

本节内容

最短路径

Floyd算法

Robert W. Floyd



罗伯特·弗洛伊德

(1936–2001) Robert W. Floyd



1978年图灵奖得主

最短路径问题

- Floyd算法 (Floyd-Warshall算法)
- 堆排序算法

单源最短路径

BFS 算法 (无权图)

Dijkstra 算法 (带权图、无权图)

各顶点间的最短路径

Floyd 算法 (带权图、无权图)



Floyd算法



Floyd算法：求出每一对顶点之间的最短路径

使用动态规划思想，将问题的求解分为多个阶段

对于n个顶点的图G，求任意一对顶点 $v_i \rightarrow v_j$ 之间的最短路径可分为如下几个阶段：

#初始：不允许在其他顶点中转，最短路径是？

#0：若允许在 v_0 中转，最短路径是？

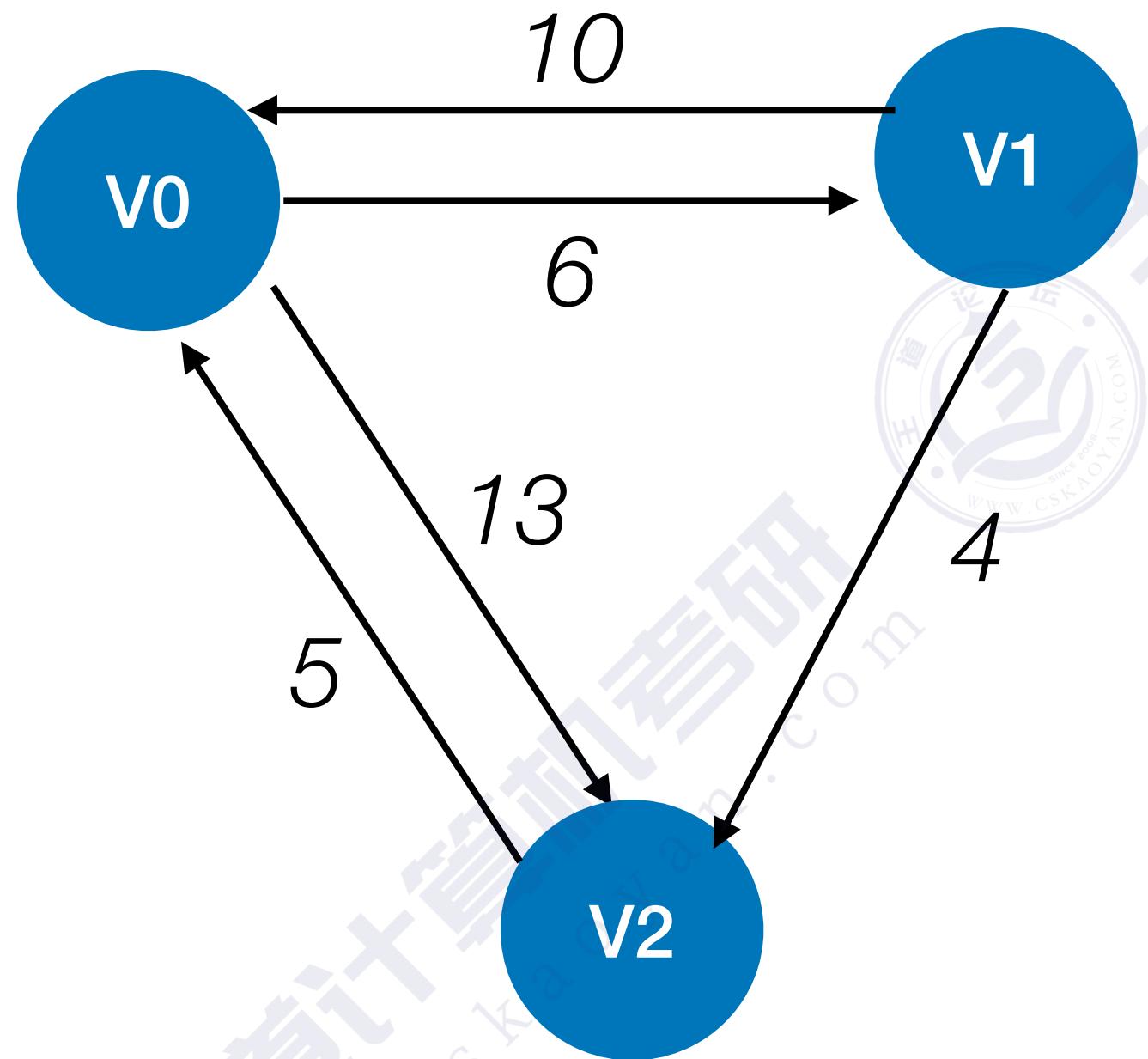
#1：若允许在 v_0 、 v_1 中转，最短路径是？

#2：若允许在 v_0 、 v_1 、 v_2 中转，最短路径是？

...

#n-1：若允许在 v_0 、 v_1 、 v_2 v_{n-1} 中转，最短路径是？

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(-1)} =$

	v0	v1	v2
v0	0	6	13
v1	10	0	4
v2	5	∞	0

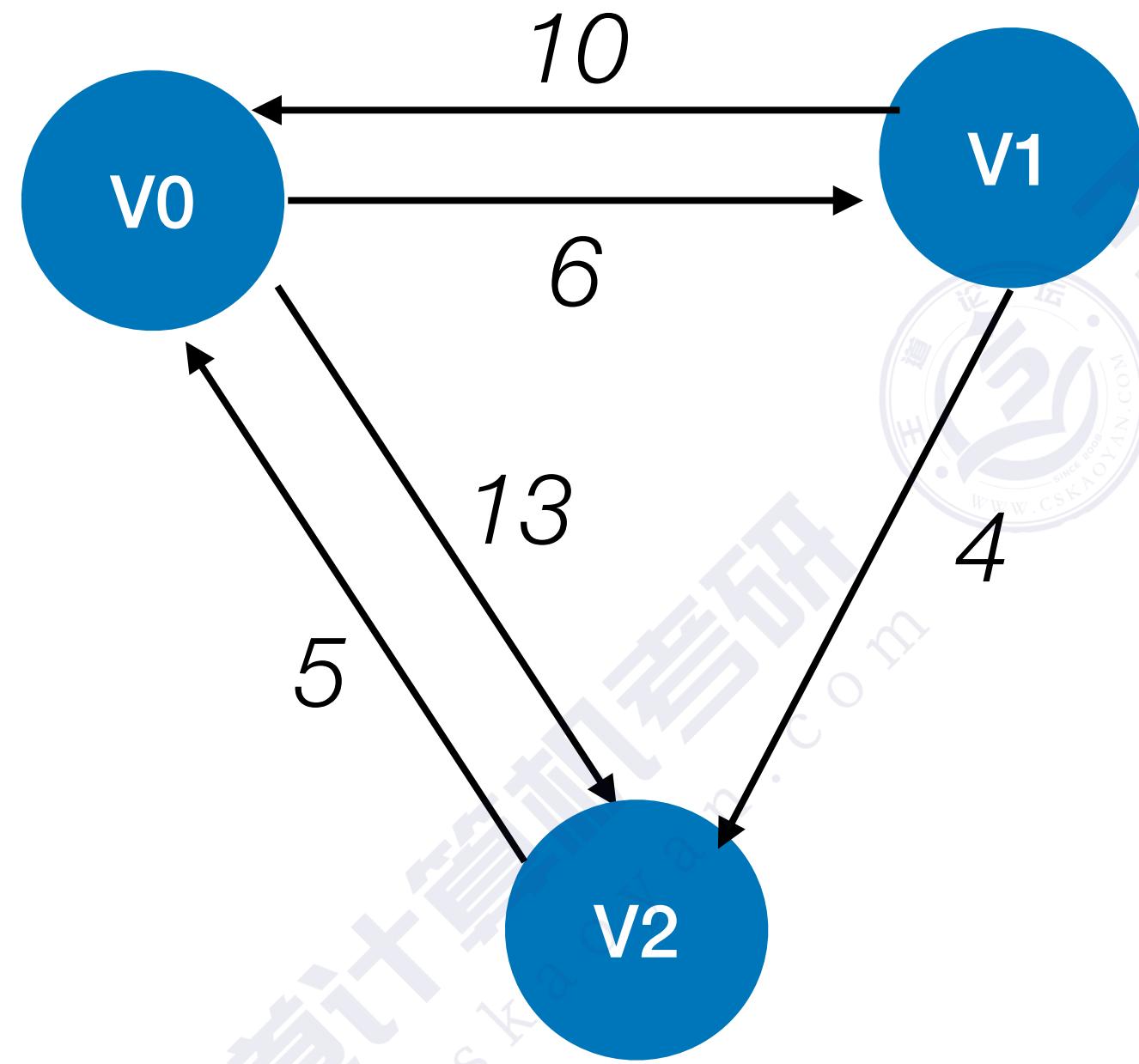
两个顶点之间的中转点

$path^{(-1)} =$

	v0	v1	v2
v0	-1	-1	-1
v1	-1	-1	-1
v2	-1	-1	-1

#初始：不允许在其他顶点中转，最短路径是？

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(-1)} =$

	V0	V1	V2
V0	0	6	13
V1	10	0	4
V2	5	∞	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(-1)} =$

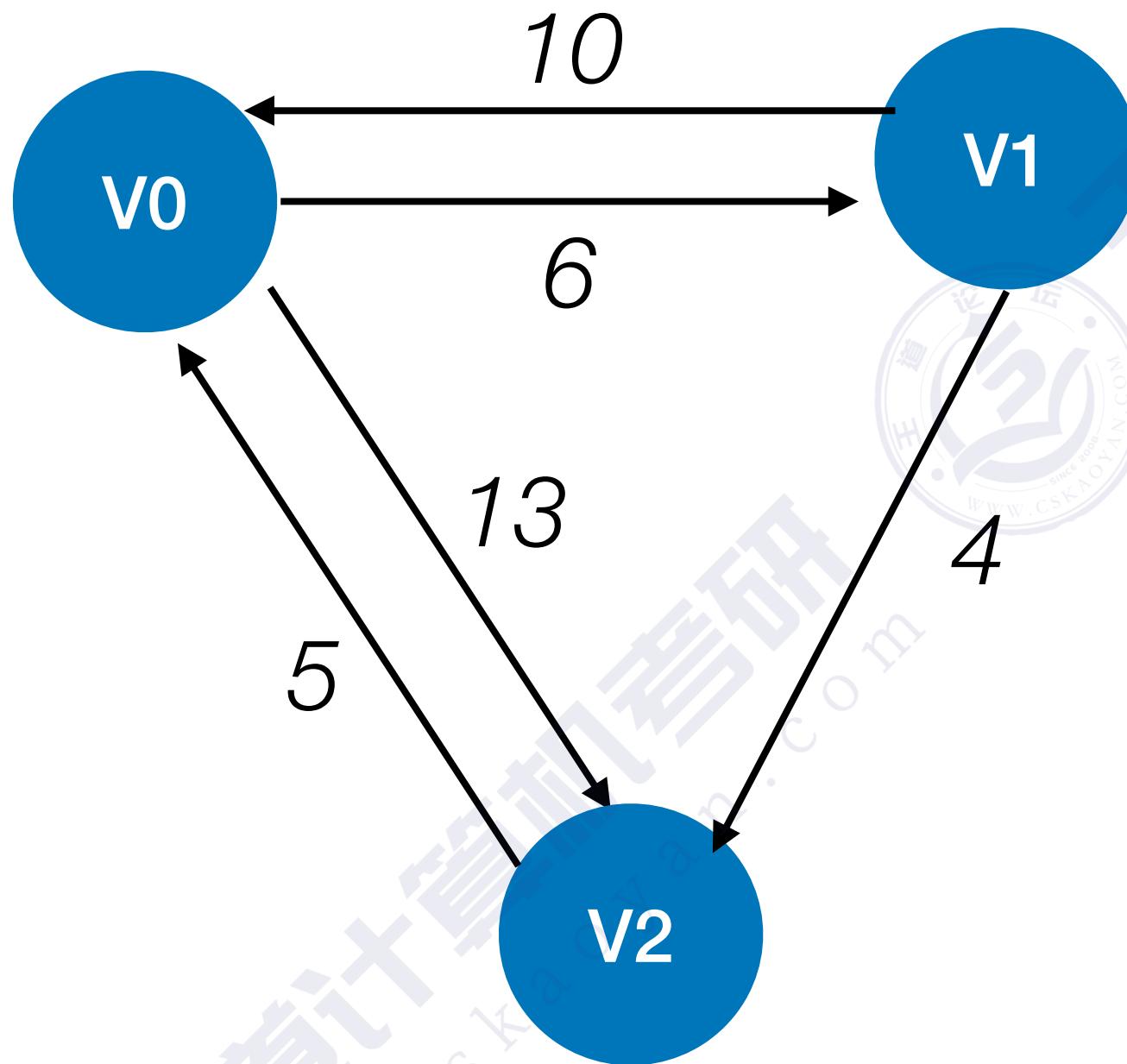
	V0	V1	V2
V0	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1

#0: 若允许在 V_0 中转，最短路径是？——求 $A^{(0)}$ 和 $path^{(0)}$

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$A^{(-1)}[2][1] > A^{(-1)}[2][0] + A^{(-1)}[0][1] = 11$
 $A^{(0)}[2][1] = 11$
 $path^{(0)}[2][1] = 0;$

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(-1)} =$

	V_0	V_1	V_2
V_0	0	6	13
V_1	10	0	4
V_2	5	∞	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(-1)} =$

