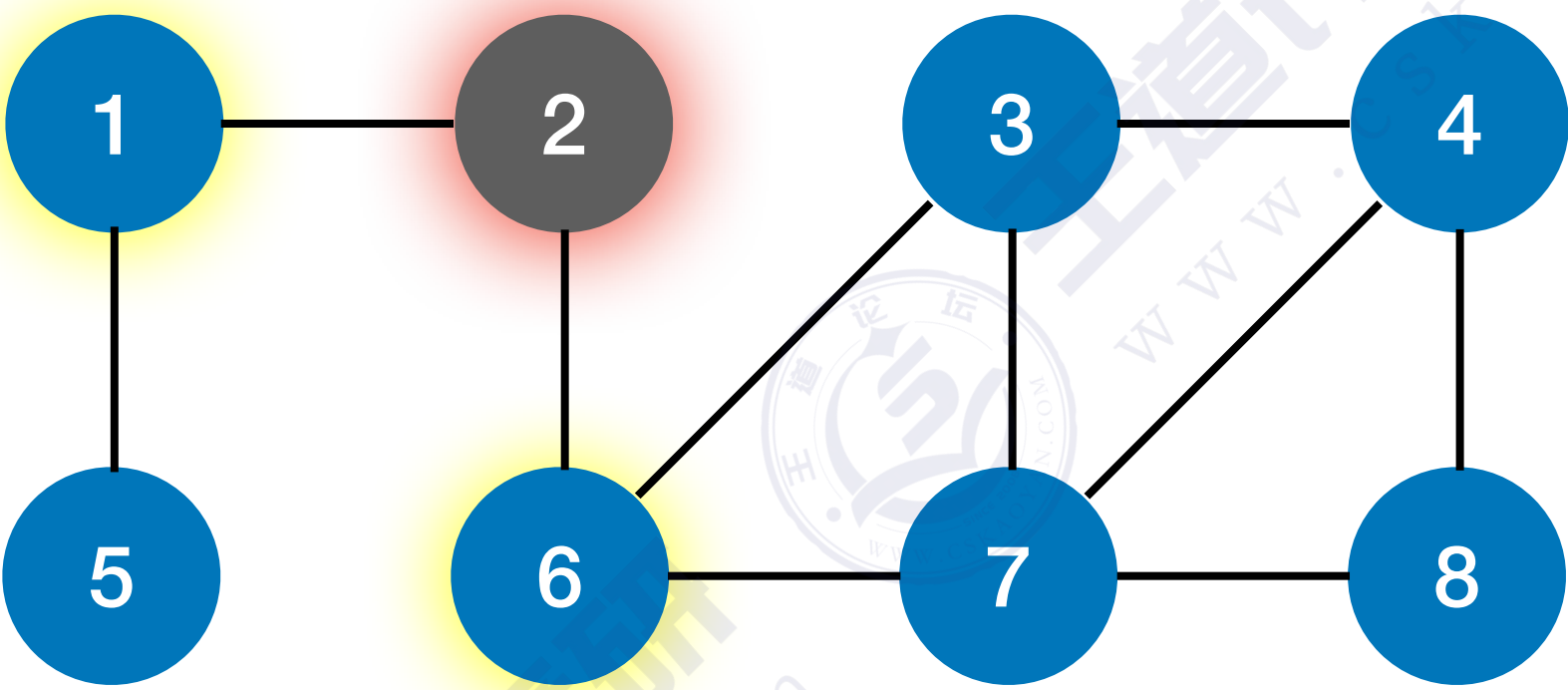


注：无权图可以视为一种特殊的带权图，只是每条边的权值都为1

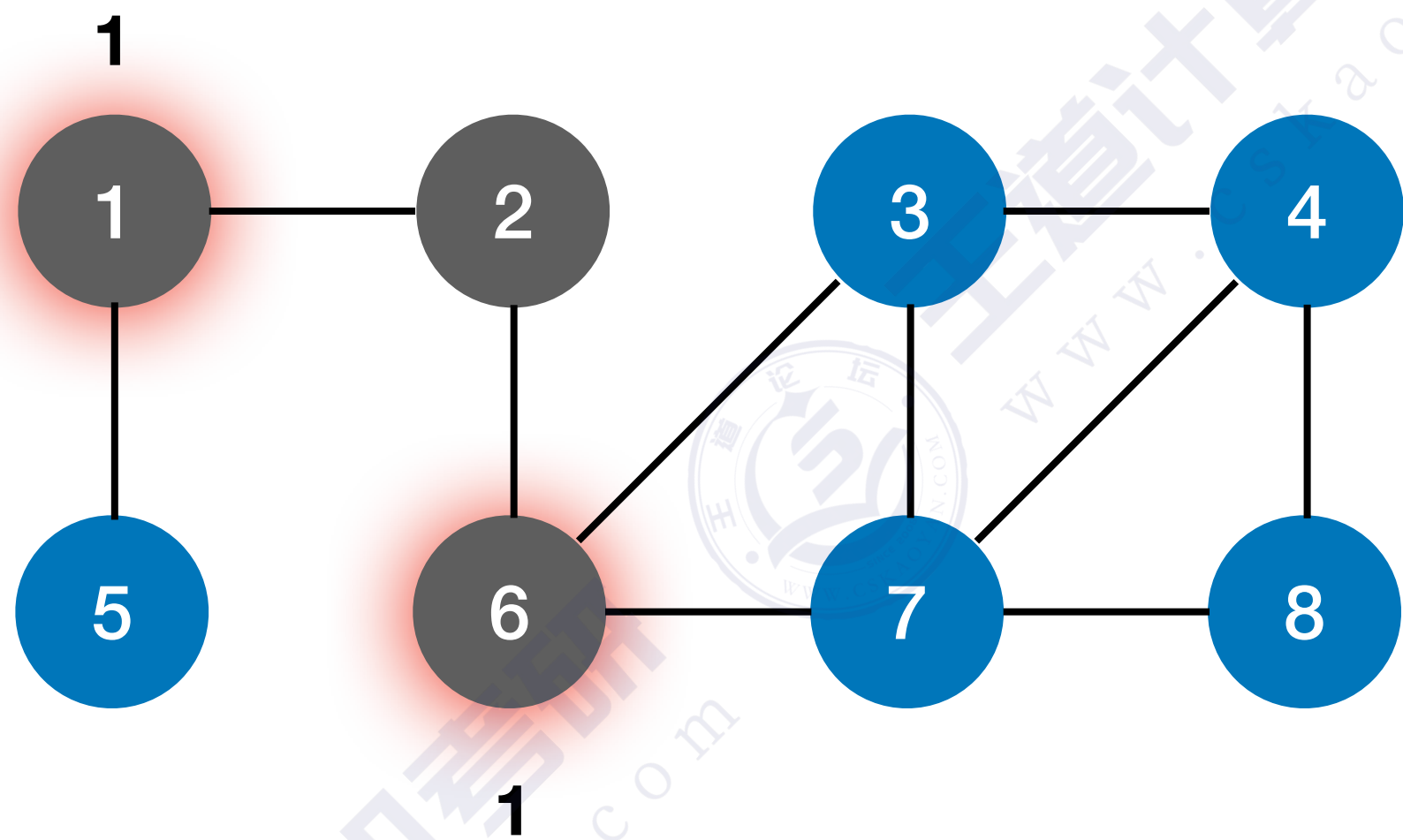
BFS求无权图的单源最短路径



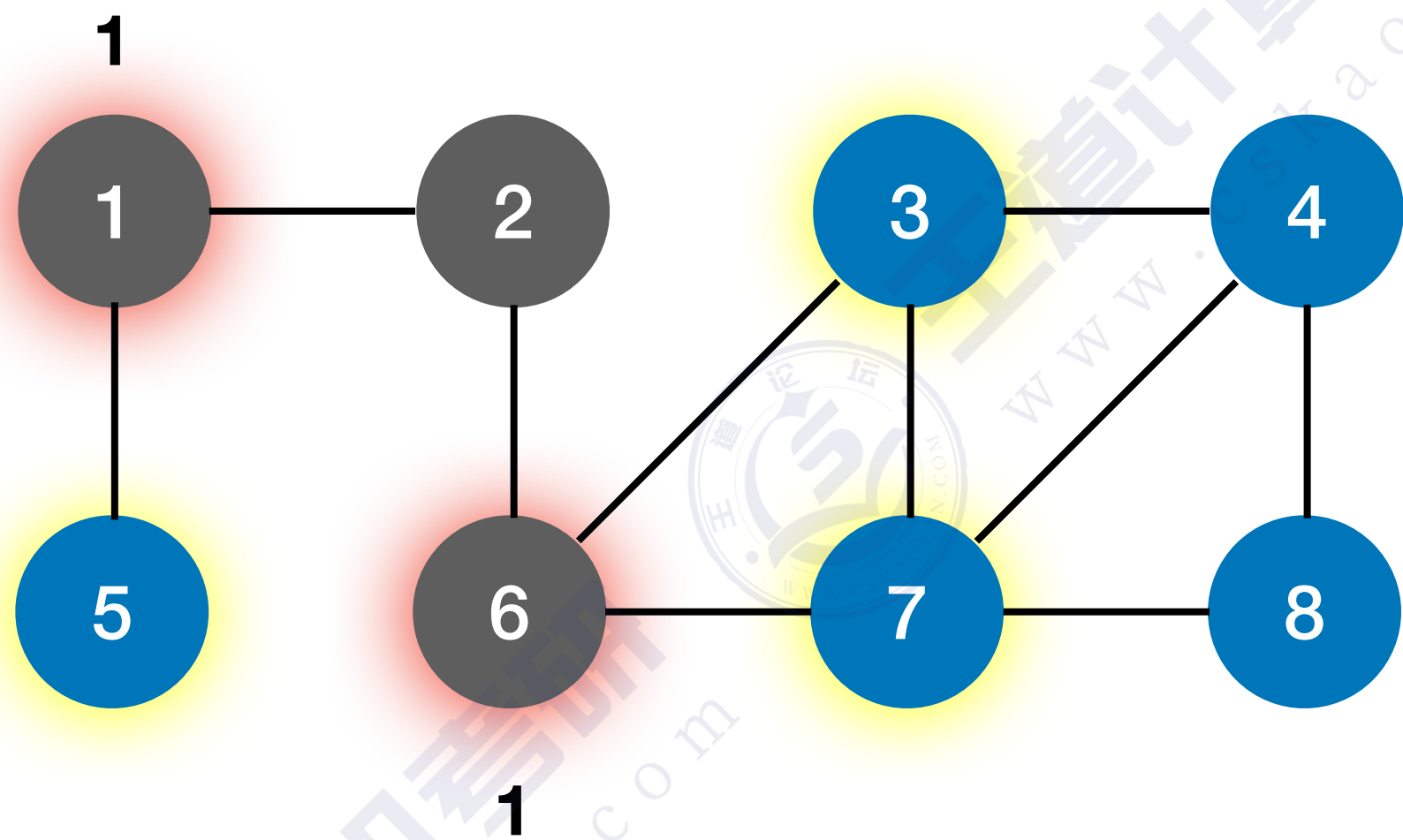
BFS求无权图的单源最短路径



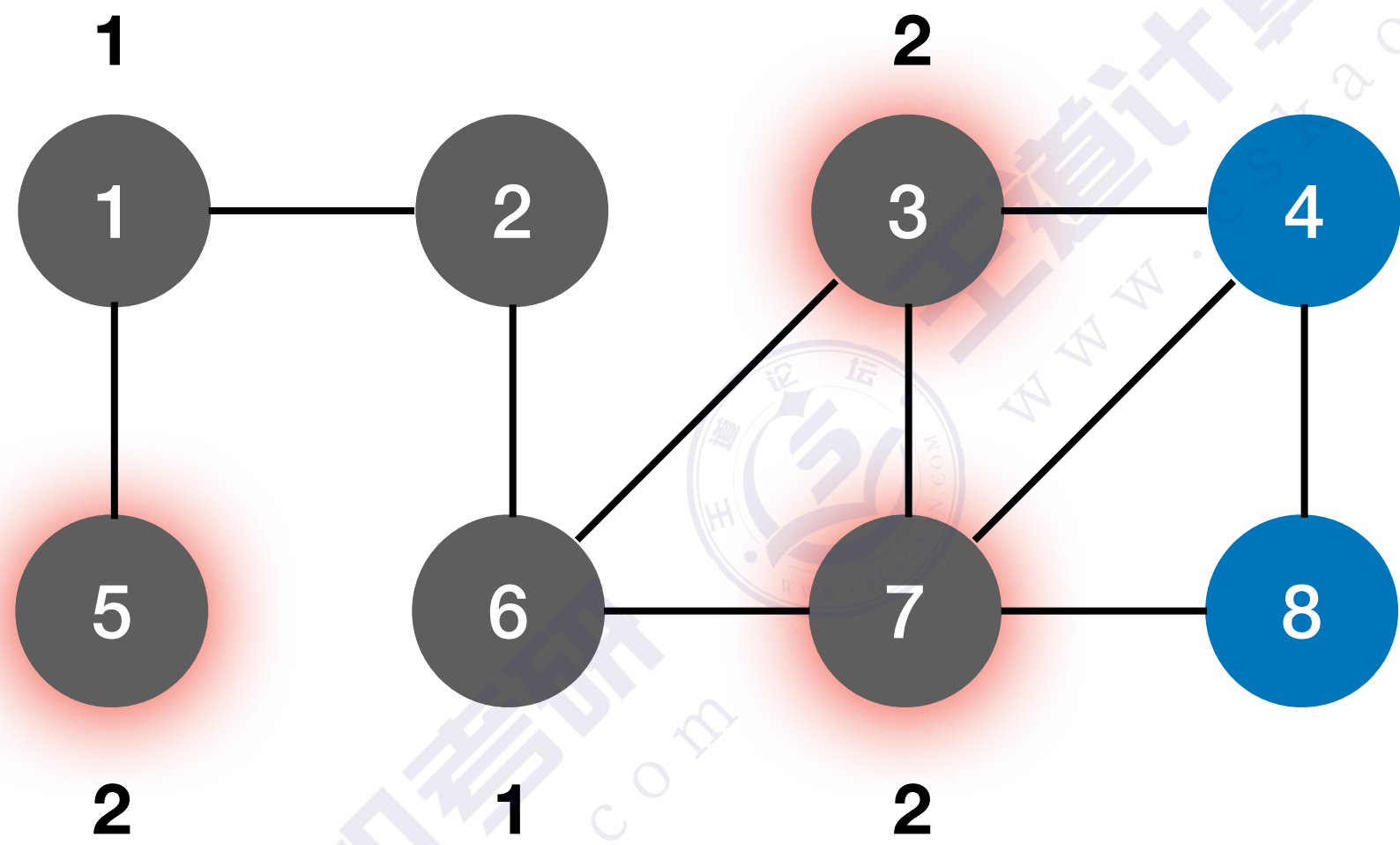
BFS求无权图的单源最短路径



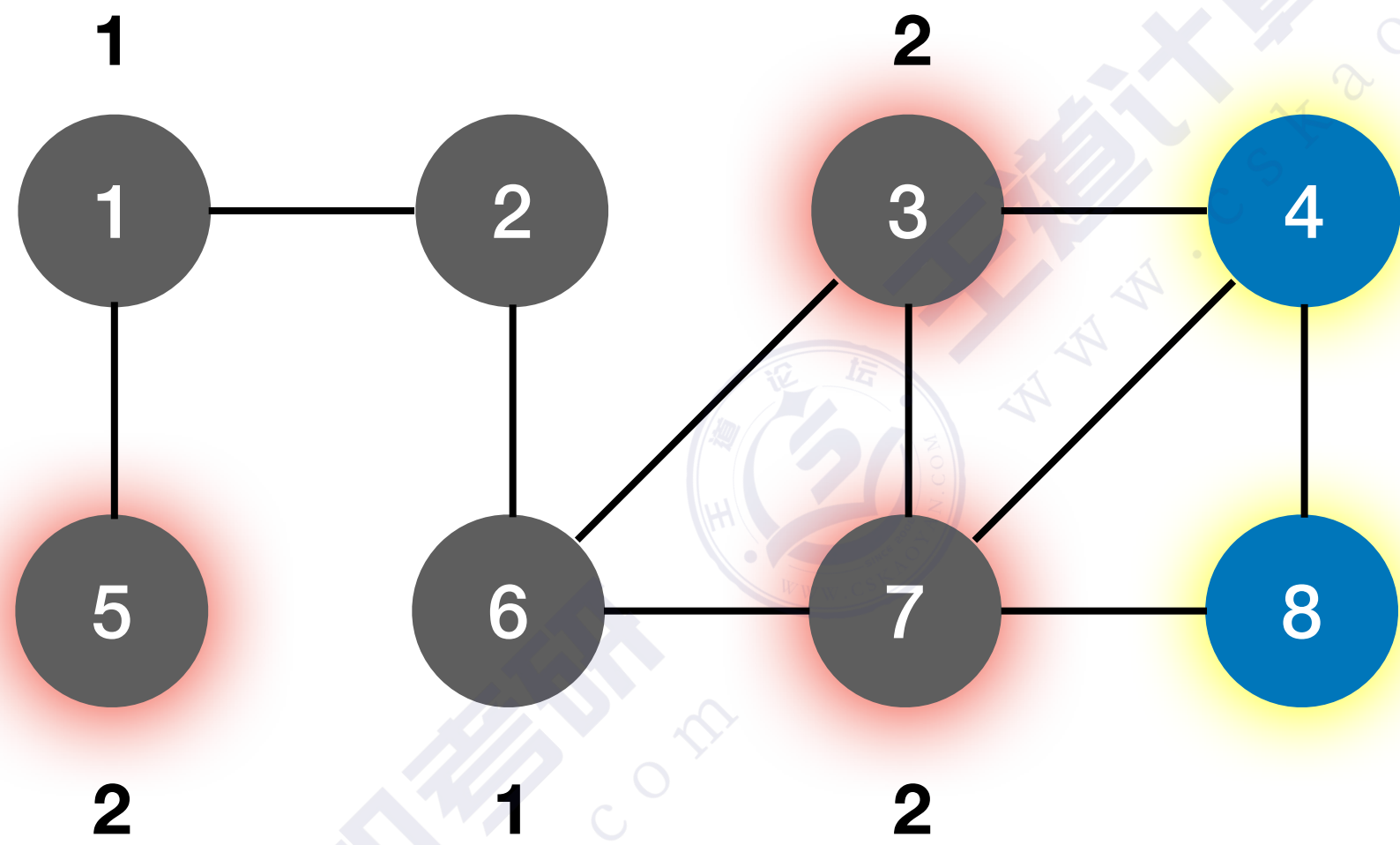
BFS求无权图的单源最短路径



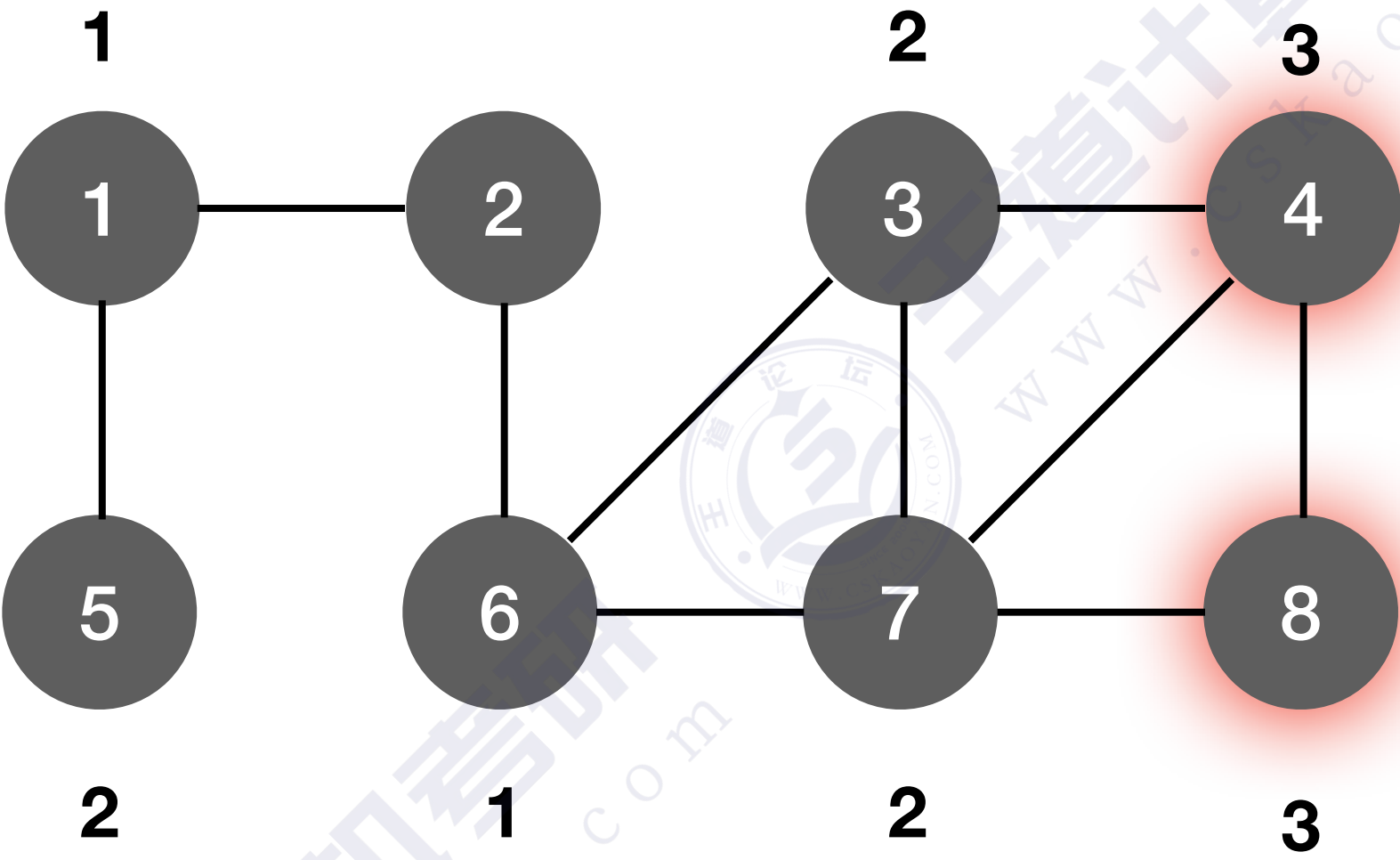
BFS求无权图的单源最短路径



BFS求无权图的单源最短路径

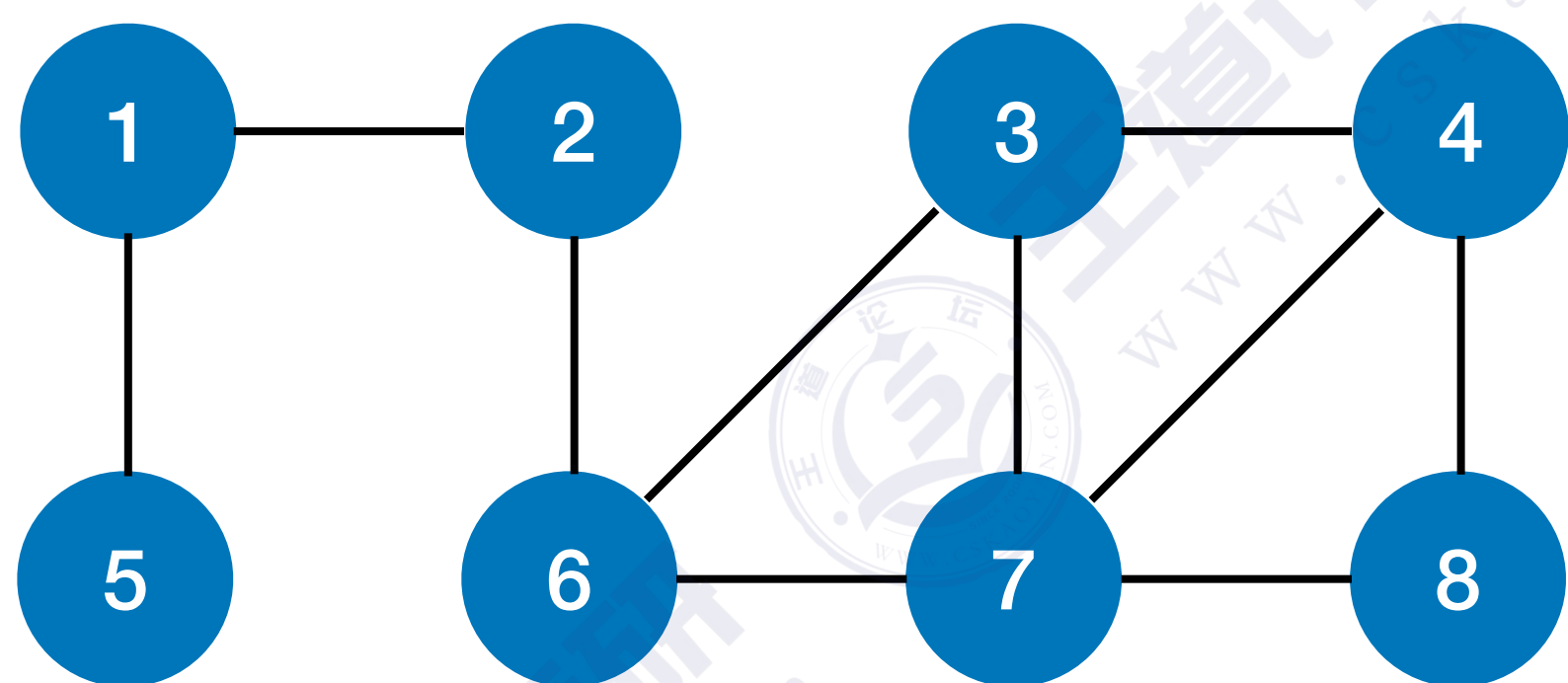


BFS求无权图的单源最短路径



代码实现

初始都为false

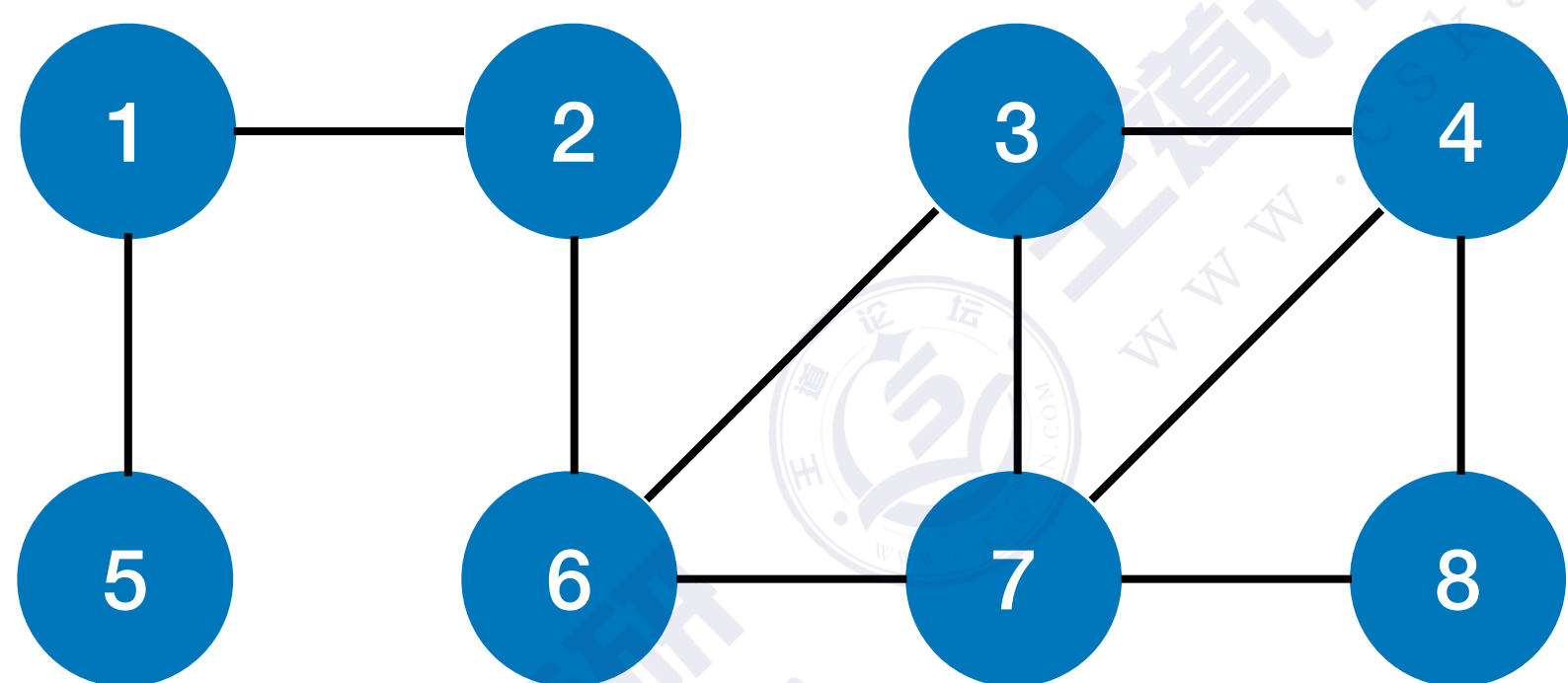


```
bool visited[MAX_VERTEX_NUM]; //访问标记数组

//广度优先遍历
void BFS(Graph G,int v){ //从顶点v出发，广度优先遍历图G
    visit(v); //访问初始顶点v
    visited[v]=TRUE; //对v做已访问标记
    Enqueue(Q,v); //顶点v入队列Q
    while(!isEmpty(Q)){
        Dequeue(Q,v); //顶点v出队列
        for(w=FirstNeighbor(G,v);w>=0;w=NextNeighbor(G,v,w))
            //检测v所有邻接点
            if(!visited[w]){ //w为v的尚未访问的邻接顶点
                visit(w); //访问顶点w
                visited[w]=TRUE; //对w做已访问标记
                Enqueue(Q,w); //顶点w入队列
            } //if
        } //while
