

# 线性代数

Bowen

January 20, 2026

## Contents

<b>1</b>	<b>行列式</b>	<b>3</b>
1.1	基础概念	3
1.2	性质	3
1.3	基础	3
1.3.1	完全展开式	3
1.3.2	余子式 & 代数余子式	3
1.4	定理	4
1.4.1	展开公式	4
1.4.2	乘法公式	4
1.5	公式	4
1.5.1	上（下）三角形	4
1.5.2	拉普拉斯展开式	5
1.5.3	范德蒙行列式	5
1.5.4	特征多项式	5
1.6	方阵行列式	5
1.7	克拉默法则	6
1.8	方法步骤	6
1.9	条件转换思路	7
1.10	理解	7
<b>2</b>	<b>矩阵</b>	<b>7</b>
2.1	基础概念	7
2.2	定理	9
2.3	运算	11
2.4	公式	13
2.4.1	行列式	13
2.4.2	转置	13
2.4.3	伴随	13
2.4.4	可逆	14
2.4.5	秩	14
2.4.6	分块矩阵	16
2.4.7	对角矩阵	17
2.4.8	特殊矩阵 $n$ 次方	17

2.5	方法步骤 . . . . .	18
2.6	条件转换思路 . . . . .	19
2.7	理解 . . . . .	20
<b>3</b>	<b>向量</b>	<b>22</b>
3.1	基本概念 . . . . .	22
3.2	定理 . . . . .	23
3.3	运算 . . . . .	24
3.4	公式 . . . . .	24
3.5	方法步骤 . . . . .	24
3.6	条件转换思路 . . . . .	25
3.7	理解 . . . . .	26
<b>4</b>	<b>线性方程组</b>	<b>27</b>
4.1	基础概念 . . . . .	27
4.2	定理 . . . . .	29
4.3	运算 . . . . .	31
4.4	公式 . . . . .	31
4.5	方法步骤 . . . . .	31
4.6	条件转换思路 . . . . .	32
4.7	理解 . . . . .	32

# 1 行列式

## 1.1 基本概念

1. 由  $1, 2, \dots, n$  组成的有序数组称为一个  $n$  阶排列，通常用  $j_1, j_2, \dots, j_n$  表示  $n$  阶排列
2. 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序，一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数，用  $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$  表示
3. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列

## 1.2 性质

1. 经转置行列式的值不变，即  $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 0  $\Rightarrow$  行列式的值为 0
3. 两行相等  $\Rightarrow$  行列式的值为 0
4. 两行成比例  $\Rightarrow$  行列式的值为 0
5. 某行（列）有公因数  $k$ ，可把  $k$  提到行列式外
6. 两行互换，行列式变号
7. 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
8. 某行的  $k$  倍加至另一行，行列式的值不变

## 1.3 基础

### 1.3.1 完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} \mathbf{a}_{1j_1} \mathbf{a}_{2j_2} \dots \mathbf{a}_{nj_n}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

### 1.3.2 余子式 & 代数余子式

1. 在  $n$  阶行列式中，划去元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行、第  $j$  列，由剩下的元素按原来的排法构成一个  $(n-1)$  阶行列式，称为  $a_{ij}$  的余子式，记为  $M_{ij}$ ；称  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式，记为  $A_{ij}$ ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

## 2. 三阶行列式的代数余子式

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

## 1.4 定理

### 1.4.1 展开公式

1.  $n$  阶行列式等于它的任意一行（列）的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, n) && \text{行} \\ &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n) && \text{列} \end{aligned}$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} &= 0 = 0 \quad (i \neq k \text{ 且 } i, k = 1, 2, \dots, n) \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} &= 0 = 0 \quad (j \neq k \text{ 且 } j, k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

### 1.4.2 乘法公式

设  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  都是  $n$  阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

## 1.5 公式

### 1.5.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-2} \cdots a_{n1}$$

### 1.5.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

2. 副对角线

$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

$m, n$  分别是方阵  $A, B$  的阶数

### 1.5.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

### 1.5.4 特征多项式

1. 设  $A = [a_{ij}]$  是三阶矩阵, 则  $A$  的特征多项式

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - s_2\lambda + |A|$$

$$\text{其中 } s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

### 1.6 方阵行列式

1. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $A^T$  是  $A$  的转置矩阵  $\Rightarrow |A^T| = |A|$
2. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵  $\Rightarrow |kA| = k^n |A|$
3. 若  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵  $\Rightarrow |AB| = |A||B|, |A^2| = |A|^2$
4. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵  $\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$
5. 若  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵  $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$
6. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $A$  的特征值  $\Rightarrow |A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$
7. 若  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  相似  $\Rightarrow |A| = |B|, |A + kE| = |B + kE|$

