

1 数列极限

1.1 基础概念

1. 设 x_n 为一数列, 若存在常数 a , 对于任意的 $\epsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$, 则称常数 a 是数列 x_n 的极限, 或者称数列 x_n 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

2. 有界数列: 若对所有正整数 n , 存在正实数 M , 有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 a_n 为有界数列。证明数列有界的方法

- 找 M , 使得 $|a_n| \leq M$
- 放缩法
- 找最值
- 基本不等式法

3. 数列收敛于 a 的速度问题: 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 的过程中同时趋于 a , 记 $u_n = |x_n - a|, v_n = |y_n - a|$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 和 v_n 都是无穷小量。若 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ 存在, 则有

- 高阶无穷小: 当 $I = 0$ 时, 称 u_n 是 v_n 的高阶无穷小, 记作 $u_n = o(v_n)$ 。此时 $\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 更快收敛于 a
- 同阶无穷小: 当 $I = c \neq 0$ 时 (c 为常数), 称 u_n 与 v_n 是同阶无穷小, 记作 $u_n = O(v_n)$ 。此时 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 以相同速度收敛于 a
- 等价无穷小: 当 $I = 1$ 时, 称 u_n 与 v_n 是等价无穷小, 记作 $u_n \sim v_n$ 。这是同阶无穷小的特例
- 低阶无穷小: 当 $I = \infty$ 时, 称 u_n 是 v_n 的低阶无穷小 (或 v_n 是 u_n 的高阶无穷小)。此时 $\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 更慢收敛于 a

示例

设 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{n} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

故 $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 即 $x_n = \frac{1}{n}$ 比 $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 更快收敛于 0。

1.2 收敛数列的性质

1. 唯一性: 给出数列 $\{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (存在), 则 a 是唯一的
2. 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界
3. 保号性: 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , b 为任意实数。

(a) 若 $a > b$ (或 $a < b$), 则存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$x_n > b \quad (\text{或 } x_n < b).$$

(b) 若存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$x_n \geq b \quad (\text{或 } x_n \leq b),$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

则必有

$$a \geq b \quad (\text{或 } a \leq b).$$

其中常考情形为 $b = 0$

4. 脱帽 (严格不等): $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > b \Rightarrow x_n > b$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < b \Rightarrow x_n < b$)
5. 带帽 (非严格不等): $x_n \geq b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$ (或 $x_n \leq b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$)。e.g.
 $x_n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1$

1.3 定理

1. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2. 海涅定理 (归结原则): 设 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在
 \Leftrightarrow 对任何 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在 (在极限存在的条件下, 函数极限和数列极限可以相互转化)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 取 $x_n = \frac{1}{n}$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = A$
- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 取 $x_n = n$, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$ 。

Example

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

• 当 $x \rightarrow a$ 时, 且 $x_n \neq a$ 时, 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

3. 单调有界准则: 若数列 x_n 单调增加 (减少) 且有上界 (下界), 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ 存在

• $x_n \leq x_{n+1} \leq a$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ 存在

• $a \leq x_{n+1} \leq x_n$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ 存在

1.4 结论

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

因此, 若要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

又由于 $|a_n| \geq 0$, 可利用夹逼准则: 若存在数列 $\{b_n\}$, 使得

$$0 \leq |a_n| \leq b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

5. ★若 $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

1.5 运算

1.6 公式

1.7 方法步骤

1. 判断数列发散的方法

- 对于一个数列 $\{a_n\}$, 如果能找到一个发散的子列, 则原数列一定发散
- 对于一个数列 $\{a_n\}$, 如果能找到至少两个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$, 但它们收敛到不同极限, 则原数列一定发散

2. 证明数列 $\{x_n\}$ 单调性的常用方法

a. 差分法或比值法

$$x_{n+1} - x_n > 0 \text{ (或 } < 0), \quad \text{或} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \text{ (或 } < 1).$$

b. 数学归纳法

- i. 验证 $n = 1$ 时结论成立;
- ii. 假设 $n = k$ 时结论成立;
- iii. 证明 $n = k + 1$ 时结论仍成立。

c. 利用重要不等式

d. 利用递推形式 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$

设 $x_n \in I$, 且 $f(x)$ 在区间 I 上可导:

- 若 $f'(x) > 0$ (即 $f(x)$ 在 I 上单调增加), 则数列 $\{x_n\}$ 单调 (无法确定是单调递增还是单调递减), 且

$$\begin{cases} x_2 > x_1, & \text{则 } \{x_n\} \text{ 单调递增,} \\ x_2 < x_1, & \text{则 } \{x_n\} \text{ 单调递减.} \end{cases}$$

- 若 $f'(x) < 0$ (即 $f(x)$ 在 I 上单调减少), 则数列 $\{x_n\}$ 不单调 (通常呈振荡)。

1.8 条件转换思路

1. 数列 $\{a_n\}$ 非负有界 \Rightarrow 存在 $0 \leq m < M$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 有 $m \leq a_n \leq M$

1.9 理解

1. 压缩映射原理: 使用时, 需写出证明过程

- **原理一 (压缩不等式)** 设数列 $\{x_n\}$, 若存在常数 k ($0 < k < 1$), 使得对一切 $n = 1, 2, \dots$,

$$|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

证: 由已知条件,

$$0 \leq |x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|.$$

递推可得

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - a| &\leq k|x_n - a| \\ &\leq k^2|x_{n-1} - a| \\ &\vdots \\ &\leq k^n|x_1 - a|. \end{aligned}$$

又因为 $0 < k < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0.$$

由夹逼准则,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - a| = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

• **原理二 (迭代函数收敛原理)** 设数列 $\{x_n\}$ 由

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

定义, 其中 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 且方程

$$f(x) = x$$

有唯一解 a 。若存在常数 k ($0 < k < 1$), 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leq k,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

证: 由于 $f(a) = a$, 有

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)|.$$

由拉格朗日中值定理, 存在 ξ 介于 x_n 与 a 之间, 使得

$$|f(x_n) - f(a)| = |f'(\xi)| |x_n - a|.$$

又由条件 $|f'(x)| \leq k < 1$, 可得

$$|x_{n+1} - a| \leq k |x_n - a|.$$

由原理一 (压缩不等式), 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

2. 极限定义中 ϵ 的含义: ϵ 必须是不依赖于 n 的任意小正数。若 ϵ 与 n 有关, 相当于对收敛速度提出了额外要求, 而极限定义并不限制收敛速度。下面的示例说明了在推理过程中, ϵ 必须作为一个与 n 无关的常数来使用。

示例

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

$$\Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon \quad (\text{由绝对值不等式})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

$$\Rightarrow |a| - \epsilon < |a_n| < |a| + \epsilon$$