线性代数

Bowen

October 8, 2025

Contents

1 行列式

1.1 基础概念

1. 由 $1, 2, \ldots, n$ 组成的有序数组程伟一个 n 阶排列，通常用 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ 表示 n 阶排列
2. 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成**一个逆序，一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数**，用 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 表示
3. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**

1.2 性质

1. 经转置行列式的值不变，即 $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 0 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
3. 两行相等 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
4. 两行成比例 $\Rightarrow$ 行列式的值为 0
5. 某行（列）有公因数 k，可把 k 提到行列式外
6. 两行互换，行列式变号
7. 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
8. 某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变

1.3 基础

1.3.1 完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \mathbf{a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

1.3.2 余子式 & 代数余子式

1. 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的 **余子式**，记为 $\mathbf{M_{ij}}$；称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 $\mathbf{A_{ij}}$，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2. 三阶行列式的代数余子式

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

1.4 定理

1.4.1 展开公式

1. n 阶行列式等于它的任意一行（列）的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}(k = 1, 2, \ldots, n) && \text{行} \\ &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}(k = 1, 2, \ldots, n) && \text{列} \end{aligned}$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 = 0 \quad (i \neq k \text{且} i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 = 0 \quad (j \neq k \text{且} j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

1.4.2 乘法公式

设 **A**，**B** 都是 n 阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

1.5 公式

1.5.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-2}\ldots a_{n1}$$

1.5.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线
$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

2. 副对角线
$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$
m，n 分别是方阵 A，B 的阶数

1.5.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \dots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

1.5.4 特征多项式

1. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵，则 A 的特征多项式
$$|A - | = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - s_2\lambda + |A|$$
其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

1.6 方阵行列式

1. 若 A 是 n 阶矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^T| = |A|$
2. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{kA}| = \mathrm{k}^n|A|$
3. 若 A，B 都是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|, |\mathrm{A}^2| = |A|^2$
4. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^*| = |A|^{n-1}$
5. 若 A 是 n 阶**可逆**矩阵 $\Rightarrow |\mathrm{A}^{-1}| = |A|^{-1}$
6. 若 A 是 n 阶矩阵，$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的特征值 $\Rightarrow |\mathrm{A}| = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$
7. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow |\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|, |\mathrm{A} + \mathrm{kE}| = |\mathrm{B} + \mathrm{kE}|$
7.
$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

1.7 克拉默法则

设有 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，则其行列式为 $|\mathbf{A}|$。**若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则方程组有唯一解**，并且第 i 个未知数 x_i 可由下式求得：

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 是将 $\mathbf{A}$ 的第 i 列替换为常数列向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ 后得到的矩阵，即：

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组**只有零解**
2. 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程组**有非零解**

1.8 方法步骤

1. 对于**主对角线爪型**行列式，可用**主**对角线元素将其化为上（下）三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 对于**副对角线爪型**行列式，可用**副**对角线元素将其化为**反上（下）三角型**来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 把各行（列）均加到第一行（列）
4. 逐行（列）相加
5. 若有较多 0，可考虑直接用行（列）展开公式
6. 特殊的**三对角线**行列式
   (a) 三角化法: 逐行相加，构造上下三角型
   (b) 递推法
   (c) 归纳法
7. 数学归纳法
   - **普通数学归纳法（Mathematical Induction）**
     (a) 验证 $n = 1$ 时，命题 f_n 成立；
     (b) 假设 $n = k$ 时，命题 f_n 成立；
     (c) 证明 $n = k + 1$ 时，命题 f_n 成立。
   - **强（完全）归纳法（Strong Induction）**
     (a) 验证 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时，命题 f_n 成立；
     (b) 假设当 $n < k$ 时，命题 f_n 均成立；
     (c) 证明 $n = k$ 时，命题 f_n 成立。

1.9 条件转换思路

1. 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ r(A) < n(\text{其中} n = \text{未知数的个数})\\
&\Leftrightarrow\ |A| = 0\\
&\Leftrightarrow\ A\text{的列向量组线性相关}
\end{aligned}
$$

1.10 理解

2 矩阵

2.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵，当 $m = n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n **阶方阵**
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 **O**
3. 如果一个方阵，所有非主对角线元素都是 0，则称这个矩阵是**对角矩阵**
4. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A = B$

5. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$

6. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T

7. 如果方阵 A 满足 $A^T=A$，则称 A 是**对称矩阵**，即 $a_{ij}=a_{ji}$

8. 如果方阵 A 满足 $A^T=-A$，则称 A 是**反对称矩阵**，即 $a_{ij}=-a_{ji}$

9. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**

10. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置，即 $A^*=[A_{ji}]=(A_{ij})^T$