	V_0	V_1	V_2
V_0	-1	-1	-1
V_1	-1	-1	-1
V_2	-1	-1	-1

#0: 若允许在 V_0 中转，最短路径是？——求 $A^{(0)}$ 和 $path^{(0)}$

若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$

$$A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$$

$path^{(k)}[i][j] = k$

否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

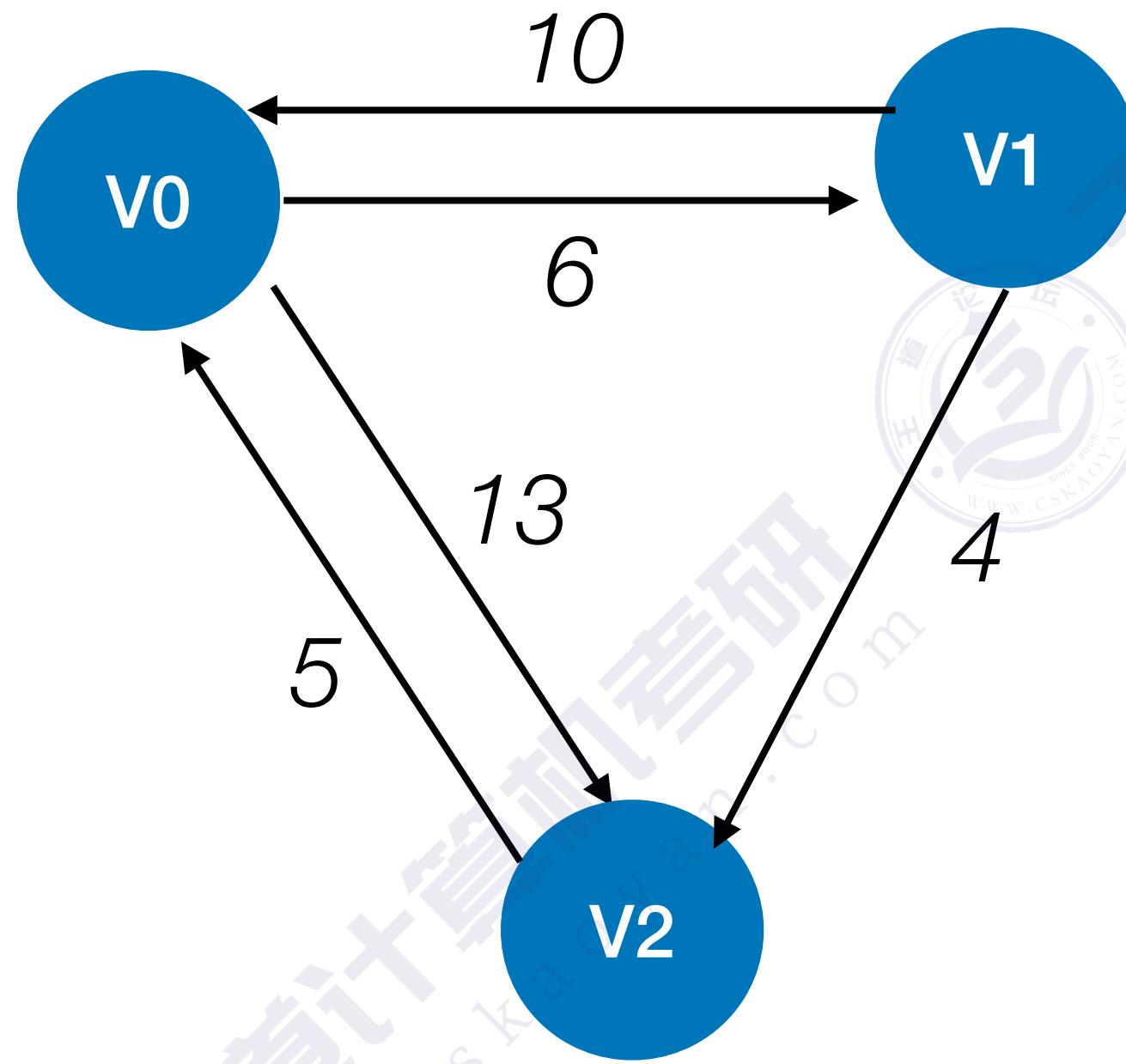
$A^{(0)} =$

	V_0	V_1	V_2
V_0	0	6	13
V_1	10	0	4
V_2	5	11	0

$path^{(0)} =$

	V_0	V_1	V_2
V_0	-1	-1	-1
V_1	-1	-1	-1
V_2	-1	0	-1

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(0)} =$

	v0	v1	v2
v0	0	6	13
v1	10	0	4
v2	5	11	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(0)} =$

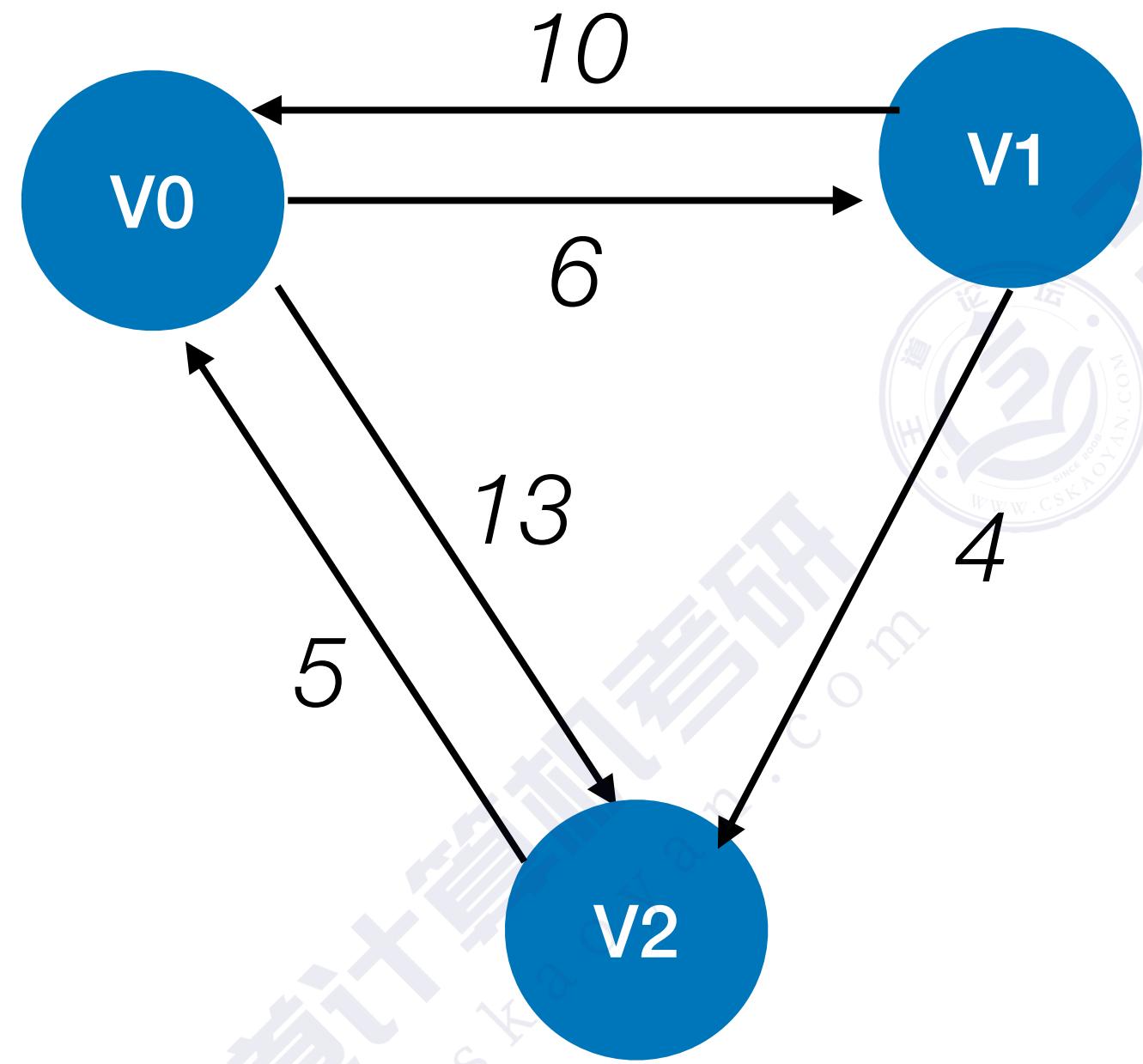
	v0	v1	v2
v0	-1	-1	-1
v1	-1	-1	-1
v2	-1	0	-1

#1：若允许在 v_0 、 v_1 中转，最短路径是？——求 $A^{(1)}$ 和 $path^{(1)}$

若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$$\begin{aligned}
 A^{(0)}[0][2] &> A^{(0)}[0][1] + A^{(0)}[1][2] = 10 \\
 A^{(1)}[0][2] &= 10 \\
 path^{(1)}[0][2] &= 1;
 \end{aligned}$$

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(0)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	0	6	13
v_1	10	0	4
v_2	5	11	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(0)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	-1	-1	-1
v_1	-1	-1	-1
v_2	-1	0	-1

#1：若允许在 v_0 、 v_1 中转，最短路径是？——求 $A^{(1)}$ 和 $path^{(1)}$

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

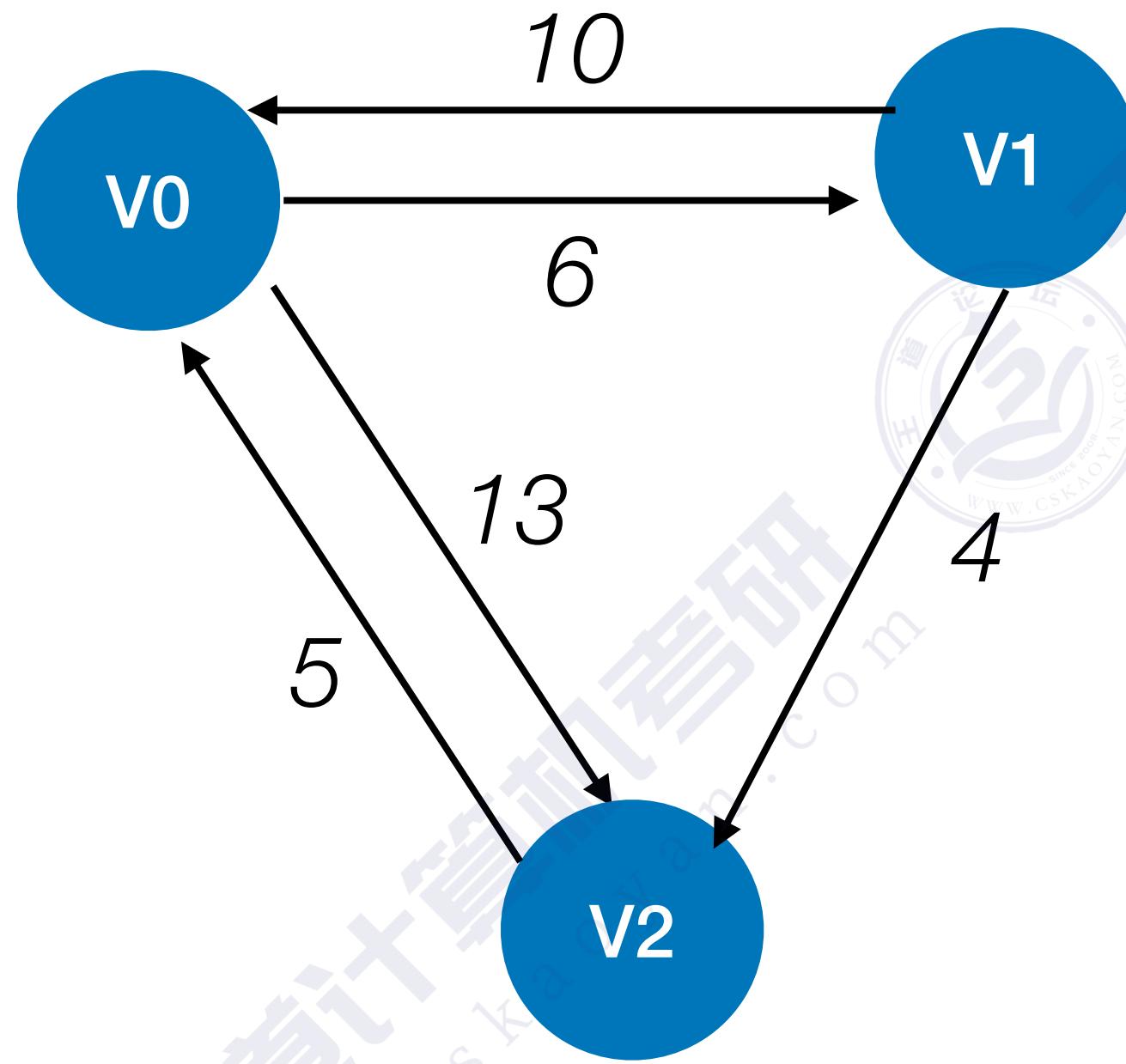
$A^{(1)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	0	6	10
v_1	10	0	4
v_2	5	11	0

$path^{(1)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	-1	-1	1
v_1	-1	-1	-1
v_2	-1	0	-1

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(1)} =$

	v0	v1	v2
v0	0	6	10
v1	10	0	4
v2	5	11	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(1)} =$