7.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$$

## 1.7 克拉默法则

设有  $n$  元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则其行列式为  $|\mathbf{A}|$ 。若  $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，则方程组有唯一解，并且第  $i$  个未知数  $x_i$  可由下式求得：

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中  $\mathbf{A}_i$  是将  $\mathbf{A}$  的第  $i$  列替换为常数列向量  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  后得到的矩阵，即：

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**推论** 若齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式  $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$  方程组只有零解
2. 系数行列式  $|A| = 0 \Leftrightarrow$  方程组有非零解

## 1.8 方法步骤

1. 对于主对角线爪型行列式，可用主对角线元素将其化为上（下）三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 对于副对角线爪型行列式，可用副对角线元素将其化为反上（下）三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 把各行（列）均加到第一行（列）
4. 逐行（列）相加
5. 若有较多 0，可考虑直接用行（列）展开公式
6. 特殊的三对角线行列式
  - (a) 三角化法: 逐行相加，构造上下三角型
  - (b) 递推法
  - (c) 归纳法
7. 数学归纳法
  - 普通数学归纳法 (Mathematical Induction)
    - (a) 验证  $n = 1$  时，命题  $f_n$  成立；
    - (b) 假设  $n = k$  时，命题  $f_n$  成立；
    - (c) 证明  $n = k + 1$  时，命题  $f_n$  成立。
  - 强（完全）归纳法 (Strong Induction)
    - (a) 验证  $n = 1$  和  $n = 2$  时，命题  $f_n$  成立；
    - (b) 假设当  $n < k$  时，命题  $f_n$  均成立；
    - (c) 证明  $n = k$  时，命题  $f_n$  成立。

## 1.9 条件转换思路

1. 齐次方程组  $Ax = 0$  有非零解
  - $\Leftrightarrow r(A) < n$  (其中  $n =$  未知数的个数)
  - $\Leftrightarrow |A| = 0$
  - $\Leftrightarrow A$  的列向量组线性相关

## 1.10 理解

# 2 矩阵

## 2.1 基础概念

1.  $m$  行  $n$  列表格称为  $m \times n$  矩阵，当  $m = n$  时，矩阵  $A$  称为  $n$  阶矩阵或  $n$  阶方阵
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是零矩阵，可简记为  $\mathbf{O}$
3. 如果一个方阵，所有非主对角线元素都是 0，则称这个矩阵是对角矩阵
4. 两个  $m \times n$  型矩阵  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ，如果对应的元素都相等，即  $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ ，则称矩阵  $A$  与  $B$  相等，记作  $A = B$

5.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  的元素所构成的行列式称为  $n$  阶方阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$  或  $\det A$
6. 把矩阵  $A$  的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 称为矩阵  $A$  的**转置矩阵**, 记作  $A^T$
7. 如果方阵  $A$  满足  $A^T = A$ , 则称  $A$  是**对称矩阵**, 即  $a_{ij} = a_{ji}$
8. 如果方阵  $A$  满足  $A^T = -A$ , 则称  $A$  是**反对称矩阵**, 即  $a_{ij} = -a_{ji}$
9.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 行列式  $|A|$  的每个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵  $A$  的**伴随矩阵**

10. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置, 即  $A^* = [A_{ji}] = (A_{ij})^T$
11.  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 如果存在  $n$  阶方阵  $B$  使得  $AB = BA = E$  (单位矩阵) 成立, 则称  $A$  是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**,  $B$  是  $A$  的逆矩阵
12. 对  $m \times n$  矩阵, 下列三种变换
  - (a) 用非零常数  $k$  乘矩阵的某一行 (列)
  - (b) 互换矩阵某两行 (列) 的位置
  - (c) 把某行 (列) 的  $k$  倍加至另一行 (列)

称为矩阵的**初等行 (列) 变换**, 统称为矩阵的**初等变换**

13. 如果矩阵  $A$  经过有限次初等变换变成矩阵  $B$ , 则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  **等价**, 记作  $A \cong B$
14. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为**初等矩阵**
  - (a)  $E_i(k)$  单位矩阵第  $i$  行乘以常数  $k$
  - (b)  $E_{ij}$  单位矩阵互换  $i, j$  行
  - (c)  $E_{ij}(k)$  单位矩阵第  $j$  行的  $k$  倍加至第  $i$  行

