1 一元函数微分学的应用 - 中值定理

1.1 涉及函数的中值定理

1.1.1 有界与最值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $m \leq f(x) \leq M$，其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

1.1.2 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $m \leq \mu \leq M$ 时，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \mu$

1.1.3 平均值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 时，在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

1.1.4 零点定理（介值定理的特例）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$

- 推广的零点定理: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha, \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \beta$，且 $\alpha \cdot \beta < 0$，则 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少存在一个根

1.2 涉及导数（微分）的中值定理

1.2.1 费马定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足

$$\begin{cases} \text{(1) 可导（左右导数存在且相等）}, \\ \text{(2) 取极值}, \end{cases}$$

则

$$f'(x_0) = 0.$$

1.2.2 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，当 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

1.2.3 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}(1)\ 在[a,b]上连续,\\(2)\ 在(a,b)内可导,\\(3)\ f(a)=f(b),\end{cases}$$

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$(驻点)

1. 推广的罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$
2. 罗尔定理的使用需要构造辅助函数，其方法总结如下:
   - 乘积求导公式 $u'v+uv'=(uv)'$ 的逆用

     ① $2f(x)\cdot f'(x)=[f^2(x)]'=[f(x)f(x)]'=F'(x)$

     ② $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=[f(x)\cdot f'(x)]'=F'(x)$

     ③ $[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]e^{\varphi(x)}=f'(x)e^{\varphi(x)}+f(x)e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f(x)e^{\varphi(x)}]'$
     $\Rightarrow$ 见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$，令 $F(x)=f(x)e^{\varphi(x)}$。如：

     (a) $\varphi(x)=x\Rightarrow$ 见到 $f'(x)+f(x)$，令 $F(x)=f(x)e^x$

     (b) $\varphi(x)=-x\Rightarrow$ 见到 $f'(x)-f(x)$，令 $F(x)=f(x)e^{-x}$

     (c) $\varphi(x)=kx\Rightarrow$ 见到 $f'(x)+kf(x)$，令 $F(x)=f(x)e^{kx}$

     ④ $u''v+2u'v'+uv''=(uv)''$

   - 商的求导公式 $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=(\dfrac{u}{v})'$

     ① $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=[\dfrac{f(x)}{x}]'$
     $\Rightarrow$ 见到 $xf'(x)-f(x),x\neq0$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

     ② $\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=[\dfrac{f'(x)}{f(x)}]'$
     $\Rightarrow$ 见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2,f(x)\neq0$，令 $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

     ③ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=[\ln f(x)]'$

     ④ $\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=[\dfrac{f'(x)}{f(x)}]'=[\ln f(x)]''$
     $\Rightarrow$ 见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2,f(x)>0$，可考虑令 $F(x)=\ln f(x)$

1.2.4 拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}(1)\ 在[a,b]上连续, \\ (2)\ 在(a,b)内可导\end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1. 见到 $f(a)-f(b)$ 与 f 与 f' 的关系，一般想到用拉格朗日中值
2. 拉格朗日中值定理的作用是用导函数的值来控制函数值的增减

1.2.5 柯西中值定理

设函数 $f(x), g(x)$ 满足

$$\begin{cases}(1)\ 在[a,b]上连续, \\ (2)\ 在(a,b)内可导, \\ (3)\ g'(x)\neq 0\end{cases}$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

1. $f(x), g(x)$ 往往考察一个具体函数，一个抽象函数

1.2.6 泰勒公式（微分中值定理）

1. 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 $n+1$ 阶导数存在，则对该邻域内任意点 x，有

   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

   其中拉格朗日余项

   $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi\in(x_0,x).$$

2. 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任意点 x，有

   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\,.$$

3. 当 $x_0=0$ 时泰勒公式称为**麦克劳林公式**

(a)

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \xi\in(0,x)$$

(b)