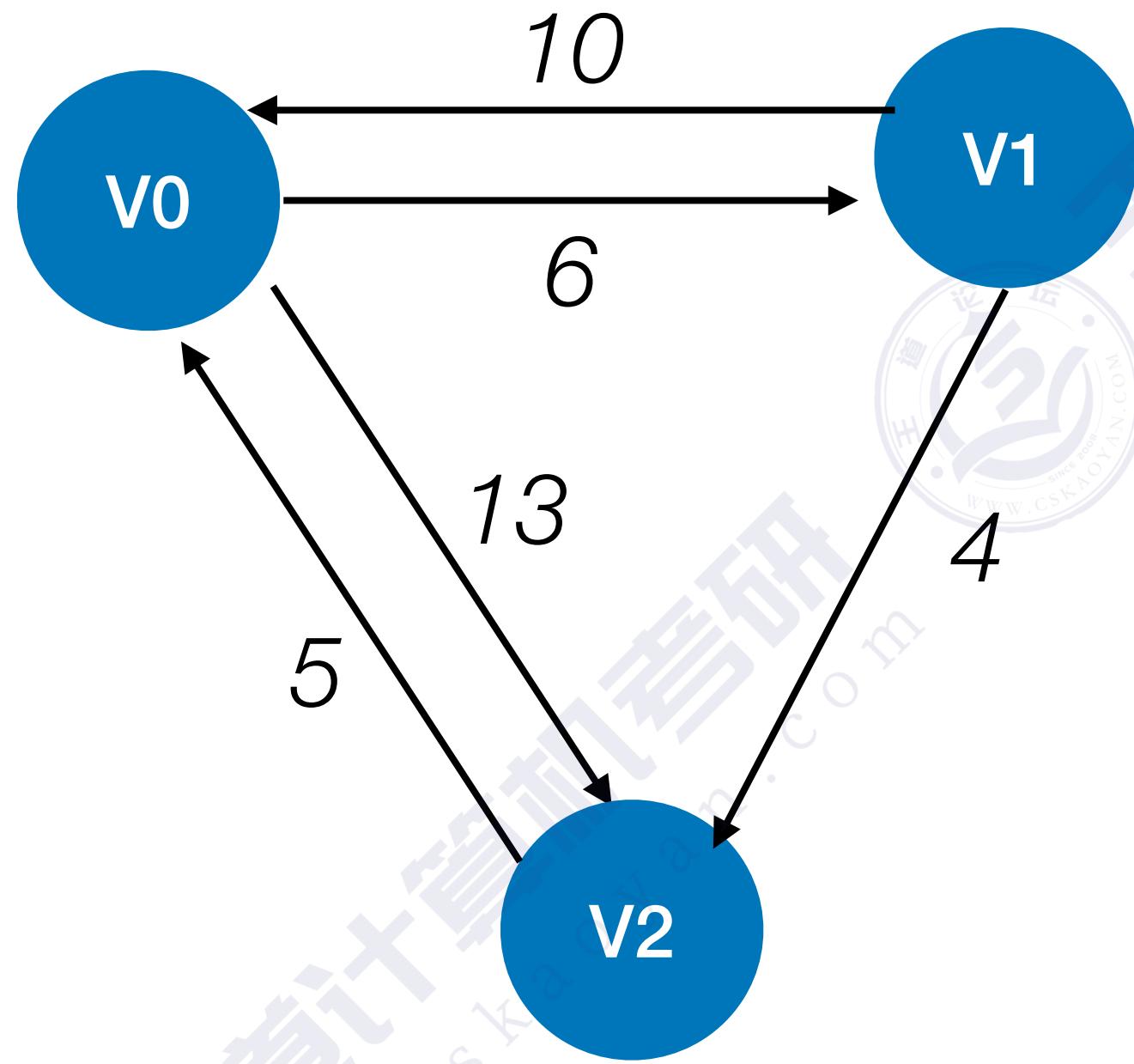
	v0	v1	v2
v0	-1	-1	1
v1	-1	-1	-1
v2	-1	0	-1

#2：若允许在 v_0 、 v_1 、 v_2 中转，最短路径是？——求 $A^{(2)}$ 和 $path^{(2)}$

若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$$\begin{aligned}
 A^{(1)}[1][0] &> A^{(1)}[1][2] + A^{(1)}[2][0] = 9 \\
 A^{(2)}[1][0] &= 9 \\
 path^{(2)}[1][0] &= 2;
 \end{aligned}$$

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(1)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	0	6	10
v_1	10	0	4
v_2	5	11	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(1)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	-1	-1	1
v_1	-1	-1	-1
v_2	-1	0	-1

#2：若允许在 v_0 、 v_1 、 v_2 中转，最短路径是？——求 $A^{(2)}$ 和 $path^{(2)}$

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

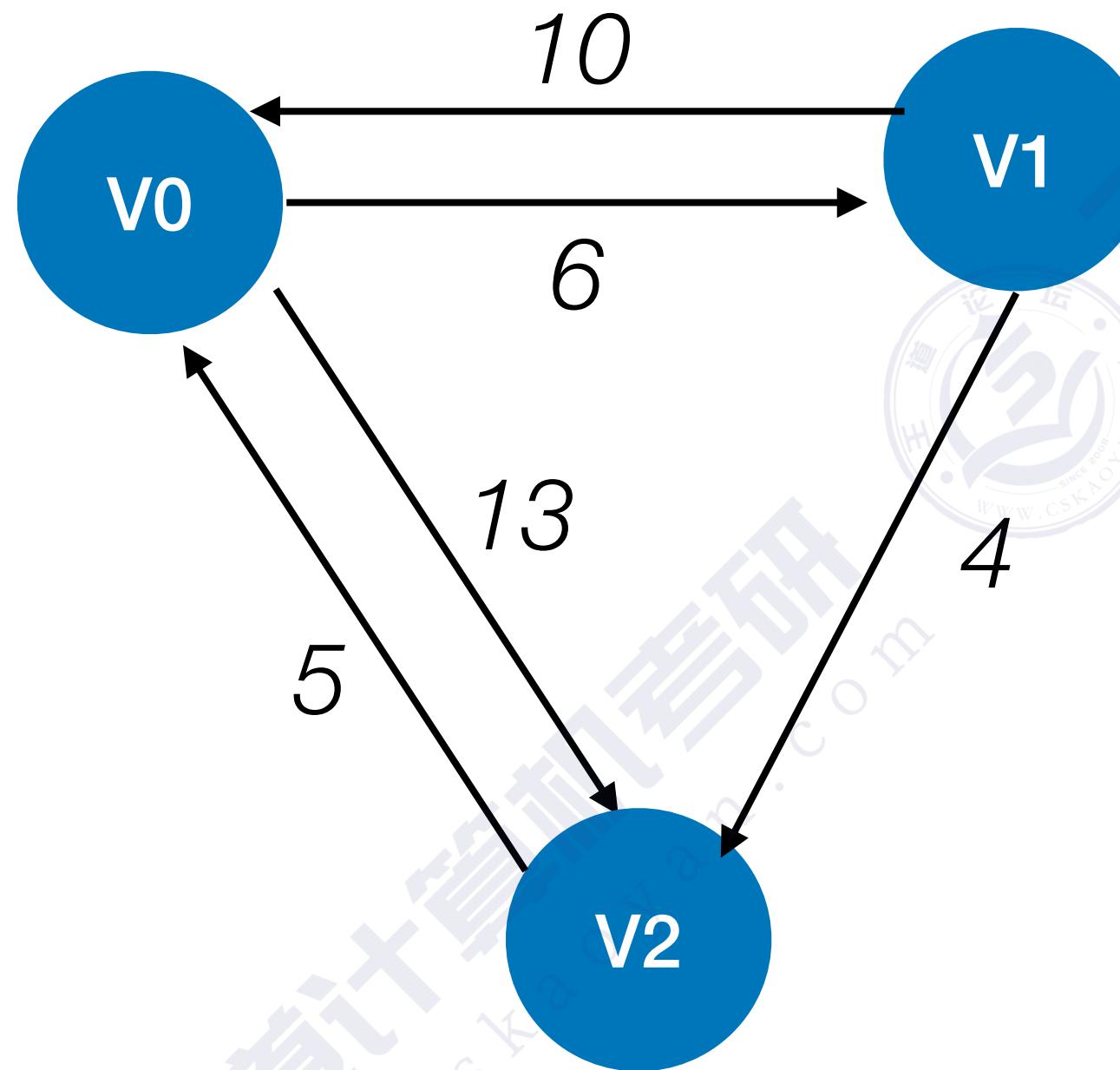
$A^{(2)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	0	6	10
v_1	9	0	4
v_2	5	11	0

$path^{(2)} =$

	v_0	v_1	v_2
v_0	-1	-1	1
v_1	2	-1	-1
v_2	-1	0	-1

Floyd算法



目前来看，各顶点间的最短路径长度

$A^{(2)} =$

	V0	V1	V2
V0	0	6	10
V1	9	0	4
V2	5	11	0

两个顶点之间的中转点

$path^{(2)} =$

	V0	V1	V2
V0	-1	-1	1
V1	2	-1	-1
V2	-1	0	-1

从 $A^{(-1)}$ 和 $path^{(-1)}$ 开始，经过 n 轮递推，得到 $A^{(n-1)}$ 和 $path^{(n-1)}$

根据 $A^{(2)}$ 可知，V1 到 V2 最短路径长度为 4，

根据 $path^{(2)}$ 可知，完整路径信息为 V1_V2

根据 $A^{(2)}$ 可知，V0 到 V2 最短路径长度为 10，

根据 $path^{(2)}$ 可知，完整路径信息为 V0_V1_V2

根据 $A^{(2)}$ 可知，V1 到 V0 最短路径长度为 9，

根据 $path^{(2)}$ 可知，完整路径信息为 V1_V2_V0

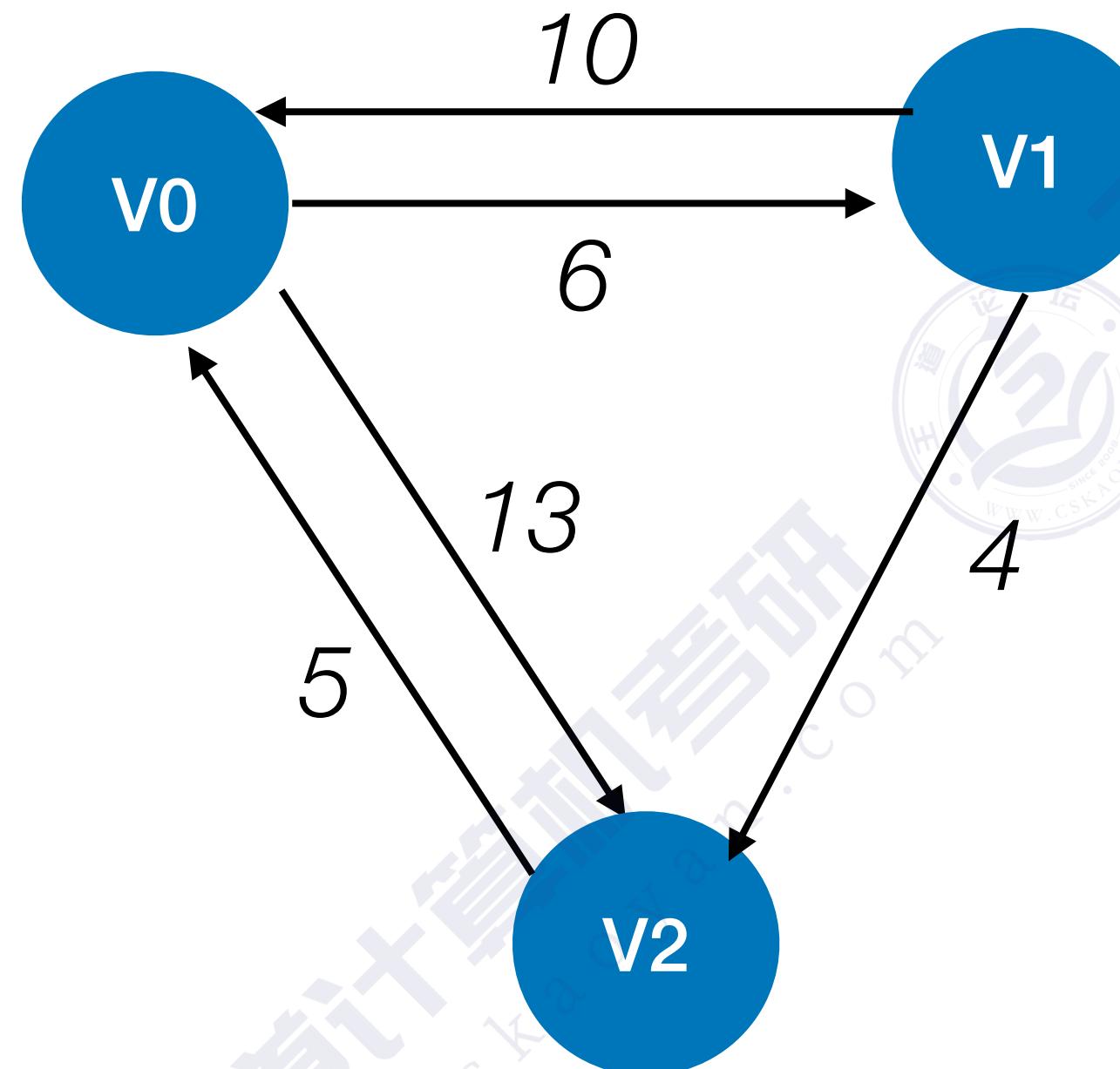
若 A^(k-1)[i][j] > A^(k-1)[i][k] + A^(k-1)[k][j]

$$A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$$

$$path^{(k)}[i][j] = k$$

否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法核心代码



若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$

否
则
 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

A=

	V0	V1	V2
V0	0	6	13
V1	10	0	4
V2	5	∞	0

path=

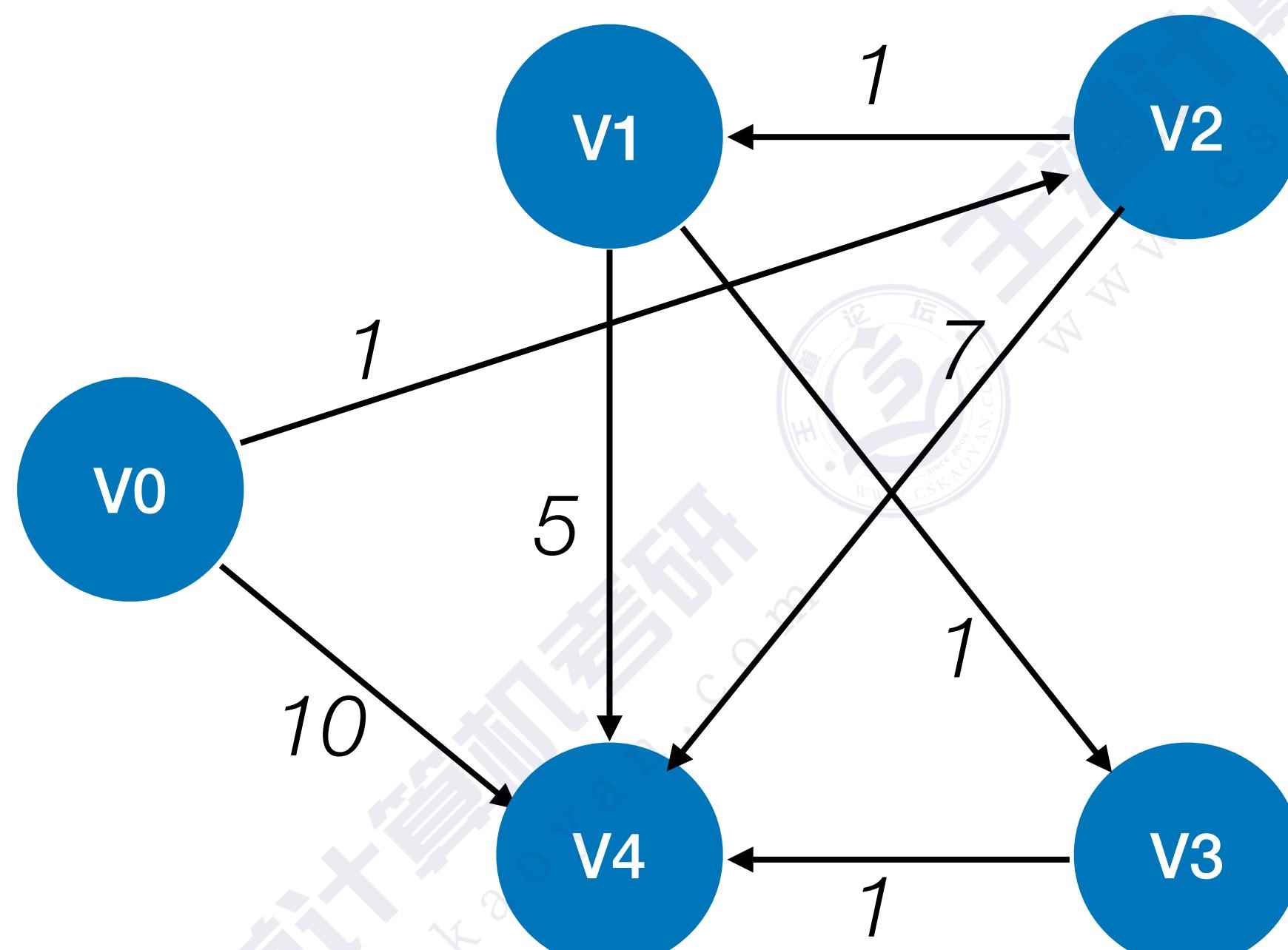
	V0	V1	V2
V0	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1

```

//.....准备工作，根据图的信息初始化矩阵 A 和 path (如上图)
for (int k=0; k<n; k++){           //考虑以 vk 作为中转点
    for(int i=0; i<n; i++){         //遍历整个矩阵， i为行号， j为列号
        for (int j=0; j<n; j++){
            if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){ //以 vk 为中转点的路径更短
                A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];   //更新最短路径长度
                path[i][j]=k;               //中转点
            }
        }
    }
}
  
