# 1 一元函数积分学的概念与性质

## 1.1 不定积分

### 1.1.1 原函数与不定积分

设函数 $f(x)$ 定义在某区间 $I$ 上，若存在可导函数 $F(x)$，对于该区间上任意一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个**原函数**。称 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的**不定积分（全体原函数）**

**注：**

1. $F'(x)=f(x)$。由 $f(x)$ 处处有定义得 $F(x)$处处可导，即 $F(x)$处处连续

### 1.1.2 原函数（不定积分）存在定理

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$

$$\bigstar f(x)\text{连续}\Rightarrow\begin{cases}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C,\\ [\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t]'=f(x)\end{cases}$$

2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$

3. 可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x)=f(x)$ 不一定是连续函数，也可能有震荡间断点

$$\text{若}F(x)\text{处处可导}\Rightarrow F'(x)\begin{cases}\text{连续函数或含有震荡间断点的函数}\\ \text{有介值性（达布性质）}\\ \lim\limits_{x\to x_0}F'(x)\text{ 存在 }\iff F'(x)\text{ 在}x_0\text{ 处连续;}\\ \neq 0\implies F(x)\text{ 单调.}\end{cases}$$

4. 导函数 $f'(x)$ 性质

   ① 有介值性

   ② 如果导函数在一点存在，则这一点一定不会是导函数的第一类间断点

   ③ 如果导函数 $f'(x)$ 存在，当导函数在一点极限存在时，导函数在这一点必连续

   ④ 若 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 可能连续，也可能含有震荡间断点

## 1.2 定积分

### 1.2.1 定义

1. 概念：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 $(a,b)$ 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i$ $(i=1,2,3,\cdots,n-1)$，定义 $x_0=a$ 和 $x_n=b$，且

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

记

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n,$$

并任取一点

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],$$

记

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\},$$

若当 $\lambda \to 0$ 时，极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

存在且与分点 $x_i$ 及点 $\xi_k$ 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上**可积**，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

① 分割: 分割方法不唯一，只要分成 $n$ 份即可

② 近似: $f(\xi_k)$

③ 求和

④ 取极限

2. 几何意义

- 若 $f(x) \ge 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示面积
- 若 $f(x) \le 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示面积的负值
- 若 $f(x)$ 有正有负，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示 $x$ 轴上方图形的面积减去 $x$ 轴下方图形的面积

3. 定积分的精确定义：当定积分存在时，存在两个任取：分点 $x_i$ 任取，一点 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 任取，故可做两个特取，即将 $[a, b]$ $n$ 等分且取每个小区间的右端点为 $\xi_i$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$$

若将式子中的 $a, b$ 特殊化为 $0, 1$ 这两个数，即

$$\bigstar \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$$

4. 定积分的值与字母无关：定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

### 1.2.2 存在定理

1. 定积分存在的充分条件

   ① 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ② 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调（$f(a),f(b)$ 即为函数的界，对任意 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 一定介于 $f(a),f(b)$ 之间），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ③ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点（不包含无穷间断点），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

   ④ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个第一类间断点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

2. 定积分存在的必要条件: 可积函数必有界。即若定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界

### 1.2.3 性质（假设以下积分均存在）

1. 当 $b=a$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$

2. 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. 求区间长度：假设 $a<b$，则 $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a=L$，其中 $L$ 为区间 $[a,b]$ 的长度

4. 积分的线性性质：设 $k_1,k_2$ 为常数，则 $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\,\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. 积分的可加（拆）性：无论 $a,b,c$ 的大小如何，总有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6. 积分的保号性：若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$。特殊地，有
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负的连续函数，只要 $f(x)$不恒等于零，则必有
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$$
   - 推论：若连续函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f(x)\ge g(x)$，且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，有 $a<b$，则必有
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

8. 估值定理：设 $M,m$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，$L$ 为区间 $[a,b]$ 的长度，则有
$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x=mL\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le ML=\int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

9. ★积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

## 1.3 变限积分

本质是一个由定积分定义的函数

### 1.3.1 概念

当 $x$ 在区间 $[a,b]$ 上变动时，对应于每一个 $x$ 值，积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 都有一个确定的值，因此 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是一个关于 $x$ 的函数，记作

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b)$$

称函数 $F(x)$ 为变上限的定积分。同理，可以定义变下限的定积分以及上、下限都变化的定积分，这些统称为**变限积分**。事实上，变限积分就是定积分的推广。

### 1.3.2 性质

1. 函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**可积**，则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $I$ 上**连续**（$F(x)$ 若存在，则其一定连续。与 $f(x)$ 作区分：$f(x)$ 存在但其不一定连续)