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

(c) 重要函数的麦克劳林展开式

① 指数函数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

② 正弦函数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

③ 余弦函数 $==\sin' x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

④ 几何级数（一）

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

⑤ 几何级数（二） $==[\ln(1+x)]'$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

⑥ 对数函数

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

⑦ 二项式展开

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

4. **说明：**

① 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式适用于区间 $[a,b]$，常在证明题中使用。如证不等式、中值等式等

② 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式适用于点 $x=x_0$ 及其邻域，常用于研究点 $x=x_0$ 处的某些结论。如求极限、判定无穷小的阶数、判定极值等

1.3 基础概念

1.4 结论

1. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1.8 方法总结

1. 解题方法

   ① 找定义式、关系式、约束式

   ② ★做一至两步逆运算

   ③ 联想经典形式

   ④ 恒等变形

   - $a = a - 0$
   - $a = a + b - b$
   - $e - 1 = e^1 - e^0$

   ⑤ 翻译数学名词

1.9 条件转换思路

1. 函数 $f(x)$，过点 $A(0, f(0))$ 与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c)) \Rightarrow$ 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \ell(x), \ell(x)$ 是 A, B, C 三点的直线
2. 若证 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 用罗尔定理可能性大
3. 若证 $f^{(n)}(\xi) \neq 0$（不等式）用泰勒公式可能性大
4. 遇到 f 与 $f^{(n)}(n \geq 2)$ 的关系，考虑泰勒公式

1.10 理解

1. $f(x)$ 在 x_0 处连续：

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad &\Rightarrow f(x) - f(x_0) = o(1) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1) \end{aligned}$$

2. $f(x)$ 在 x_0 处可导：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+o(1)$$
$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

3. $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导：

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

2 一元函数微分学的应用 - 微分等式

方程 $f(x)=0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的零点。从几何上讲，方程的根作为两条曲线的交点。基于此，讨论方程的根 == 讨论曲线的交点。方法步骤如下

1. 讨论存在性
   - 观察，带入特殊值 (0, 1, 端点)，判断 $f(x)$ 正负
   - 使用零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根
   - ★实系数奇次方程至少有一个实根
2. 讨论唯一性
   - 单调性: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个根
   - 罗尔定理的推论: 若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根, 则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根

3 一元函数微分学的应用 - 微分不等式

3.1 用函数性态（包括单调性、凹凸性和最值等）证明不等式

1. 若 $f'(x)\geq 0$, $a<x<b$，则 $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$
2. 若有 $f''(x)\geq 0, a<x<b$，则有 $f'(a)\leq f'(x)\leq f'(b)$

   ① 当 $f'(a)>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加

   ② 当 $f'(b)<0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调减少
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，且在 I 内只有一个极值点 x_0，则

$$\begin{cases}\text{当}x_0\text{ 为极大值点时，即为}I\text{ 内的最大值点}(f(x_0)=M),\\ \qquad f(x_0)\geq f(x),\quad x\in I;\\ \text{当}x_0\text{ 为极小值点时，即为}I\text{ 内的最小值点}(f(x_0)=m),\\ \qquad f(x_0)\leq f(x),\quad x\in I.\end{cases}$$

4. 若有 $f''(x) > 0$(凹)$, a < x < b, f(a) = f(b) = 0$，则有 $f(x) < 0$
5. 若有 $f''(x) < 0$(凸)$, a < x < b, f(a) = f(b) = 0$，则有 $f(x) > 0$

3.2 用常数变量化证明不等式

如果欲证的不等式中都是常数（常数不可直接求导），则可以将其中一个或者几个常数变量化，再利用上面所述的导数工具去证明

Example

证明
$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$
令
$$f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x - a}{\sqrt{ax}}.$$

3.3 用中值定理证明不等式

主要用拉格朗日中值定理或者泰勒公式

Example

证明
$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}.$$
令 $f(x) = \ln x$，由拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得
$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(\xi).$$

3.4 结论

1. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$