    } }
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	false	false	false	false	false	false	false	false

代码实现

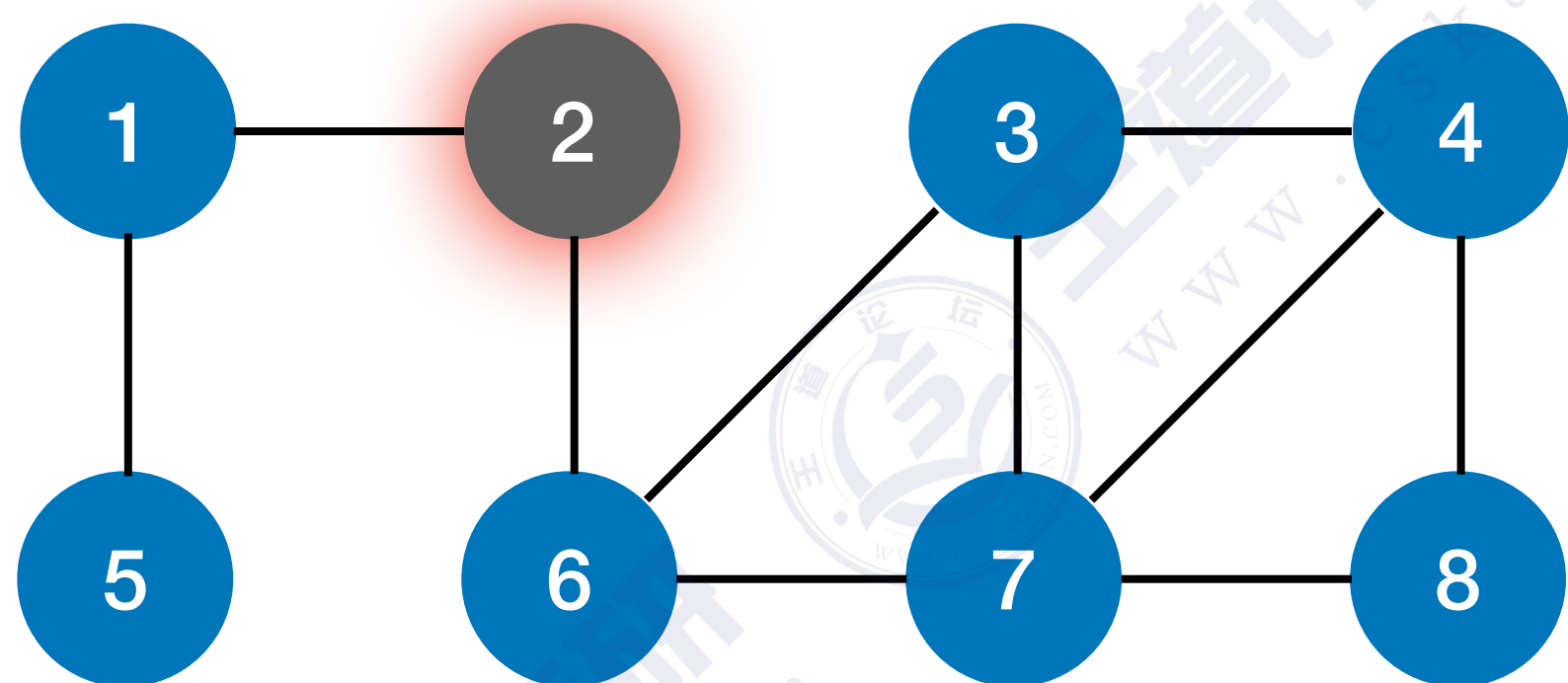


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
path[]	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	false	false	false	false	false	false	false	false

代码实现



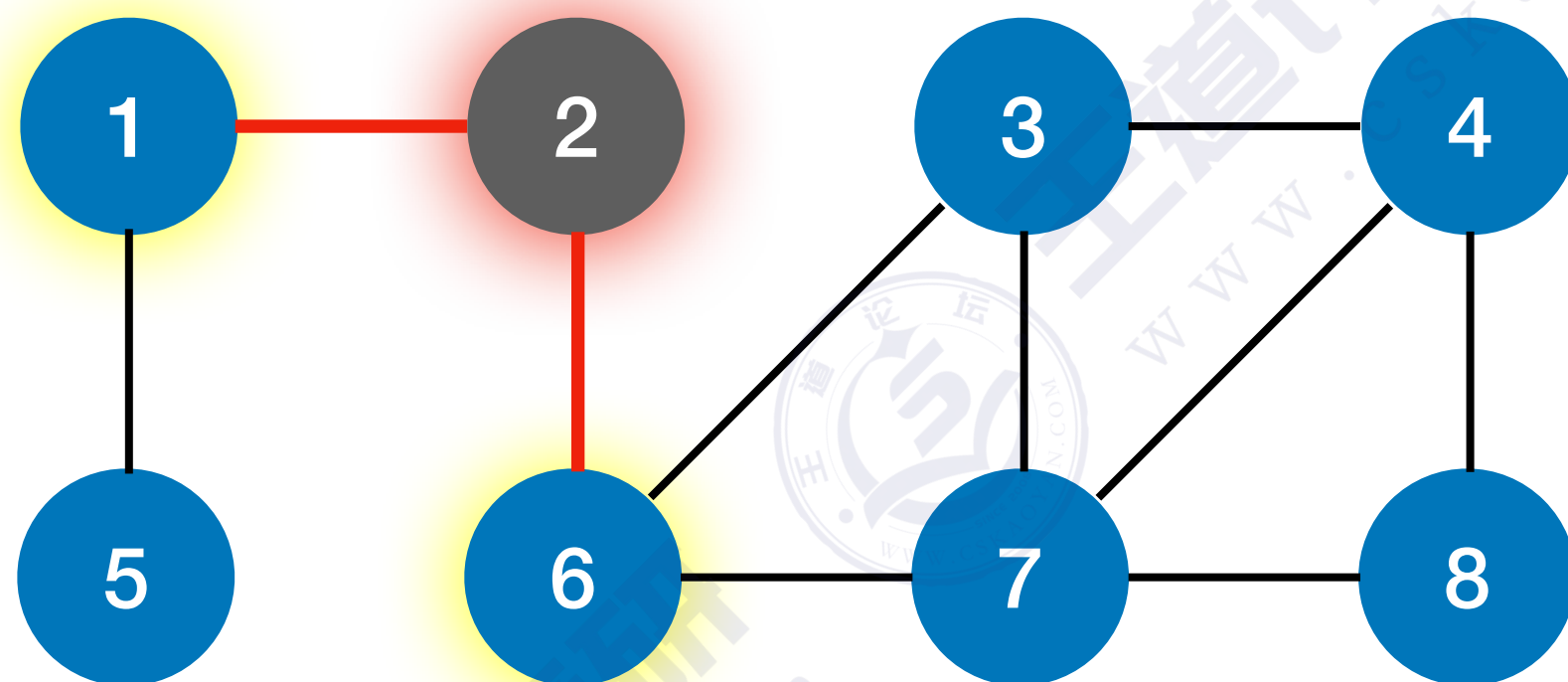
2

	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
path[]	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	false	true	false	false	false	false	false	false

代码实现



	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
path[]	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

```
//求顶点  $u$  到其他顶点的最短路径
```

```
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
```

// $d[i]$ 表示从 u 到 i 结点的最短路径

```
for(i=0;i<G.vexnum;++i){
```

```
d[i]=∞; //初始化路径长度
```

```
path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
```

}

```
d[u]=0;
```

```
visited[u]=TRUE;
```

```
EnQueue(Q,u);
```

```
while(!isEmpty(Q)){
```

DeQueue(Q,u);