```

时间复杂度, $O(|V|^3)$
 空间复杂度, $O(|V|^2)$

Floyd算法实例



$$A^{(-1)} =$$

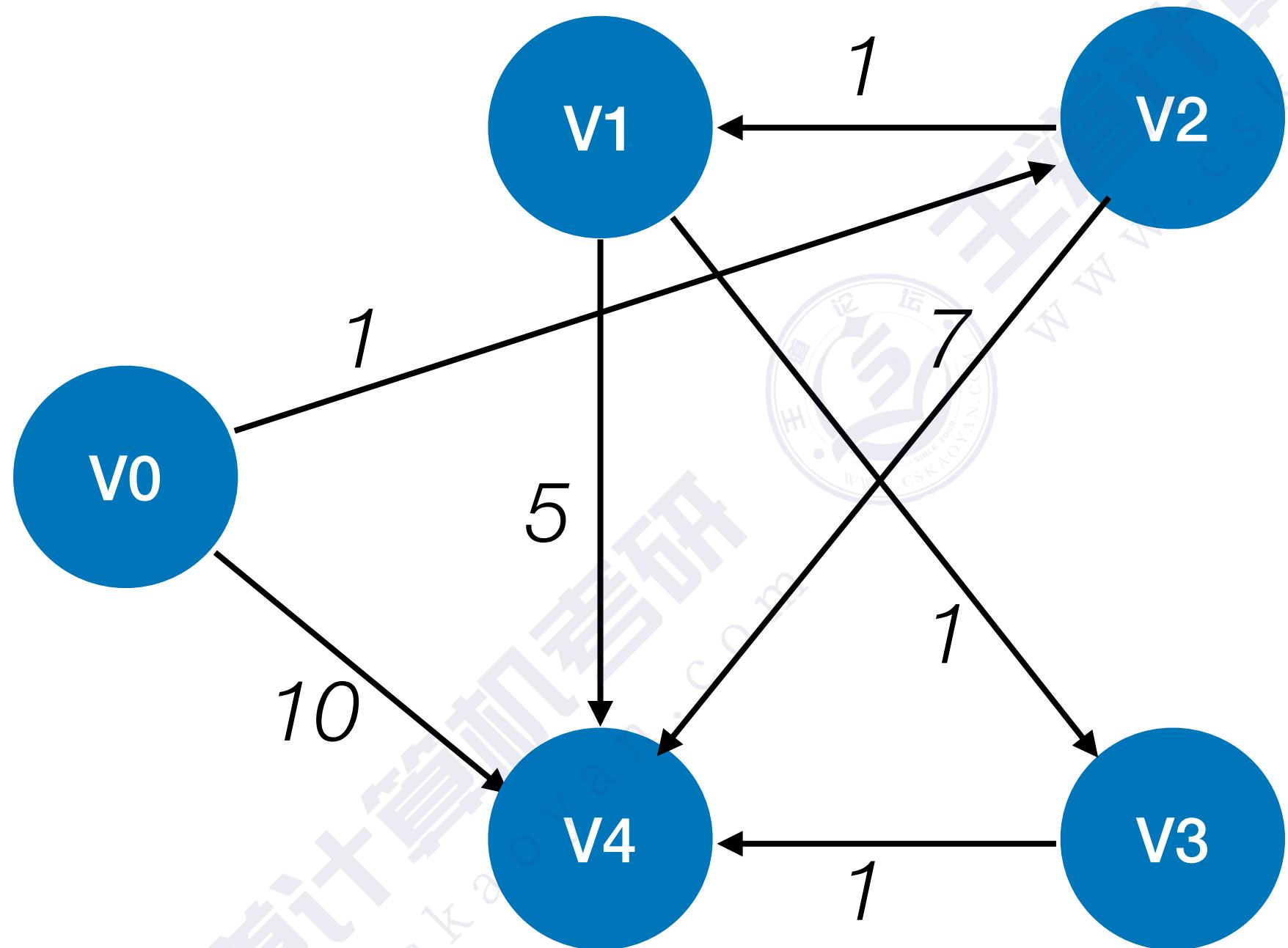
	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(-1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#初始：不允许在其他顶点中转，最短路径是？

Floyd算法实例



$A^{(-1)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(-1)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#0: 若允许在 V_0 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(0)}$ 和 $path^{(0)}$

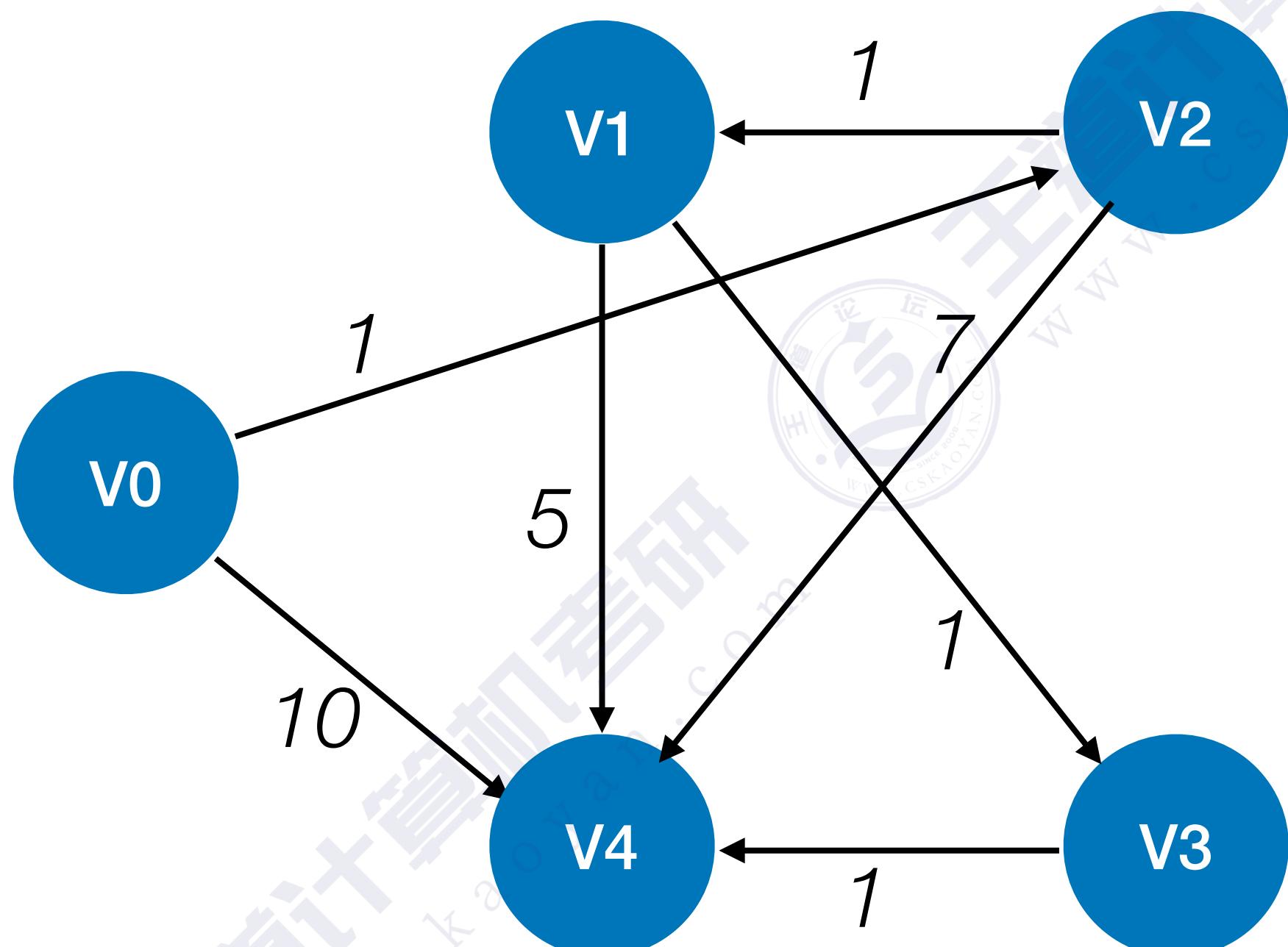
```

for(int i=0; i<n; i++) { //遍历整个矩阵, i为行号, j为列号
    for (int j=0; j<n; j++){
        if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){
            A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];
            path[i][j]=k;
        }
    }
}
  
```

k=0

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



$$A^{(-1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(-1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#0: 若允许在 V_0 中转，最短路径是？——求 $A^{(0)}$ 和 $\text{path}^{(0)}$

$$A^{(0)} =$$

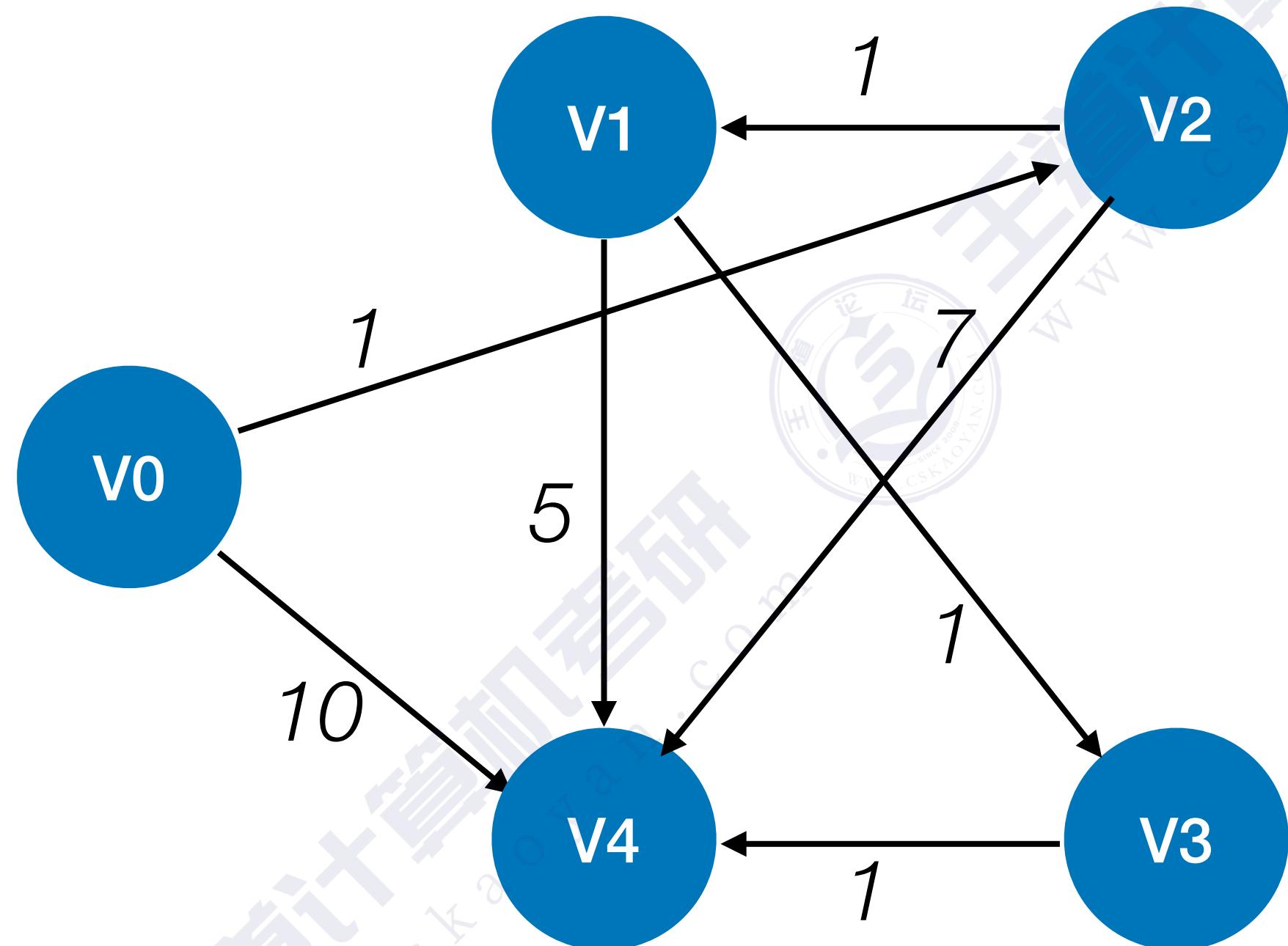
	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(0)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $\text{path}^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $\text{path}^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