11. n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB=BA=E$(单位矩阵) 成立，则称 A 是**可逆矩阵或非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵

12. 对 $m\times n$ 矩阵，下列三种变换

    (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行（列）
    (b) 互换矩阵某两行（列）的位置
    (c) 把某行（列）的 k 倍加至另一行（列）

    称为矩阵的**初等行（列）变换**，统称为矩阵的**初等变换**

13. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**，记作 $A\cong B$

14. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**

    (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
    (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i,j 行
    (c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行

15. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$。向量内积为

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

16. 向量 $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$ 的长度

$$||\alpha||=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

17. 若 $(\alpha,\beta)=0$ 即 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$，则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha\perp\beta$

18. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T = A^TA = E$，称 A 是 **正交矩阵:**

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ A^T = A^{-1}\\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的行（列）向量两两正交（单位向量）}\\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的每个行（列）向量长度均为 } 1\\
&\Leftrightarrow\ A \text{ 的行（列）向量平方和为 } 1\\
&\Leftrightarrow\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1\\
&\Rightarrow |A|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |A| = 1 \text{ 或} |A| = -1
\end{aligned}$$

19. 若 A 是正交矩阵且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则:
   (a) $\alpha_i^T \alpha_i = 1$
   (b) $\alpha_i^T \alpha_j = 0\ (i \neq j)$

20. 在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列 $(k \leq m, k \leq n)$，位于这个行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式，称其为矩阵 A 的一个 k 阶**子式**

21. 矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩，记为 $r(A)$。零矩阵的秩规定为 0

22. 矩阵秩的理解
   (a) $r(A) = r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为$0$，任何$r+1$阶子式（若存在）必全为$0$
   (a) $r(A) < r \Leftrightarrow A$中每一个$r$阶子式全为$0$
   (a) $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为$0$
   (a) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$
   (a) $r(A) \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow 1 \leq r(A) \leq n$
   (a) 若 A 是 n 阶矩阵
      - $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆
      - $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$不可逆
   (b) 若 A 是 $m \times n$ 阶矩阵$\Leftrightarrow r(A) \leq min(m, n)$

2.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵，则矩阵 A 的逆矩阵**唯一**，记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$\Leftrightarrow\ |A| \neq 0$$
$$\Leftrightarrow\ r(A) = n$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性无关}$$
$$\Leftrightarrow\ A = P_1P_2\ldots P_s, P_i(i=1,2,\ldots,s)\text{是初等矩阵}$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{通过初等变换能化为单位矩阵}$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{与单位矩阵等价}$$
$$\Leftrightarrow\ 0\text{不是矩阵}A\text{的特征值}$$
$$\Leftrightarrow\ \text{齐次线性方程组}Ax=0\text{只有零解}$$

3. n 阶矩阵 A不可逆

$$\Leftrightarrow\ |A| = 0$$
$$\Leftrightarrow\ r(A) < n$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{的列（行）向量组线性相关}$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{无法表示为初等矩阵的乘积}$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{无法通过初等变换能化为单位矩阵}$$
$$\Leftrightarrow\ 0\text{是矩阵}A\text{的特征值}$$
$$\Leftrightarrow\ \text{齐次线性方程组}Ax=0\text{有非零解}$$

4. $A \cong B$

$$\Leftrightarrow\ r(A) = r(B)$$
$$\Leftrightarrow\ A\text{通过初等变换能化为}B$$
$$\Rightarrow\ |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0, |A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0.\text{即}A\ B\text{的行列式同时为 0 或同时不为 0}$$

5. 若 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AB=E$，则必有 $BA=E$

6. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A，其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 $\Rightarrow$ **左乘行变换，右乘列变换**

6. 初等矩阵均可逆，其逆矩阵是同类型的初等矩阵，即

倍乘	$E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$	第 i 行（或列）乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行（或列）乘以 $1/k$
互换	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$	交换第 i 行（或列）和第 j 行（或列）的**逆矩阵是其本身**
倍加	$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$	第 i 行（或列）加上 k 倍第 j 行（或列）的逆矩阵是第 i 行（或列）加上 $-k$ 倍第 j 行（或列）

7. 矩阵 A 与 B **等价**的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q，使 $PAQ=B$

8. 秩 $r(A) = A\text{的列秩} = A\text{的行秩}$

9. 矩阵经初等变换后秩不变

2.3 运算

1. 设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $A+B=C$

2. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的**数乘**，记作 kA

3. 设 $A,B,C,\mathbf{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是常数，则矩阵的加法和数乘运算满足：

