1 矩阵

1.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵，当 $m = n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n **阶方阵**

2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 O

3. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A = B$

4. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$

5. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T

6. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

7. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$，如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E$(单位矩阵) 成立，则称 A 是**可逆矩阵或非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵

8. 对 $m \times n$ 矩阵，下列三种变换
   (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行（列）
   (b) 互换矩阵某两行（列）的位置
   (c) 把某行（列）的 k 倍加至另一行（列）

   称为矩阵的**初等行（列）变换**，统称为矩阵的**初等变换**

9. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**，记作 $A \cong B$

10. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**
    (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
    (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行
    (c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行

11. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T = A^TA = E$，称 A 是 **正交矩阵**：

12. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$。向量内积：$(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow\ a \\
&\Leftrightarrow\ A^T = A^{-1} \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的行（列）向量两两正交（单位向量）} \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的每个行（列）向量长度均为 } 1 \\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的行（列）向量平方和为 } 1 \\
&\Rightarrow\ |A|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 1 \text{ 或} |A| = -1
\end{aligned}
$$

1.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵，则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**，记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ |A| = 0 \\
&\Leftrightarrow\ r(A) = n \\
&\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性无关} \\
&\Leftrightarrow\ A = P_1P_2\ldots P_s, P_i(i = 1, 2, \ldots, s)\text{是初等矩阵} \\
&\Leftrightarrow\ A\text{与单位矩阵等价} \\
&\Leftrightarrow\ 0\text{不是矩阵}A\text{的特征值}
\end{aligned}
$$

3. 若 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AB = E$，则必有 $BA = E$

4. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A，其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换

5. 初等矩阵均可逆，其逆矩阵是同类型的初等矩阵，即

倍乘	$E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$	第 i 行（或列）乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行（或列）乘以 $1/k$
倍加	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$	第 i 行（或列）加上 k 倍第 j 行（或列）的逆矩阵是第 i 行（或列）加上 $-k$ 倍第 j 行（或列）
互换	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	交换第 i 行（或列）和第 j 行（或列）的逆矩阵是其本身

1.3 运算

1. 设 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$ 是两个 $m \times n$ 矩阵，则 $m \times n$ 矩阵 $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A + B = C$

2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m \times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的**数乘**，记作 kA

3. 设 A, B, C, O 都是 $m \times n$ 矩阵，k, l 是常数，则矩阵的加法和数乘运算满足：

   (a) $A + B = B + A$
   (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
   (c) $A + O = A$
   (d) $A + (-A) = O$
   (e) $1A = A$
   (f) $k(lA) = (kl)A$
   (g) $k(A + B) = kA + kB$
   (h) $(k + l)A = kA + lA$

4. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵，$B = [b_{ij}]$ 是 $n \times s$ 矩阵，那么 $m \times s$ 矩阵 $C = [c_{ij}]$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

   称为 A 与 B 的**乘积**，记作 $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则：

   (a) $A(BC) = (AB)C$
   (b) $A(B + C) = AB + AC$
   (c) $(A + B)C = AC + BC$
   (d) $(kA)(lB) = klAB$
   (e) $AE = EA = A$
   (f) $OA = AO = O$

6. 设 A 是 n 阶矩阵，k 是正整数，

   (a) A 的 k 次方幂 $A^k = A \cdot A \ldots A$(k 个 A)
   (b) $\mathbf{A^0} = \mathbf{E}$
   (c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
   (d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

8.

1.4 条件转换思路

1. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$，则

   (a) $\mathbf{B}$ 的列向量是其次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解
   (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \le n$