

1 一元函数微分学的应用 - 几何应用

1.1 极值的定义

- 对于函数 $f(x)$, 若存在点 x_0 的某个邻域, 使得在该邻域内任意一点 x , 均有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

成立, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的 极大值点 (或 极小值点), $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值 (或极小值)。

- 极值是一个局部的概念。
- 极值要求点 x_0 的左右邻域均有定义, 端点处不讨论极值, 间断点不可能是极值点。

1.2 单调性与极值的判别

1.2.1 单调性的判别

- 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导
 - 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加
 - 若在 (a, b) 内有 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限个点处成立, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减少
 - 导数为 0 仅能说明在某点处的函数值变化充分小, 而不能说明没变化

1.2.2 一阶可导点是极值点的必要条件

- 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$
- 若 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的极值点, 则只有以下两种情况
 - 驻点: $f'(x_0) = 0$
 - 不可导点: $f'(x_0)$ 不存在。如 $y = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处的情形
- 找极值的两种情况: 驻点 | 不可导点

1.2.3 判别极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 则:

- ① 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值
- ② 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值
- ③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号, 则点 x_0 不是极值点
- ④ $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不一定可导, 可能出现角点

1.2.4 判别极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$ 。

- ① 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值
- ② 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值
- ③ 若 $f''(x_0) = 0$, 则该判别法失效, 需借助高阶导数或其他方法判断。如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处是极小值, $f(x) = x^3$ 在 $x_0 = 0$ 处是拐点, 不是极值点

1.2.5 判别极值的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ($n \geq 2$), 则:

- ① 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值
- ② 若 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值

当 n 为奇数时, 点 x_0 不是极值点。

1.3 凹凸性与拐点的概念

1.3.1 凹凸性的定义

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续

(a) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的 (或称凹弧)

(b) 若对 I 上任意不同的两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的 (或称凸弧)。

(c) 广义化:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \begin{cases} < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), & \text{凹函数,} \\ > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), & \text{凸函数,} \end{cases}$$

其中 $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。

- 若对任意 $x_0 \in (a, b)$ 及任意 $x \in (a, b)$ 且 $x \neq x_0$, 恒有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

即除切点外, 曲线严格位于其切线的下方, 则称函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的。

- 若对任意 $x_0 \in (a, b)$ 及任意 $x \in (a, b)$ 且 $x \neq x_0$, 恒有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

即除切点外, 曲线严格位于其切线的上方, 则称函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的。

1.3.2 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点。

- ① 间断点不可能为拐点, 拐点处函数必须连续。
- ② 判别拐点时, 只需判断凹凸性的变化, 凹与凸不分先后。
- ③ 极值点只写横坐标 $x = x_0$; 而拐点应写 $(x_0, f(x_0))$, 拐点在曲线上

1.4 凹凸性与拐点的判别

1.4.1 判别凹凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 则:

- ① 若在 I 上 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (凹弧)。
- ② 若在 I 上 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (凸弧)。

1.4.2 二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点, 则必有 $f''(x_0) = 0$ 。若点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则只有以下两种情况

1. 二阶导数存在必为 0: $f''(x_0) = 0$ 。如 $y = x^3$ 在 $(0, 0)$ 处的情形
2. 二阶导数不存在的点也有可能是拐点: $f''(x_0)$ 不存在。如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0, 0)$ 处的情形

1.4.3 判别拐点的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内二阶导数存在, 且在 x_0 的左、右邻域内 $f''(x)$ 变号 (无论是由正变负, 还是由负变正), 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.4 判别拐点的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点

1.4.5 判别拐点的第三充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 2, 3, \dots, n - 1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则当 n 为奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

1.5 极值点与拐点的重要结论

- ① 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点; 曲线的不可导点可同时为极值点和拐点
- ② 设多项式函数 $f(x) = (x - a)^n g(x)$ ($n > 1$), 且 $g(a) \neq 0$, 则当 n 为偶数时, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极值点; 当 n 为奇数时, 点 $(a, 0)$ 是 $f(x)$ 的拐点