   (a) $A+B=B+A$
   (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   (c) $A+\mathbf{O}=A$
   (d) $A+(-A)=\mathbf{O}$
   (e) $1A=A$
   (f) $k(lA)=(kl)A$
   (g) $(kA)^n=k^nA^n$
   (h) $k(A+B)=kA+kB$
   (i) $(k+l)A=kA+lA$

4. 设 $A=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum \text{第 } i \text{ 行}\times\text{第 } j \text{ 列}$$

   称为 A 与 B 的**乘积**，记作 $C=AB$

5. 矩阵乘法有下列法则：

   (a) $A(BC)=(AB)C$
   (b) $A(B+C)=AB+AC$
   (c) $(A+B)C=AC+BC$
   (d) $(kA)(lB)=klAB$
   (e) $AE=EA=A$
   (f) $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$

6. 设 A 是 n 阶矩阵，k 是正整数，

   (a) A 的 k 次方幂 $A^k=A\cdot A\ldots A(k\text{ 个 }A)$
   (b) $\mathbf{A^0}=\mathbf{E}$
   (c) $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$
   (d) $(A^k)^l=A^{kl}$

7.
$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$$

8.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$$

9.
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

    (a) $E - A^3 = (E-A)(E+A+A^2)$
    (b) $E + A^3 = (E+A)(E-A+A^2)$
    (c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow$ (A - 2E)(B - 4E) = 8E

12. 设 α 和 β 都是列向量，则

    (a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$，两者都是 n 阶矩阵（互为转置）
    (b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数
    (c)
$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \textbf{(对称矩阵)}$$
    (d) $r(\alpha\alpha^T) = 1$
    (e) $\alpha\alpha^T$ 特征值是 $||\alpha||^2, 0, 0, \dots, 0(n-1\text{个})$
    (f)
$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \text{（平方和）}$$

13. 向量

    - $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
    - $(k\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
    - $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
    - $(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
    - $(\alpha, \alpha) \geq 0$

2.4 公式

2.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n|A|$
3. $|AB| = |A||B|$ ，$|A^2| = |A|^2$
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

2.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A-B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E+A)^T = E + A^T$

2.4.3 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. A 可逆有 $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
   (a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$)，则
      i. 且 $n \geq 3$ 时，$(A^*)^* = O$
      ii. 且 $n = 2$ 时，$(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果} r(A) = n, \\ 1, & \text{如果} r(A) = n-1, \\ 0, & \text{如果} r(A) < n-1 \end{cases}$$

10. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$(二阶矩阵)，则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。**主对调，副变号**

2.4.4 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$
9. $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
10. $$\begin{bmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & \frac{1}{c} \\ & \frac{1}{b} & \\ \frac{1}{a} & & \end{bmatrix}$$

2.4.5 秩

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^TA) = r(AA^T)$
2. 当 $k \neq 0$ 时，$r(kA) = r(A)$
3. $r(A+B) \leq r(A,B) \leq r(A) + r(B)$
4. A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，则
   (a) $r(AB) \leq r(A)$并且$r(AB) \leq r(B)$，即 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
   (b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$
   (c) $r(A, AB) = r(A)$详见理解 1
   (d) $r(B, BA) = r(B)$

(e) 且 $AB=O$，则

i. $r(A)+r(B)\leq n$

ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解

- 按列分块，有

$$B=[b_1,b_2,\ldots,b_s], AB=A[b_1,b_2,\ldots,b_s]=[Ab_1,Ab_2,\ldots,Ab_s]=[0,0,\ldots,0]$$

因此

$$Ab_i=0,\quad i=1,2,\ldots,s.$$

(f) 且 $AB=C$，则

i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性表出

- 对 B，C 按列分块，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1+\cdots+a_{1n}\beta_n & =\alpha_1, \\ a_{21}\beta_1+\cdots+a_{2n}\beta_n & =\alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1+\cdots+a_{nn}\beta_n & =\alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)=r(BA)$

6. 若 A 列满秩，则 $r(AB)=r(B)$

7. 若 A 行满秩，则 $r(AB)=r(A)$

8. A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，C 是 $s\times t$ 矩阵，则

$$r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B)$$

9.
$$r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A)+r(B)$$

10.
$$r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A)+r(B)$$

11. 若 $A\sim B$，则

(a) $r(A)=r(B)$

(b) $r(A+kE)=r(B+kE)$

2.4.6 分块矩阵

1. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若 B，C 分别是 m 阶与 n 阶**可逆**矩阵，则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & -B^*ZC^* \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ -C^*ZB^* & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & -B^*ZC^* \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -C^*ZB^* & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