15. 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 。向量内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

16. 向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

17. 若  $(\alpha, \beta) = 0$  即  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$ , 则称  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 记为  $\alpha \perp \beta$



18. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $AA^T = A^T A = E$ , 称  $A$  是 **正交矩阵**:

$$\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量两两正交 (单位向量)

$\Leftrightarrow A$  的每个行 (列) 向量长度均为 1

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量平方和为 1

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = -1$$

19. 若  $A$  是正交矩阵且  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则:

(a)  $\alpha_i^T \alpha_i = 1$

(b)  $\alpha_i^T \alpha_j = 0 \ (i \neq j)$

20. 在  $m \times n$  矩阵  $A$  中, 任取  $k$  行与  $k$  列 ( $k \leq m, k \leq n$ ), 位于这个行与列的交叉点上的  $k^2$  个元素按其在原来矩阵  $A$  中的次序可构成一个  $k$  阶行列式, 称其为矩阵  $A$  的一个  $k$  阶子式

21. 矩阵  $A$  的非零子式的最高阶数称为矩阵  $A$  的**秩**, 记为  $r(A)$ 。零矩阵的秩规定为 0

22. 矩阵秩的理解

(a)  $r(A) = r \Leftrightarrow A$  中有  $r$  阶子式不为 0, 任何  $r+1$  阶子式 (若存在) 必全为 0

(a)  $r(A) < r \Leftrightarrow A$  中每一个  $r$  阶子式全为 0

(a)  $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$  中有  $r$  阶子式不为 0

(a)  $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$

(a)  $r(A) \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow 1 \leq r(A) \leq n$

(a) 若  $A$  是  $n$  阶矩阵

•  $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$  可逆

•  $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$  不可逆

(b) 若  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵  $\Leftrightarrow r(A) \leq \min(m, n)$

## 2.2 定理

1. 若  $A$  是可逆矩阵, 则矩阵  $A$  的逆矩阵**唯一**, 记为  $A^{-1}$

## 2. $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆

- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $\Leftrightarrow r(A) = n$
- $\Leftrightarrow A$  的列 (行) 向量组线性无关
- $\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s)$  是初等矩阵
- $\Leftrightarrow A$  通过初等变换能化为单位矩阵
- $\Leftrightarrow A$  与单位矩阵等价
- $\Leftrightarrow 0$  不是矩阵  $A$  的特征值
- $\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $Ax = 0$  只有零解

## 3. $n$ 阶矩阵 $A$ 不可逆

- $\Leftrightarrow |A| = 0$
- $\Leftrightarrow r(A) < n$
- $\Leftrightarrow A$  的列 (行) 向量组线性相关
- $\Leftrightarrow A$  无法表示为初等矩阵的乘积
- $\Leftrightarrow A$  无法通过初等变换能化为单位矩阵
- $\Leftrightarrow 0$  是矩阵  $A$  的特征值
- $\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解

## 4. $A \cong B$

- $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$
- $\Leftrightarrow A$  通过初等变换能化为  $B$
- $\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0, |A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$ . 即  $A, B$  的行列式同时为 0 或同时不为 0

## 5. 若 $A$ 是 $n$ 阶矩阵, 且满足 $AB = E$ , 则必有 $BA = E$

## 6. 用初等矩阵 $P$ 左 (右) 乘矩阵 $A$ , 其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 $A$ 作一次相应的初等行 (列) 变换 $\Rightarrow$ **左乘行变换, 右乘列变换**

## 6. 初等矩阵均可逆, 其逆矩阵是同类型的初等矩阵, 即

- 倍乘  $E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$  第  $i$  行 (或列) 乘以非零常数  $k$  的逆矩阵是第  $i$  行 (或列) 乘以  $1/k$
- 互换  $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$  交换第  $i$  行 (或列) 和第  $j$  行 (或列) 的**逆矩阵是其本身**
- 倍加  $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$  第  $i$  行 (或列) 加上  $k$  倍第  $j$  行 (或列) 的逆矩阵是第  $i$  行 (或列) 加上  $-k$  倍第  $j$  行 (或列)