$A^{(0)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(0)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#1: 若允许在 V_0 、 V_1 中转，最短路径是？——求 $A^{(1)}$ 和 $path^{(1)}$

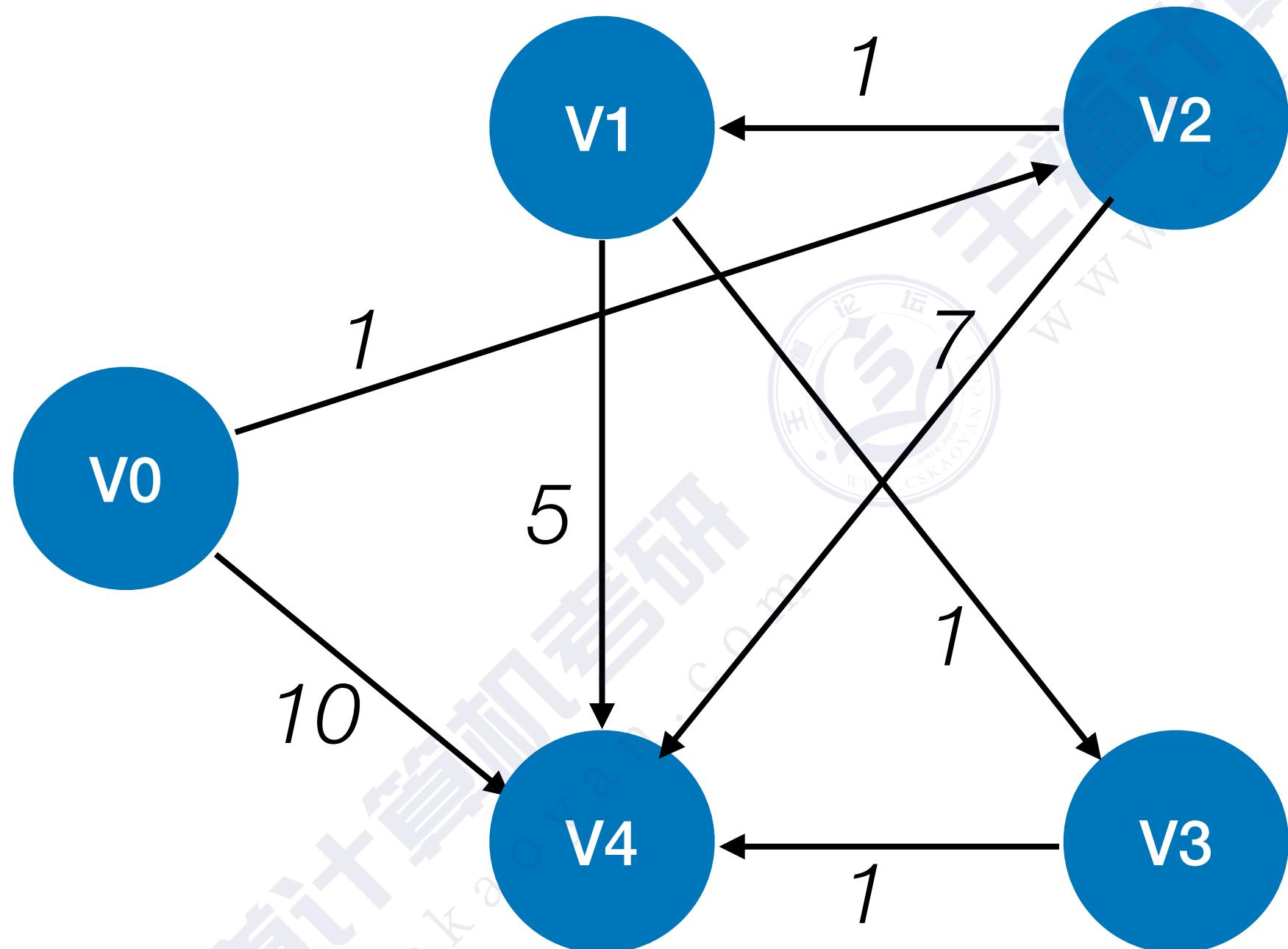
```

for(int i=0; i<n; i++) { //遍历整个矩阵, i为行号, j为列号
    for (int j=0; j<n; j++){
        if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){
            A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];
            path[i][j]=k;
        }
    }
}
  
```

k=1

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



$A^{(0)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(0)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#1: 若允许在 V_0 、 V_1 中转，最短路径是？——求 $A^{(1)}$ 和 $path^{(1)}$

$$A^{(0)}[2][3] > A^{(0)}[2][1] + A^{(0)}[1][3] = 2$$

$$A^{(1)}[2][3] = 2$$

$$path^{(1)}[2][3] = 1;$$

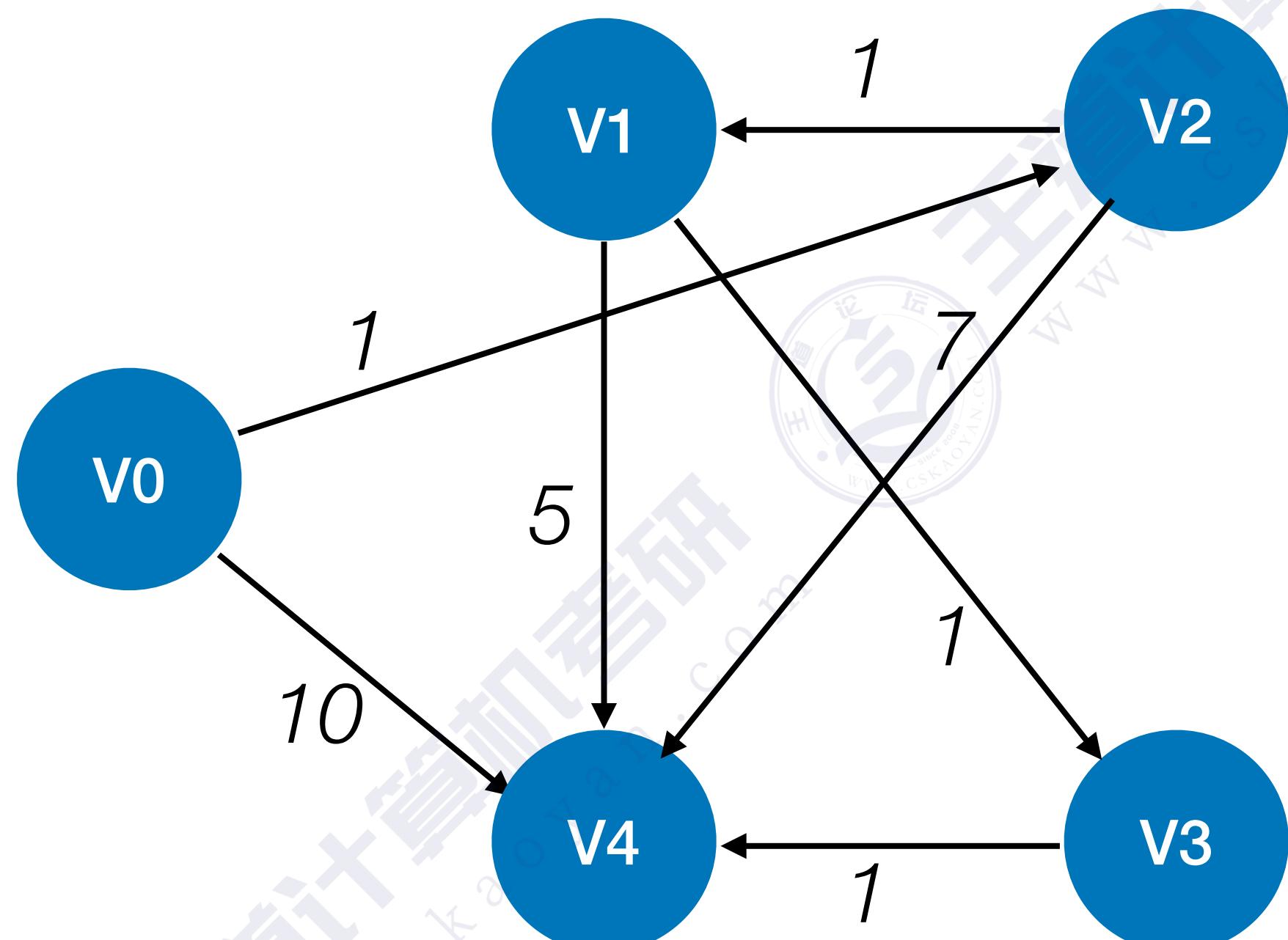
$$A^{(0)}[2][4] > A^{(0)}[2][1] + A^{(0)}[1][4] = 6$$

$$A^{(1)}[2][4] = 6$$

$$path^{(1)}[2][4] = 1;$$

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$$A^{(0)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	∞	7
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$path^{(0)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	-1	-1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#1: 若允许在 V_0 、 V_1 中转，最短路径是？——求 $A^{(1)}$ 和 $path^{(1)}$

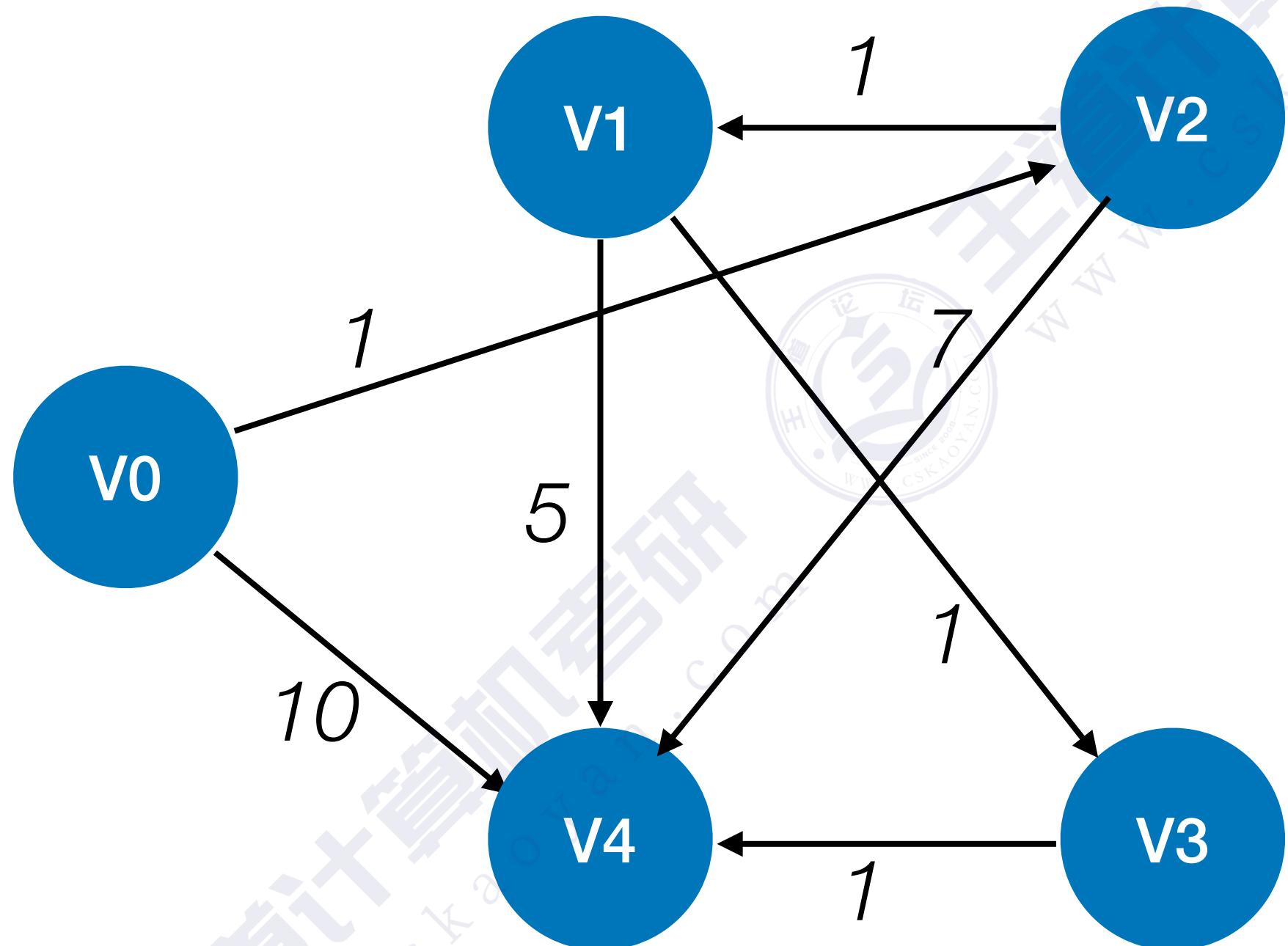
$$A^{(1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$path^{(1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

Floyd算法实例



若
则
否则

$A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$

$$A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$$

$$path^{(k)}[i][j] = k$$

$A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$A^{(1)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(1)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

