1 函数的连续与间断

1.1 连续点的定义

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

   - $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$在点$x_0$处连续
   - 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，且 $f(x_0) > 0$（或 $f(x_0) < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）

2. 连续性运算法则

   - 两个函数如果在同一点 x_0 处连续，则它们的和差商积在这点也是连续的
   - 复合函数的连续性: 设 $u = \psi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，$y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续，且 $u_0 = \psi(x_0)$，则 $f[\psi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续

1.2 间断点的定义与分类

1. 讨论间断点只看**无定义点**和**分段点**

2. 第一类间断点 = 可去间断点 + 跳跃间断点

   - 可去间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)(f(x_0)$甚至可以无定义),则 $x = x_0$ 称为**可去间断点**，或称**可补间断点**
   - 跳跃间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则 $x = x_0$ 称为**跳跃间断点**

3. 第二类间断点: 无穷间断点和震荡间断点都属于第二类间断点

   - 无穷间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 称为**无穷间断点**（左右极限至少有一个无穷大）
   - 震荡间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 震荡不存在，则 $x = x_0$ 称为**震荡间断点**

1.3 结论

1.4 定理

1.5 运算

1.6 公式

1.7 方法总结

1.8 条件转换思路

1.9 理解