

1 向量

1.1 基本概念

1. n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 a_1, a_2, \dots, a_n 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量
2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，如果存在不全为零的数 k ，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$
则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关
 - (a) 有零向量
 - (b) 两向量成比例
 - (c) $n+1$ 个 n 维向量
3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2})^T, \dots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{s2})^T, \dots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{sm})^T$ ，其中 $s \leq r$ ，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组）
4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 β ，若存在实数 k_1, k_2, \dots, k_n ，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \beta$$
则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出（示）
5. 设有两个 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出
6. 如果 (I)(II) 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个向量组等价
7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, s)$ ，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组
 - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
 - 极大线性无关组不唯一，但其内的向量个数一致，即向量组的秩
8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩
 - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
 - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq n$
9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，也不会改变它们之间的线性组合系数
10. 线性表示具有传递性

1.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{其次线性方程组 } [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0 \text{ 有非零解} \\ &\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s, s \text{ 表示未知数的个数或向量个数} \\ &\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0 \end{aligned}$$

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{其次线性方程组 } [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0 \text{ 只有零解} \\ &\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s, s \text{ 表示未知数的个数或向量个数} \\ &\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0 \end{aligned}$$

3. 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

4. $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

5. 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 相关 \Rightarrow 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 相关

6. 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 无关 \Rightarrow 部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关

7. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Rightarrow 延伸组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性无关

8. $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性相关 \Rightarrow 缩短组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

9. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组 } [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]^T = \beta \text{ 有解} \\ &\Leftrightarrow \text{秩 } r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta] \end{aligned}$$

10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中必有一个向量可用其余向量线性表出; 反之, 若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出, 则这 s 个向量必线性相关

11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一

12. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。即如果多数向量能用少数向量线性表出, 那么多数向量一定线性相关

13. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且它可由可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $s \leq t$

14. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$

15. 如果 (I)(II) 是两个等价的向量组, 则 $r(I) = r(II)$

16. 如果 $r(A) = r$, 则 A 中有 r 个线性无关的列向量, 而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合, 也就是 $r(A) = A$ 的列秩

17. 一般地, $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩

18. A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $n - r(A)$

1.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则

- (a) $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$
- (b) $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$
- (c) $0\alpha = 0$
- (d) $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
- (e) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (f) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (g) $\alpha + 0 = \alpha$
- (h) $\alpha + (-\alpha) = 0$
- (i) $1\alpha = \alpha$
- (j) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (k) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (l) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

1.4 公式

1.5 方法步骤

1. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 求表达式???

2. 判断多个向量是否线性相关

- 含有零向量 $\mathbf{0} \Rightarrow$ 线性相关
- 两个向量成比例 \Rightarrow 线性相关
- 存在关系 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ (定义) \Rightarrow 线性相关

3. 线性无关的判定与证明: 若向量的坐标没有给出, 通常用定义法或 秩的理论或 反证法

(a) 定义法证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
- ii. \Downarrow 恒等变形(同乘: 看条件 + 构造条件或重组)
- iii. $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$

(b) 秩证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_s]^T = 0$ 只有零解
- ii. $\Leftrightarrow \text{秩r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$
 - $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩
 - $r(AB) \leq r(A)$ 且 $r(AB) \leq r(B)$
 - 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$

- 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n$, 则 $r(AB) = r(B)$
- 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = \mathbf{O}$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

(c) 反证法

(d) 线性方程组 $Ax = 0$

- 只有零解 \Leftrightarrow 线性无关
- 有非零解 \Leftrightarrow 线性相关

(e) 若是 n 个 n 维向量

- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$ 相关
- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ 无关

4. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体 \Rightarrow 非齐次线性方程组是否有解

- 有解 \Rightarrow 能线性表出
- 无解 \Rightarrow 不能线性表出

(b) 若向量坐标没有 \Rightarrow 线性相关或秩

- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 线性表出
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 不能线性表出
- 线性相关

5. 求向量组的秩

- 设向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的矩阵为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ 对 A 作初等行变换得到行最简形矩阵 A' , 则

$$r(A') = r(A) = \text{向量组}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \text{ 的秩}$$

- 若存在 r 阶子式不为零, 则 r 为矩阵的秩, 对应的 r 个向量构成一组最大线性无关组

6. 分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 能够由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

(a) 定义: 是否存在系数 c_1, c_2, c_3 使得

$$\beta_i = c_{1i}\alpha_1 + c_{2i}\alpha_2 + c_{3i}\alpha_3$$

对每一个 $i = 1, 2, 3$ 都成立

(b) 向量组 $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 能由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表出

$\Leftrightarrow B$ 中的每个向量都是 A 的线性组合

$\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$ 加上 B 中的向量后秩不变, 说明这些向量能由 A 线性表出

\Leftrightarrow 若 B 线性无关 $\Rightarrow A$ 线性无关

\Leftrightarrow 若 B 线性相关 $\Rightarrow A$ 线性相关

7. 求极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出

- (a) 初等行变换
- (b) 若有参数，分情况讨论
- (c) 主元就是极大线性无关组
- (d) 线性表示为对应向量的系数

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

极大线性无关组 α_1, α_2

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$$

$$\alpha_4 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

1.6 条件转换思路

1. 向量组(I)(II)等价

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出且 } (II) \text{ 可由 } (I) \text{ 线性表出} \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) = r(I, II) \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) \text{ 且 } (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出} \end{aligned}$$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{三者线性无关} \\ &\Leftrightarrow \text{三者是一组基底} \\ &\Leftrightarrow (a, b, c)^T \text{ 能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示} \end{aligned}$$

3. 如果 $\gamma = (a, b, c)^T$ (任意向量) 不能由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表出

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 不可表示任意一个三维向量} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关} \\ &\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0 \end{aligned}$$

4. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 如果线性相关 \Rightarrow 构成一个平面或一条直线

5. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关， β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示， β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则

- (a) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关
- (b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关
- (c) 对于任意实数 k ，有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关

(d) 对于任意实数 k , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$

- $k = 0 \Rightarrow$ 相关
- $k \neq 0 \Rightarrow$ 无关

6. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 $\Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

7. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示法不唯一

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 有无穷多解} \\ &\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) < 3 \\ &\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关} \end{aligned}$$

8. $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 无解} \\ &\Rightarrow \beta \text{ 不能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表出} \end{aligned}$$

1.7 理解

1. 线性相关无关 $\Rightarrow Ax = 0$ 齐次方程组非零解的问题

2. 线性表示 $\Rightarrow Ax = \beta$ (其中 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$) 非齐次方程组解的问题

- 非齐次方程组的解向量 x 即为线性表示的系数
- 对于 n 维向量, 有 n 个方程, 未知数个数等于向量个数
- 根据秩的不同, 线性表示有三种情况:

- (a) 唯一表示: $r(A) = r(A, \beta) = n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 向量组线性无关
- (b) 无穷多表示: $r(A) = r(A, \beta) < n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 向量组线性相关
- (c) 无表示: $r(A) < r(A, \beta)$, β 不能由 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 线性表示

3. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示。求 a 的值并将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

解析

$$\because |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1 \neq 0$$

又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，
4 个三维向量必线性相关，若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必可由
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关

即 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 0$

故 $a = 5$

对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

所以 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$