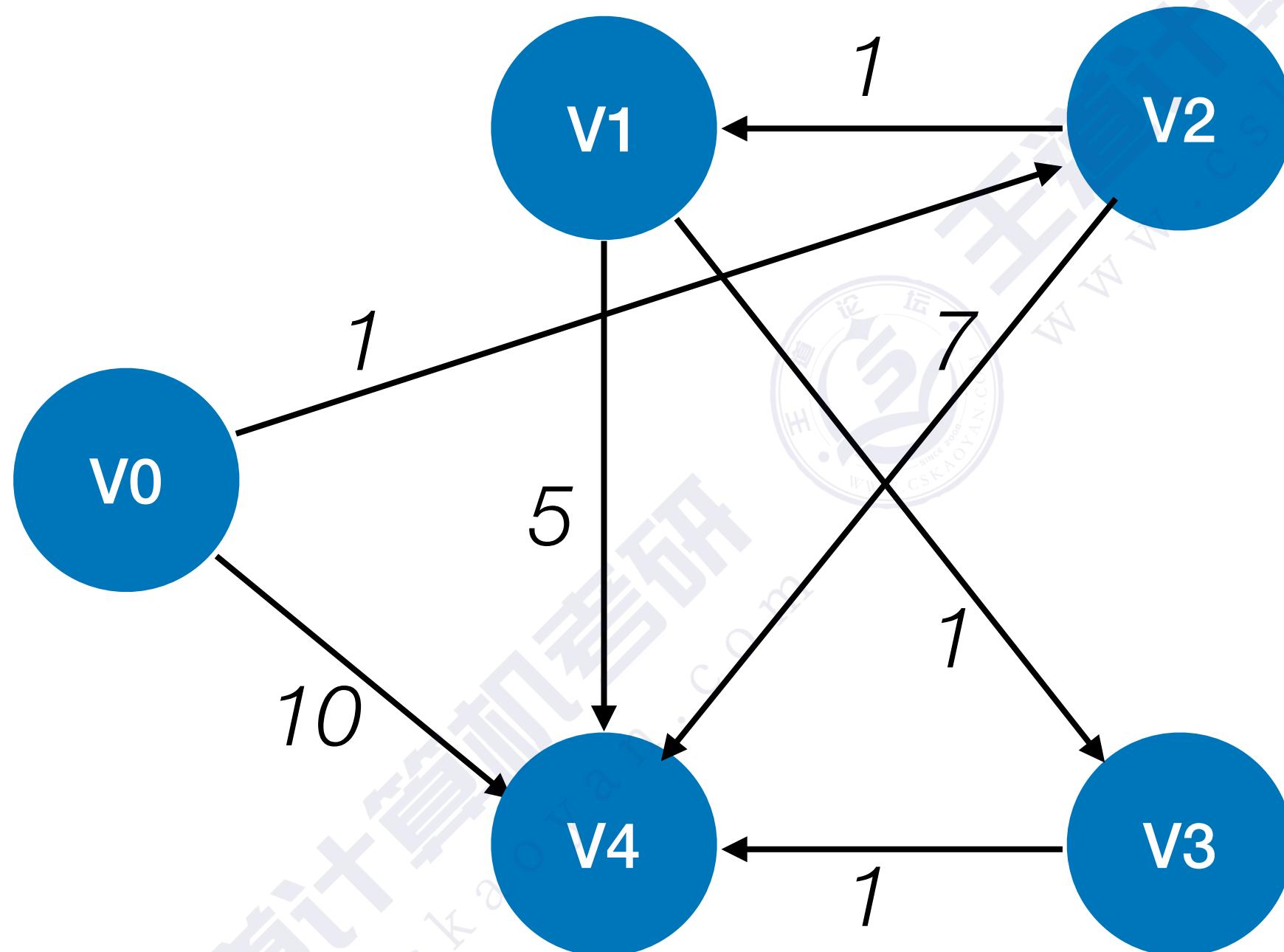
#2: 若允许在 V_0, V_1, V_2 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(2)}$ 和 $path^{(2)}$

```

for(int i=0; i<n; i++) { // 遍历整个矩阵, i为行号, j为列号
    for (int j=0; j<n; j++){
        if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){
            A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];
            path[i][j]=k;
        }
    }
}
  
```

k=2

Floyd算法实例



$A^{(1)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(1)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#2: 若允许在 V_0 、 V_1 、 V_2 中转，最短路径是？——求 $A^{(2)}$ 和 $path^{(2)}$

$$A^{(1)}[0][1] > A^{(1)}[0][2] + A^{(1)}[2][1] = 2$$

$$A^{(2)}[0][1] = 2; path^{(2)}[0][1] = 2;$$

$$A^{(1)}[0][3] > A^{(1)}[0][2] + A^{(1)}[2][3] = 3$$

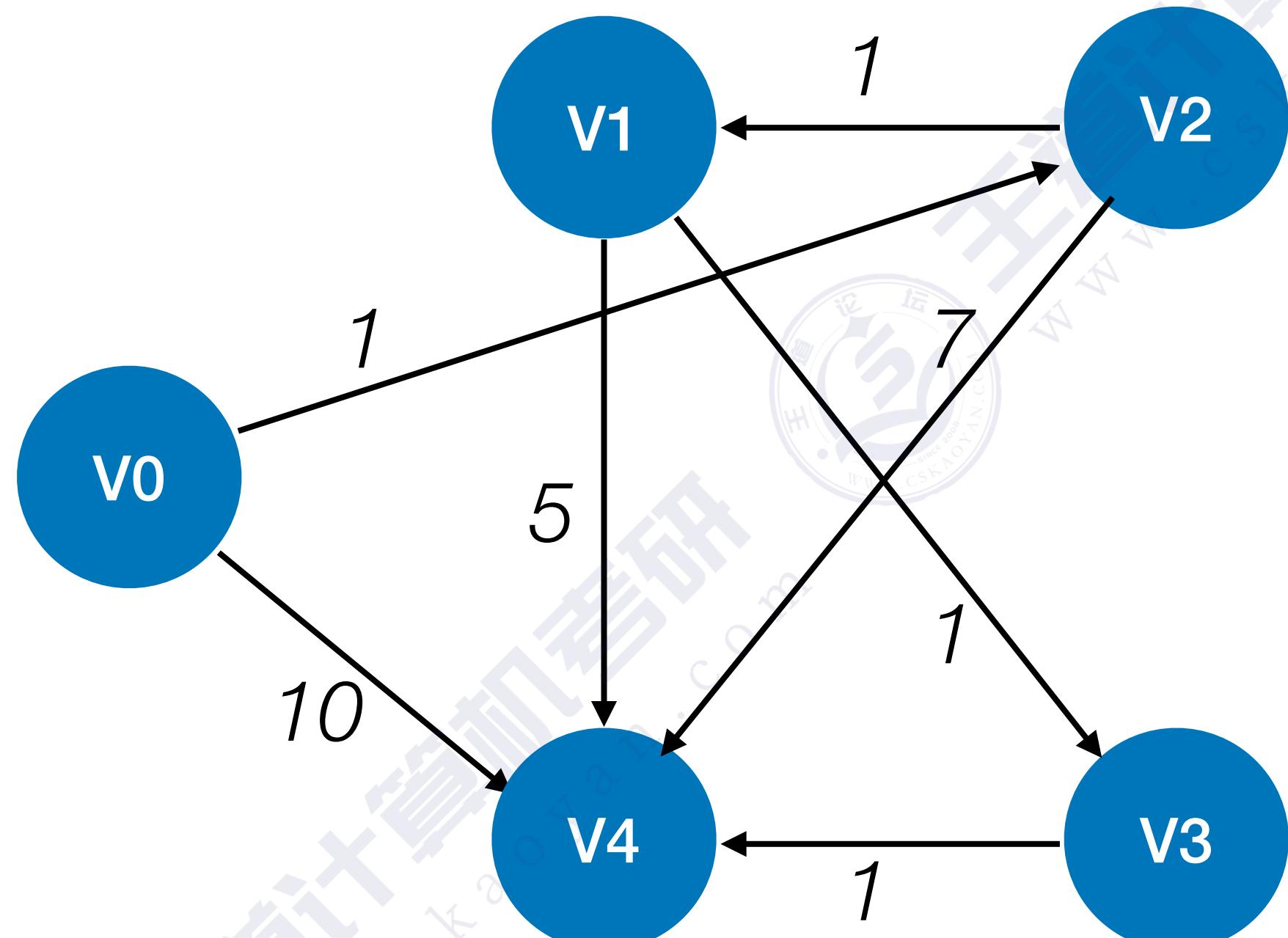
$$A^{(2)}[0][3] = 3; path^{(2)}[0][3] = 2;$$

$$A^{(1)}[0][4] > A^{(1)}[0][2] + A^{(1)}[2][4] = 7$$

$$A^{(2)}[0][4] = 7; path^{(2)}[0][4] = 2;$$

若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $\text{path}^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $\text{path}^{(k)}$ 保持原值

$$A^{(1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	∞	1	∞	10
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(1)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	-1	-1	-1	-1
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#2: 若允许在 V_0, V_1, V_2 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(2)}$ 和 $\text{path}^{(2)}$

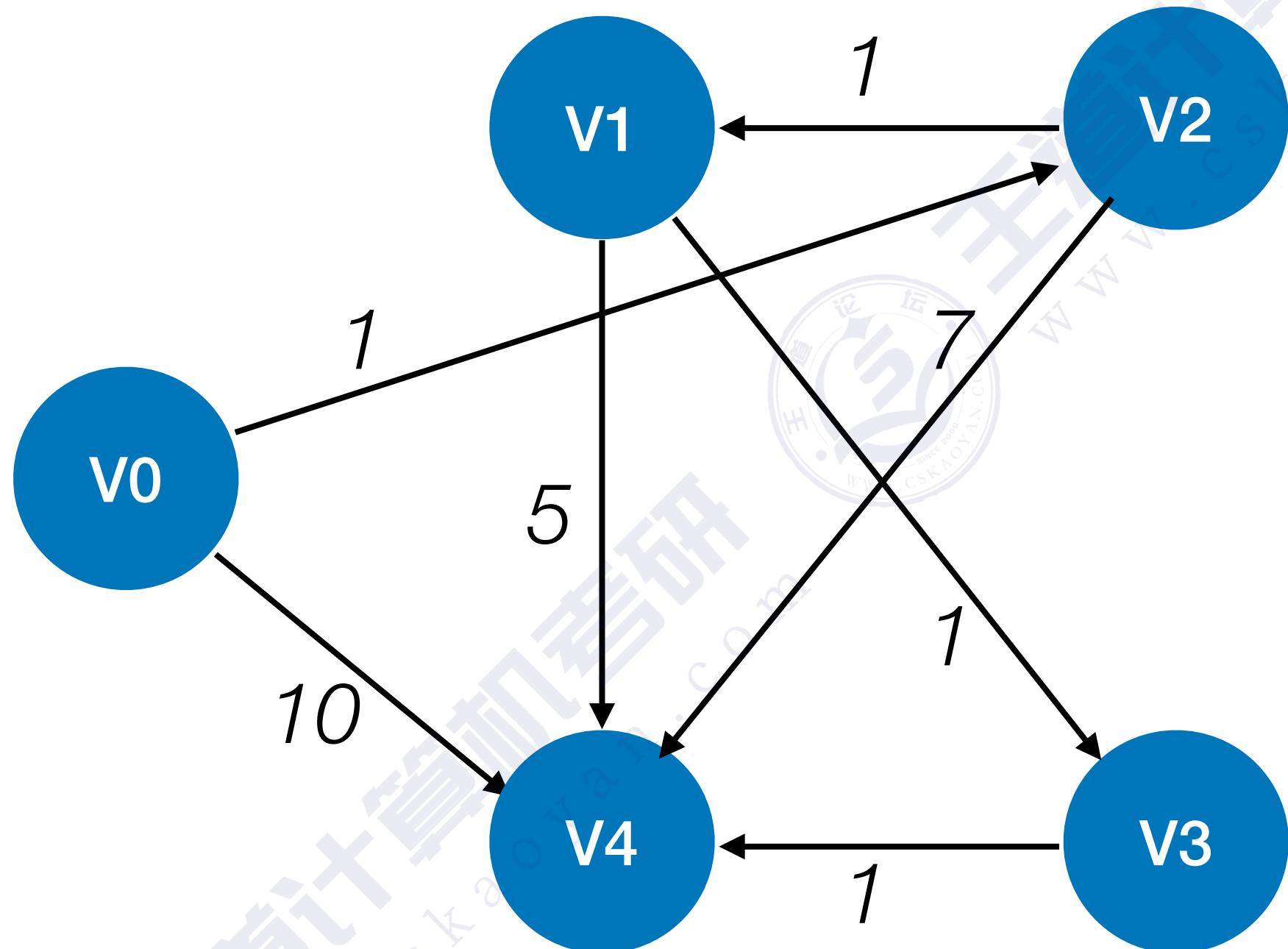
$$A^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	7
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	2
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

Floyd算法实例



$A^{(2)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	7
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(2)}$ =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	2
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#3: 若允许在 V_0, V_1, V_2, V_3 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(3)}$ 和 $path^{(3)}$

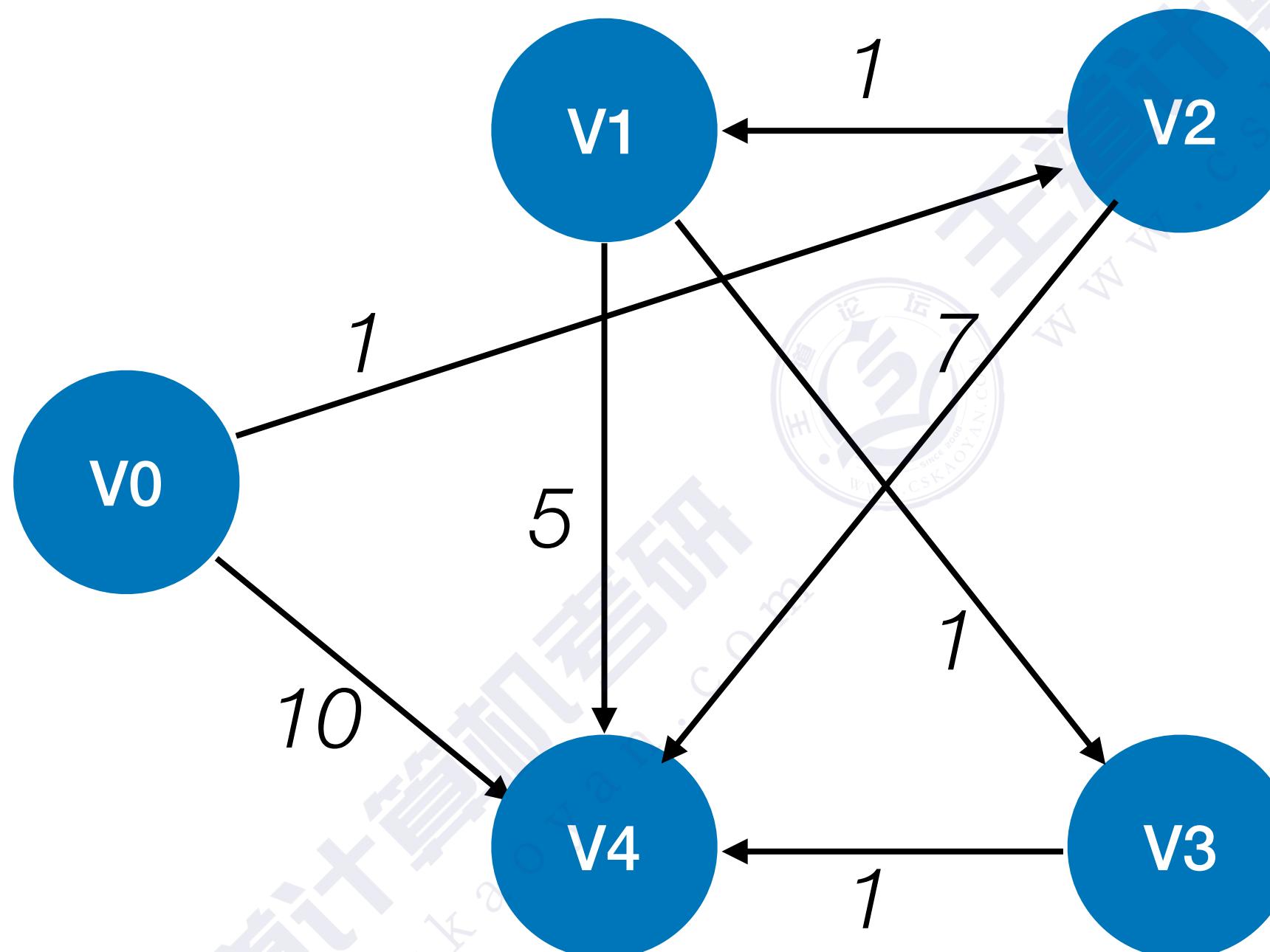
```

for(int i=0; i<n; i++) { //遍历整个矩阵, i为行号, j为列号
    for (int j=0; j<n; j++){
        if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){
            A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];
            path[i][j]=k;
        }
    }
}
  