2.4.7 对角矩阵

1. $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$
2. $$\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & & \\ & b_2a_2 & \\ & & b_3a_3 \end{bmatrix}$$
3. $$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$
4. $$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

2.4.8 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$，则
   (a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积
   (b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
   (c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵，主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

则：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当} k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$，则 $B^2 = P^{-1}A^2P$，即
   (a) $\mathbf{B^n = P^{-1}A^nP}$
   (b) $A^n = PB^nP^{-1}$

2.5 方法步骤

1. 已知矩阵 A，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，求 P, Q
   (a) 标准型: 对角矩阵是特征值
   (b) **初等行变换**: 对 A 做初等**行变换**化为上三角矩阵 $B([A|E]- > [B|P])$ 得到 P，再对 B 做**列变换**或B^T **作行变换**化为对角矩阵 $\Lambda([B^T|E]- > [\Lambda|Q])$ 得到 Q

2. 由 A^* 求 A
   (a) $|A^*|$
   (b) $|A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow |A|$
   (b) $AA^* = |A|E \Rightarrow A = |A|(A^*)^{-1}$

3. 秩求法
   - $|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$
   - $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$
   - 初等行变换矩阵秩不变
   - 找不为 0 的子式 $\leq$ r(A)
   - A B 相似$\Rightarrow r(A) = r(B)$

4. 求特殊矩阵的 n 次方
   - 分块
   - 若 $r(A) = 1$，则 $A^n = l^{n-1}A$，其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
   - $P^{-1}AP = B \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}, B^n = P^{-1}A^nP$
   - 观察多少次幂之后是 0，之后的都是 0
   - 对角矩阵的 n 次方

5. 求伴随矩阵 A^*
   - 定义
   - $A^* = |A|A^{-1}$

6. 求可逆矩阵

- 求代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq 0)$
- 用初等行变换

$$(A\ E)\xrightarrow{\text{由上往下}}\cdots\longrightarrow(\text{上三角...})\xrightarrow{\text{由下往上}}\cdots\longrightarrow(*)\xrightarrow{\text{某行乘}k}\longrightarrow(E\ A^{-1})$$

- 分块

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}.$$

2.6 条件转换思路

1. 设 **A** 是 $m\times n$ 矩阵，**B** 是 $n\times s$ 矩阵，若 **AB** $=$ **O**，则

   (a) **B** 的列向量是齐次方程组 **Ax** $=0$ 的解

   (b) $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq n$

   (c) 若 **A** 和 **B** 为方阵，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

   (d) 且 A B 非零，则

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ r(A)<n\text{且}r(B)<n\\&\Rightarrow\ A\text{列向量线性相关}\\&\Rightarrow\ B\text{行向量线性相关}\end{aligned}$$

2. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 则:

$$A_{ij}=-a_{ij}$$
$$A^*=(A_{ij})^T=(-a_{ij})^T=-(a_{ij})^T=-A^T$$

3. 若 $A^*=A^T$，则 $A_{ij}=a_{ij}$

4. 矩阵 A 经过若干次初等**行变换**得到矩阵 B，则

   (a) $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

   (b) $A\cong B, B=PA$

   (c) $r(A)=r(B)$

5. 矩阵 A 经过若干次初等**列变换**得到矩阵 B，则

   (a) $A\cong B, B=AQ$

   (b) $r(A)=r(B)$

6. $A^*\neq 0\Rightarrow r(A)\geq n-1$($A$中至少有一个$n-1$阶子式不为 0)

7. 若 A, B, C 为 n 阶矩阵，且 $ABC = E$，则

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ |A||B||C| = 1 \\
&\Rightarrow\ ABC\text{均可逆} \\
&\Rightarrow\ BC = A^{-1} \Rightarrow BCA = E \\
&\Rightarrow\ AB = C^{-1} \Rightarrow CAB = E
\end{aligned}$$

8. $r(A + AB) \Rightarrow$ 加法，找可逆，若A可逆，则$r(AB) = r(B)$

9. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，$r(A)$ 为秩
   - **基本定义：**秩 = 列向量或行向量的最大线性无关个数
   - **行列式：**方阵 A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
   - **线性相关性：**
     - 列满秩 $\Rightarrow$ 列向量线性无关
     - 行满秩 $\Rightarrow$ 行向量线性无关
   - **齐次方程：** $Ax = 0$
     - 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = n$
     - 非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$, 解空间维数 $n - r(A)$
   - **矩阵运算：**
     - $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
     - $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
   - **逆矩阵：**列满秩 $\rightarrow$ 左逆，行满秩 $\rightarrow$ 右逆；方阵满秩 $\rightarrow$ 可逆
   - **特征值：**方阵秩 < n $\Rightarrow$ 0 是特征值；方阵满秩 $\Rightarrow$ 0 不是特征值