2. ★函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**连续**，则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $I$ 上可导且 $F'(x) = f(x)$

3. 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则有：

   - 若 $x = x_0 \in I$ 是 $f(x)$ 唯一的跳跃间断点，则函数 $F(x)$ 在 $x_0$ 处不可导，且

   $$\begin{cases} F'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \\ F'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x). \end{cases}$$

   - 若 $x = x_0 \in I$ 是 $f(x)$ 唯一的可去间断点，则函数 $F(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且

   $$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0).$$

   - 上述两种情形中，$F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数，而是变限积分，因为第一类间断点的函数不存在原函数

## 1.4 反常积分

### 1.4.1 概念

定积分有两个必要条件：一是积分区间有限，二是被积函数有界。如果破坏了积分区间的有限性，就引出**无穷区间**上的反常积分；如果破坏了被积函数的有界性，就引出了**无界函数**的反常积分

1. **无穷区间**上反常积分的概念与敛散性：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数

   ①
   $$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$
   若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散

   ②
   $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$
   若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散

   ③
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   若右端两个积分都收敛，则称反常积分收敛，**否则**称发散

2. 瑕点：使 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内**无界**的点即为**瑕点**。如：

   - $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$x=0$ 为瑕点
   - $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=$ 无界震荡，$x=0$ 为瑕点

3. **无界函数**的反常积分的概念与敛散性：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数，$x_0$ 为 $f(x)$ 的瑕点

   ① 若 $x=a$ 是唯一瑕点，则
   $$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$
   若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散

   ② 若 $x=b$ 是唯一瑕点，则
   $$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$
   若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散

   ③ 若 $x=c\in(a,b)$ 是唯一瑕点，则
   $$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   若右端两个积分都收敛，则称反常积分收敛，否则称发散

4. 在反常积分中，一般把 $\infty$ 和**瑕点**统称为**奇点**

5. 在判别积分敛散性时，一个积分中只能有一个奇点，若出现两个及以上奇点，需拆分

### 1.4.2 敛散性的判别法

1. 无穷区间

   - 比较判别法（放缩法）：设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，并且 $0 \leq f(x) \leq g(x)(a \leq x \leq +\infty)$，则

     ① 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

     ② 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

   - ★比较判别法的极限形式（计算法 $\frac{0}{0}$）：设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$（有限或 $\infty$）（$\frac{0}{0}$ 型），则

     ① 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$ 时（$f(x), g(x)$ **同阶无穷小**），$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性

     ② 当 $\lambda = 0$ 时（$f(x)$ **趋于** $0$ **的速度比** $g(x)$ **更快**），若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

     ③ 当 $\lambda = \infty$ 时（$g(x)$ **趋于** $0$ **的速度比** $f(x)$ **更快**），若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

2. 无界函数

   - 比较判别法（放缩法）：设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，瑕点同为 $x = a$，并且 $0 \leq f(x) \leq g(x)(a < x \leq b)$，则

     ① 当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

     ② 当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

   - 比较判别法的极限形式（计算法 $\frac{\infty}{\infty}$）：设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，瑕点同为 $x = a$，并且 $f(x) \geq 0, g(x) > 0(a < x \leq b)$, $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$（有限或 $\infty$）（$\frac{\infty}{\infty}$ 型），则

     ① 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$ 时（$f(x), g(x)$ **同阶无穷大**），$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性

     ② 当 $\lambda = 0$ 时（$g(x)$ **趋于** $\infty$ **的速度比** $f(x)$ **更快**），若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

     ③ 当 $\lambda = \infty$ 时（$f(x)$ **趋于** $\infty$ **的速度比** $g(x)$ **更快**），若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

3. 两个重要结论（$p$ 型广义积分）

① 在 $(0,1]$ 上，$p$ 越小越收敛

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x,\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛}, & 0<p<1,\\ \text{发散}, & p\geq 1\end{cases}$$

盯着 $x\to 0^+$ 看

② 在 $[1,+\infty)$ 上，$p$ 越大越收敛

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x,\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛}, & p>1,\\ \text{发散}, & p\leq 1\end{cases}$$