```
for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w))
```

```
if(!visited[w]){
```

```
d[w]=d[u]+1;
```

```
path[w]=u;
```

```
visited[w]=TRUE;
```

```
EnQueue(Q,w);
```

```
}//if
```

```
//while
```

 $\}$

//BFS算法主过程

```
//队头元素u出队
```

//w为u的尚未访问的邻接顶点

```
// 路径长度加1
```

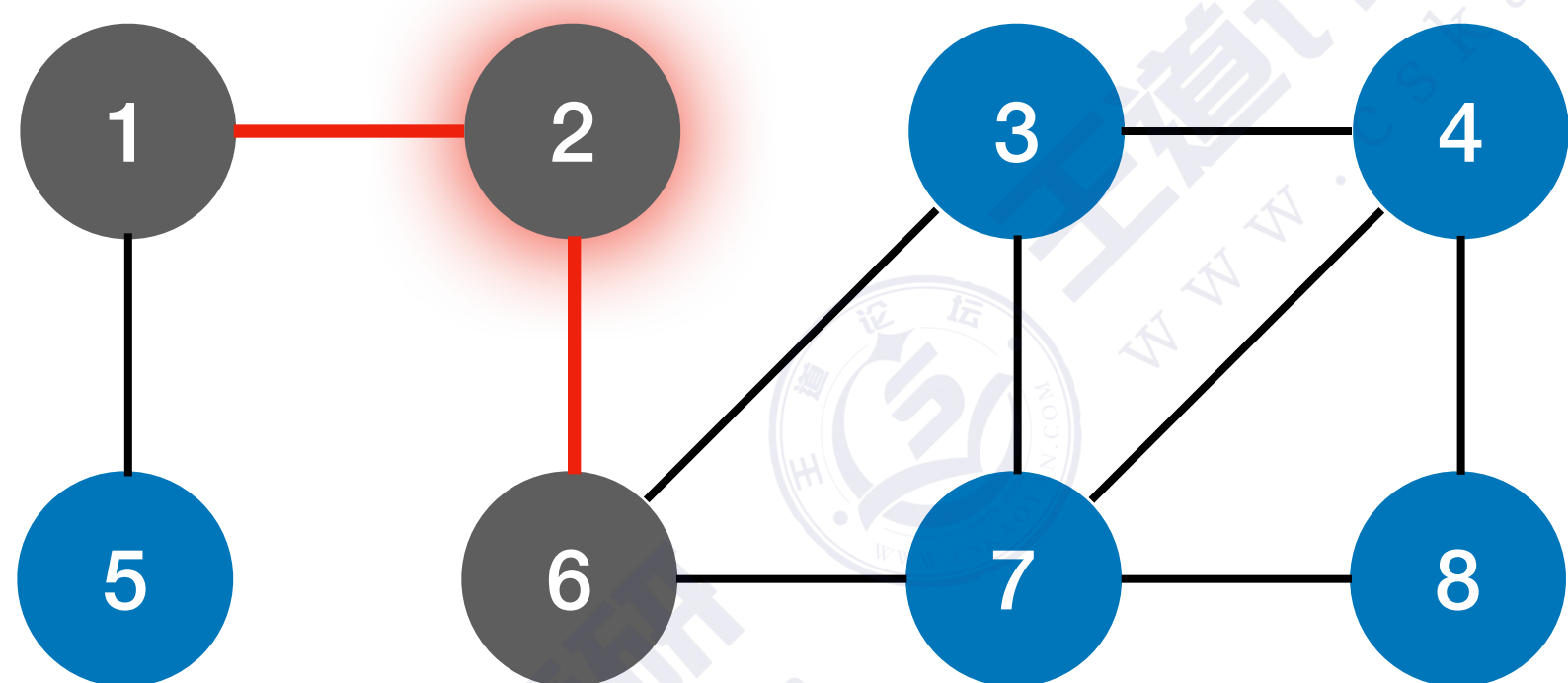
```
//最短路径应从u到w
```

```
//设已访问标记
```

```
//顶点w入队
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	false	true	false	false	false	false	false	false

代码实现

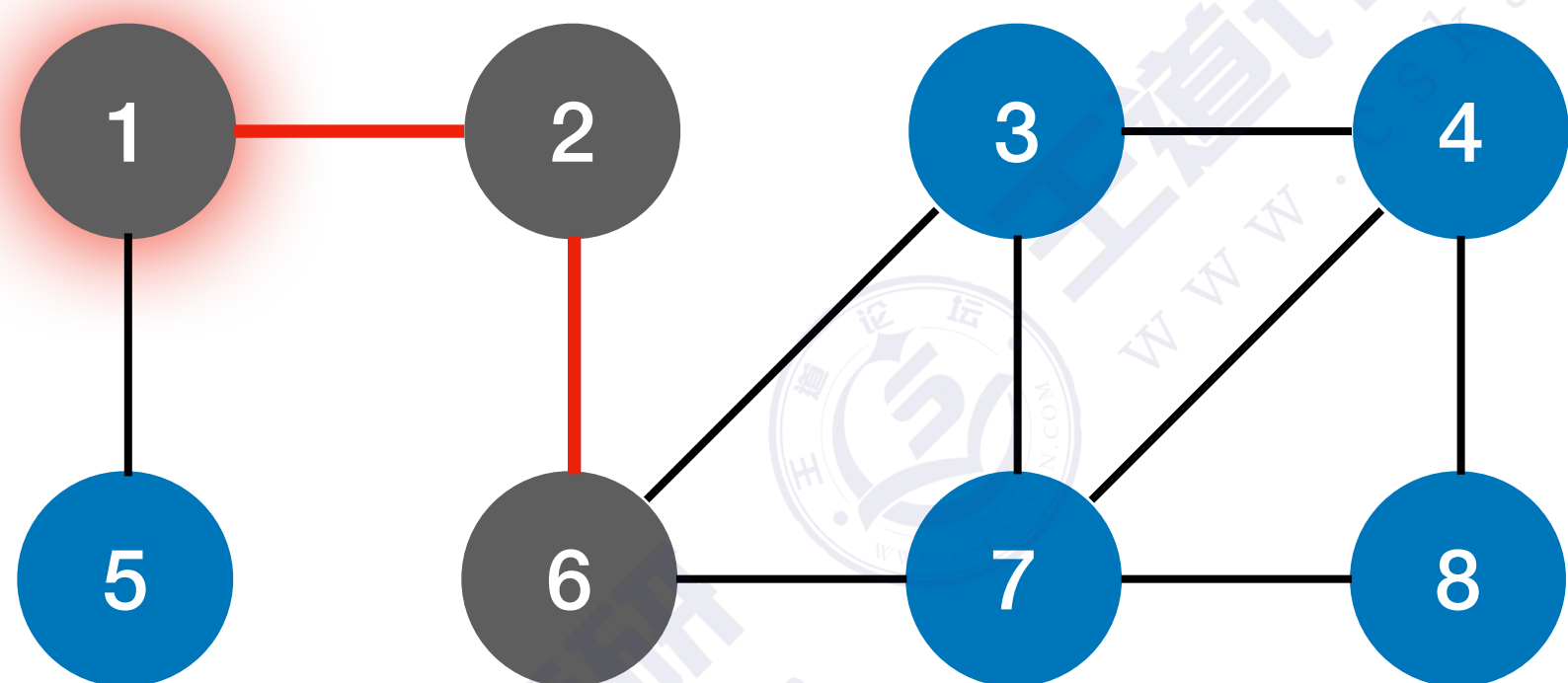


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	∞	∞	∞	1	∞	∞
path[]	2	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	false	false	false	true	false	false

代码实现

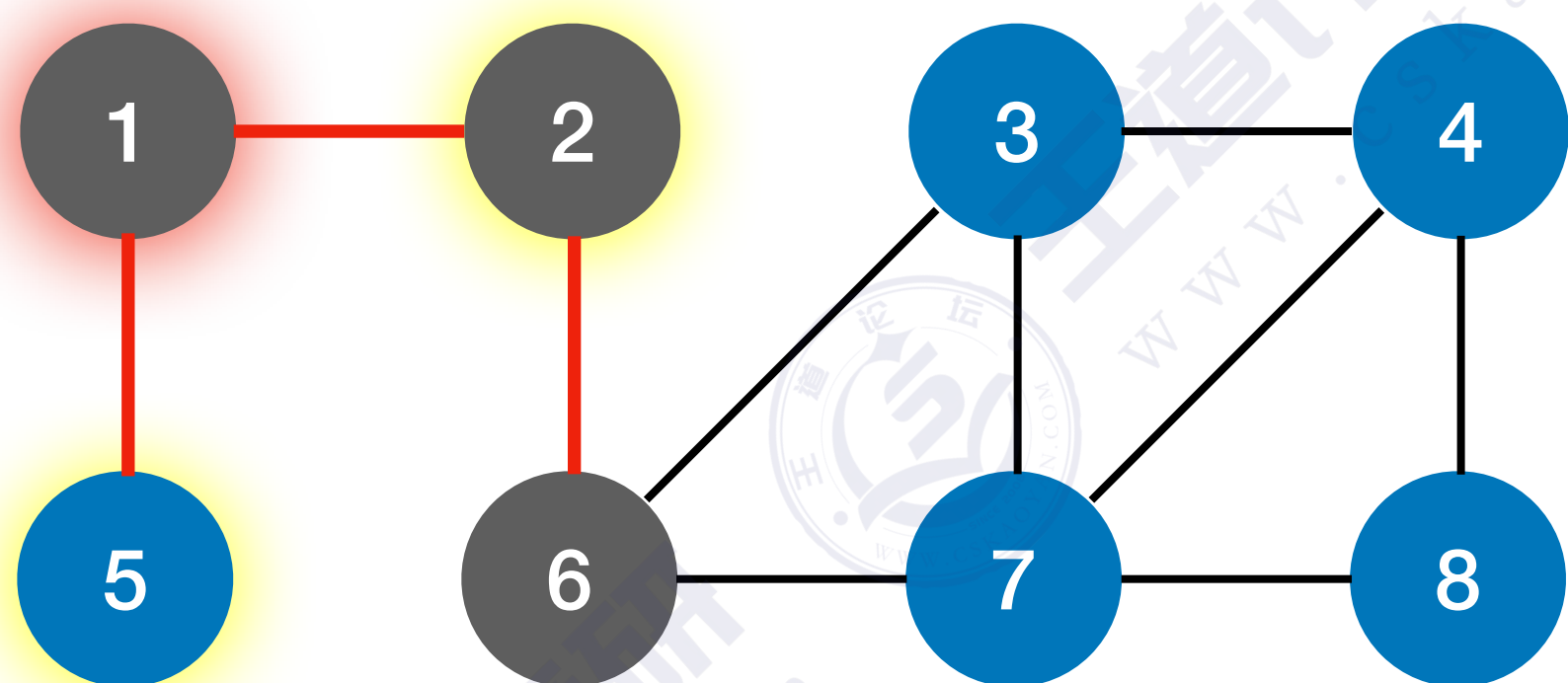


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	∞	∞	∞	1	∞	∞
path[]	2	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	false	false	false	true	false	false

代码实现

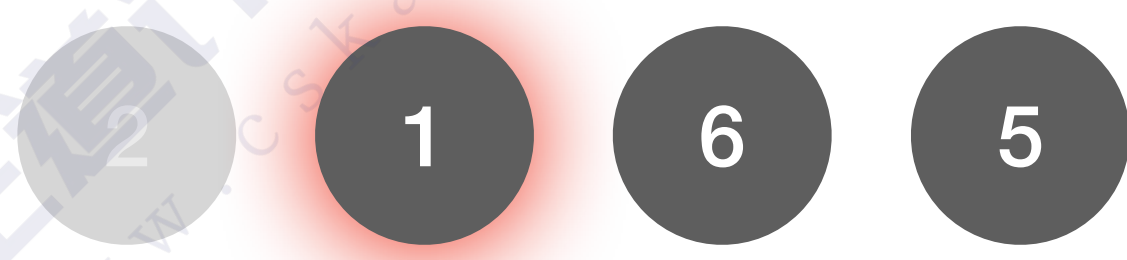
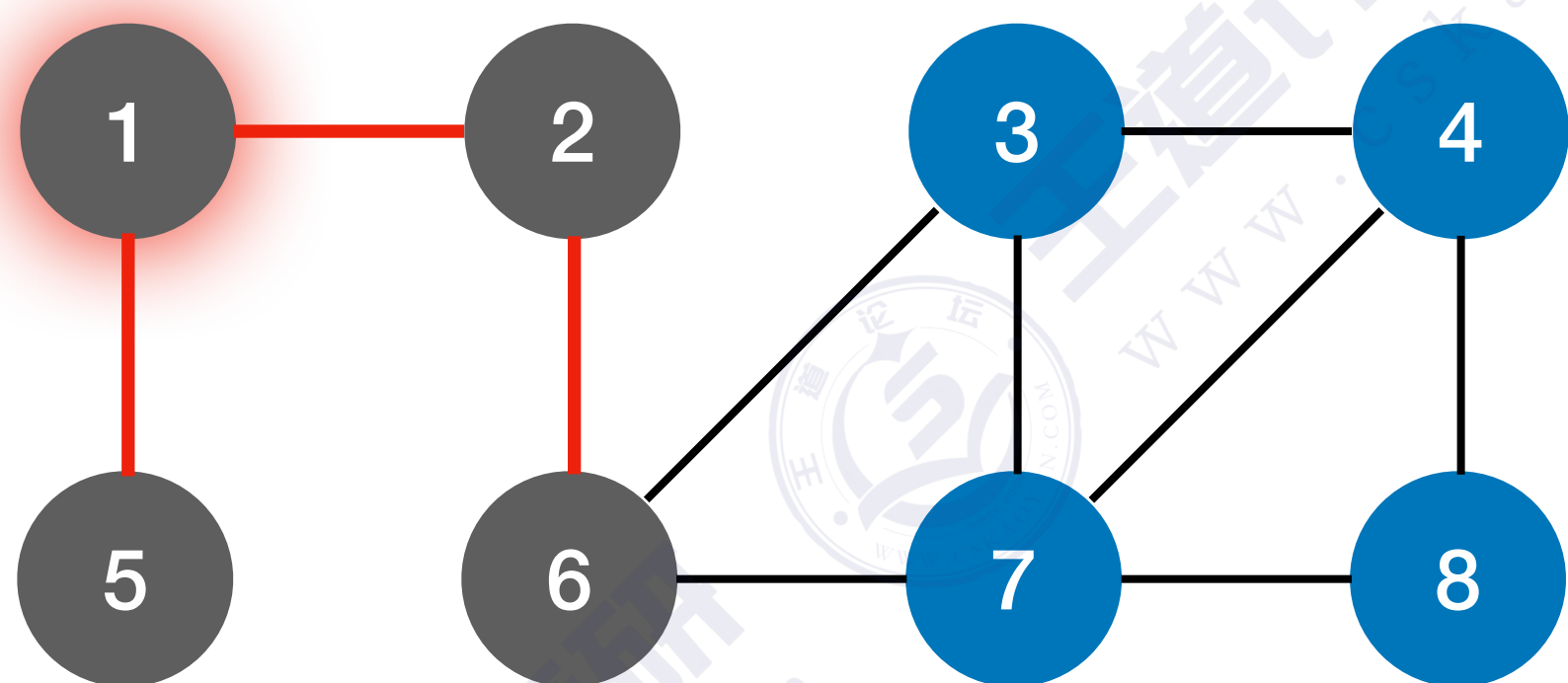


