

# 1 函数的概念与特性

## 1.1 基础概念

1. 反双曲正弦函数:  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , 常见的奇函数

•

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

•

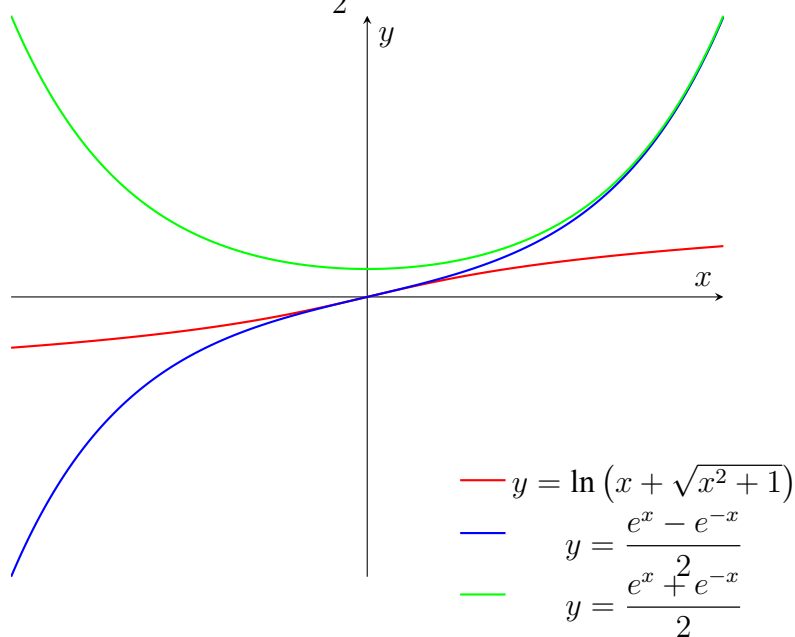
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

•

$$\int_{-1}^1 [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^2] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

2. 双曲正弦函数:  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. 双曲余弦函数:  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



4. 函数奇偶性

- $f(x) + f(-x)$  必是偶函数
- $f(x) - f(-x)$  必是奇函数
- 任意定义在关于原点对称区间上的函数, 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和。对任一函数  $f(x)$ , 定义

$$u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad v(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

则有  $u(x)$  是偶函数,  $v(x)$  是奇函数。并且

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = u(x) + v(x).$$

- $f[\varphi(x)]$  内偶则偶, 内奇同外
- ★求导一次, 奇偶性互换
- 设对任意的  $x, y$ , 都有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 则  $f(x)$  是奇函数
- 常见的奇函数

$$(a) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

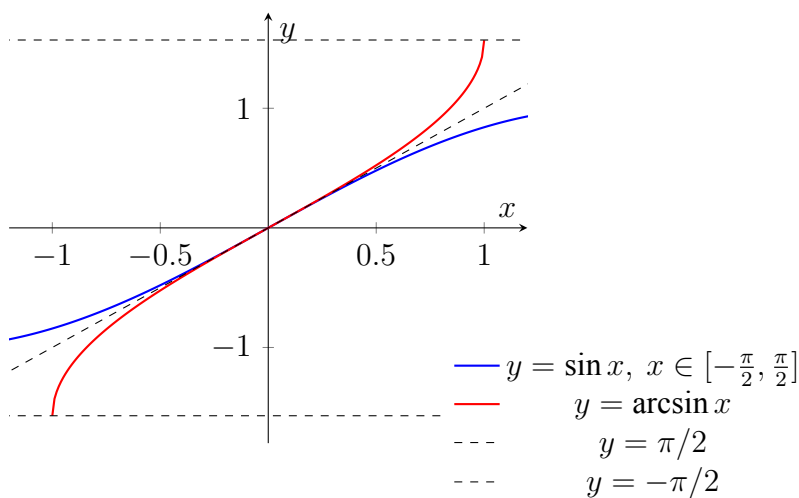
$$(b) f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$$

5. 反正弦函数  $y = \arcsin x$  是函数

$$y = \sin x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

的反函数, 其主值区间为

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



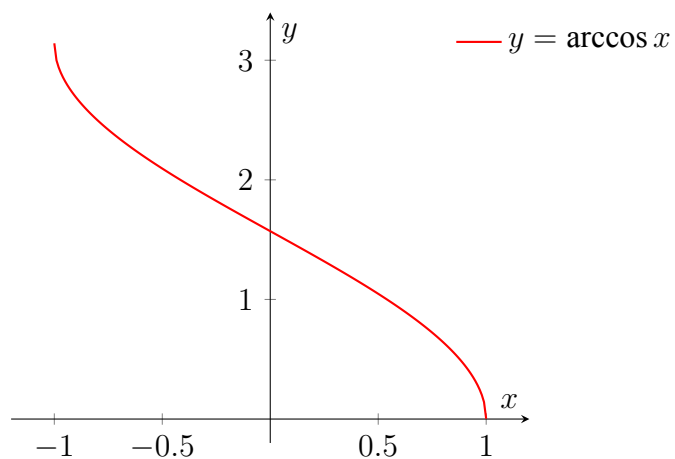
若  $y = \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , 则  $x = \pi - \arcsin y$

6. 反余弦函数  $y = \arccos x$  是函数

$$y = \cos x \quad (x \in [0, \pi])$$

的反函数, 其主值区间为

$$\arccos x \in [0, \pi].$$



## 1.2 结论

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 常用的等价无穷小

- $x \sim y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $x \sim \sin x$
- $x \sim \tan x$

2.  $x - [x]$  是  $x$  的小数部分, 是以 1 为周期的函数

## 1.3 定理

## 1.4 运算

## 1.5 公式

1.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

2.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

广义化:

$$2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}.$$

3.  $[x + n] = [x] + n$ . 特别地, 当  $n = 1$  时,  $[x + 1] = [x] + 1$

## 1.6 方法总结

## 1.7 条件转换思路

## 1.8 理解