## 7. 矩阵 $A$ 与 $B$ 等价的充分必要条件是存在可逆矩阵 $P$ 与 $Q$ , 使 $PAQ = B$

## 8. 秩 $r(A) = A$ 的列秩 $= A$ 的行秩

## 9. 矩阵经初等变换后秩不变

## 2.3 运算

1. 设  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  是两个  $m \times n$  矩阵, 则  $m \times n$  矩阵  $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$  称为矩阵  $A$  与  $B$  的和, 记作  $A + B = C$
2. 设  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times n$  矩阵,  $k$  是一个常数, 则  $m \times n$  矩阵  $[ka_{ij}]$  称为数  $k$  与矩阵  $A$  的数乘, 记作  $kA$
3. 设  $A, B, C, \mathbf{O}$  都是  $m \times n$  矩阵,  $k, l$  是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:
  - (a)  $A + B = B + A$
  - (b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - (c)  $A + \mathbf{O} = A$
  - (d)  $A + (-A) = \mathbf{O}$
  - (e)  $1A = A$
  - (f)  $k(lA) = (kl)A$
  - (g)  $(kA)^n = k^n A^n$
  - (h)  $k(A + B) = kA + kB$
  - (i)  $(k + l)A = kA + lA$
4. 设  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times n$  矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n \times s$  矩阵, 那么  $m \times s$  矩阵  $C = [c_{ij}]$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

称为  $A$  与  $B$  的乘积, 记作  $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则:
  - (a)  $A(BC) = (AB)C$
  - (b)  $A(B + C) = AB + AC$
  - (c)  $(A + B)C = AC + BC$
  - (d)  $(kA)(lB) = klAB$
  - (e)  $AE = EA = A$
  - (f)  $\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \mathbf{O}$
6. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  是正整数,
  - (a)  $A$  的  $k$  次方幂  $A^k = A \cdot A \cdots A$  ( $k$  个  $A$ )
  - (b)  $A^0 = \mathbf{E}$
  - (c)  $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
  - (d)  $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10.  $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11.  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

(a)  $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$

(b)  $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$

(c)  $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow (A - 2E)(B - 4E) = 8E$

12. 设  $\alpha$  和  $\beta$  都是列向量, 则

(a) 列向量·行向量:  $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$ , 两者都是  $n$  阶矩阵 (互为转置)

(b) 行向量·列向量:  $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$  是一个数

(c)

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \text{ (对称矩阵)}$$

(d)  $r(\alpha\alpha^T) = 1$

(e)  $\alpha\alpha^T$  特征值是  $\|\alpha\|^2, 0, 0, \dots, 0(n-1\text{个})$

(f)

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ (平方和)}$$

13. 向量

- $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- $(k\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
- $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$

## 2.4 公式

### 2.4.1 行列式

1.  $|A^T| = |A|$
2.  $|kA| = k^n |A|$
3.  $|AB| = |A||B|$  ,  $|A^2| = |A|^2$
4.  $|A^*| = |A|^{n-1}$
5.  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

### 2.4.2 转置

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(A - B)^T = A^T - B^T$
4.  $(kA)^T = kA^T$
5.  $(AB)^T = B^T A^T$
6.  $(E + A)^T = E + A^T$

### 2.4.3 伴随

1.  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
2.  $AA^* = A^*A = |A|E$
3.  $A^* = |A|A^{-1}$
4.  $A$  可逆有  $|A^*| = |A|^{n-1}$
5.  $(AB)^* = B^*A^*$
6.  $(A^*)^T = (A^T)^*$
7.  $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(a) 若  $A$  不可逆 ( $|A| = 0$ ), 则

- i. 且  $n \geq 3$  时,  $(A^*)^* = O$
- ii. 且  $n = 2$  时,  $(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果 } r(A) = n, \\ 1, & \text{如果 } r(A) = n - 1, \\ 0, & \text{如果 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

10. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (二阶矩阵), 则  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 。主对调, 副变号

#### 2.4.4 可逆

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$

2.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0)$

3.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4.  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

5.  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

6.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

7.  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

8.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

9.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} & a \\ b & \\ c & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & b \end{bmatrix}$$

#### 2.4.5 秩

1.  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$

2. 当  $k \neq 0$  时,  $r(kA) = r(A)$

3.  $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

4.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 则

(a)  $r(AB) \leq r(A)$  并且  $r(AB) \leq r(B)$ , 即  $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$

(b)  $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

(c)  $r(A, AB) = r(A)$  详见理解 1

(d)  $r(B, BA) = r(B)$

(e) 且  $AB = O$ , 则

- i.  $r(A) + r(B) \leq n$
- ii.  $B$  的列向量是齐次方程组  $Ax = 0$  的解
  - 按列分块, 有

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

因此

$$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

(f) 且  $AB = C$ , 则

- i. 矩阵  $C(AB)$  的行向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由  $B$  的行向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表出
  - 对  $B, C$  按列分块, 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \cdots + a_{2n}\beta_n = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