- ③ 设多项式函数 $f(x) = (x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \cdots (x - a_k)^{n_k}$, 其中 n_i 为正整数, a_i 为实数, 且 a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 两两不等。记 k_1 为 $n_i = 1$ 的个数, k_2 为满足 $n_i > 1$ 且 n_i 为偶数的个数, k_3 为满足 $n_i > 1$ 且 n_i 为奇数的个数。则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1 + 2k_2 + k_3 - 1$, 拐点个数为 $k_1 + 2k_2 + 3k_3 - 2$

1.6 漐近线

当曲线上的点远离原点时, 曲线与某直线充分靠近, 则称该直线为曲线的漐近线

1.6.1 铅直漐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$), 则 $x = x_0$ 为一条铅直漐近线。 x_0 的可能情况为:

1. 函数的无定义点。e.g.: 函数 $y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处无定义。
2. 函数定义区间的端点。e.g.: 函数 $y = \ln x$ ($x > 0$) 在 $x \rightarrow 0^+$ 处。
3. 分段函数的分段点。e.g.:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处为分段点。

1.6.2 水平漐近线

1. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1$, 则 $y = y_1$ 为函数 $y = f(x)$ 的一条水平漐近线;
2. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2$, 则 $y = y_2$ 为函数 $y = f(x)$ 的一条水平漐近线;
3. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$, 则 $y = y_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的一条水平漐近线

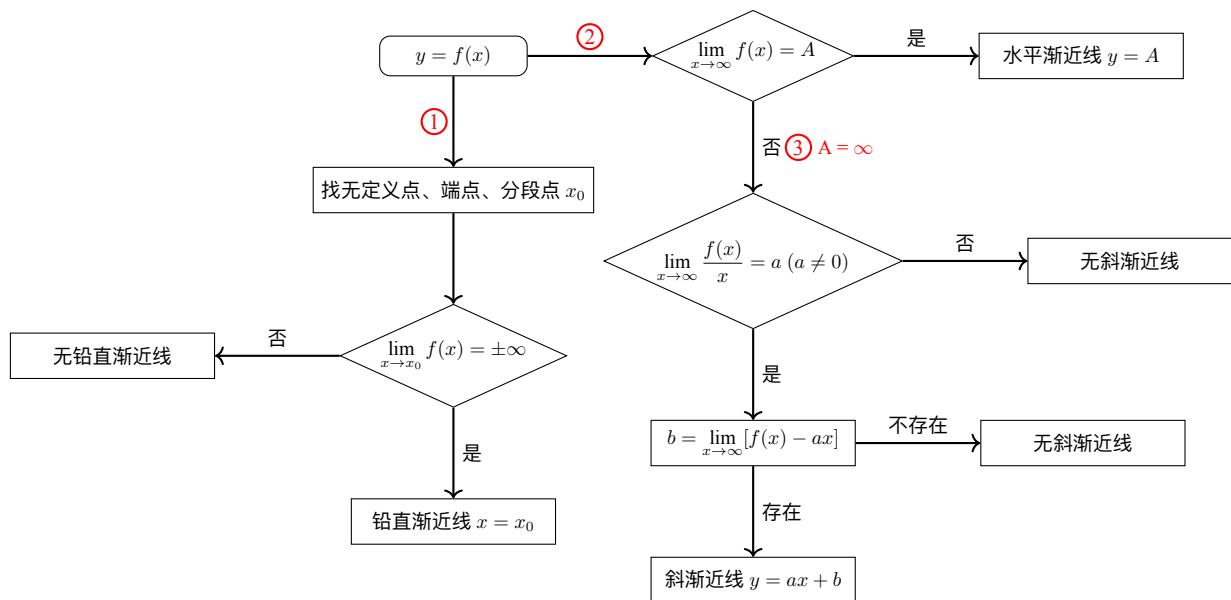
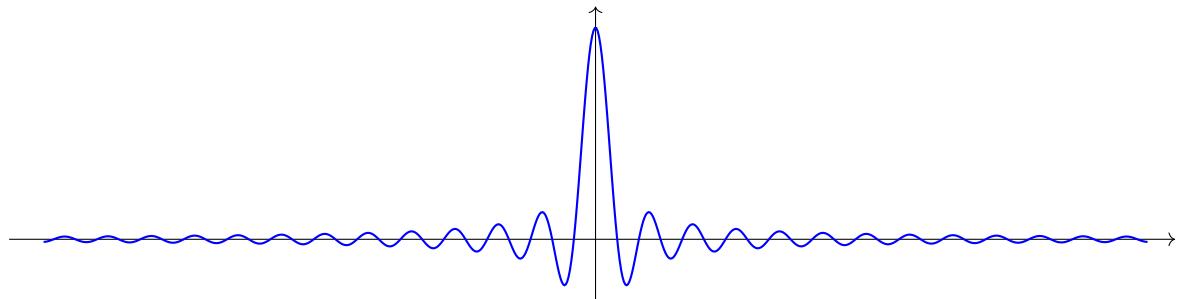
1.6.3 斜漐近线

1. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a_1$ ($a_1 \neq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_1 x] = b_1$, 则直线 $y = a_1 x + b_1$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜漐近线。

2. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a_2$ ($a_2 \neq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_2 x] = b_2$, 则直线 $y = a_2 x + b_2$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线。
3. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$, 则直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线。

1.6.4 方法总结

1. 寻找渐近线顺序: 铅直渐近线、水平渐近线、斜渐近线
2. 求斜渐近线时, a 与 b 均应求出来才可能, 仅求出 a 不能确定有斜渐近线
3. ★ 曲线与渐近线可能会有交点。e.g. $y = \frac{\sin x}{x}$



1.7 最值或取值范围

1.7.1 最值的定义

设 x_0 为函数 $f(x)$ 定义域内的一点。若对于 $f(x)$ 的定义域内任意一点 x , 均有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \geq f(x_0))$$

成立, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的最大值 (或最小值)。

1.7.2 求区间 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m

- ① 求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可疑点——驻点与不可导点, 并求出这些可疑点处的函数值;
- ② 求出端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$;
- ③ 比较以上所求得的所有函数值, 其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 M , 最小者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值 m

1.7.3 求区间 (a, b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或取值范围

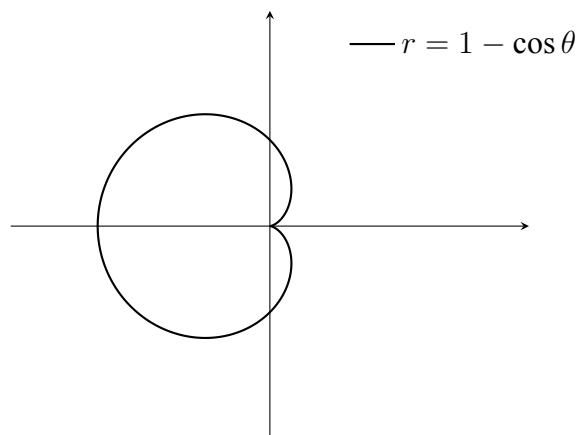
- ① 求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可疑点——驻点与不可导点, 并求出这些可疑点处的函数值;
- ② 求区间 (a, b) 两端的单侧极限若 a, b 为有限常数, 则求 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$; 若 $a = -\infty$, 则求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; 若 $b = +\infty$, 则求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 记以上所求左端极限为 A , 右端极限为 B ;
- ③ 比较前两步所得结果, 确定函数的最值或取值范围。

1.8 作函数图像

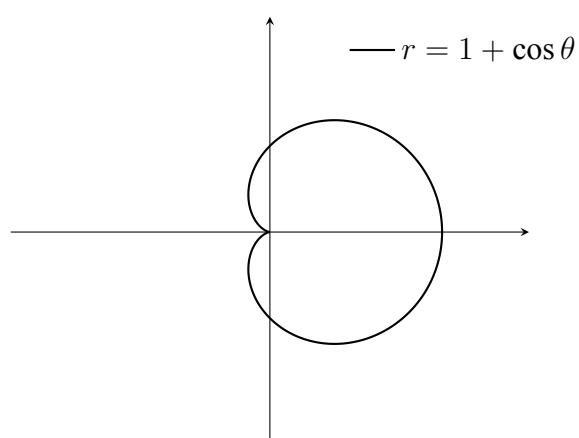
1.8.1 给出函数 $f(x)$, 作图的一般步骤

- ① 确定定义域, 考查函数是否具有奇偶性、周期性, 并合理利用图像变换;
- ② 利用导数工具: 一阶导数确定函数的单调区间与极值点, 二阶导数确定曲线的凹凸区间与拐点;
- ③ 考查函数的渐近线;
- ④ 作出函数图像

