1 行列式

1.1 性质

1. 经转置行列式的值不变，即 $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 $0 \ \Rightarrow$ 行列式的值为 0
3. 两行相等 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
4. 两行成比例 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
5. 某行（列）有公因数 k，可把 k 提到行列式外
6. 两行互换，行列式变号
7. **某行**所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
8. 某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变

1.2 基础

1.2.1 完全展开式

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} \mathbf{a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}
\end{aligned}
$$

1.2.2 余子式 & 代数余子式

在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的 **余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

1.3 定理

1.3.1 展开公式

1. n 阶行列式等于它的任意一行（列）的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn} (k = 1, 2, \dots, n) && \text{行} \\
&= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} (k = 1, 2, \dots, n) && \text{列}
\end{aligned}
$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\dots+a_{in}A_{kn}=0=0 \quad (i\neq k\text{且}i,k=1,2,\dots,n) \\ a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\dots+a_{nj}A_{nk}=0=0 \quad (j\neq k\text{且}j,k=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

1.3.2 乘法公式

设 **A**，**B** 都是 n 阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

1.4 公式

1.4.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-2}\dots a_{n1}$$

1.4.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

2. 副对角线

$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

m，n 分别是方阵 A，B 的阶数

1.4.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

1.4.4 特征多项式

1.5 方阵行列式

1. 若 A 是 n 阶矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^T| = |A|$
2. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{kA}| = \mathrm{k}^n|A|$
3. 若 A，B 都是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$,$|\mathrm{A}^2| = |A|^2$
4. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^*| = |A|^{n-1}$
5. 若 A 是 n 阶**可逆**矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^{-1}| = |A|^{-1}$

1.6 克拉默法则

设有 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，则其行列式为 $|\mathbf{A}|$。**若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则方程组有唯一解**，并且第 i 个未知数 x_i 可由下式求得：

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 是将 $\mathbf{A}$ 的第 i 列替换为常数列向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 后得到的矩阵，即：

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组**只有零解**
2. 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程组**有非零解**