- ii. 矩阵  $C(AB)$  的列向量可由  $A$  的列向量线性表出

5. 若  $A$  可逆, 则  $r(AB) = r(B) = r(BA)$

6. 若  $A$  列满秩, 则  $r(AB) = r(B)$

7. 若  $A$  行满秩, 则  $r(AB) = r(A)$

8.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵,  $C$  是  $s \times t$  矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B)$$

9.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

10.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

11. 若  $A \sim B$ , 则

(a)  $r(A) = r(B)$

(b)  $r(A + kE) = r(B + kE)$

### 2.4.6 分块矩阵

1. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若  $B, C$  分别是  $m$  阶与  $n$  阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & -B^*ZC^* \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ -C^*ZB^* & |B|C^* \end{bmatrix}$$



(e)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & -B^*ZC^* \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -C^*ZB^* & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

## 2.4.7 对角矩阵

1.  $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$

2.

$$\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & & \\ & b_2 a_2 & \\ & & b_3 a_3 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

## 2.4.8 特殊矩阵 $n$ 次方

1. 若  $r(A) = 1$ , 则

(a)  $A$  可分解为一个列向量与一个行向量的乘积

(b)  $A^2 = lA$  其中  $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(c)  $A^n = l^{n-1}A$  其中  $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

2. 设  $A$  为  $n \times n$  上三角矩阵, 主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当 } k \geq n$$

3. 若  $B = P^{-1}AP$ , 则  $B^2 = P^{-1}A^2P$ , 即

$$(a) \mathbf{B}^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}$$

$$(b) A^n = PB^nP^{-1}$$

## 2.5 方法步骤

1. 已知矩阵  $A$ , 若下三角可逆矩阵  $P$  和上三角可逆矩阵  $Q$ , 使得  $PAQ$  为对角矩阵, 求  $P, Q$

(a) 标准型: 对角矩阵是特征值

(b) 初等行变换: 对  $A$  做初等行变换化为上三角矩阵  $B([A|E] \rightarrow [B|P])$  得到  $P$ , 再对  $B$  做列变换或  $B^T$  作行变换化为对角矩阵  $\Lambda([B^T|E] \rightarrow [\Lambda|Q])$  得到  $Q$

2. 由  $A^*$  求  $A$

$$(a) |A^*|$$

$$(b) |A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow |A|$$

$$(b) AA^* = |A|E \Rightarrow A = |A|(A^*)^{-1}$$

3. 秩求法

$$\bullet |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$$

$$\bullet |A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$$

• 初等行变换矩阵秩不变

• 找不为 0 的子式  $\leq r(A)$

•  $A, B$  相似  $\Rightarrow r(A) = r(B)$

4. 求特殊矩阵的  $n$  次方

• 分块

• 若  $r(A) = 1$ , 则  $A^n = l^{n-1}A$ , 其中  $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

$$\bullet P^{-1}AP = B \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}, B^n = P^{-1}A^nP$$

• 观察多少次幂之后是 0, 之后的都是 0

• 对角矩阵的  $n$  次方

5. 求伴随矩阵  $A^*$

• 定义

$$\bullet A^* = |A|A^{-1}$$

6. 求可逆矩阵

- 求代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ,  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} (k \neq 0)$
- 用初等行变换

$$(A \ E) \xrightarrow{\text{由上往下} \dots} (\text{上三角} \dots) \xrightarrow{\text{由下往上} \dots} (*) \xrightarrow{\text{某行乘} k} (E \ A^{-1})$$

- 分块

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

## 2.6 条件转换思路

1. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 若  $AB = O$ , 则

- (a)  $B$  的列向量是齐次方程组  $Ax = 0$  的解
- (b)  $r(A) + r(B) \leq n$
- (c) 若  $A$  和  $B$  为方阵, 则  $|A| = 0$  或  $|B| = 0$
- (d) 且  $A, B$  非零, 则

$$\Rightarrow r(A) < n \text{ 且 } r(B) < n$$

$$\Rightarrow A \text{ 列向量线性相关}$$

$$\Rightarrow B \text{ 行向量线性相关}$$

2. 若  $a_{ij} + A_{ij} = 0$  则:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -a_{ij} \\ A^* &= (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T \end{aligned}$$

