1 数列极限

1.1 数列

1. 等差数列
2. 等比数列

1.2 基础概念

1. 设 x_n 为以数列，若存在常数 a，对于任意的 $\epsilon > 0$（不论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \epsilon$，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$
2. 有界数列: 若对所有正整数 n，存在正实数 M，有 $|a_n| \leq M$，则称数列 a_n 为有界数列。证明数列有界的方法
   - 找 M，使得 $|a_n| \leq M$
   - 放缩法
   - 找最值
   - 基本不等式法
3. 设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对任意 $\varepsilon > 0$（无论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** a，或者称常数 a 是数列 x_n 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.3 收敛数列的性质

1. 唯一性: 给出数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$（存在），则 a 是唯一的
2. 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，则数列 $\{x_n\}$ 有界
3. 保号性: 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，b 为任意实数。
   (a) 若 $a > b$（或 $a < b$），则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有
   $$x_n > b \quad (\text{或} x_n < b).$$
   (b) 若存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有
   $$x_n \geq b \quad (\text{或} x_n \leq b),$$
   且
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$
   则必有
   $$a \geq b \quad (\text{或} a \leq b).$$

其中常考情形为 $b=0$

4. **脱帽（严格不等）：** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > b \Rightarrow x_n > b \quad$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b \Rightarrow x_n < b$)

5. **带帽（非严格不等）：** $x_n \geq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b \quad$ (或$x_n \leq b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$)

1.4 定理

1. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2. 海涅定理（归结原则）：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n \neq x_0)$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n) = A$ 存在

   - 当 $x\to 0$ 时，取 $x_n = \dfrac{1}{n}$，若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n}) = A$
   - 当 $x\to +\infty$ 时，取 $x_n = n$，若 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$
   - 当 $x\to a$ 时，且 $x_n \neq a$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

1.5 结论

1. 判断数列发散的方法

   - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到一个发散的子列，则原数列一定发散
   - 对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到至少两个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$，但它们收敛到不同极限，则原数列一定发散

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$
   因此，若要证明
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$
   只需证明
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$
   又由于 $|a_n| \geq 0$，可利用夹逼准则：若存在数列 $\{b_n\}$，使得
$$0 \leq |a_n| \leq b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$
   则有
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

1.6　运算

1.7　公式

1.8　方法步骤

1.9　条件转换思路

1.10　理解