

1 向量

1.1 基本概念

1. n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 称为向量 α 的分量 (或坐标), 前一个表示式称为列向量, 后者称为行向量

2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 如果存在不全为零的数 k , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 否则, 称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- (a) 有零向量
 - (b) 两向量成比例
 - (c) $n+1$ 个 n 维向量
3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2})^T, \dots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{s2})^T, \dots, \widetilde{\alpha}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{sm})^T$, 其中 $s \leq r$, 则称 $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_m$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的延伸组 (或称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_m$ 的缩短组)
 4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 β , 若存在实数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \beta$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出 (示)

5. 设有两个 n 维向量组 $(I)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; (II)\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出
6. 如果 $(I)(II)$ 这两个向量组可以互相线性表出, 则称这两个向量组等价
7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中, 若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性相关, 再加上任一向量 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, s)$, 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关, 则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组
8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩

1.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

- \Leftrightarrow 其次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0$ 有非零解
- \Leftrightarrow 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$, s 表示未知数的个数或向量个数
- \Leftrightarrow 若向量组是方阵 (n 个 n 维向量), 则 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

2. $n + 1$ 个 n 维向量一定线性相关

3. 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 相关 \Rightarrow 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 相关

4. 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 无关 \Rightarrow 部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关

5. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Rightarrow 延伸组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性无关

6. $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性相关 \Rightarrow 缩短组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

7. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

\Leftrightarrow 非齐次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]^T = \beta$ 有解

\Leftrightarrow 秩 $r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta]$

8. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中必有一个向量可用其余向量线性表出; 反之, 若有一个向量可用其余的 $s - 1$ 个向量线性表出, 则这 s 个向量必线性相关

9. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一

10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。即如果多数向量能用少数向量线性表出, 那么多数向量一定线性相关

11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且它可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $s \leq t$

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$

13. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组, 则 $r(I) = r(II)$

14. 如果 $r(A) = r$, 则 A 中有 r 个线性无关的列向量, 而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合, 也就是 $r(A) = A$ 的列秩

15. 一般地, $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩

16. A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $n - r(A)$

1.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则

(a) $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$

(b) $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$

(c) $0\alpha = 0$

(d) $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

(e) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(f) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

- (g) $\alpha + 0 = \alpha$
- (h) $\alpha + (-\alpha) = 0$
- (i) $1\alpha = \alpha$
- (j) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (k) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (l) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

2.

1.4 条件转换思路

1. 线性无关的判定与证明: 若向量的坐标没有给出, 通常用定义法 Or 秩的理论 Or 反证法

(a) 定义法证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
- ii. \Downarrow 恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件 or 重组)
- ii. $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$

(b) 秩证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_s]^T = 0$ 只有零解
- ii. $\Leftrightarrow \text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$
 - A. $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩
 - B. $r(AB) \leq r(A)$ 且 $r(AB) \leq r(B)$
 - C. 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$
 - D. 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n$, 则 $r(AB) = r(B)$
 - E. 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = \mathbf{O}$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

(c) 反证法

2. 判断能否线性表出

(a) 若已知向量坐标 \Rightarrow 非齐次线性方程组是否有解

(a) 若向量坐标没有给出 \Rightarrow 线性相关 Or 秩

3. 向量组(I)(II)等价

$$\Leftrightarrow r(I) = r(II) = r(I, II)$$

$$\Leftrightarrow r(I) = r(II) \text{ 且 } (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出}$$