3. 若  $A^* = A^T$ , 则  $A_{ij} = a_{ij}$

4. 矩阵  $A$  经过若干次初等行变换得到矩阵  $B$ , 则

- (a)  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解
- (b)  $A \sim B, B = PA$
- (c)  $r(A) = r(B)$

5. 矩阵  $A$  经过若干次初等列变换得到矩阵  $B$ , 则

- (a)  $A \sim B, B = AQ$
- (b)  $r(A) = r(B)$

6.  $A^* \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq n - 1$  ( $A$  中至少有一个  $n - 1$  阶子式不为 0)

7. 若  $A, B, C$  为  $n$  阶矩阵, 且  $ABC = E$ , 则

$$\Rightarrow |A||B||C| = 1$$

$$\Rightarrow ABC \text{ 均可逆}$$

$$\Rightarrow BC = A^{-1} \Rightarrow BCA = E$$

$$\Rightarrow AB = C^{-1} \Rightarrow CAB = E$$

8.  $r(A + AB) \Rightarrow$  加法, 找可逆, 若  $A$  可逆, 则  $r(AB) = r(B)$

9. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $r(A)$  为秩

- 基本定义: 秩 = 列向量或行向量的最大线性无关个数
- 行列式: 方阵  $A$  满秩  $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$  可逆
- 线性相关性:
  - 列满秩  $\Rightarrow$  列向量线性无关
  - 行满秩  $\Rightarrow$  行向量线性无关
- 齐次方程:  $Ax = 0$ 
  - 唯一解  $\Leftrightarrow r(A) = n$
  - 非零解  $\Leftrightarrow r(A) < n$ , 解空间维数  $n - r(A)$
- 矩阵运算:
  - $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
  - $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- 逆矩阵: 列满秩  $\rightarrow$  左逆, 行满秩  $\rightarrow$  右逆; 方阵满秩  $\rightarrow$  可逆
- 特征值: 方阵秩  $< n \Rightarrow 0$  是特征值; 方阵满秩  $\Rightarrow 0$  不是特征值

10.  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $A$  各行元素之和都为 0, 则

- 列向量都是 1 是  $Ax = 0$  的解
- $A$  的行向量线性相关
- $r(A) < n$

## 2.7 理解

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 记  $(XY)$  表示分块矩阵, 则  $r(A, AB) = r(A)$

(a) 记  $AB = C$ , 对  $A, C$  按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

即  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出, 矩阵的秩就是列向量组的秩, 故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(A)$$

2.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 则  $r(A) = m, r(B) = m$

### 解析

已知  $AB = E_m$ , 则

$$\because AB = E_m \Rightarrow r(AB) = r(E_m) = m,$$

又因为

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, \quad r(A) \leq m, \quad r(B) \leq m,$$

$$\therefore r(A) = m, \quad r(B) = m.$$

3. 矩阵相乘  $\Leftrightarrow$  两个数的积相加

### 3. 秩

- (a) 给定一个矩阵  $A$ , 它的秩就是矩阵中线性无关的行 (或列) 的最大个数
- (b) 秩 == 矩阵所包含的“独立信息量”
- (c) e.g. 如果你有 10 行数据, 但其中 5 行其实是由另外 5 行“复制”或“线性组合”出来的, 那么这些重复的信息是“冗余的”, 真正“独立”的信息只有 5 行  $\Rightarrow r(A) = 5$
- (c) 解线性方程组: 判断方程有没有解、是不是唯一解
  - i. 方程  $Ax = b$  有解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = r(\bar{A})$
  - i. 唯一解  $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = \text{变量数}$
  - i. 多解  $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < \text{变量数}$
- (d) 判断向量独立性: 度量“向量空间中有多少个独立方向”
  - i. 如果列向量组成的矩阵  $r(A) = \text{列数} \Rightarrow$  向量组线性无关
  - i. 否则线性相关
- (e) 维度的桥梁: 刻画了“变换的本质效果”
  - i. 秩本质上就是矩阵对应线性映射的像空间 (列空间) 的维数
  - ii. 这告诉我们, 线性变换把空间压缩到了几维。
  - iii. e.g.  $3 \times 3$  矩阵  $A$ 
    - $r(A) = 3 \Rightarrow$  保留三维空间的全部信息 (可能只是旋转或缩放)
    - $r(A) = 2 \Rightarrow$  把三维空间压缩成二维平面
    - $r(A) = 1 \Rightarrow$  压缩成一条直线
    - $r(A) = 0 \Rightarrow$  全部压缩成原点
- (f) 与行列式、可逆性关系: 可逆性的根本判据
  - i. 如果  $n$  阶矩阵  $A$ ,  $r(A) = n$ , 那么  $A$  可逆,  $|A| \neq 0$
  - ii. 如果  $r(A) < n$ , 矩阵  $A$  不可逆