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	∞	∞	∞	1	∞	∞
path[]	2	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	false	false	false	true	false	false

代码实现

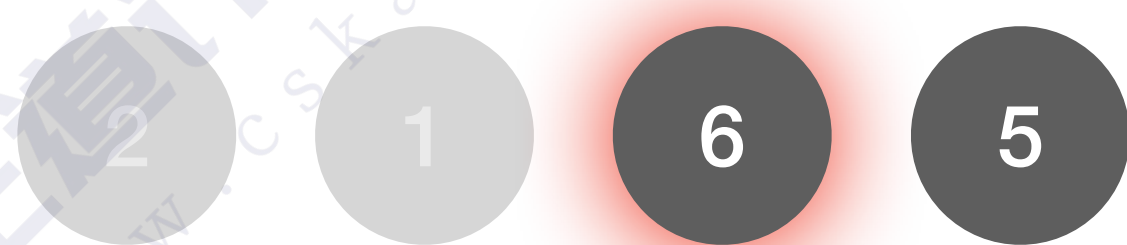
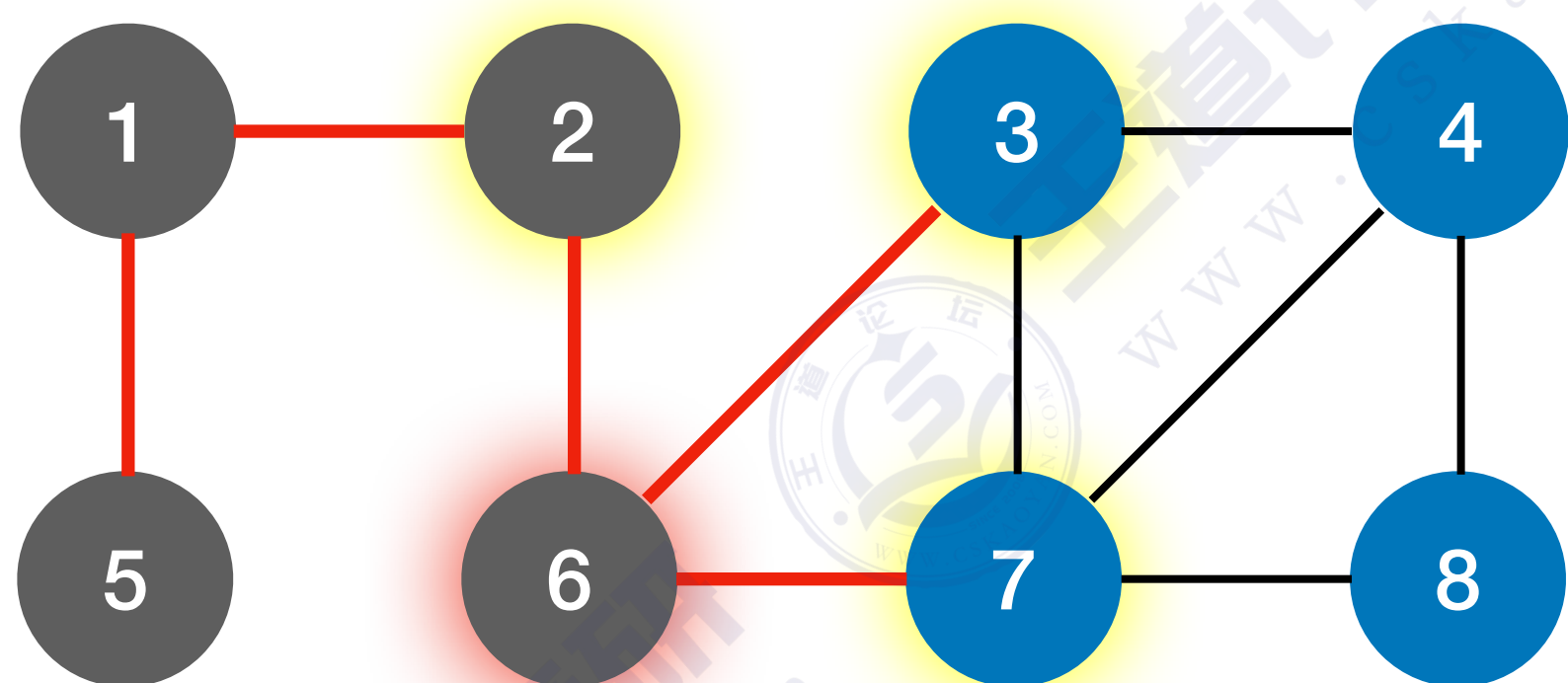


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	∞	∞	2	1	∞	∞
path[]	2	-1	-1	-1	1	2	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	false	false	true	true	false	false

代码实现

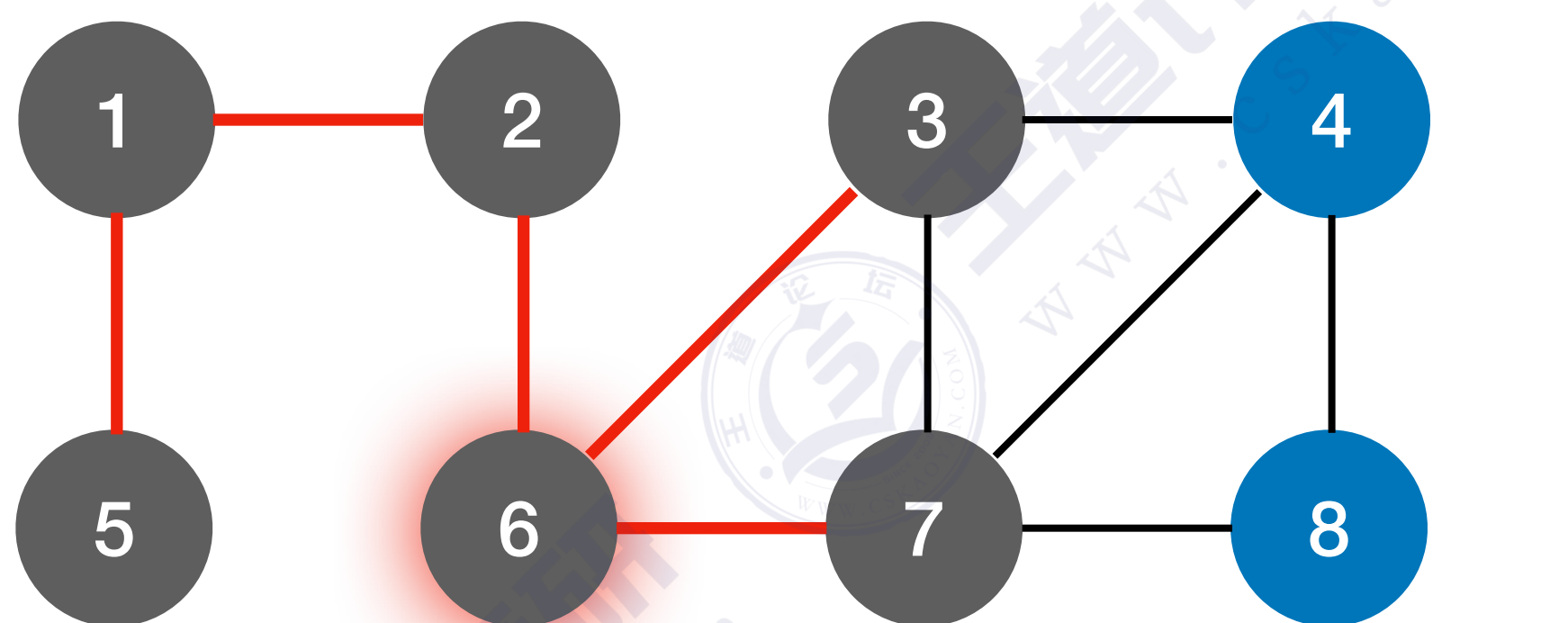


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	∞	∞	2	1	∞	∞
path[]	2	-1	-1	-1	1	2	-1	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	false	false	true	true	false	false

代码实现

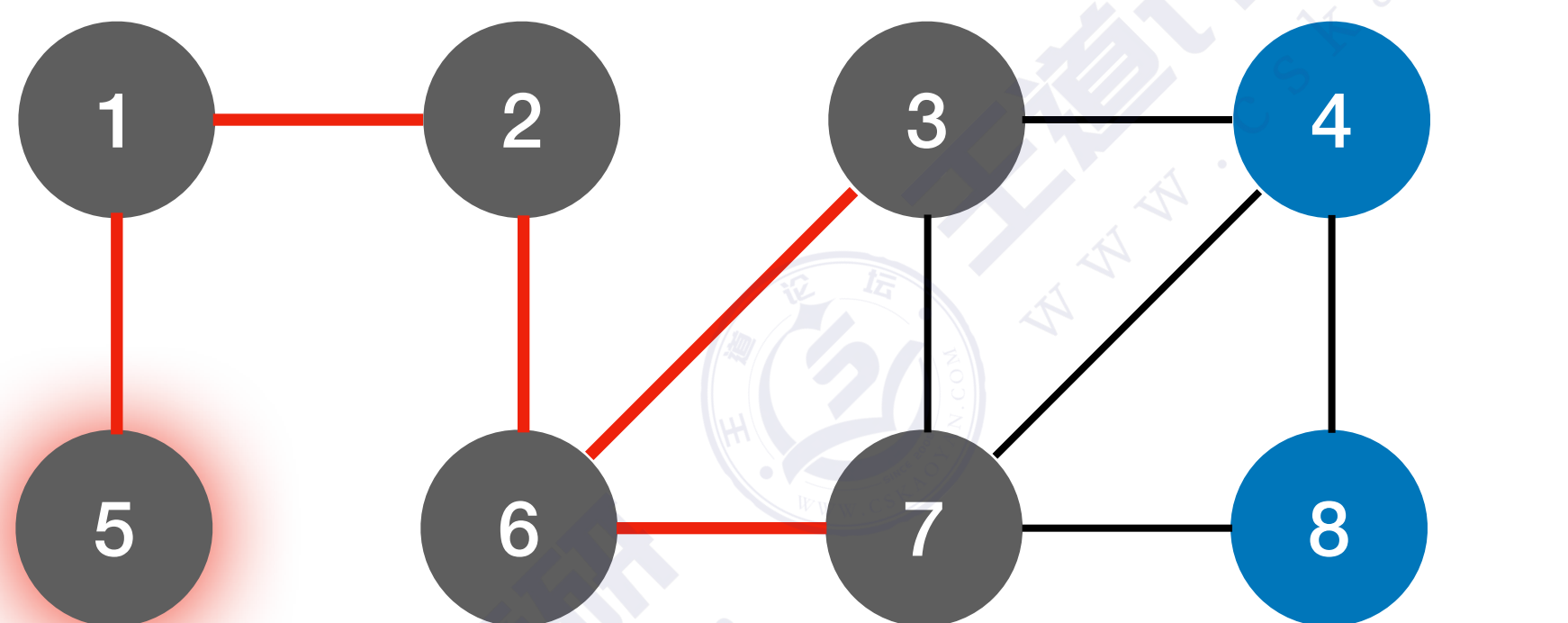


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	∞	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	-1	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	false	true	true	true	false

