1 线性方程组

1.1 基础概念

1. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

2. 如果 $b_i = 0 (\forall i = 1, 2, ..., m)$,则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为**齐次线性方程组**

- 3. 若用一组数 c_1, c_2, \ldots, c_n 分别代替方程组中的 x_1, x_2, \ldots, x_n ,使 m 个等式都成立,则称有序数组 (c_1, c_2, \ldots, c_n) 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解
- 4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**,而由全体系数组成的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

- 5. 如果两个方程组有相同的解集合,则称它们是**同解方程组**
- 6. 下列三种变换称为线性方程组的初等变换
 - (a) 用一个非零常数乘方程的两边

- (b) 把某方程的 k 倍加到另一方程上
- (c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换华为阶梯形方程组后,每个方程中的第一个未知量<mark>通</mark>常称为**主变量**,其余的未知量称为**自由变**量

- 7. 选择自由变量准则: 去掉自由变量后主变量行列式不能为 0
- 8. 向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 称为齐次线性方程组 Ax = 0 的基础解系,如果
 - (a) $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 是 Ax = 0 的解
 - (b) $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 线性无关
 - (c) Ax = 0 的任一解都有由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性表出
 - (d) 解向量个数
- = 无关解个数
- = 自由变量个数
- = t = n r(A),其中n = A的列向量个数
- 9. 如果 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是齐次线性方程组 Ax = 0 的一组基础解系,那么对任意常数 c_1, c_2, \ldots, c_n ,

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_t\eta_t$$

是齐次线性方程组 Ax = 0 的**通解**

- 10. Ax = 0 的基础解系是不唯一的
- 11. 对于方程组 (I) 和 (II),如果 α 既是方程组 (I) 的解,也是方程组 (II) 的解,则 称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的**公共解**
- 12. 对于方程组 (I) 和 (II),如果 α 是方程组 (I) 的解,则 α 必是 (II) 的解;反过来,如果 α 是方程组 (II) 的解,则 α 必是 (I) 的解,则称 (I) 和 (II) **同解**
- 13. Ax = 0 与 Bx = 0 同解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) \mathbf{1} Ax = 0$$
 的解全是 $Bx = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

- \Leftrightarrow 矩阵A和B的行向量组等价
- 14. 矩阵乘法一般没有交换律,若 AB = BA,就称 A = BA,就称 A = BA,就称 A = BA,就称 A = AB

1.2 定理

- 1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组
- 2. 设 n 元非齐次线性方程组,对它的增广矩阵施行高斯消元法,得到阶梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{rr} & \cdots & a_{rn} & d_r \\ & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) 如果 $d_{r+1} \neq 0$,方程组**无解**
- (b) 如果 $d_{r+1} = 0$,方程组**有解**,并且
 - i. 当 r = n 时有唯一解
 - ii. 当 r < n 时有无穷多解
- 3. 齐次线性方程组只有零解(唯一解)

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

4. 齐次线性方程组有非零解(有无穷多解)

$$\Leftrightarrow r(A) < n$$

⇔ A的列向量线性无关

$$\Leftrightarrow \ \exists m=n, \mathbf{M}|A|=0$$

- 5. 当 m < n(即方程的个数 < 未知数的个数) 时,齐次线性方程组必有**非零解 (有无穷多解)**
- 6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩 r(A) = r < n,则 Ax = 0 的基础解系由 n r(A) 个线性无关的解向量所构成
- 7. **有解判定定理**: 非齐次线性方程组 Ax = b 的解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等,即 $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\overline{\mathbf{A}})$:

若
$$r(A) = r(\bar{A}) = n$$

⇒ 方程组有唯一解

若
$$r(A) = r(\bar{A}) < n$$

⇒ 方程组有无穷解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A)$$

 $\Leftrightarrow A$ 的行向量组线性无关

原因: $r(A) \le r(\bar{A}) \le m \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = m$

$$\oint \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{A}) + \mathbf{1} = \mathbf{r}(\overline{\mathbf{A}})$$

