1　一元函数微分学的计算

1.1　基本求导公式

1. $(x^a)' = ax^{a-1}\,(a$ 为常数$)$
2. $(a^x)' = a^x \ln a\,(a > 0,\ a \neq 1)$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\,(a > 0,\ a \neq 1)$
5. $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$
6. 三角函数求导
    - $(\sin x)' = \cos x$
    - $(\cos x)' = -\sin x$
    - $(\tan x)' = \sec^2 x$
    - $(\cot x)' = -\csc^2 x$
    - $(\sec x)' = \sec x \tan x$
    - $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
    - $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
    - $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
    - $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
    - $(x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
7. $\left[\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $\left[\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.2　四则运算

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $d[u(x) \pm v(x)] = d[u(x)] \pm d[v(x)]$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $d[u(x)v(x)] = u(x)d[v(x)] + v(x)d[u(x)]$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

6. $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)d[u(x)]-u(x)d[v(x)]}{[v(x)]^2} \qquad v(x) \neq 0$

1.3 复合函数的导数与微分形式不变性

设 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则

- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$
- $d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx = f'[g(x)]d[g(x)]$

1.4 分段函数的导数

设

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0, \\ f_2(x), & x < x_0, \end{cases}$$

其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 分别在 $x>x_0$ 与 $x<x_0$ 时可导，则：

① 在分段点 x_0 处，用导数定义求导：

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

根据 $f'_+(x_0)$ 是否等于 $f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$

② 在非分段点用导数公式求导：

$$\begin{cases} x > x_0, & f'(x) = f'_1(x), \\ x < x_0, & f'(x) = f'_2(x). \end{cases}$$

1.5 反函数的导数

1. 设 $y=f(x)$ 为单调且可导函数，并且 $f'(x) \neq 0$，则存在反函数 $x=\varphi(y)$，且

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

即

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

2. $y=f(x), x=\varphi(y), \varphi'(y) = -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

3. $y''_{xx} = -\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. $x''_{yy} = -\dfrac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$

1.6 隐函数求导法

设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的可导函数，则

① 方程 $F(x, y) = 0$ 两边对自变量 x 求导，注意 $y = y(x)$，即将 y 看作中间变量，得到一个关于 y' 的方程

② 解该方程便可求出 y'

1.7 参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

所确定，其中 t 为参数，且 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 均可导，并且 $\varphi'(t) \neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

1.8 对数求导法

对于**多项相乘、相除、开方、乘方**的式子，一般**先取对数再求导。**设 $y = f(x)$（其中 $f(x) > 0$），则

① 等式两边取自然对数，得

$$\ln y = \ln f(x).$$

② 两边对自变量 x 求导（注意 $y = y(x)$，将 y 视为中间变量），得

$$\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]'.$$

因此

$$y' = y \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

1.9 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}(u(x) > 0, 且u(x) \neq 1)$，除了用上面的对数求导法，还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

然后求导

1.10 ★ 高阶导数

1.11 ★ 高阶导数

1.12 基础概念

1.13 结论

1.14 定理

1.15 运算

1.16 公式

1. $[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
2. $(x\ln x)' = \ln x + 1$
3. $(\dfrac{1}{x}\ln x)' = -\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}$

1.17 方法总结

1.18 条件转换思路

1.19 理解