```

k=3

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



若
则
 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $path^{(k)}[i][j] = k$
否则 $A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$$A^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	7
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$path^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	2
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#3: 若允许在 V_0, V_1, V_2, V_3 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(3)}$ 和 $path^{(3)}$

$$A^{(2)}[0][4] > A^{(2)}[0][3] + A^{(2)}[3][4] = 4$$

$$A^{(3)}[0][4] = 4; path^{(3)}[0][4] = 3;$$

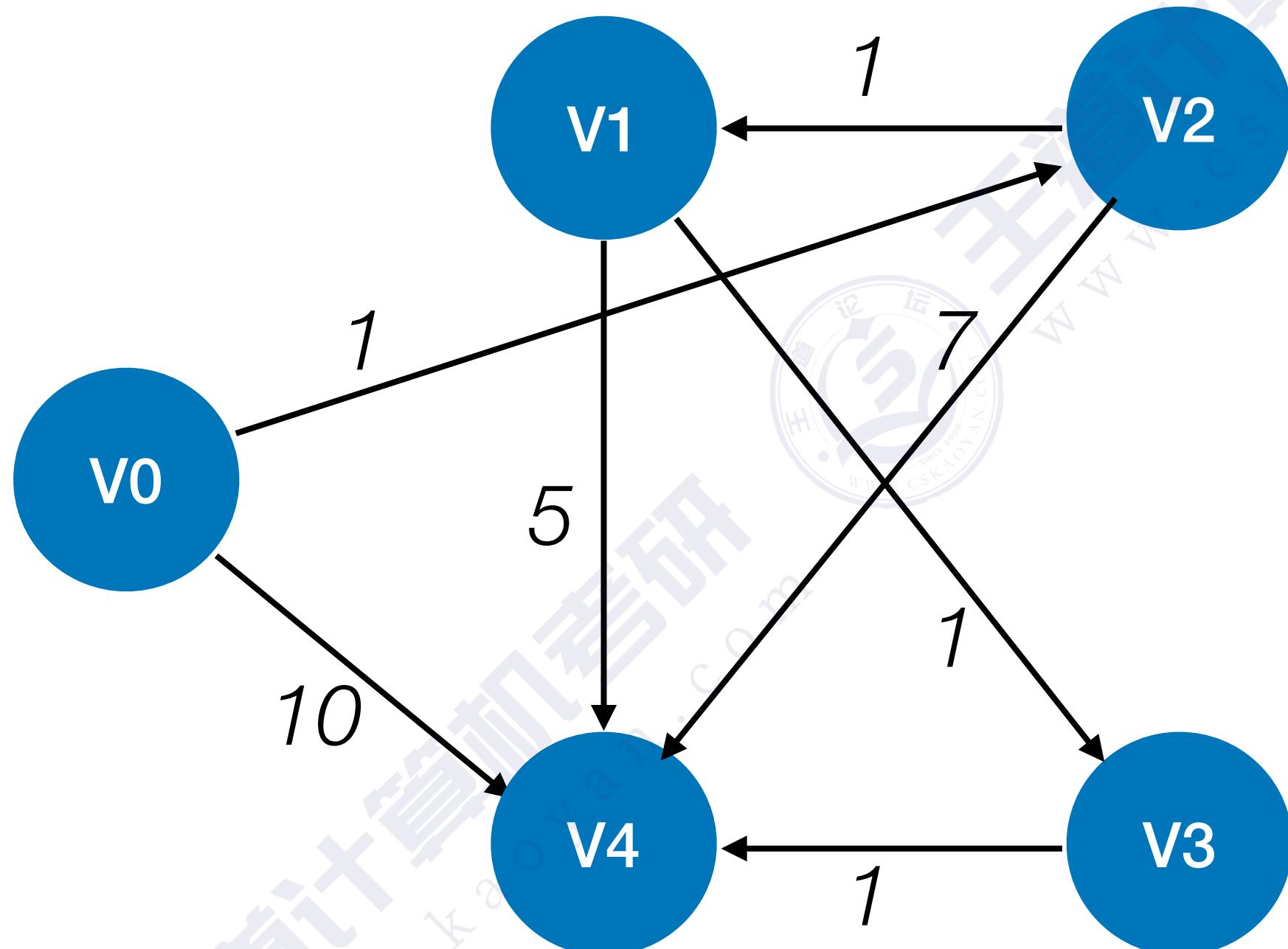
$$A^{(2)}[1][4] > A^{(2)}[1][3] + A^{(2)}[3][4] = 2$$

$$A^{(3)}[1][4] = 2; path^{(3)}[1][4] = 3;$$

$$A^{(2)}[2][4] > A^{(2)}[2][3] + A^{(2)}[3][4] = 3$$

$$A^{(3)}[2][4] = 3; path^{(3)}[2][4] = 3;$$

Floyd算法实例



$$A^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	7
V1	∞	0	∞	1	5
V2	∞	1	0	2	6
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(2)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	2
V1	-1	-1	-1	-1	-1
V2	-1	-1	-1	1	1
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#3: 若允许在 V_0, V_1, V_2, V_3 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(3)}$ 和 $\text{path}^{(3)}$

$$A^{(3)} =$$

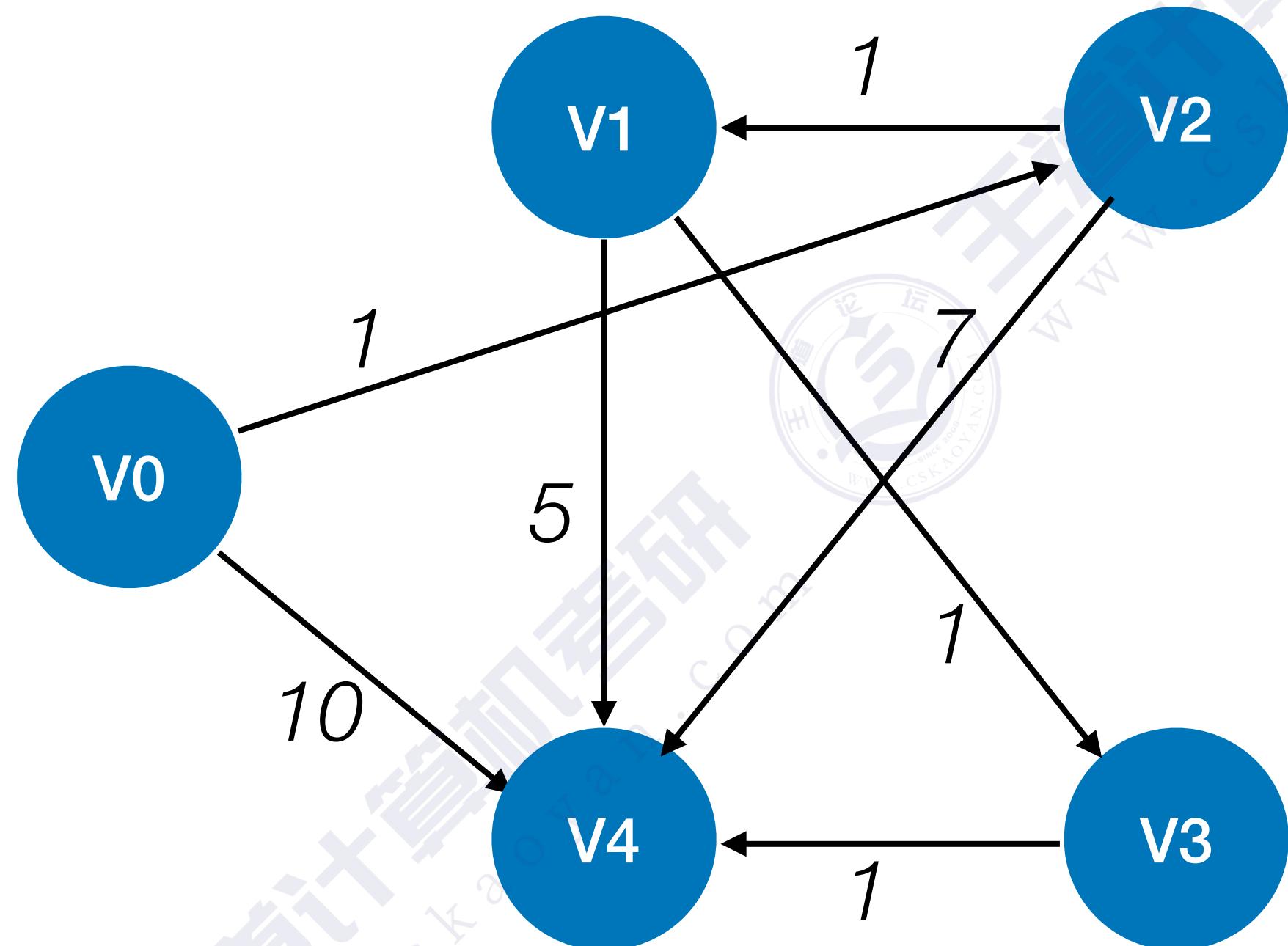
	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	4
V1	∞	0	∞	1	2
V2	∞	1	0	2	3
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(3)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	3
V1	-1	-1	-1	-1	3
V2	-1	-1	-1	1	3
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $\text{path}^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $\text{path}^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



若
则
否则

$A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$

$$A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$$

$$path^{(k)}[i][j] = k$$

$A^{(k)}$ 和 $path^{(k)}$ 保持原值

$A^{(3)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	4
V1	∞	0	∞	1	2
V2	∞	1	0	2	3
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$path^{(3)} =$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	3
V1	-1	-1	-1	-1	3
V2	-1	-1	-1	1	3
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

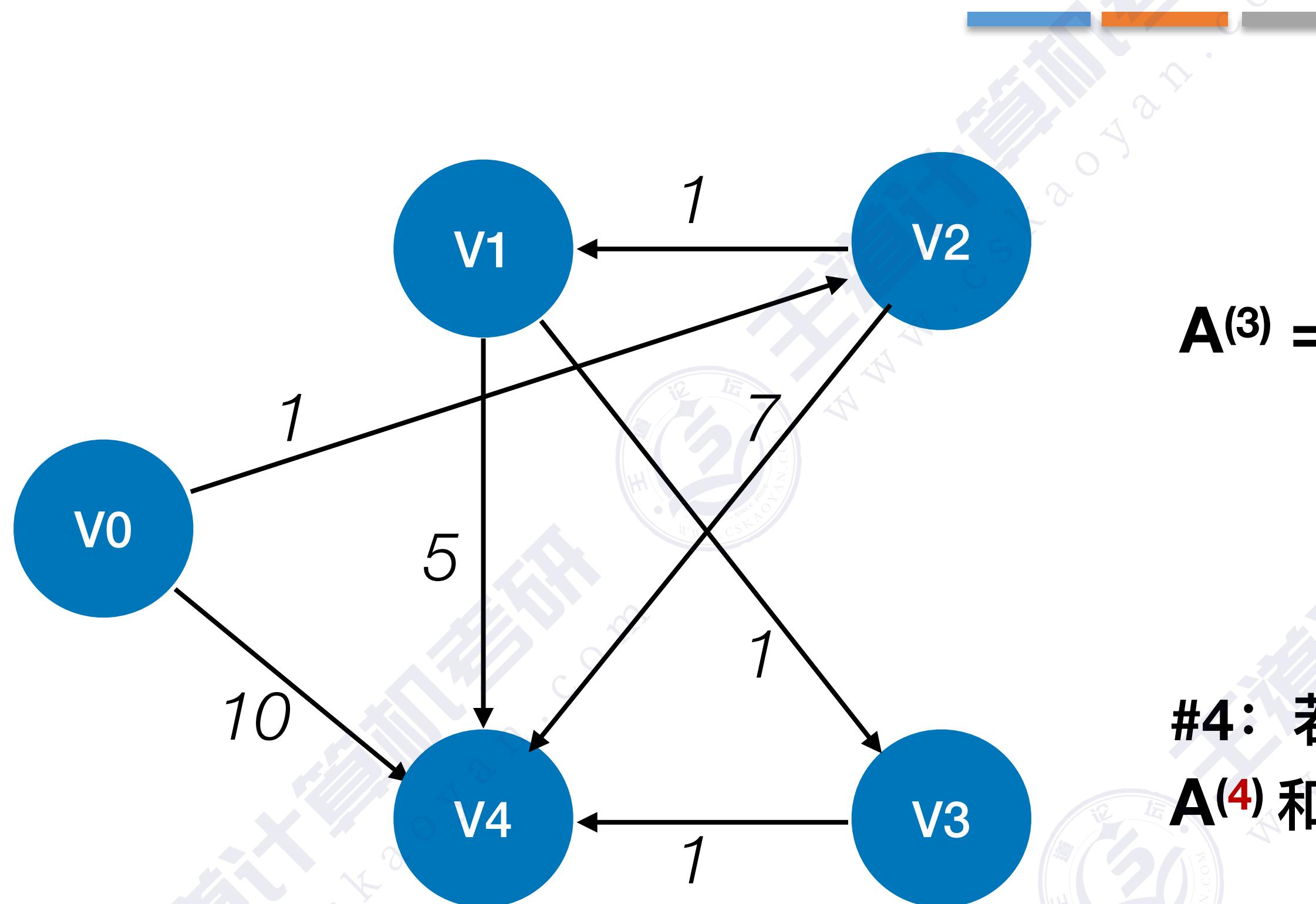
#4：若允许在 V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 中转，最短路径是？——求 $A^{(4)}$ 和 $path^{(4)}$

```

for(int i=0; i<n; i++) { //遍历整个矩阵, i为行号, j为列号
    for (int j=0; j<n; j++){
        if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){
            A[i][j]=A[i][k]+A[k][j];
            path[i][j]=k;
        }
    }
}
  