代码实现

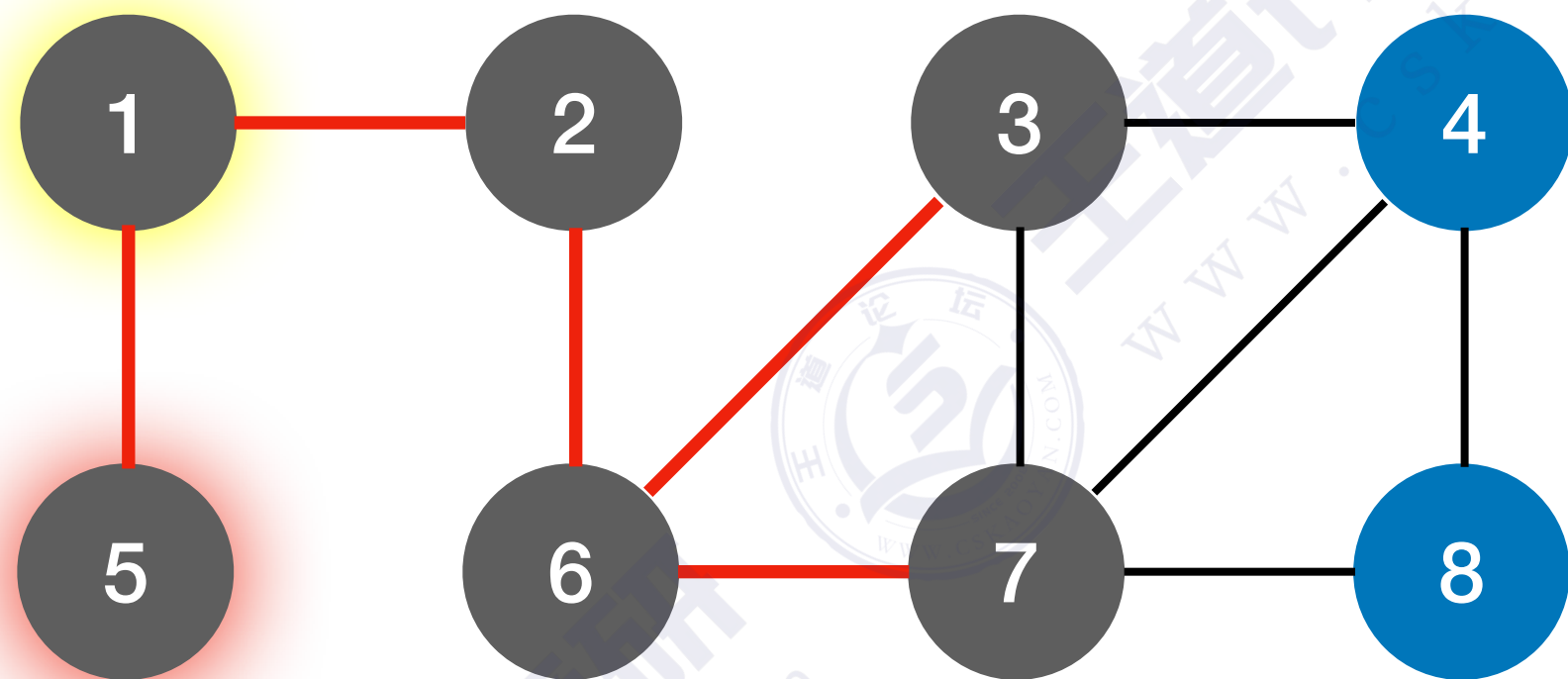


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	∞	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	-1	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	false	true	true	true	false

代码实现



	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	∞	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	-1	1	2	6	-1

//求顶点 u 到其他顶点的最短路径

```
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
```

// $d[i]$ 表示从 u 到 i 结点的最短路径

```
for(i=0;i<G.vexnum;++i){
```

```
d[i]=∞; //初始化路径长度
```

```
path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
```

}

```
d[u]=0;
```

```
visited[u]=TRUE;
```

```
EnQueue(Q,u);
```

```
while(!isEmpty(Q)){
```

DeQueue(Q,u);

```
for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w))
```

```
if (!visited[w]) {
```

```
d[w]=d[u]+1;
```

```
path[w]=u;
```

```
visited[w]=TRUE;
```

```
EnQueue(Q,w);
```

```
    } // if
```

```
}//while
```