10. A 为 n 阶矩阵，A 各行元素之和都为 0，则
    - 列向量都是 1 是 $Ax = 0$ 的解
    - A 的行向量线性相关
    - $r(A) < n$

2.7 理解

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵，记 (XY) 表示分块矩阵，则 $r(A, AB) == r(A)$

   (a) 记 $AB = C$，对 A, C 按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$$

   即 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，矩阵的秩就是列向量组的秩，故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = r(A)$$

2. A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB = E$，则$r(A) = m, r(B) = m$

解析

已知 $AB = E_m$，则

$$\because AB = E_m \Rightarrow r(AB) = r(E_m) = m,$$

又因为

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, \quad r(A) \leq m,\ r(B) \leq m,$$

$$\therefore r(A) = m, \quad r(B) = m.$$

3. 矩阵相乘⇔ 两个数的积相加

3. 秩

   (a) 给定一个矩阵 A，它的秩就是矩阵中**线性无关的行（或列）的最大个数**

   (b) 秩 == 矩阵所包含的“独立信息量”

   (c) Case: 如果你有 10 行数据，但其中 5 行其实是由另外 5 行“复制”或“线性组合”出来的，那么这些重复的信息是“冗余的”，真正“独立”的信息只有 5 行⇒ $r(A) = 5$

   (c) 解线性方程组: 判断方程有没有解、是不是唯一解

      i. 方程 $Ax = b$ 有解⇔ $r(A) = r(A|b) = r(\bar{A})$

      i. 唯一解⇔ $r(A) = r(\bar{A}) =$ 变量数

      i. 多解⇔ $r(A) = r(\bar{A}) <$ 变量数

   (d) 判断向量独立性: 度量“向量空间中有多少个独立方向”

      i. 如果列向量组成的矩阵 $r(A) =$ 列数⇒ 向量组线性无关

      i. 否则线性相关

   (e) 维度的桥梁: 刻画了“变换的本质效果”

      i. 秩本质上就是矩阵对应线性映射的像空间（列空间）的维数

      ii. 这告诉我们，线性变换把空间压缩到了几维。

      iii. Case: 3×3 矩阵 A

         - $r(A) = 3 \Rightarrow$ 保留三维空间的全部信息（可能只是旋转或缩放）
         - $r(A) = 2 \Rightarrow$ 把三维空间压缩成二维平面
         - $r(A) = 1 \Rightarrow$ 压缩成一条直线
         - $r(A) = 0 \Rightarrow$ 全部压缩成原点

   (f) 与行列式、可逆性关系: 可逆性的根本判据

      i. 如果 n 阶矩阵 A，$r(A) = n$，那么 A 可逆，$|A| \neq 0$

      ii. 如果 $r(A) < n$，矩阵 A 不可逆

3 向量

3.1 基本概念

1. n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量
2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，如果存在不全为零的数 k，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$
则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关
   (a) 有零向量
   (b) 两向量成比例
   (c) $n+1$ 个 n 维向量
3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2})^T, \ldots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{s2})^T, \ldots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{sm})^T$，其中 $s \leq r$，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组
4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 β，若存在实数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \beta$$
则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ **线性表出(示)**
5. 设有两个 n 维向量组 $(I)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s; (II)\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出
6. 如果 $(I)(II)$ 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**
7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $a_j(j = 1, 2, \ldots,)$，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**
   - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
   - 极大线性无关组不唯一，但其内的向量个数一致，即向量组的秩
8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩
   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
   - $r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq n$
9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，也不会改变它们之间的线性组合系数
10. 线性表示具有传递性

3.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{其次线性方程组}[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s][x_1,x_2,\ldots,x_n]^T=0\text{有非零解}\\&\Leftrightarrow \text{向量组的秩}r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)<s, s\text{表示}\textbf{未知数的个数或向量个数}\\&\Leftrightarrow \text{若向量组是方阵}(n\text{ 个 }n\text{ 维向量})\text{，则}|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|=0\end{aligned}$$

2. 向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=s\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关

3. $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

4. 任何部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 相关$\Rightarrow$ 整体组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots\alpha_s$ 相关

5. 整体组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots\alpha_s$ 无关$\Rightarrow$ 部分组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 无关

6. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关$\Rightarrow$ 延伸组$\widetilde{\alpha_\mathbf{1}},\widetilde{\alpha_\mathbf{2}},\ldots,\widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性无关

7. $\widetilde{\alpha_\mathbf{1}},\widetilde{\alpha_\mathbf{2}},\ldots,\widetilde{\alpha_\mathbf{n}}$ 线性相关$\Rightarrow$ 缩短组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关

8. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s][\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]^T=\beta\text{有解}\\&\Leftrightarrow \text{秩}r[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]=r[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta]\end{aligned}$$

9. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关，则其中**必有一个向量**可用其余向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关

10. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，且**表示法唯一**

11. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，且 $s>t$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关。即**如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关**

12. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，且它可由可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，则 $s\leq t$

13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\leq r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)$

14. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组，则 $r(I)=r(II)$

15. 如果 $r(A)=r$，则 A 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(A)=A$ 的列秩

16. 一般地，$r(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}$

17. A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $Ax=0$ 的解向量组的秩为 $\mathbf{n}-\mathbf{r}(\mathbf{A})$

3.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$，则

   (a) $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)^T$
   (b) $k\alpha=(ka_1,ka_2,\dots,ka_n)^T$
   (c) $0\alpha=0$
   (d) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
   (e) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
   (f) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
   (g) $\alpha+0=\alpha$
   (h) $\alpha+(-\alpha)=0$
   (i) $1\alpha=\alpha$
   (j) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
   (k) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
   (l) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

3.4 公式

3.5 方法步骤

1. 判断多个向量是否线性相关
   - 含有零向量 **0** $\Rightarrow$ 线性相关
   - 两个向量成比例 $\Rightarrow$ 线性相关
   - 存在关系 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$(定义) $\Rightarrow$ 线性相关

2. 线性无关的判定与证明：若向量的坐标没有给出，通常用**定义法**或 **秩的理论**或 **反证法**

   (a) **定义法**证 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关
      i. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$
      ii. $\Downarrow$ 恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件或重组)
      ii. $k_1=0,k_2=0,\dots,k_s=0$

   (b) **秩**证 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关
      i. $\Leftrightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s][x_1,x_2,\dots,x_s]^T=0$ 只有零解
      ii. $\Leftrightarrow$ 秩r$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=s$
         - $r(A)=A$的列秩 $=A$的行秩
         - $r(AB)\le r(A)$且$r(AB)\le r(B)$
         - 若 A 可逆，则 $r(AB)=r(BA)=r(B)$
         - 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$

- 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, 且 $AB=\mathbf{O}$, 则 $r(A)+r(B)\le n$

(c) **反证法**

(d) 线性方程组 $Ax=0$

- 只有零解⇔ 线性无关
- 有非零解⇔ 线性相关

(e) 若是 n 个 n 维向量

- $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|=0\Leftrightarrow$ 相关
- $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|\neq 0\Leftrightarrow$ 无关

3. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体 ⇒ 非齐次线性方程组是否有解

- 有解 ⇒ 能线性表出
- 无解 ⇒ 不能线性表出

(b) 若向量坐标没有 ⇒ 线性相关或秩

- $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)\Rightarrow$ 线性表出
- $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)\Rightarrow$ 不能线性表出
- 线性相关

4. 求向量组的秩

- 设向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ 的矩阵为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]$ 对 A 作初等行变换得到行最简形矩阵 A'，则

$$r(A')=r(A)=\text{向量组}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\text{的秩}$$

- 若存在 r 阶子式不为零，则 r 为矩阵的秩，对应的 r 个向量构成一组最大线性无关组

3.6 条件转换思路

1. 向量组$(I)(II)$等价

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ (I)\text{可由}(II)\text{线性表出且}(II)\text{可由}(I)\text{线性表出}\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)=r(I,II)\\&\Leftrightarrow\ r(I)=r(II)\text{且}(I)\text{可由}(II)\text{线性表出}\end{aligned}$$

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \text{三者线性无关}\\&\Leftrightarrow\ \text{三者是一组基底}\\&\Leftrightarrow\ (a,b,c)^T\text{能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表示}\end{aligned}$$

3. 如果 $\gamma=(a,b,c)^T$(任意向量) 不能由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 线性表出

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{不可表示任意一个三维向量}\\&\Leftrightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\\&\Leftrightarrow\ |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0\end{aligned}$$

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$如果线性相关 $\Rightarrow$ 构成一个平面或一条直线

5. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则

   (a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性相关
   (b) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关
   (c) 对于任意实数 k，有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关
   (d) 对于任意实数 k，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$
      - $k=0\Rightarrow$ 相关
      - $k\neq 0\Rightarrow$ 无关

