

# 1 数列极限

## 1.1 基础概念

- 设  $x_n$  为一数列, 若存在常数  $a$ , 对于任意的  $\epsilon > 0$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$ , 则称常数  $a$  是数列  $x_n$  的极限, 或者称数列  $x_n$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

- 有界数列: 若对所有正整数  $n$ , 存在正实数  $M$ , 有  $|a_n| \leq M$ , 则称数列  $a_n$  为有界数列。证明数列有界的方法

- 找  $M$ , 使得  $|a_n| \leq M$
- 放缩法
- 找最值
- 基本不等式法

- 数列收敛于  $a$  的速度问题: 设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  在  $n \rightarrow \infty$  的过程中同时趋于  $a$ , 记  $u_n = |x_n - a|, v_n = |y_n - a|$ , 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n$  和  $v_n$  都是无穷小量。若  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$  存在, 则有

- **高阶无穷小:** 当  $I = 0$  时, 称  $u_n$  是  $v_n$  的高阶无穷小, 记作  $u_n = o(v_n)$ 。此时  $\{x_n\}$  比  $\{y_n\}$  更快收敛于  $a$
- **同阶无穷小:** 当  $I = c \neq 0$  时 ( $c$  为常数), 称  $u_n$  与  $v_n$  是同阶无穷小, 记作  $u_n = O(v_n)$ 。此时  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  以相同速度收敛于  $a$
- **等价无穷小:** 当  $I = 1$  时, 称  $u_n$  与  $v_n$  是等价无穷小, 记作  $u_n \sim v_n$ 。这是同阶无穷小的特例
- **低阶无穷小:** 当  $I = \infty$  时, 称  $u_n$  是  $v_n$  的低阶无穷小 (或  $v_n$  是  $u_n$  的高阶无穷小)。此时  $\{x_n\}$  比  $\{y_n\}$  更慢收敛于  $a$

### 示例

设  $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 则

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{n} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

故  $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ , 即  $x_n = \frac{1}{n}$  比  $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  更快收敛于 0。

## 1.2 收敛数列的性质

1. 唯一性: 给出数列  $\{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (存在), 则  $a$  是唯一的
2. 有界性: 若数列  $\{x_n\}$  极限存在, 则数列  $\{x_n\}$  有界
3. 保号性: 设数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ,  $b$  为任意实数。
  - (a) 若  $a > b$  (或  $a < b$ ), 则存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 恒有
$$x_n > b \quad (\text{或 } x_n < b).$$
  - (b) 若存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 恒有
$$x_n \geq b \quad (\text{或 } x_n \leq b),$$
且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$
则必有
$$a \geq b \quad (\text{或 } a \leq b).$$
其中常考情形为  $b = 0$

4. 脱帽 (严格不等):  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > b \Rightarrow x_n > b$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < b \Rightarrow x_n < b$ )
5. 带帽 (非严格不等):  $x_n \geq b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$  (或  $x_n \leq b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$ )。e.g.  
 $x_n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1$

## 1.3 定理

1. 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则其任意子列  $\{a_{n_k}\}$  也收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2. 海涅定理 (归结原则): 设  $f(x)$  在  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在  
 $\Leftrightarrow$  对任何  $\dot{U}(x_0, \delta)$  内以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\}$  ( $x_n \neq x_0$ ), 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  存在 (在极限存在的条件下, 函数极限和数列极限可以相互转化)

- 当  $x \rightarrow 0$  时, 取  $x_n = \frac{1}{n}$ , 若  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = A$
- 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 取  $x_n = n$ , 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$ 。

### Example

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{洛必达}}{\equiv} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

- 当  $x \rightarrow a$  时, 且  $x_n \neq a$  时, 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$
3. 单调有界准则: 若数列  $x_n$  单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  存在
- $x_n \leq x_{n+1} \leq a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  存在
  - $a \leq x_{n+1} \leq x_n$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  存在