$$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

//BFS算法主过程

```
//队头元素u出队
```

//w为u的尚未访问的邻接顶点

```
//路径长度加1
```

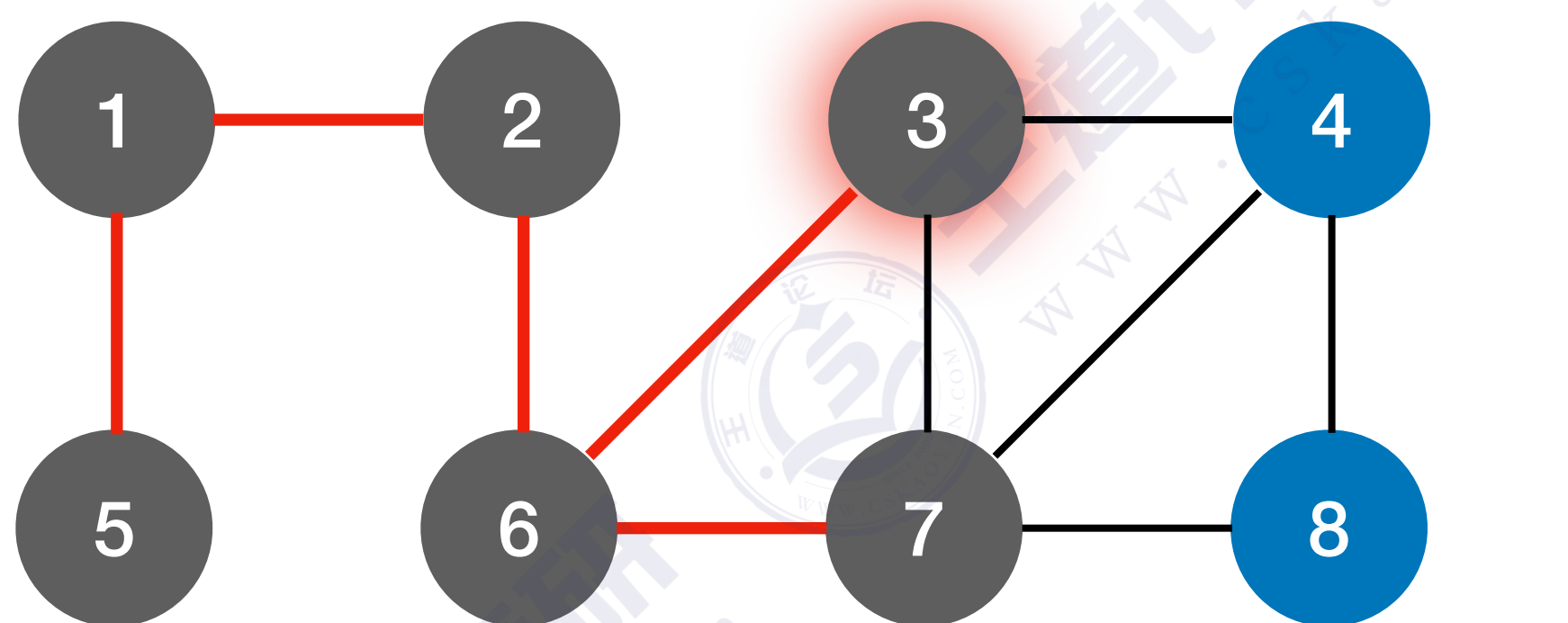
```
//最短路径应从u到w
```

```
//设已访问标记
```

```
//顶点w入队
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	false	true	true	true	false

代码实现

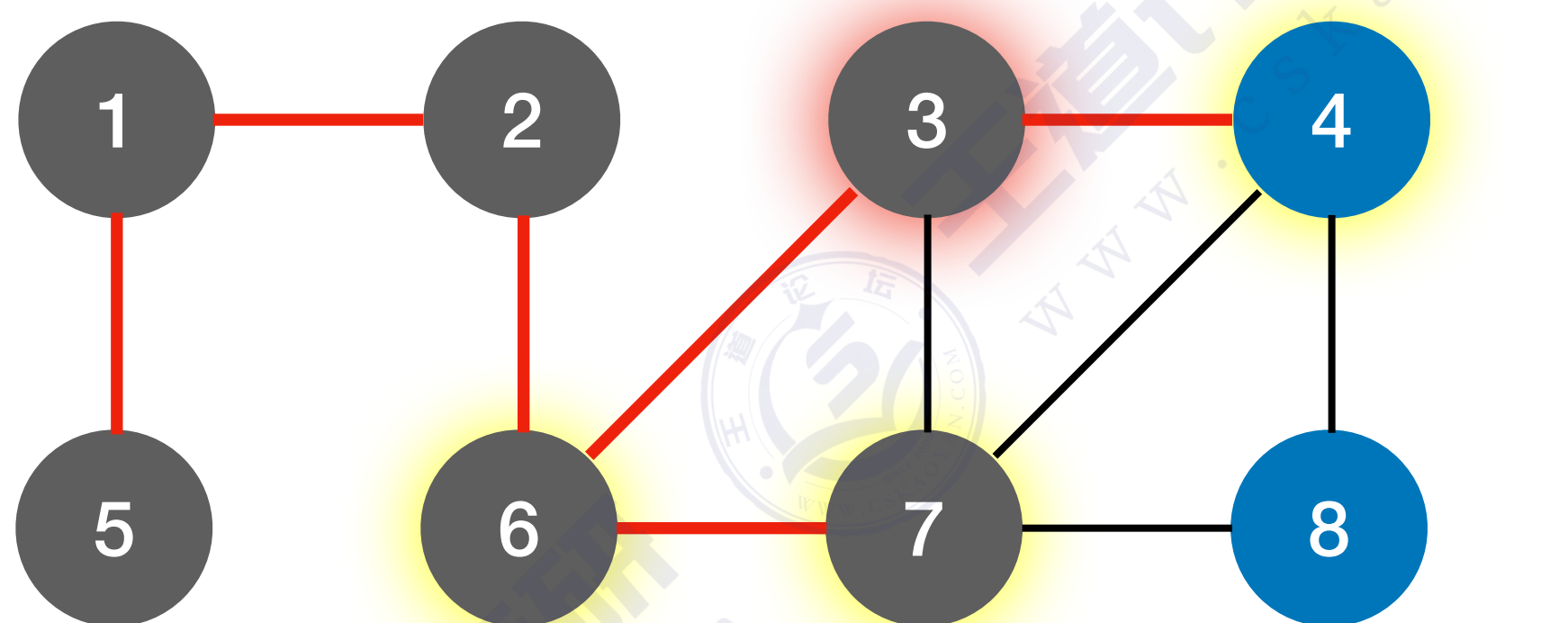


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	∞	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	-1	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	false	true	true	true	false

代码实现

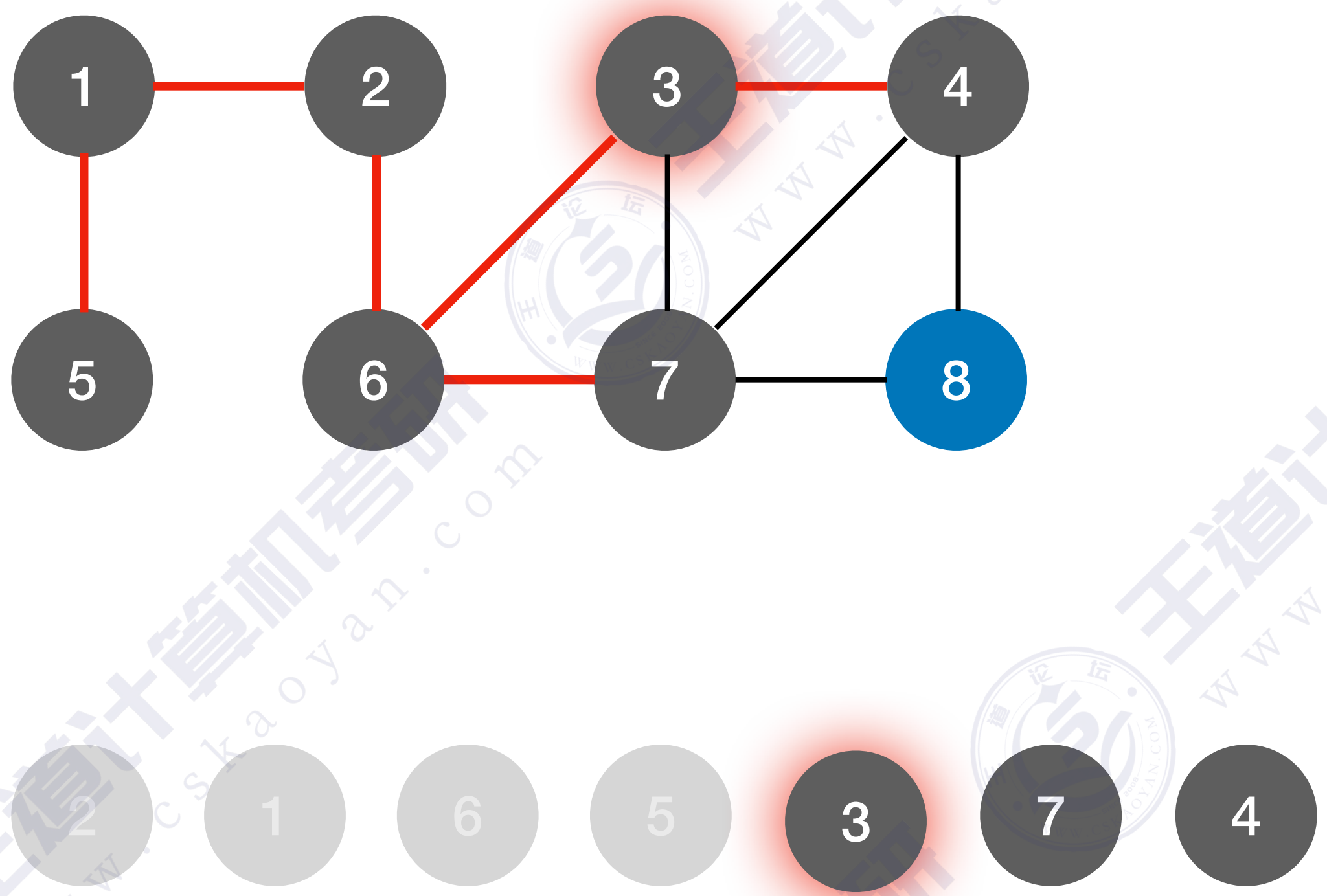


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	∞	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	-1	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	false	true	true	true	false

代码实现