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示 $\Rightarrow$ r$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\leq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

7. β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法不唯一

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{有无穷多解}\\&\Leftrightarrow\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)<3\\&\Rightarrow\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性相关}\end{aligned}$$

8. $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ Ax=\beta\text{无解}\\&\Rightarrow\ \beta\text{不能由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\end{aligned}$$

3.7 理解

1. 线性相关无关 $\Rightarrow$ $Ax=0$齐次方程组非零解的问题

2. 线性表示 $\Rightarrow$ $Ax=\beta$(其中$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$)非齐次方程组解的问题

   - 非齐次方程组的解向量 x 即为线性表示的系数
   - 对于 n 维向量，有 n 个方程，未知数个数等于向量个数
   - 根据秩的不同，线性表示有三种情况：
     (a) **唯一表示:** $r(A)=r(A,\beta)=n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性无关
     (b) **无穷多表示:** $r(A)=r(A,\beta)<n$，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 向量组线性相关
     (c) **无表示:** $r(A)<r(A,\beta)$，β 不能由 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 线性表示

4 线性方程组

4.1 基础概念

1. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

   称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

2. 如果 $b_i = 0(\forall i = 1, 2, \dots, m)$，则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

   为**齐次线性方程组**

3. 若用一组数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 分别代替方程组中的 $x_1, x_2, \dots, x_n$，使 m 个等式都成立，则称有序数组 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解

4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

   称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**，而由全体系数组成的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

5. 如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**

6. 下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**

   (a) 用一个非零常数乘方程的两边

(b) 把某方程的 k 倍加到另一方程上

(c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换华为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量通常称为**主变量**，其余的未知量称为**自由变量**

7. 选择自由变量准则: **去掉自由变量后主变量行列式不能为 0**

8. 向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的**基础解系**，如果

   (a) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 $Ax = 0$ 的解

   (b) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关

   (c) $Ax = 0$ 的任一解都有由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性表出

   (d) 解向量个数

$$\begin{aligned} &= \text{无关解个数} \\ &= \text{自由变量个数} \\ &= t = n - r(A)\text{，其中}n = A\text{的列向量个数} \end{aligned}$$

9. 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组基础解系，那么对任意常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$，

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_t\eta_t$$

   是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的**通解**

10. $Ax = 0$ **的基础解系是不唯一的**

11. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 既是方程组 (I) 的解，也是方程组 (II) 的解，则称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的**公共解**

12. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 是方程组 (I) 的解，则 α 必是 (II) 的解；反过来，如果 α 是方程组 (II) 的解，则 α 必是 (I) 的解，则称 (I) 和 (II) **同解**

13. $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r(A) = r(B)\text{且}Ax = 0\text{的解全是}Bx = 0\text{的解} \\ &\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) \\ &\Leftrightarrow \text{矩阵}A\text{和}B\text{的行向量组等价} \end{aligned}$$

14. 矩阵乘法一般没有交换律，若 $AB = BA$，就称 A 与 B **可交换**

4.2 定理

1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组

2. 设 n 元非齐次线性方程组，对它的增广矩阵施行高斯消元法，得到阶梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & a_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) 如果 $d_{r+1} \neq 0$，方程组**无解**

   (b) 如果 $d_{r+1} = 0$，方程组**有解**，并且

      i. 当 $r = n$ 时有唯一解

      ii. 当 $r < n$ 时有无穷多解

3. 齐次线性方程组只有**零解 (唯一解)**

$$\Leftrightarrow\ r(A) = n$$

4. 齐次线性方程组有**非零解 (有无穷多解)**

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ r(A) < n \\ &\Leftrightarrow\ A\text{的列向量线性无关} \\ &\Leftrightarrow\ \text{若}m = n,\text{则}|A| = 0 \end{aligned}$$

5. 当 $m < n$(即方程的个数 < 未知数的个数) 时，齐次线性方程组必有**非零解 (有无穷多解)**

6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A) = r < n$，则 $Ax = 0$ 的基础解系由 $n - r(A)$ 个线性无关的解向量所构成

7. **有解判定定理**: 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等，即 $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}})$:

$$\begin{aligned} &\text{若}r(A) = r(\bar{A}) = n && \Leftrightarrow\ \textbf{方程组有唯一解} \\ &\text{若}r(A) = r(\bar{A}) < n && \Leftrightarrow\ \textbf{方程组有无穷解} \end{aligned}$$

$$\textbf{方程组有解} \quad \begin{cases} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow A\text{的行向量组线性无关} \\ \text{原因:}r(A) \leq r(\bar{A}) \leq m \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = m \end{cases}$$

$$\text{非齐次线性方程组}\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\text{无解} \quad \begin{cases} \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{A}) + \mathbf{1} = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}}) \\ \Leftrightarrow b\text{不能由}A\text{的列向量线性表出} \\ \Rightarrow |A| = 0 \end{cases}$$

