1 向量

1.1 基本概念

1. n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量

2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，如果存在不全为零的数 k，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

   则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

   (a) 有零向量
   (b) 两向量成比例
   (c) $n+1$ 个 n 维向量

3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2})^T, \ldots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{s2})^T, \ldots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{sm})^T$，其中 $s \le r$，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组

4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 β，若存在实数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \beta$$

   则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ **线性表出 (示)**

5. 设有两个 n 维向量组 $(I)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s;(II)\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出

6. 如果 $(I)(II)$ 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**

7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $a_j(j = 1, 2, \ldots,)$，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**

8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩

1.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关

   $\Leftrightarrow$ 其次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][x_1, x_2, \ldots, x_n]^T = 0$有非零解
   $\Leftrightarrow$ 向量组的秩$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < s, s$表示**未知数的个数或向量个数**
   $\Leftrightarrow$ 若向量组是方阵(n 个 n 维向量)，则$|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| = 0$

2. $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

3. 任何部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 相关$\Rightarrow$ 整体组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots\alpha_s$ 相关

4. 整体组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots\alpha_s$ 无关$\Rightarrow$ 部分组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 无关

5. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关$\Rightarrow$ 延伸组$\widetilde{\alpha_{\mathbf{1}}},\widetilde{\alpha_{\mathbf{2}}},\ldots,\widetilde{\alpha_{\mathbf{n}}}$ 线性无关

6. $\widetilde{\alpha_{\mathbf{1}}},\widetilde{\alpha_{\mathbf{2}}},\ldots,\widetilde{\alpha_{\mathbf{n}}}$ 线性相关$\Rightarrow$ 缩短组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关

7. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出

$$\Leftrightarrow \text{ 非齐次线性方程组}[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s][\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]^T=\beta\text{有解}$$
$$\Leftrightarrow \text{ 秩}r[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]=r[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta]$$

8. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关，则其中**必有一个向量**可用其余向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关

9. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，且**表示法唯一**

10. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，且 $s>t$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关。即**如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关**

11. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，且它可由可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，则 $s\leq t$

12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\leq r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)$

13. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组，则 $r(I)=r(II)$

14. 如果 $r(A)=r$，则 A 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(A)=A$ 的列秩

15. 一般地，$r(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}$

16. A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $Ax=0$ 的解向量组的秩为 $\mathbf{n}-\mathbf{r}(\mathbf{A})$

1.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$，则

   (a) $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)^T$
   (b) $k\alpha=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)^T$
   (c) $0\alpha=0$
   (d) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
   (e) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
   (f) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(g) $\alpha + 0 = \alpha$

(h) $\alpha + (-\alpha) = 0$

(i) $1\alpha = \alpha$

(j) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(k) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

(l) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

2.

1.4 条件转换思路

1. 线性无关的判定与证明：若向量的坐标没有给出，通常用**定义法** Or **秩的理论** Or **反证法**

   (a) **定义法**证 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

      i. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

      ii. $\Downarrow$ 恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件 or 重组)

      ii. $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_s = 0$

   (b) **秩**证 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

      i. $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s][x_1, x_2, \ldots, x_s]^T = 0$ 只有零解

      ii. $\Leftrightarrow$ 秩r$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s$

         A. $r(A) = A$的列秩 $= A$的行秩

         B. $r(AB) \leq r(A)$且$r(AB) \leq r(B)$

         C. 若 A 可逆，则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$

         D. 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，且 $r(A) = n$，则 $r(AB) = r(B)$

         E. 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = \mathbf{O}$，则 $r(A) + r(B) \leq n$

   (c) **反证法**

2. 判断能否线性表出

   (a) 若已知向量坐标$\Rightarrow$ 非齐次线性方程组是否有解

   (a) 若向量坐标没有给出$\Rightarrow$ 线性相关 Or 秩

3. 向量组$(I)(II)$等价

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ r(I) = r(II) = r(I, II) \\ &\Leftrightarrow \ r(I) = r(II)\text{且}(I)\text{可由}(II)\text{线性表出} \end{aligned}$$