## 3 向量

### 3.1 基本概念

1.  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  所组成的有序数组  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  或  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  称为  $n$  维向量, 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  称为向量  $\alpha$  的分量 (或坐标), 前一个表示式称为列向量, 后者称为行向量

2. 对  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , 如果存在不全为零的数  $k$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 否则, 称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

- (a) 有零向量
  - (b) 两向量成比例
  - (c)  $n+1$  个  $n$  维向量
3. 向量组  $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2})^T, \dots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm})^T$  及向量组  $\widetilde{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{s2})^T, \dots, \widetilde{\alpha}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{sm})^T$ , 其中  $s \leq r$ , 则称  $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_m$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的延伸组 (或称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是  $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_m$  的缩短组)
  4. 对  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和  $\beta$ , 若存在实数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \beta$$

则称  $\beta$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合, 或者说  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出 (示)

5. 设有两个  $n$  维向量组  $(I)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; (II)\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 如果  $(I)$  中每个向量  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$  都可由  $(II)$  中的向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表出, 则称向量组  $(I)$  可由向量组  $(II)$  线性表出
6. 如果  $(I)(II)$  这两个向量组可以互相线性表出, 则称这两个向量组等价
7. 在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中, 若存在  $r$  个向量  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性相关, 再加进任一向量  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, s)$ , 向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$  就线性相关, 则称  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组
  - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
  - 极大线性无关组不唯一, 但其内的向量个数一致, 即向量组的秩
8. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的极大线性无关组中所含向量的个数  $r$  称为这个向量组的秩
  - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
  - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq n$
9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性, 也不会改变它们之间的线性组合系数
10. 线性表示具有传递性

## 3.2 定理

### 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

- $\Leftrightarrow$  其次线性方程组  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0$  有非零解
- $\Leftrightarrow$  向量组的秩  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ,  $s$  表示未知数的个数或向量个数
- $\Leftrightarrow$  若向量组是 **方阵** ( $n$  个  $n$  维向量), 则  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

### 2. 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

### 3. $n + 1$ 个 $n$ 维向量一定线性相关

### 4. 任何 **部分** 组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 相关 $\Rightarrow$ **整体** 组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 相关

### 5. **整体** 组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 无关 $\Rightarrow$ **部分** 组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关

### 6. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组 $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_n$ 线性无关

### 7. $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

### 8. 向量 $\beta$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

- $\Leftrightarrow$  非齐次线性方程组  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]^T = \beta$  有解
- $\Leftrightarrow$  秩  $r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta]$

### 9. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中必有一个向量可用其余向量线性表出; 反之, 若有一个向量可用其余的 $s - 1$ 个向量线性表出, 则这 $s$ 个向量必线性相关

### 10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 $\beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一

### 11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$ , 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。即如果多数向量能用少数向量线性表出, 那么多数向量一定线性相关

### 12. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且它可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $s \leq t$

### 13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$

### 14. 如果 $(I)(II)$ 是两个等价的向量组, 则 $r(I) = r(II)$

### 15. 如果 $r(A) = r$ , 则 $A$ 中有 $r$ 个线性无关的列向量, 而其他列向量都是这 $r$ 个线性无关列向量的线性组合, 也就是 $r(A) = A$ 的列秩

### 16. 一般地, $r(A) = A$ 的列秩 $= A$ 的行秩

### 17. $A$ 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $n - r(A)$

### 3.3 运算

1. 设  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 则

- (a)  $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$
- (b)  $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$
- (c)  $0\alpha = 0$
- (d)  $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
- (e)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (f)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (g)  $\alpha + 0 = \alpha$
- (h)  $\alpha + (-\alpha) = 0$
- (i)  $1\alpha = \alpha$
- (j)  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (k)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (l)  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

### 3.4 公式

### 3.5 方法步骤

1. 判断多个向量是否线性相关

- 含有零向量  $0 \Rightarrow$  线性相关
- 两个向量成比例  $\Rightarrow$  线性相关
- 存在关系  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ (定义)  $\Rightarrow$  线性相关

2. 线性无关的判定与证明: 若向量的坐标没有给出, 通常用定义法或秩的理论或反证法

(a) 定义法证  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

- i. 设  $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$
- ii.  $\Downarrow$  恒等变形 (同乘: 看条件 + 构造条件或重组)
- ii.  $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$

