

# 1 矩阵

## 1.1 基础概念

1.  $m$  行  $n$  列表格称为  $m \times n$  矩阵, 当  $m = n$  时, 矩阵  $A$  称为  $n$  阶矩阵或  $n$  阶方阵
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0, 则称这个矩阵是**零矩阵**, 可简记为  $\mathbf{O}$
3. 两个  $m \times n$  型矩阵  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ , 如果对应的元素都相等, 即  $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ , 则称矩阵  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$
4.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  的元素所构成的行列式称为  $n$  阶方阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$  或  $\det A$
5. 把矩阵  $A$  的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 称为矩阵  $A$  的**转置矩阵**, 记作  $A^T$
6. 如果方阵  $A$  满足  $A^T = A$ , 则称  $A$  是**对称矩阵**
7.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 行列式  $|A|$  的每个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵  $A$  的**伴随矩阵**

8.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 如果存在  $n$  阶方阵  $B$  使得  $AB = BA = E$  (单位矩阵) 成立, 则称  $A$  是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**,  $B$  是  $A$  的逆矩阵
9. 对  $m \times n$  矩阵, 下列三种变换
  - (a) 用非零常数  $k$  乘矩阵的某一行 (列)
  - (b) 互换矩阵某两行 (列) 的位置
  - (c) 把某行 (列) 的  $k$  倍加至另一行 (列)称为矩阵的**初等行 (列) 变换**, 统称为矩阵的**初等变换**
10. 如果矩阵  $A$  经过有限次初等变换变成矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  **等价**, 记作  $A \cong B$
11. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**
  - (a)  $E_i(k)$  单位矩阵第  $i$  行乘以常数  $k$
  - (b)  $E_{ij}$  单位矩阵互换  $i, j$  行
  - (c)  $E_{ij}(k)$  单位矩阵第  $j$  行的  $k$  倍加至第  $i$  行

12. 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 。向量内积:  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

13. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $AA^T = A^T A = E$ , 称  $A$  是 **正交矩阵**:

$$\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量两两正交 (单位向量)

$\Leftrightarrow A$  的每个行 (列) 向量长度均为 1

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量平方和为 1

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = -1$$

14. 若  $A$  是正交矩阵且  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则:

(a)  $\alpha_i^T \alpha_i = 1$

(b)  $\alpha_i^T \alpha_j = 0 \ (i \neq j)$

## 1.2 定理

1. 若  $A$  是可逆矩阵, 则矩阵  $A$  的逆矩阵**唯一**, 记为  $A^{-1}$

2.  $n$  阶矩阵  $A$  可逆

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

$\Leftrightarrow A$  的列 (行) 向量组线性无关

$\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s)$  是初等矩阵

$\Leftrightarrow A$  与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow 0$  不是矩阵  $A$  的特征值

3. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且满足  $AB = E$ , 则必有  $BA = E$

4. 用初等矩阵  $P$  左 (右) 乘矩阵  $A$ , 其结果  $PA(AP)$  就是对矩阵  $A$  作一次相应的初等行 (列) 变换  $\Rightarrow$  **左乘行变换, 右乘列变换**

4. 初等矩阵均可逆, 其逆矩阵是同类型的初等矩阵, 即

倍乘  $E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$  第  $i$  行 (或列) 乘以非零常数  $k$  的逆矩阵是第  $i$  行 (或列) 乘以  $1/k$

互换  $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$  交换第  $i$  行 (或列) 和第  $j$  行 (或列) 的逆矩阵是其本身

倍加  $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$  第  $i$  行 (或列) 加上  $k$  倍第  $j$  行 (或列) 的逆矩阵是第  $i$  行 (或列) 加上  $-k$  倍第  $j$  行 (或列)

5. 矩阵  $A$  与  $B$  **等价** 的充分必要条件是存在可逆矩阵  $P$  与  $Q$ , 使  $PAQ = B$

6. 秩  $r(A) = A$  的列秩 =  $A$  的行秩

7. 矩阵经初等变换后秩不变

### 1.3 运算

1. 设  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  是两个  $m \times n$  矩阵, 则  $m \times n$  矩阵  $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$  称为矩阵  $A$  与  $B$  的和, 记作  $A + B = C$
2. 设  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times n$  矩阵,  $k$  是一个常数, 则  $m \times n$  矩阵  $[ka_{ij}]$  称为数  $k$  与矩阵  $A$  的数乘, 记作  $kA$
3. 设  $A, B, C, \mathbf{O}$  都是  $m \times n$  矩阵,  $k, l$  是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:
  - (a)  $A + B = B + A$
  - (b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - (c)  $A + \mathbf{O} = A$
  - (d)  $A + (-A) = \mathbf{O}$
  - (e)  $1A = A$
  - (f)  $k(lA) = (kl)A$
  - (g)  $k(A + B) = kA + kB$
  - (h)  $(k + l)A = kA + lA$
4. 设  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times n$  矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n \times s$  矩阵, 那么  $m \times s$  矩阵  $C = [c_{ij}]$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