8. **解的性质**

(a) 如果 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解

(b) 如果 α, β 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$ 的两个解，则 $\alpha-\beta$ 是导出组 $Ax=0$ 的解

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ r(A)=r(\overline{A})<n\\&\Leftrightarrow\ Ax=0\text{有无穷多解}\end{aligned}$$

(c) 如果 α 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$ 的解，η 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $\alpha+\eta$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$ 的解

(d) 使用 **最小公约数** 构造解：

$$\alpha_1+\alpha_2 \quad \text{是两个解，} \qquad \alpha_2+2\alpha_3 \quad \text{是三个解，}$$

故可构造：

$$3(\alpha_1+\alpha_2)-2(\alpha_2+2\alpha_3)$$

(e) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是 $\mathbf{Ax=b}$ 的解

i. 且 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1 \Leftrightarrow \mathrm{k}_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax=\mathbf{b}$ 的解

ii. 且 $k_1+k_2+\cdots+k_t=0 \Leftrightarrow \mathrm{k}_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax=\mathbf{0}$ 的解

9. **解的结构**：对非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$，若 $r(A)=r(\bar{A})=r$，且已知 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，ζ_0 是 $\mathbf{Ax=b}$ 的每个已知解，则 $\mathbf{Ax=b}$ 的通解为

$$\zeta_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ 为任意常数

10. 通解表示为：

$$\begin{aligned}\text{通解}&=\text{特解}+k_1\text{解向量}_1+k_2\text{解向量}_2+\ldots\\&=\text{特解}+\text{齐次方程}Ax=0\text{ 的通解}\end{aligned}$$

特解构造方法：

$$\begin{aligned}&\text{特解}=\text{令自由变量为 }0\text{，主元为常数项}\\&\text{特解}\Leftarrow\text{通过单个}b\text{ 构造，即除/减}(n+1\text{ 个解}-n\text{ 个解})\end{aligned}$$

齐次方程 $Ax=0$ 的通解：

$$\begin{aligned}&\text{通解}=\text{自由变量列的相反数}\\&\text{通解}=\alpha-\beta\text{ 或通过最小公倍数 法构造}\end{aligned}$$

4.3 运算

4.4 公式

4.5 方法步骤

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

   (a) 判断何时 $a = 0$

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \ddots & & & \\ & & & \\ & & a & \end{array}\right]$$

   若 $a = 0$ 则有可能无解

   i. $\forall a$ 均有解

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \ddots & & & \\ & & & \\ & & a & 0 \end{array}\right]$$

   ii. 若 $b \neq 0$ 必无解

   $$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \ddots & & & \\ & & & \\ & & 0 & b \end{array}\right]$$

   (b) Case:

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ & \underline{a-1} & a+2 & -3 \\ & & \underline{2a+6} & a-9 \end{array}\right]$$

   从下向上依次检查与 0 的关系

   i. 先看 $2a + 6 = 0$

   ii. 再看 $a - 1 = 0$

   $$\begin{array}{lll} \text{唯一解} & \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n & \Leftrightarrow a \neq 1 \text{ 且} a \neq -3 \\ \text{无穷解} & \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n & \Leftrightarrow a = 1 \\ \text{无解} & \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}) & \Leftrightarrow a = -3 \end{array}$$

2. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，需要

   (a) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解
   (b) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 线性无关
   (c) $t = n - r(A)$

3. 非齐次线性方程组求解方法
   (a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
   (b) 求导出组的几个基础解系
   (c) 求方程组的一个特解（为简捷，可令自由变量全为 0）
   (d) 按解的结构写出通解
   (e) 注: **当方程组中含有参数时，分析讨论要严谨不要丢情况**

4. 公共解处理方法 (例 4.16)
   (a) (I)(II) 联立求解
   (b) 通过 (I) 与 (II) 各自的通解，寻找非零公共解
   (c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中，如果仍是解，寻找 k_1, k_2 所对应满足的关系式而求出公共解

5. 证明两方程同解
   (a) 定义
   (b) $r(A) = r(B)$ 且 $Ax = 0$ 的解全是 $Bx = 0$ 的解

4.6 条件转换思路

1. 抽象方程组 (例 4.9)
   (a) 解的结构
   (b) 解的性质
   (c) 秩

4.7 理解