## 1.4 结论

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$   
因此, 若要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

又由于  $|a_n| \geq 0$ , 可利用夹逼准则: 若存在数列  $\{b_n\}$ , 使得

$$0 \leq |a_n| \leq b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

5. ★若  $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

## 1.5 运算

## 1.6 公式

## 1.7 方法步骤

### 1. 判断数列发散的方法

- 对于一个数列  $\{a_n\}$ , 如果能找到一个发散的子列, 则原数列一定发散
- 对于一个数列  $\{a_n\}$ , 如果能找到至少两个收敛的子列  $\{x_{n_k}\}$  和  $\{x_{n'_k}\}$ , 但它们收敛到不同极限, 则原数列一定发散

## 2. 证明数列 $\{x_n\}$ 单调性的常用方法

### a. 差分法或比值法

$$x_{n+1} - x_n > 0 \text{ (或 } < 0\text{)}, \quad \text{或} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \text{ (或 } < 1\text{)}.$$

### b. 数学归纳法

- i. 验证  $n = 1$  时结论成立;
- ii. 假设  $n = k$  时结论成立;
- iii. 证明  $n = k + 1$  时结论仍成立。

### c. 利用重要不等式

### d. 利用递推形式 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$

设  $x_n \in I$ , 且  $f(x)$  在区间  $I$  上可导:

- 若  $f'(x) > 0$  (即  $f(x)$  在  $I$  上单调增加), 则数列  $\{x_n\}$  单调 (无法确定是单调递增还是单调递减), 且

$$\begin{cases} x_2 > x_1, & \text{则 } \{x_n\} \text{ 单调递增,} \\ x_2 < x_1, & \text{则 } \{x_n\} \text{ 单调递减.} \end{cases}$$

- 若  $f'(x) < 0$  (即  $f(x)$  在  $I$  上单调减少), 则数列  $\{x_n\}$  不单调 (通常呈振荡)。

## 1.8 条件转换思路

1. 数列  $\{a_n\}$  非负有界  $\Rightarrow$  存在  $0 \leq m < M$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 有  $m \leq a_n \leq M$

## 1.9 理解

1. 压缩映射原理: 使用时, 需写出证明过程

- **原理一 (压缩不等式)** 设数列  $\{x_n\}$ , 若存在常数  $k (0 < k < 1)$ , 使得对一切  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|,$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**证:** 由已知条件,

$$0 \leq |x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|.$$

递推可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a| \\ &\leq k^2|x_{n-1} - a| \\ &\vdots \\ &\leq k^n|x_1 - a|. \end{aligned}$$

又因为  $0 < k < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0.$$

由夹逼准则,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - a| = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- **原理二 (迭代函数收敛原理)** 设数列  $\{x_n\}$  由

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

定义, 其中  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 且方程

$$f(x) = x$$

有唯一解  $a$ 。若存在常数  $k (0 < k < 1)$ , 使得对任意  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f'(x)| \leq k,$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**证:** 由于  $f(a) = a$ , 有

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)|.$$

由拉格朗日中值定理, 存在  $\xi$  介于  $x_n$  与  $a$  之间, 使得

$$|f(x_n) - f(a)| = |f'(\xi)| |x_n - a|.$$

又由条件  $|f'(x)| \leq k < 1$ , 可得

$$|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|.$$

由原理一 (压缩不等式), 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

2. 极限定义中  $\epsilon$  的含义:  $\epsilon$  必须是不依赖于  $n$  的任意小正数。若  $\epsilon$  与  $n$  有关, 相当于对收敛速度提出了额外要求, 而极限定义并不限制收敛速度。下面的示例说明了在推理过程中,  $\epsilon$  必须作为一个与  $n$  无关的常数来使用。

### 示例

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, n > N : |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon \quad (\text{由绝对值不等式}) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|. \\ &\Rightarrow |a| - \epsilon < |a_n| < |a| + \epsilon \end{aligned}$$