盯着 $x\to +\infty$ 看

③ 当 $x\to 0^+$ 时，$\sin x\sim x$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^p x}{x^p}=1$，故 $\int_0^1 \dfrac{1}{\sin^p x}\,\mathrm{d}x$ 依然满足①

④ 若 $f(x)\sim x^\alpha \quad (x\to 0^+ \text{ 或 } +\infty)$，则 $\int \dfrac{1}{f^p(x)}\,\mathrm{d}x\sim\displaystyle\int\frac{1}{x^{\alpha p}}\,\mathrm{d}x$

## 1.5 基础概念

## 1.6 结论

1. $f(x)$ 可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 有界
2. $\sin x$ 和 $\cos x$ 一拱面积为 2
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x == \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$
4. 当 $f(x)$ 是偶函数且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
5. 当 $f(x)$ 是奇函数且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=0$
6. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛

证:

因为
$$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|.$$
又
$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
收敛，根据比较判别法，
$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,\mathrm{d}x$$
也收敛。
又
$$f(x) = \big(f(x) + |f(x)|\big) - |f(x)|,$$
因此
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
右端为两个收敛积分之差，故
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
收敛。

## 1.7 定理

## 1.8 运算

## 1.9 公式

## 1.10 方法总结

1. 凑定积分定义：分子分母若为 $h(n,i)$，则 $h(n,i)$ 是关于 $n,i$ 的齐次式，即可凑成 $f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}$，若不是齐次式，考虑夹逼准则。

   ① 先提出 $\frac{1}{n}$

   ② 再凑出 $\frac{i}{n}$

   ③ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

## 1.11 条件转换思路

1. 见到 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{cases} \text{用积分中值定理：} & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a), \\ \text{改成辅助函数：} & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

## 1.12 经典

1. $f(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$，$x=0$ 是其震荡间断点，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是**无界震荡**，其原函数是 $F(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$

2. $f(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}$，$x=0$ 是其震荡间断点，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是**有界震荡**，其原函数是 $F(x) = x^2\cos\dfrac{1}{x}$

3. $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ 是收敛的（$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\epsilon \ln x = 0, \epsilon > 0$）

## 1.13 理解

1. 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$，即 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$

**证**

若 $x \in (a,b)$，取 $\Delta x$ 使 $x+\Delta x \in (a,b)$，则

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x+\Delta x) - F(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

由积分中值定理，有 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x$，其中 $\xi$ 介于 $x$ 与 $x+\Delta x$ 之间，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\xi \to x$，故

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$

当 $x=a$ 时，取 $\Delta x > 0$，同理可证 $F'(a) = f(a)$；当 $x=b$ 时，取 $\Delta x < 0$，同理可证 $F'(b) = f(b)$。
综上，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$。

2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为不定积分，表示全体原函数

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为定积分，表示面积

4. $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 称为变上限积分，表示动态的面积

5. 证明：函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**可积**，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $I$ 上连续（$F(x)$ 若存在，则其一定连续。与 $f(x)$ 作区分：$f(x)$ 存在但其不一定连续)

**证**

对任意 $x$，若 $x+\Delta x\in I$，有

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由可积的必要条件可知，存在 $M>0$，使得在 $I$ 上有

$$|f(x)|\leq M.$$

因此，

$$0\leq \left|F(x+\Delta x)-F(x)\right|\leq M\,|\Delta x|.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[F(x+\Delta x)-F(x)\right]=0,$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}F(x+\Delta x)=F(x).$$

根据函数在 $x$ 点连续的充要条件，$F(x)$ 在 $x$ 点连续。
由此可见，对于变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

只要它存在，就必然是连续的

6. 证明：函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**连续**，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $I$ 上可导且 $F'(x)=f(x)$

证

对任意的 $x$，若 $x+\Delta x \in I$，由于函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

由积分中值定理，存在

$$\xi \in (x,\, x+\Delta x),$$

使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\,\Delta x.$$

因此，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

由于 $\xi \to x$ 且 $f(x)$ 连续，故

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

由此可见，如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，则

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个原函数。

7. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负的连续函数,且 $f(x)$不恒等于零,证明必有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

**证**

因函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于零，且 $f(x) \geq 0$，故至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$，使得

$$f(x_0) > 0.$$

由连续函数的局部保号性知，存在 $\delta > 0$ 与 $\eta > 0$，使得当

$$x \in [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta] \subset [a,b]$$

时，恒有

$$f(x) \geq \eta > 0.$$

根据定积分的不等式性质，有

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \eta\,dx = 2\delta\eta > 0.$$