非齐次线性方程组Ax = b无解

 $\left\langle \Leftrightarrow b$ 不能由A的列向量线性表出

$$\Rightarrow |A| = 0$$

8. 解的性质

- (a) 如果 η_1, η_2 是齐次线性方程组 Ax = 0 的两个解,那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 Ax = 0 的解
- (b) 如果 α , β 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个解,则 $\alpha \beta$ 是导出组 Ax = 0 的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) < n$$

 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 有无穷多解

- (c) 如果 α 是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解, η 是导出组 Ax = 0 的解,则 $\alpha + \eta$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解
- (d) 使用 最小公约数 构造解:

 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是两个解, $\alpha_2 + 2\alpha_3$ 是三个解,

故可构造:

$$3(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

- (e) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解
 - i. 且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1 \Leftrightarrow k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_t \alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{b}$ 的解 ii. 且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 0 \Leftrightarrow k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_t \alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解
- 9. **解的结构**: 对非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$,若 $r(A) = r(\bar{A}) = r$,且已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是导出组 Ax = 0 的基础解系, ζ_0 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的每个已知解,则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\zeta_0 + c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ 为任意常数

10. 通解表示为:

通解 = 特解 +
$$k_1$$
解向量 $_1 + k_2$ 解向量 $_2 + \dots$
= 特解 + 齐次方程 $Ax = 0$ 的通解

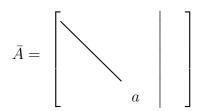
特解构造方法:

特解 = 令自由变量为 0,主元为常数项 特解 \leftarrow 通过单个b 构造,即除/减(n+1) 个解 -n 个解)

齐次方程 Ax = 0 的通解:

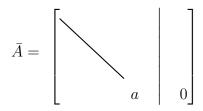
通解 = 自由变量列的相反数 通解 = $\alpha - \beta$ 或通过最小公倍数 法构造

- 1.3 运算
- 1.4 公式
- 1.5 方法步骤
 - 1. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$
 - (a) 判断何时 a = 0

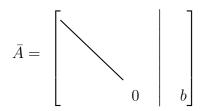


若 a=0 则有可能无解

i. ∀a 均有解



ii. 若 $b \neq 0$ 必无解



(b) Case:

$$\left[\begin{array}{cc|c}
1 & -1 & a & 2 \\
 & \underline{a-1} & a+2 & -3 \\
 & \underline{2a+6} & a-9
\end{array} \right]$$

从下向上依次检查与 0 的关系

- i. 先看 2a + 6 = 0
- ii. 再看 a 1 = 0

唯一解
$$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$$
 $\Leftrightarrow a \neq 1 \ \underline{\square} a \neq -3$
无穷解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$ $\Leftrightarrow a = 1$
无解 $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$ $\Leftrightarrow a = -3$

5

2. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 Ax = 0 的基础解系,需要

- (a) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 Ax = 0 的解
- (b) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 线性无关
- (c) t = n r(A)
- 3. 非齐次线性方程组求解方法
 - (a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
 - (b) 求导出组的几个基础解系
 - (c) 求方程组的一个特解(为简捷,可令自由变量全为0)
 - (d) 按解的结构写出通解
 - (e) 注: 当方程组中含有参数时,分析讨论要严谨不要丢情况
- 4. 公共解处理方法 (例 4.16)
 - (a) (I)(II) 联立求解
 - (b) 通过(I)与(II)各自的通解,寻找非零公共解
 - (c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中,如果仍是解,寻找 k_1,k_2 所对应满足的关系式而求出公共解
- 5. 证明两方程同解
 - (a) 定义
 - (b) r(A) = r(B) 且 Ax = 0 的解全是 Bx = 0 的解

1.6 条件转换思路

- 1. 抽象方程组 (例 4.9)
 - (a) 解的结构
 - (b) 解的性质
 - (c) 秩