

1 一元函数微分学的概念

1.1 导数

1. 设 $y = f(x)$ 定义在区间 I 上, 让自变量在 $x = x_0$ 处加一个增量 Δx (可正可负), 其中 $x_0 \in I, x_0 + \Delta x \in I$, 则可得函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。若函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比值在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的 **导数 (变化率)**, 记作 $f'(x_0)$, 即

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (*)$$

广义化

$$\lim_{\text{狗} \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \text{狗}) - f(x_0)}{\text{狗}}. \quad (**)$$

令 $x_0 + \Delta x = x$, 从而得到

$$\text{函数式 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (***)$$

2. 下面这三种提法是等价的:

- $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导;
- $y = f(x)$ 在点 x_0 处导数存在;
- $f'(x_0) = A$ (A 为有限数)。

3. ★ 函数在一点可导的充要条件: $f'(x_0)$ 存在 \Leftrightarrow 其左导数 $f'_-(x_0)$ 与右导数 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等

4. 函数在一点可导的必要条件: 若 $f(x)$ 在一点可导 $\Rightarrow f(x)$ 在该点连续, 反之未必

5. 导数的性质

- ★求导一次, 奇偶性互换 (导数定义)
- 若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数, 则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数 (导数定义)
- 若 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减

1.2 导数的几何意义

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值 $f'(x_0)$, 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率 k , 即 $k = f'(x_0)$, 因此, 曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

该点处的法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

2. 切线存在不代表导数存在，但导数存在切线一定存在

- $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, 出现角点 (尖点), 则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导, 没有切线。e.g. $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处
- $f(x)$ 在点 x_0 的导数是无穷导数时, 在该点有切线但无导数。e.g. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x = 0$ 处

1.3 基础概念

1.4 结论

1. 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则函数 $f(x) = |x - x_0| \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的充要条件是 $\varphi(x_0) = 0$
2. 函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的连续性与可导性关系总结:
 - 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续; 反之不成立。
 - 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则:
 - (a) 若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left| |f(x)| \right|'_{x=x_0} = \begin{cases} f'(x_0), & f(x_0) > 0, \\ -f'(x_0), & f(x_0) < 0. \end{cases}$$

(b) 若 $f(x_0) = 0$, 则:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导, 且 } \left| |f(x)| \right|'_{x=x_0} = 0, \\ f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处不可导}. \end{cases}$$

(c) 总结不可导即:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \\ f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x)| \text{ 在 } x_0 \text{ 处不可导}$$

3. $f^{(n)}(x_0)$ 存在 $\Rightarrow f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 附近有定义且在 x_0 处连续

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1. $[(e^x - 1)g(x)]' = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$

1.8 方法总结

1.9 条件转换思路

1.10 理解

1. 对于连续或可导函数，只要 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)，无论 $f(x_0)$ 与 0 的距离有多小，它旁边相依相偎的 $f(x)$ 一定 > 0 (或 < 0)
2. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义，且 $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ ，证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续、可导且 $f'(0) = 0$

经典

证明：分三个层次完成。

(1) 求函数极限

由

$$0 \leq |f(x)| \leq 1 - \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0,$$

根据夹逼准则，有

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

(2) 求函数值，验证连续性

在原不等式中令 $x = 0$ ，得

$$|f(0)| \leq 1 - \cos 0 = 0,$$

故 $f(0) = 0$ 。

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，并且有

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq 1 - \cos x.$$

(3) 求导数（按定义）

由上述不等式可得

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \frac{1 - \cos x}{|x|}.$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{|x|} = 0,$$

再次由夹逼准则，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

从而 $f'(0) = 0$ 。

综上， $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续、可导，且 $f'(0) = 0$ 。□