

1 行列式

1.1 性质

1. 经转置行列式的值不变, 即 $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 0 \Rightarrow 行列式的值为 0
3. 两行相等 \Rightarrow 行列式的值为 0
4. 两行成比例 \Rightarrow 行列式的值为 0
5. 某行 (列) 有公因数 k , 可把 k 提到行列式外
6. 两行互换, 行列式变号
7. 某行所有元素都是两个数的和, 则可写成两个行列式之和
8. 某行的 k 倍加至另一行, 行列式的值不变

1.2 基础

1.2.1 完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \mathbf{a}_{1j_1} \mathbf{a}_{2j_2} \cdots \mathbf{a}_{nj_n}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

1.2.2 余子式 & 代数余子式

在 n 阶行列式中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列, 由剩下的元素按原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶行列式, 称为 a_{ij} 的 **余子式**, 记为 M_{ij} ; 称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的 **代数余子式**, 记为 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

1.3 定理

1.3.1 展开公式

1. n 阶行列式等于它的任意一行 (列) 的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, n) && \text{行} \\ &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n) && \text{列} \end{aligned}$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} &= 0 = 0 \quad (i \neq k \text{ 且 } i, k = 1, 2, \dots, n) \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} &= 0 = 0 \quad (j \neq k \text{ 且 } j, k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

1.3.2 乘法公式

设 \mathbf{A} , \mathbf{B} 都是 n 阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

1.4 公式

1.4.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-2} \cdots a_{n1}$$

1.4.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

2. 副对角线

$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

m, n 分别是方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的阶数

1.4.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

1.4.4 特征多项式

1.5 方阵行列式

1. 若 A 是 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵 $\Rightarrow |A^T| = |A|$
2. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |kA| = k^n |A|$
3. 若 A, B 都是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |AB| = |A||B|$ 且 $|A^2| = |A|^2$
4. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$
5. 若 A 是 n 阶可逆矩阵 $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$

1.6 克拉默法则

设有 n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 则其行列式为 $|\mathbf{A}|$ 。若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则方程组有唯一解, 并且第 i 个未知数 x_i 可由下式求得:

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中 \mathbf{A}_i 是将 \mathbf{A} 的第 i 列替换为常数列向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 后得到的矩阵, 即:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论 若齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组只有零解
2. 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程组有非零解

2 矩阵

2.1 条件转换思路

1. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则
 - (a) \mathbf{B} 的列向量是其次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解
 - (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$