1 函数极限与连续

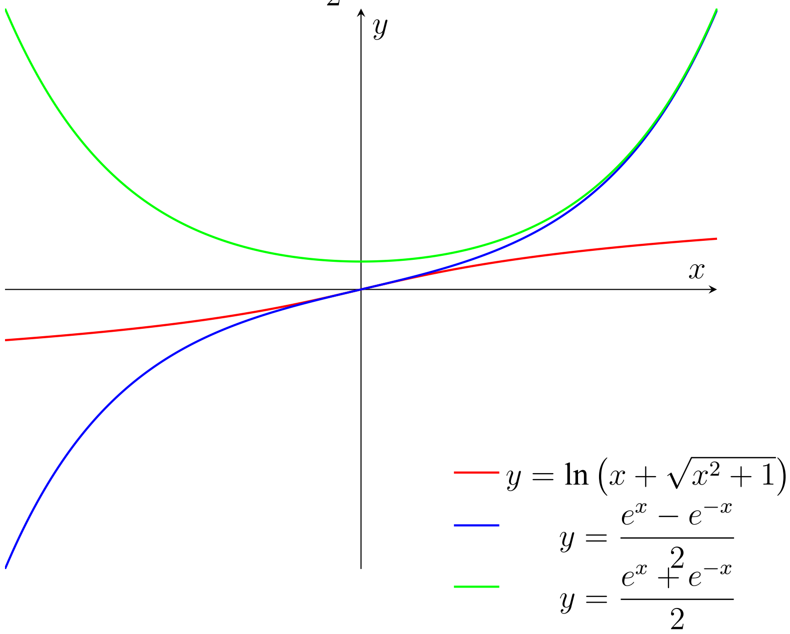
1.1 基础概念

1. 反双曲正弦函数: $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，常见的奇函数

   - $$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
   - $$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$
   - $$\int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right]\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3},$$

2. 双曲正弦函数: $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

3. 双曲余弦函数: $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$



4. 函数奇偶性

   - $f(x)+f(-x)$ 必是偶函数
   - $f(x)-f(-x)$ 必是奇函数
   - 任意定义在关于原点对称区间上的函数，都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和。
     对任一函数 $f(x)$，定义

$$u(x)=\frac{1}{2}\big[f(x)+f(-x)\big],\qquad v(x)=\frac{1}{2}\big[f(x)-f(-x)\big].$$

则有 $u(x)$ 是偶函数，$v(x)$ 是奇函数。并且

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x).$$

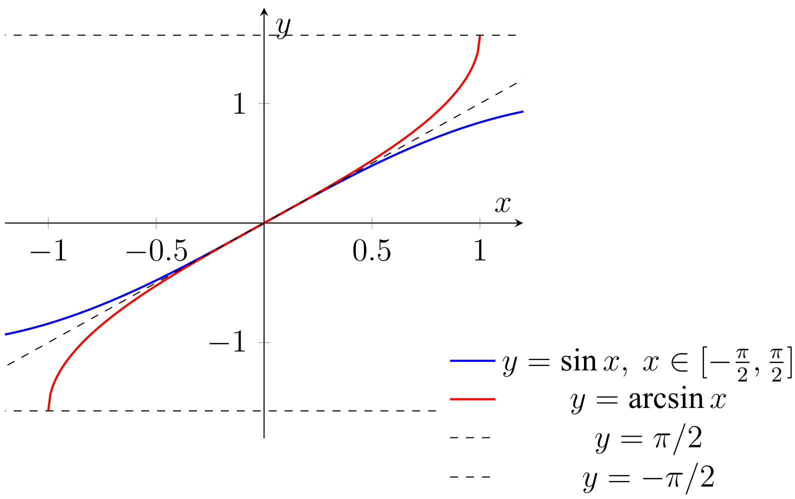
- $f[\psi(x)]$ 内偶则偶，内奇同外
- ★求导一次，奇偶性互换
- 设对任意的 x,y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是奇函数

5. 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是函数

$$y=\sin x \quad \left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

的反函数，其主值区间为

$$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$



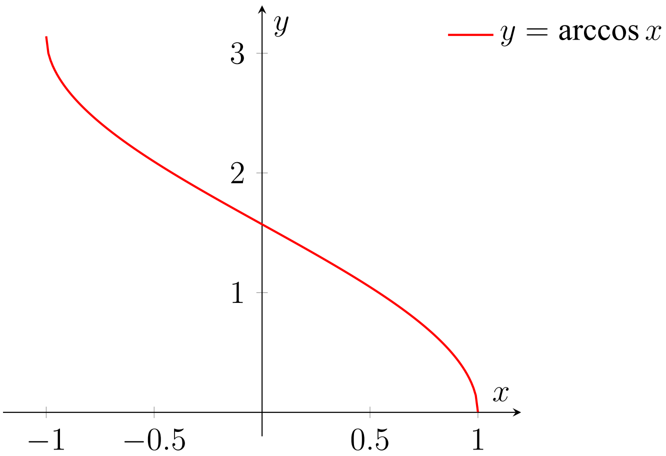
6. 若 $y=\sin x,\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $x=\pi-\arcsin y$

7. 反余弦函数 $y=\arccos x$ 是函数

$$y=\cos x \quad (x\in[0,\pi])$$

的反函数，其主值区间为

$$\arccos x\in[0,\pi].$$



1.2 结论

1. 当 $x \to 0$ 时，常用的等价无穷小
   - $x \sim y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   - $x \sim \sin x$
   - $x \sim \tan x$
2. $x - [x]$ 是 x 的小数部分，是以 1 位周期的函数

1.3 定理

1.4 运算

1.5 公式

1. $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$
2. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

   广义化：

   $$2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}.$$
3. $[x+n] = [x] + n$. 特别地，当 $n = 1$ 时，$[x+1] = [x] + 1$
4.
5. $$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

1.6 方法步骤

1.7 条件转换思路

1.8 理解