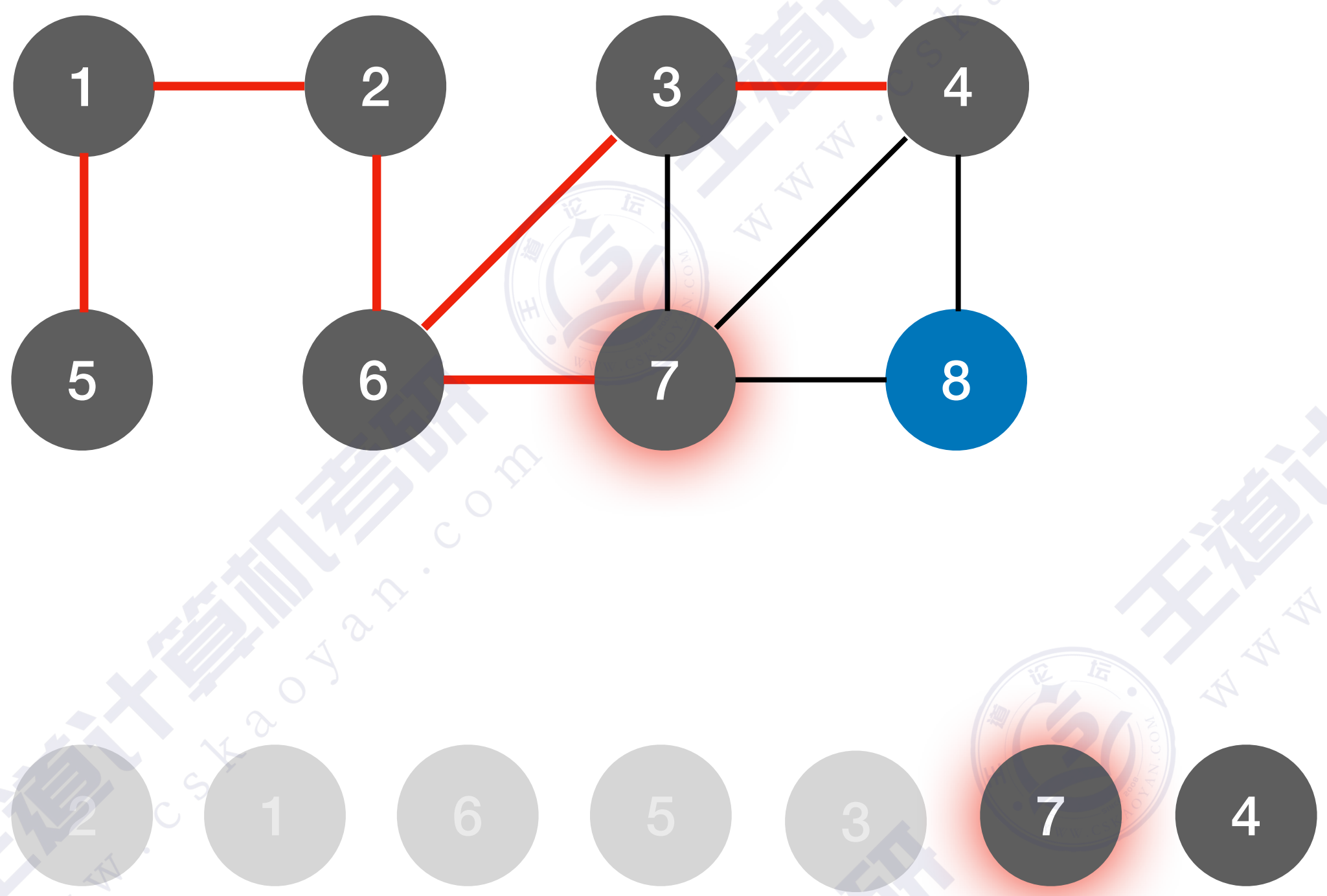


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	false

代码实现

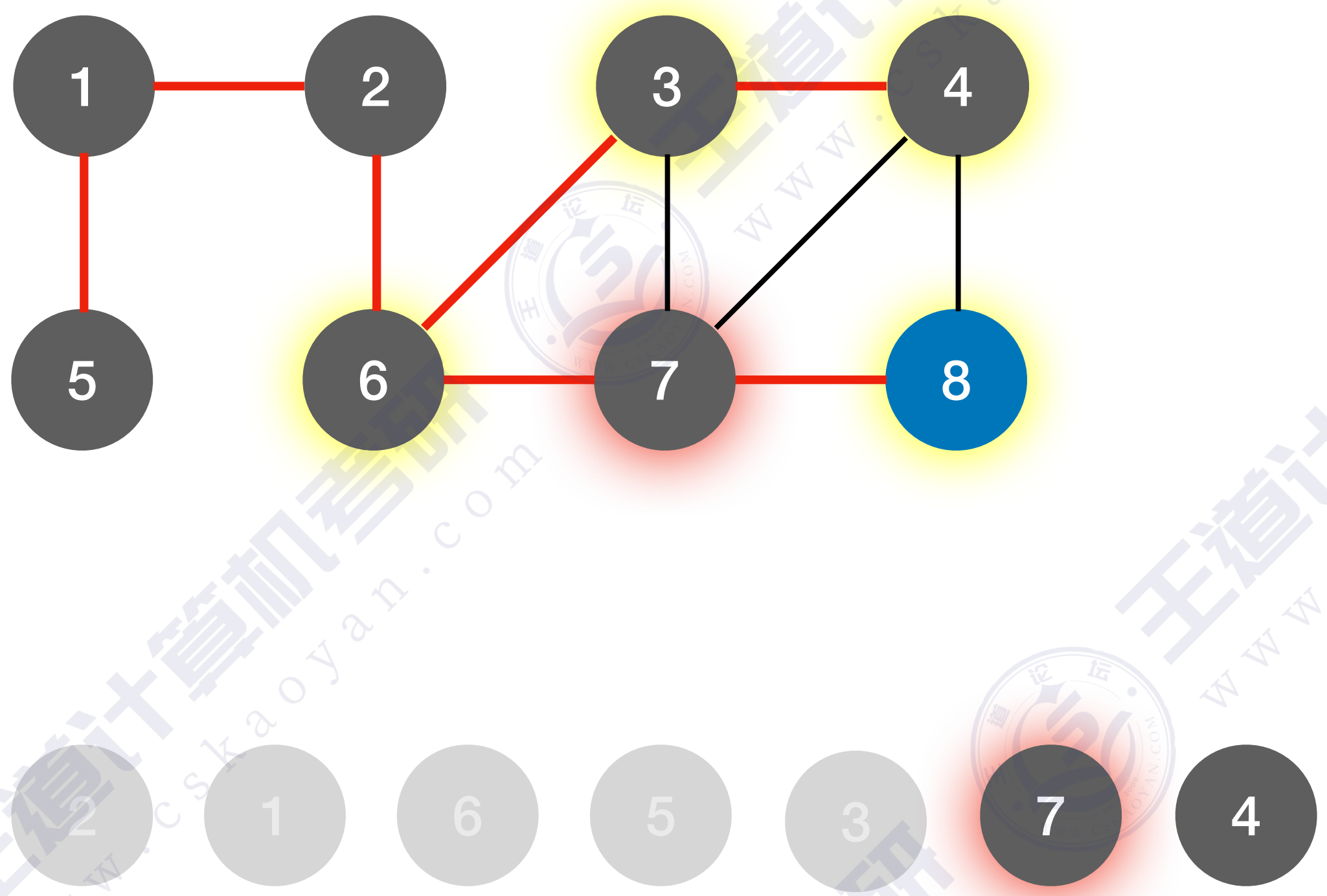


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	false

代码实现

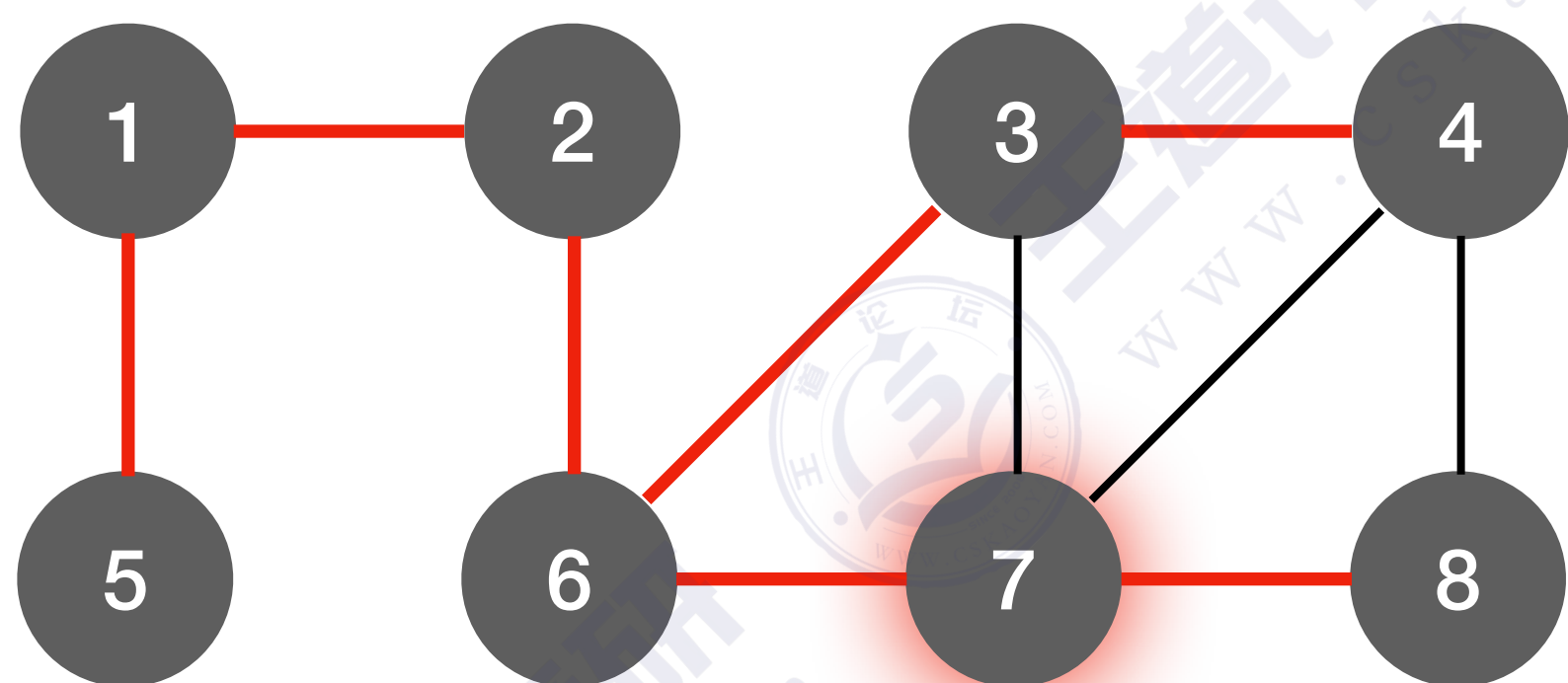


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	∞
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	-1

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	false

代码实现

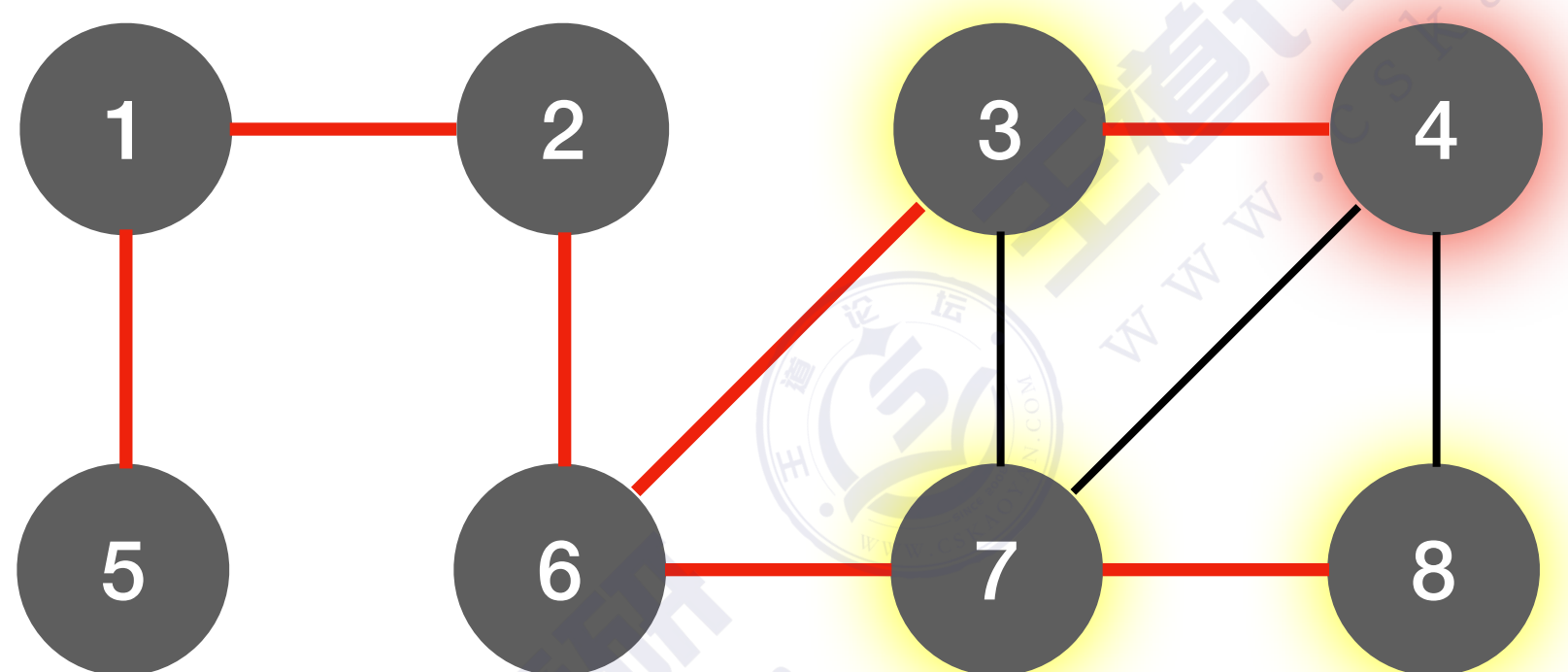


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	3
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	7

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	true

代码实现

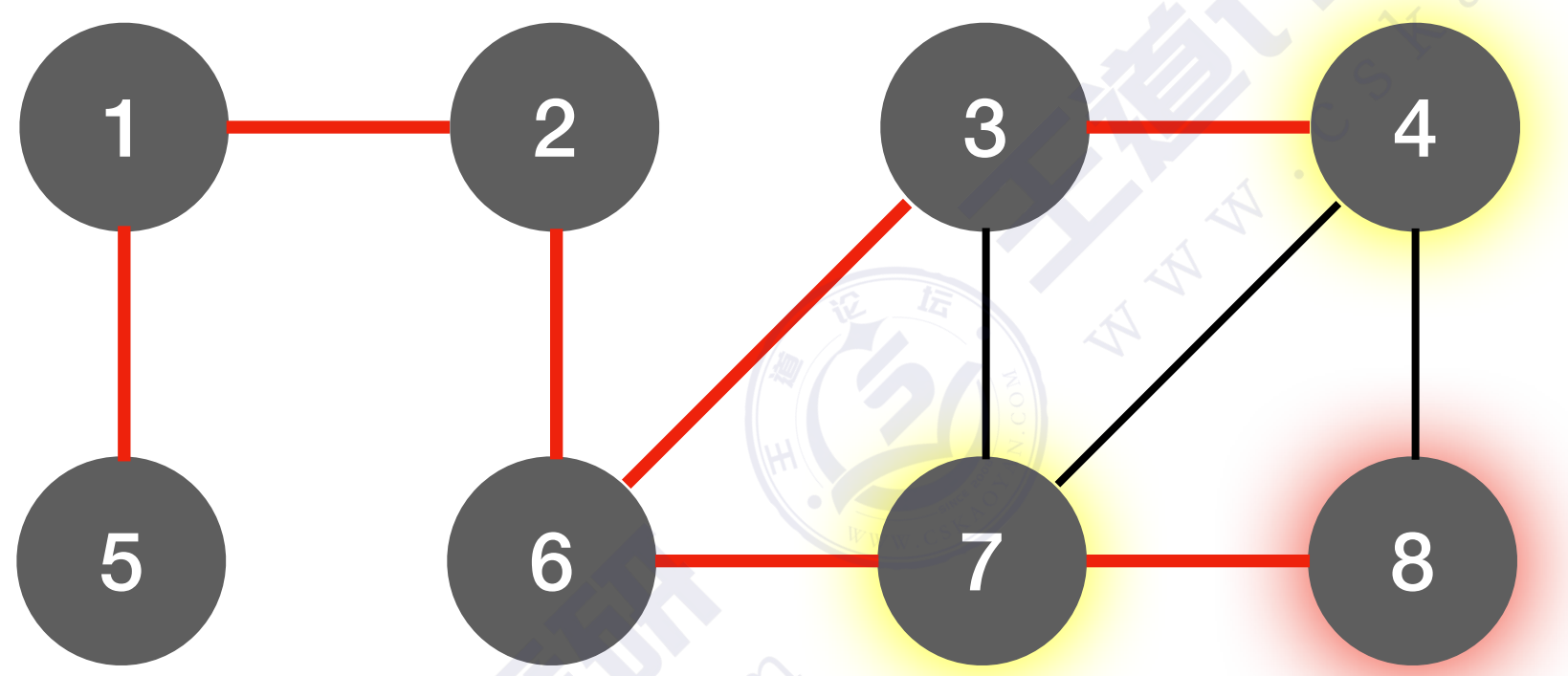


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	3
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	7