```

$k=4$

Floyd算法实例



$$A^{(3)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	4
V1	∞	0	∞	1	2
V2	∞	1	0	2	3
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(3)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	3
V1	-1	-1	-1	-1	3
V2	-1	-1	-1	1	3
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

#4: 若允许在 V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 中转, 最短路径是? —— 求 $A^{(4)}$ 和 $\text{path}^{(4)}$

$$A^{(4)} =$$

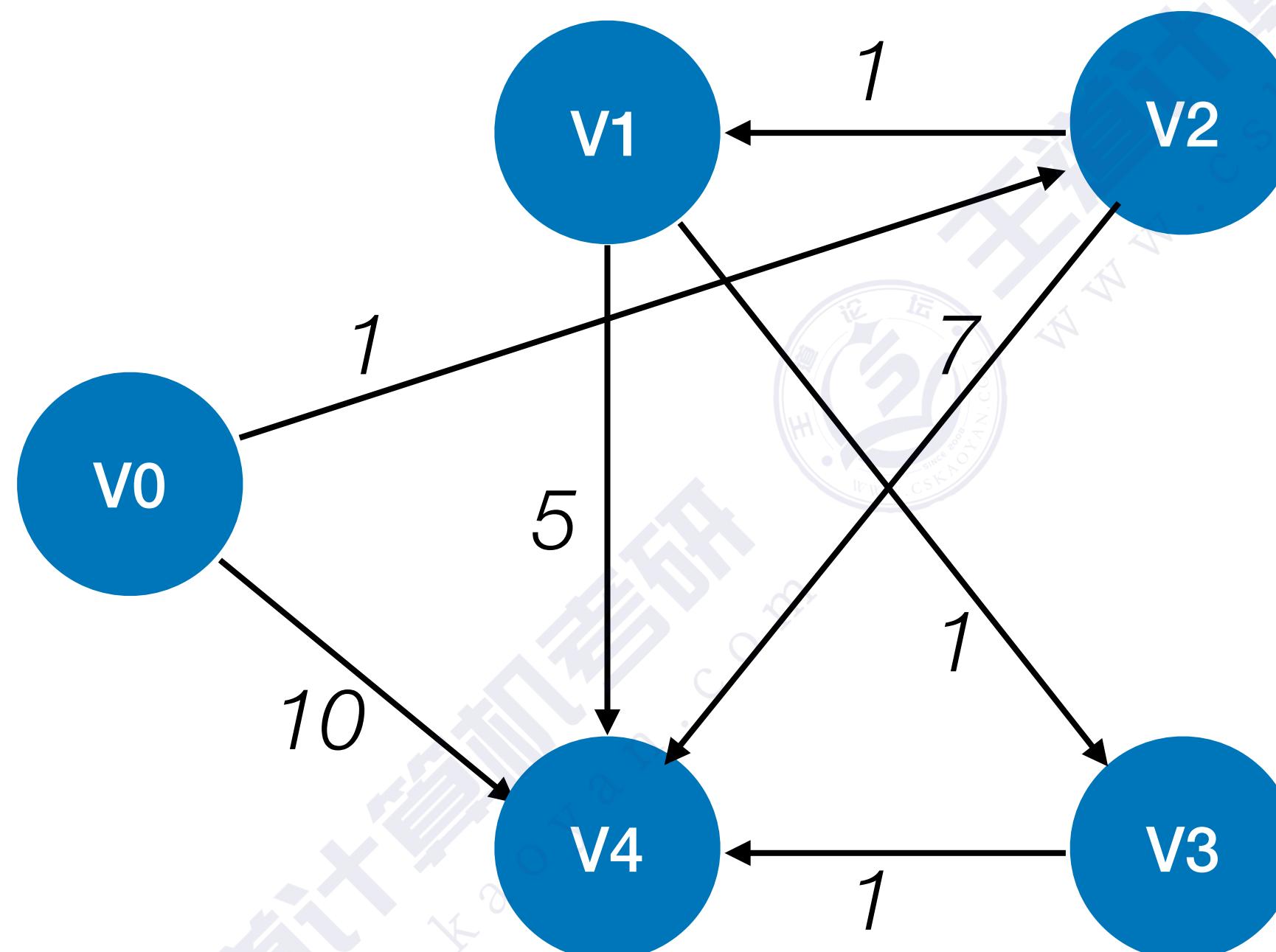
	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	4
V1	∞	0	∞	1	2
V2	∞	1	0	2	3
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

$$\text{path}^{(4)} =$$

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	3
V1	-1	-1	-1	-1	3
V2	-1	-1	-1	1	3
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

若 $A^{(k-1)}[i][j] > A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j]$
 则 $A^{(k)}[i][j] = A^{(k-1)}[i][k] + A^{(k-1)}[k][j];$
 $\text{path}^{(k)}[i][j] = k$
 否则 $A^{(k)}$ 和 $\text{path}^{(k)}$ 保持原值

Floyd算法实例



A =

	V0	V1	V2	V3	V4
V0	0	2	1	3	4
V1	∞	0	∞	1	2
V2	∞	1	0	2	3
V3	∞	∞	∞	0	1
V4	∞	∞	∞	∞	0

path =

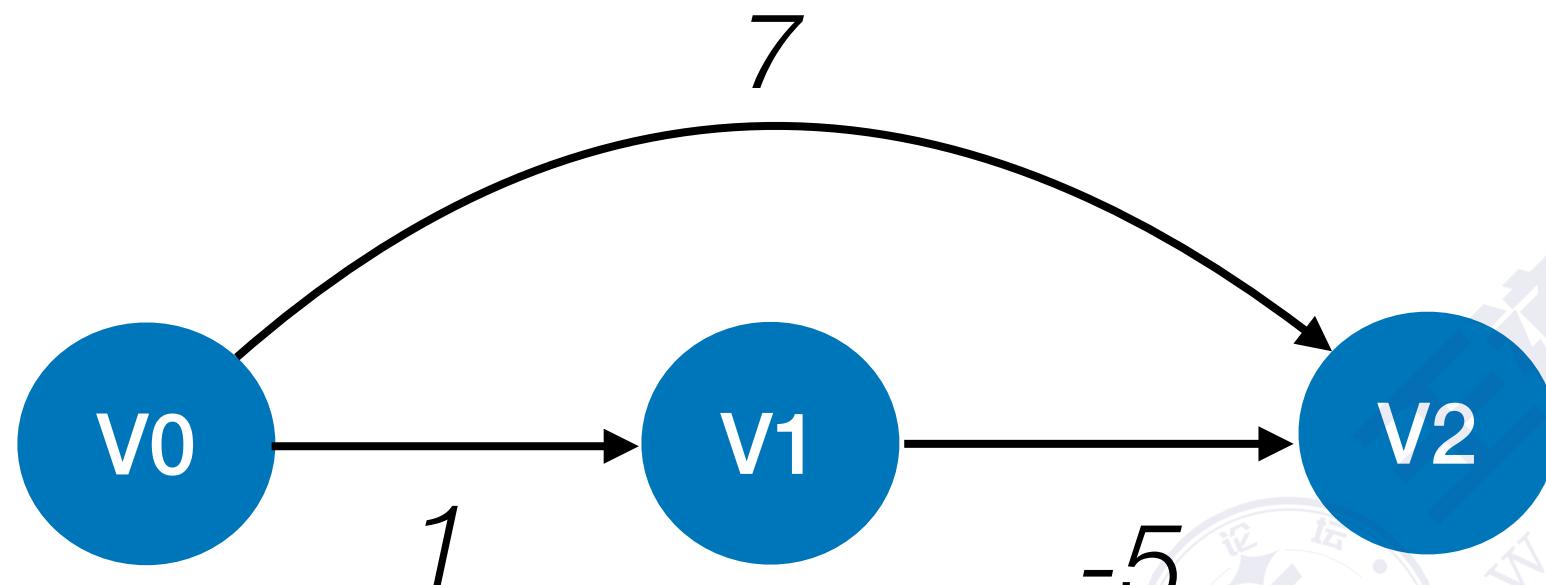
	V0	V1	V2	V3	V4
V0	-1	2	-1	2	3
V1	-1	-1	-1	-1	3
V2	-1	-1	-1	1	3
V3	-1	-1	-1	-1	-1
V4	-1	-1	-1	-1	-1

V0到V4 最短路径长度为 A[0][4]=4

通过path矩阵递归地找到完整路径：

V0 V3 V4
V0 V2 V3 V4
V0 V2 V1 V3 V4

练习：Floyd算法用于负权图



Floyd算法可以用于
负权值带权图



A=

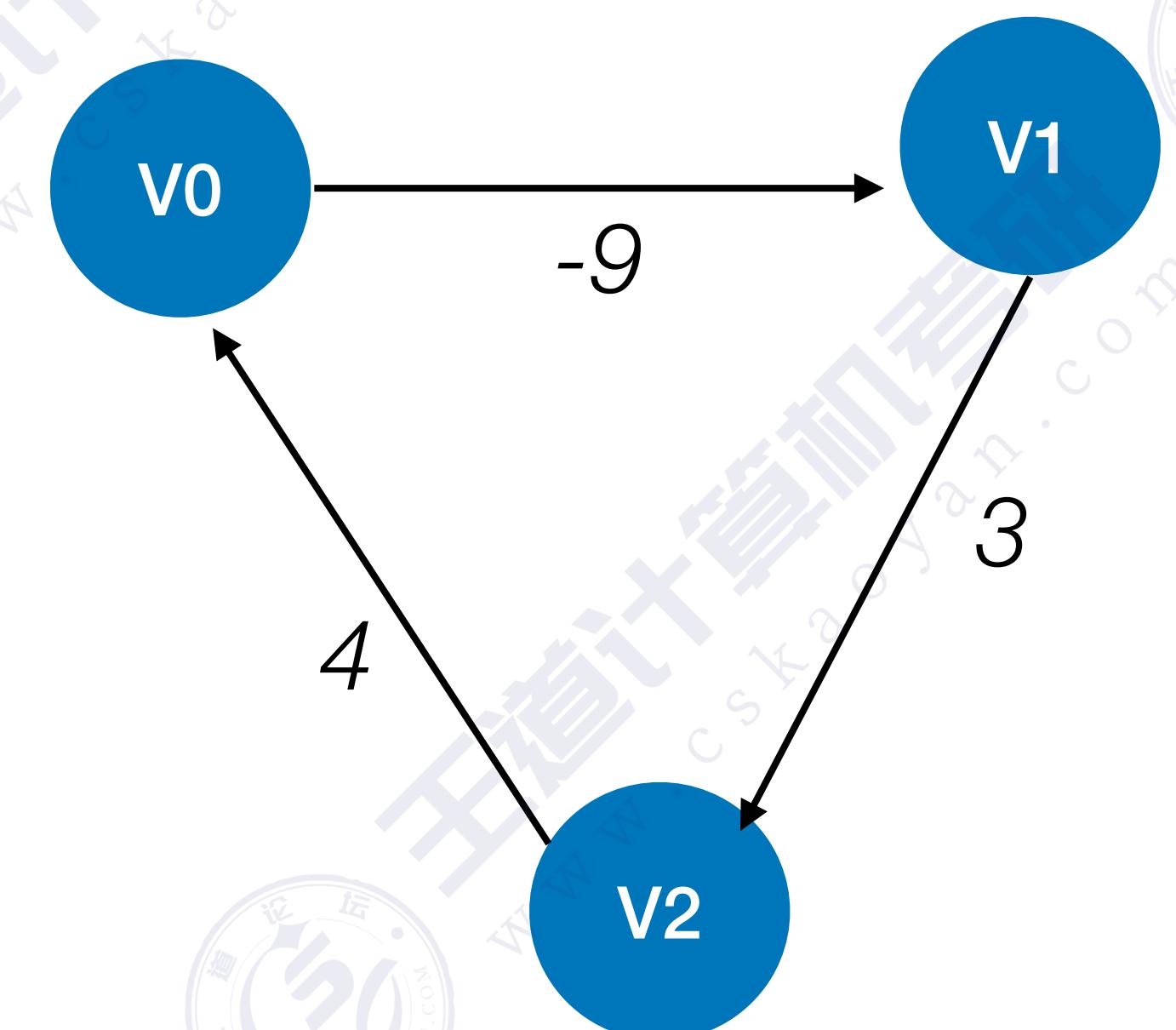
	v0	v1	v2
v0	0	1	7
v1	∞	0	-5
v2	∞	∞	0

path=

	v0	v1	v2
v0	-1	-1	-1
v1	-1	-1	-1
v2	-1	-1	-1

```
//.....准备工作，根据图的信息初始化矩阵 A 和 path (如上图)  
for (int k=0; k<n; k++){ //考虑以 vk 作为中转点  
    for(int i=0; i<n; i++) { //遍历整个矩阵，i为行号，j为列号  
        for (int j=0; j<n; j++) {  
            if (A[i][j]>A[i][k]+A[k][j]){ //以 vk 为中转点的路径更短  
                A[i][j]=A[i][k]+A[k][j]; //更新最短路径长度  
                path[i][j]=k; //中转点  
            }  
        }  
    }  
}
```

不能解决的问题



Floyd 算法不能解决带有“负权回路”的图（有负权值的边组成回路），这种图有可能没有最短路径

知识点回顾与重要考点



	BFS 算法	Dijkstra 算法	Floyd 算法
无权图	✓	✓	✓
带权图	✗	✓	✓
带负权值的图	✗	✗	✓
带负权回路的图	✗	✗	✗
时间复杂度	$O(V ^2)$ 或 $O(V + E)$	$O(V ^2)$	$O(V ^3)$
通常用于	求无权图的单源最短路径	求带权图的单源最短路径	求带权图中各顶点间的最短路径

注：也可用 Dijkstra 算法求所有顶点间的最短路径，重复 $|V|$ 次即可，总的时间复杂度也是 $O(|V|^3)$