称为  $A$  与  $B$  的乘积, 记作  $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则:
  - (a)  $A(BC) = (AB)C$
  - (b)  $A(B + C) = AB + AC$
  - (c)  $(A + B)C = AC + BC$
  - (d)  $(kA)(lB) = klAB$
  - (e)  $AE = EA = A$
  - (f)  $\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \mathbf{O}$
6. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  是正整数,
  - (a)  $A$  的  $k$  次方幂  $A^k = A \cdot A \cdots A$  ( $k$  个  $A$ )
  - (b)  $A^0 = \mathbf{E}$
  - (c)  $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
  - (d)  $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{bmatrix}$$

10.  $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11.  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

(a)  $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$

(b)  $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$

(c)  $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{B} - 4\mathbf{E}) = 8\mathbf{E}$

12. 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是列向量, 则

(a) 列向量·行向量:  $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$ , 两者都是  $n$  阶矩阵 (互为转置)

(b) 行向量·列向量:  $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$  是一个数

(c)

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \text{ (对称矩阵)}$$

(d)

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ (平方和)}$$

## 1.4 公式

### 1.4.1 行列式

1.  $|A^T| = |A|$

2.  $|kA| = k^n|A|$

3.  $|AB| = |A||B|$ ,  $|A^2| = |A|^2$

4.  $|A^*| = |A|^{n-1}$

5.  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

### 1.4.2 转置

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(A - B)^T = A^T - B^T$
4.  $(kA)^T = kA^T$
5.  $(AB)^T = B^T A^T$

### 1.4.3 可逆

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0)$
3.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4.  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5.  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7.  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

### 1.4.4 伴随

1.  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2.  $AA^* = A^*A = |A|E$
3.  $A^* = |A|A^{-1}$
4.  $|A^*| = |A|^{n-1}$
5.  $(AB)^* = B^*A^*$
6.  $(A^*)^T = (A^T)^*$
7.  $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(a) 若  $A$  不可逆 ( $|A| = 0$ ), 则

- i. 且  $n \geq 3$  时,  $(A^*)^* = O$
- ii. 且  $n = 2$  时,  $(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果 } r(A) = n, \\ 1, & \text{如果 } r(A) = n - 1, \\ 0, & \text{如果 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

10. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (二阶矩阵), 则  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 。主对调, 副变号

#### 1.4.5 秩

1.  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$

2. 当  $k \neq 0$  时,  $r(kA) = r(A)$

3.  $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

4.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 则

(a)  $r(AB) \leq r(A)$  并且  $r(AB) \leq r(B)$ , 即  $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$

(b)  $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

(c) 且  $AB = O$ , 则

i.  $r(A) + r(B) \leq n$

ii.  $B$  的列向量是齐次方程组  $Ax = 0$  的解

• 按列分块, 有

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

因此

$$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

(d) 且  $AB = C$ , 则

i. 矩阵  $C(AB)$  的行向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由  $B$  的行向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表出

• 对  $B, C$  按列分块, 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \dots + a_{2n}\beta_n = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵  $C(AB)$  的列向量可由  $A$  的列向量线性表出

5. 若  $A$  可逆, 则  $r(AB) = r(B) = r(BA)$

6. 若  $A$  列满秩, 则  $r(AB) = r(B)$

7. 若  $A$  行满秩, 则  $r(AB) = r(A)$

8.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵,  $C$  是  $s \times t$  矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B)$$

9.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

10.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

11. 若  $A \sim B$ , 则

(a)  $r(A) = r(B)$

(b)  $r(A + kE) = r(B + kE)$

#### 1.4.6 分块矩阵

1. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

#### 1.4.7 特殊矩阵 $n$ 次方

1. 若  $r(A) = 1$ , 则

(a)  $A$  可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

(b)  $A^2 = lA$  其中  $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(c)  $A^n = l^{n-1}A$  其中  $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设  $A$  为  $n \times n$  上三角矩阵, 主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当 } k \geq n$$

3. 若  $B = P^{-1}AP$ , 则  $B^2 = P^{-1}A^2P$ , 即

(a)  $B^n = P^{-1}A^nP$

(b)  $A^n = PB^nP^{-1}$

## 1.5 条件转换思路

1. 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n \times s$  矩阵, 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ , 则

(a)  $\mathbf{B}$  的列向量是其次方程组  $\mathbf{Ax} = 0$  的解

(b)  $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$