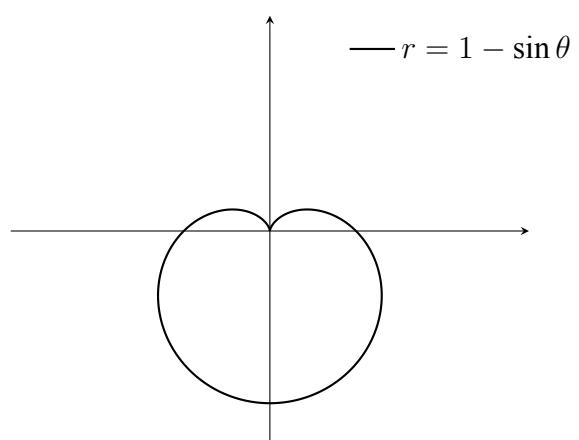
1.8.2 常用平面图像



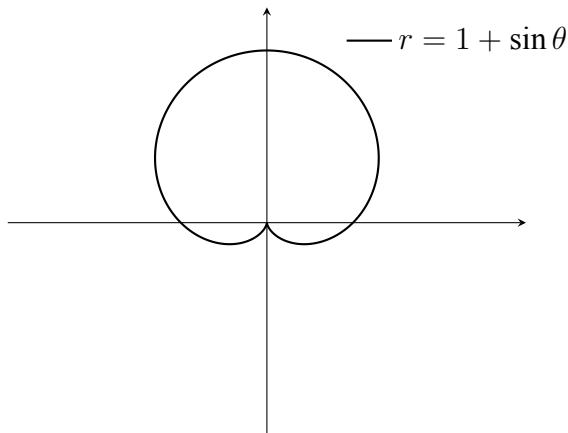
1. 心形线



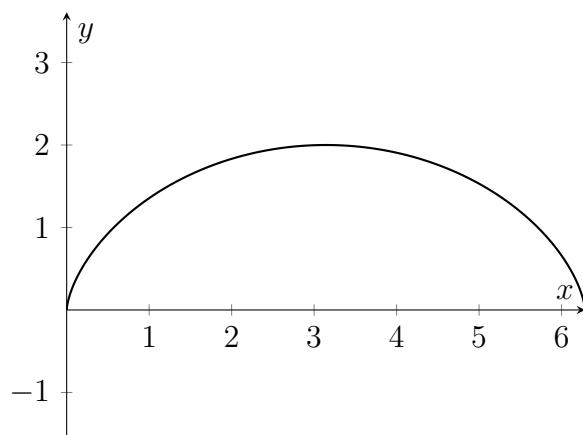
2. 心形线



3. 心形线



4. 心形线



5. 摆线（平摆线） TODO

6. 星形线

1.8.3 直角坐标系的观点画极坐标的图

1. 直角坐标系的观点下，视 θ 为 x , γ 为 y , 即可画出图像
2. 用描点法（看变化趋势）可画出其在极坐标下的图像

1.9 曲率及曲率半径

设函数 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(x, y(x))$ 处的曲率（表示曲线弯曲程度）公式为

$$k = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率半径的计算公式为

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}, \quad y'' \neq 0$$

弯曲程度越大，曲率越大，曲率圆的半径越小

1.10 结论

1. 如 α 是 $f(x) = 0$ 的 $m (\geq 1)$ 重根，则 α 是 $f'(x)$ 的 $m - 1$ 重根
2. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0 ，并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点，那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点

1.11 条件转换思路

1. $f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow \{[f(x)]^2\}' = 2f(x) \cdot f'(x)$