1 一元函数积分学的概念与性质

1.1 不定积分

1.1.1 原函数与不定积分

设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上，若存在可导函数 $F(x)$，对于该区间上任意一点都有 $F'(x) = f(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**。称 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分（全体原函数）**

注：

1. $F'(x) = f(x)$。由 $f(x)$ 处处有定义得 $F(x)$处处可导，即 $F(x)$处处连续

1.1.2 原函数（不定积分）存在定理

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$

$$\bigstar f(x)\text{连续} \Rightarrow \begin{cases} \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C, \\ [\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t]' = f(x) \end{cases}$$

2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$

1.2 定积分

1.2.1 定义

1.2.2 存在定理

1.2.3 性质（假设以下积分均存在）

1.3 变限积分

1.3.1 概念

1.3.2 性质

1.4 反常积分

1.4.1 概念

1.4.2 敛散性的判别法

1.5 基础概念

1.6 结论

1.7 定理

1. 积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

2. 介值定理：

1.8 运算

1.9 公式

1.10 方法总结

1.11 条件转换思路

1.12 理解

1. 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$，即 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$

证

若 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，则

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= F(x+\Delta x)-F(x)\\
&=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由积分中值定理，有 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$，其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，故

$$
F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)
$$

当 $x=a$ 时，取 $\Delta x>0$，同理可证 $F'(a)=f(a)$；当 $x=b$ 时，取 $\Delta x<0$，同理可证 $F'(b)=f(b)$。
综上，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$。

2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为不定积分，表示全体原函数

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为定积分，表示面积

4. $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 称为变上限积分，表示动态的面积