```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	true

代码实现

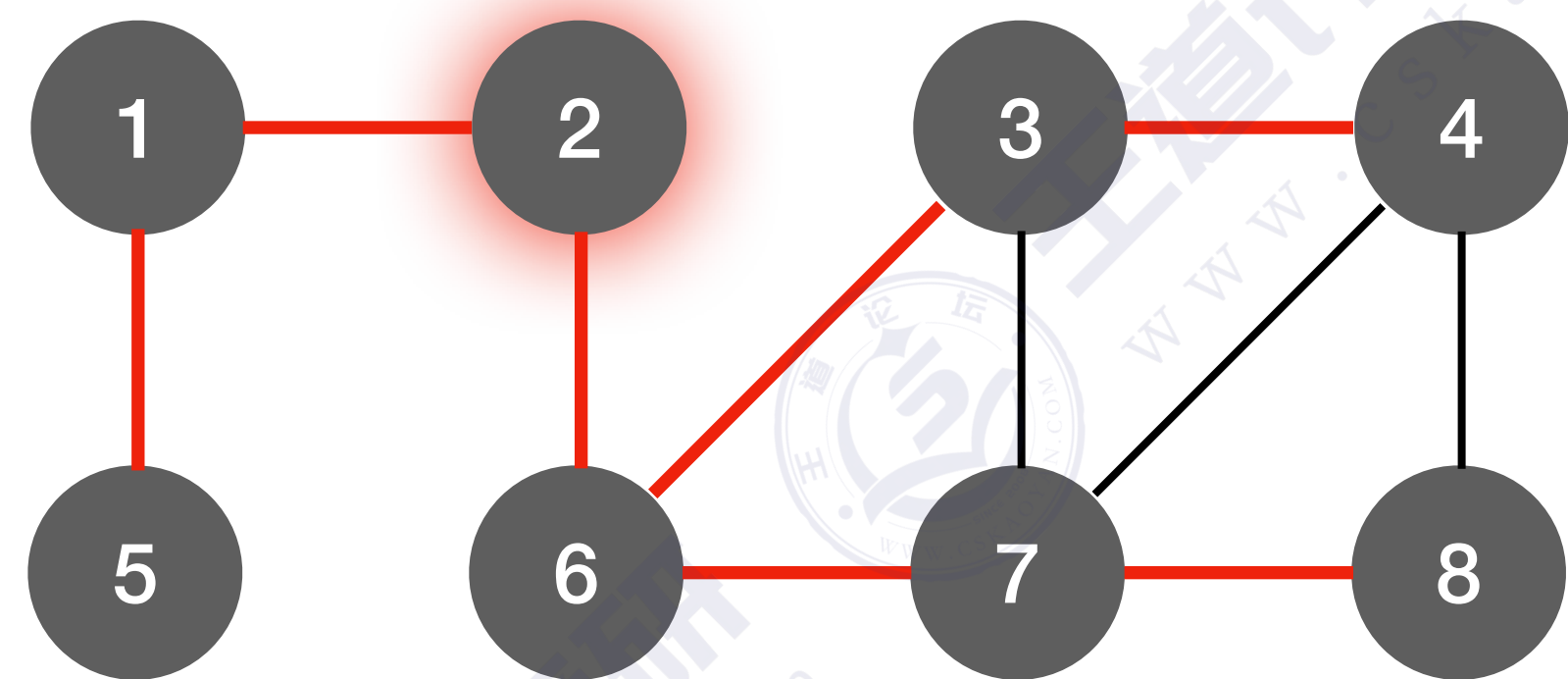


	1	2	3	4	5	6	7	8
d[]	1	0	2	3	2	1	2	3
path[]	2	-1	6	3	1	2	6	7

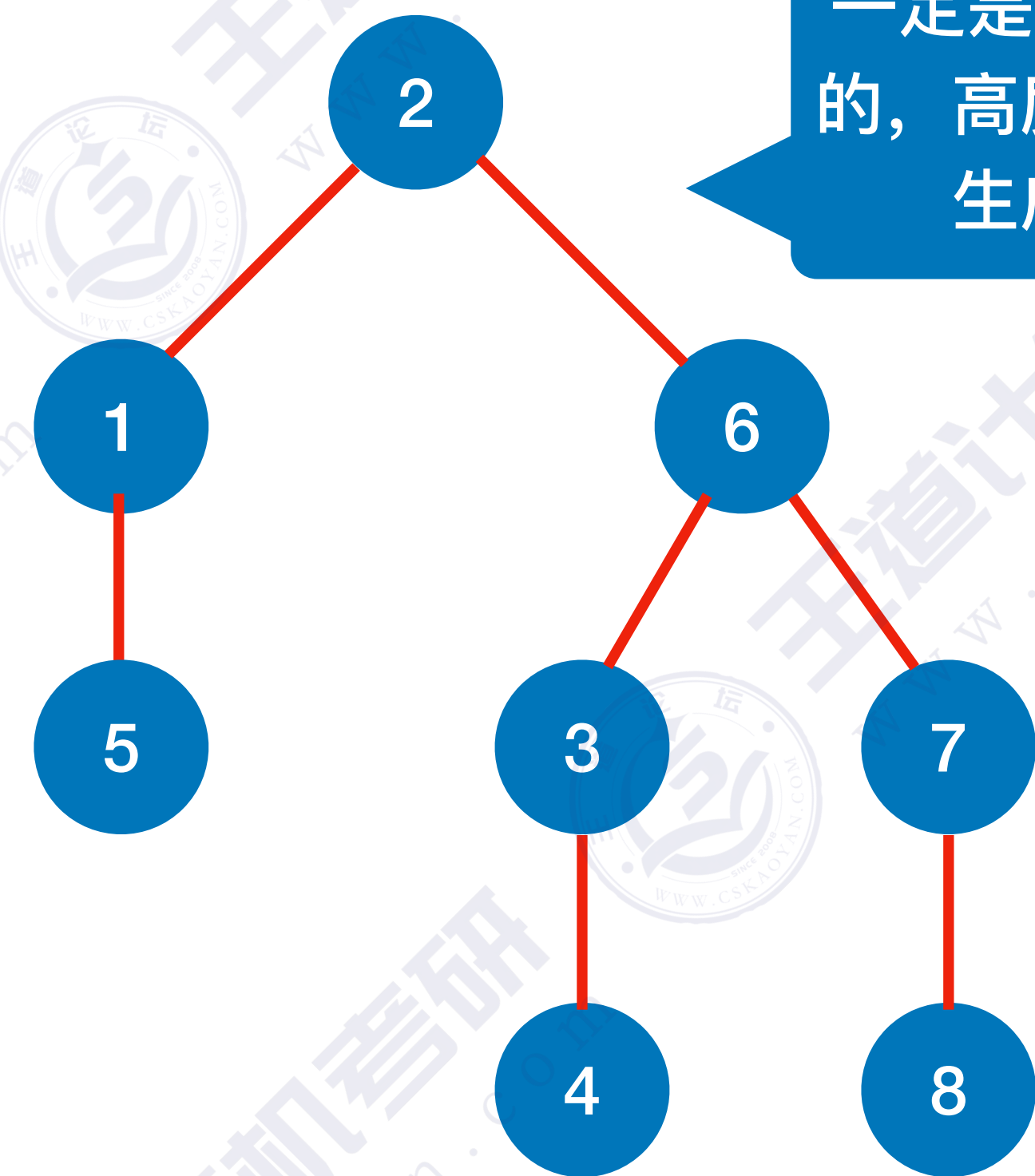
```
//求顶点 u 到其他顶点的最短路径
void BFS_MIN_Distance(Graph G,int u){
    //d[i]表示从u到i结点的最短路径
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){
        d[i]=∞; //初始化路径长度
        path[i]=-1; //最短路径从哪个顶点过来
    }
    d[u]=0;
    visited[u]=TRUE;
    EnQueue(Q,u);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,u);
        for(w=FirstNeighbor(G,u);w>=0;w=NextNeighbor(G,u,w)){
            if(!visited[w]){
                d[w]=d[u]+1;
                path[w]=u;
                visited[w]=TRUE;
                EnQueue(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

	1	2	3	4	5	6	7	8
visited	true	true	true	true	true	true	true	true

知识点回顾与重要考点



广度优先生成树



一定是以2为根的，高度最小的生成树

就是对BFS的小修改，在visit一个顶点时，修改其最短路径长度 $d[]$ 并在 $path[]$ 记录前驱结点

	1	2	3	4	5	6	7	8
$d[]$	1	0	2	3	2	1	2	3
$path[]$	2	-1	6	3	1	2	6	7

2到8的最短路径长度 = $d[8] = 3$

通过 $path$ 数组可知，2到8的最短路径为：8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 2