(b) 秩证  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

- i.  $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_s]^T = 0$  只有零解
- ii.  $\Leftrightarrow \text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ 
  - $r(A) = A$  的列秩 =  $A$  的行秩
  - $r(AB) \leq r(A)$  且  $r(AB) \leq r(B)$
  - 若  $A$  可逆, 则  $r(AB) = r(BA) = r(B)$
  - 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $r(A) = n$ , 则  $r(AB) = r(B)$



- 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 且  $AB = \mathbf{O}$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$

(c) 反证法

(d) 线性方程组  $Ax = 0$

- 只有零解  $\Leftrightarrow$  线性无关
- 有非零解  $\Leftrightarrow$  线性相关

(e) 若是  $n$  个  $n$  维向量

- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$  相关
- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$  无关

3. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体  $\Rightarrow$  非齐次线性方程组是否有解

- 有解  $\Rightarrow$  能线性表出
- 无解  $\Rightarrow$  不能线性表出

(b) 若向量坐标没有  $\Rightarrow$  线性相关或秩

- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$  线性表出
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$  不能线性表出
- 线性相关

4. 求向量组的秩

- 设向量组  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  的矩阵为  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$  对  $A$  作初等行变换得到行最简形矩阵  $A'$ , 则

$$r(A') = r(A) = \text{向量组}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)\text{的秩}$$

- 若存在  $r$  阶子式不为零, 则  $r$  为矩阵的秩, 对应的  $r$  个向量构成一组最大线性无关组

### 3.6 条件转换思路

1. 向量组(I)(II)等价

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出且 } (II) \text{ 可由 } (I) \text{ 线性表出} \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) = r(I, II) \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) \text{ 且 } (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出} \end{aligned}$$

2.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{三者线性无关} \\ &\Leftrightarrow \text{三者是一组基底} \\ &\Leftrightarrow (a, b, c)^T \text{ 能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示} \end{aligned}$$

3. 如果  $\gamma = (a, b, c)^T$  (任意向量) 不能由  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  线性表出

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不可表示任意一个三维向量

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关

$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$

4.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  如果线性相关  $\Rightarrow$  构成一个平面或一条直线

5.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示,  $\beta_2$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 则

(a)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$  线性相关

(b)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$  线性无关

(c) 对于任意实数  $k$ , 有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$  线性无关

(d) 对于任意实数  $k$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$

•  $k = 0 \Rightarrow$  相关

•  $k \neq 0 \Rightarrow$  无关

6. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示  $\Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

7.  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出, 且表示法不唯一

$\Leftrightarrow Ax = \beta$  有无穷多解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) < 3$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关

8.  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$

$\Leftrightarrow Ax = \beta$  无解

$\Rightarrow \beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出

### 3.7 理解

1. 线性相关无关  $\Rightarrow Ax = 0$  齐次方程组非零解的问题

2. 线性表示  $\Rightarrow Ax = \beta$  (其中  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ) 非齐次方程组解的问题

• 非齐次方程组的解向量  $x$  即为线性表示的系数

• 对于  $n$  维向量, 有  $n$  个方程, 未知数个数等于向量个数

• 根据秩的不同, 线性表示有三种情况:

(a) 唯一表示:  $r(A) = r(A, \beta) = n$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  向量组线性无关

(b) 无穷多表示:  $r(A) = r(A, \beta) < n$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  向量组线性相关

(c) 无表示:  $r(A) < r(A, \beta)$ ,  $\beta$  不能由  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  线性表示

## 4 线性方程组

### 4.1 基础概念

#### 1. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为  $n$  个未知数  $m$  个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ ,

#### 2. 如果 $b_i = 0 (\forall i = 1, 2, \dots, m)$ , 则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为**齐次线性方程组**

#### 3. 若用一组数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 分别代替方程组中的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使 $m$ 个等式都成立, 则称有序数组 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解

#### 4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**, 而由全体系数组成的矩阵

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

#### 5. 如果两个方程组有相同的解集合, 则称它们是**同解方程组**

#### 6. 下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**

(a) 用一个非零常数乘方程的两边

- (b) 把某方程的  $k$  倍加到另一方程上
- (c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换化为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量**通常**称为主变量，其余的未知量称为自由变量

7. 选择自由变量准则: 去掉自由变量后主变量行列式不能为 0

8. 向量组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  称为齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系，如果

- (a)  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是  $Ax = 0$  的解
- (b)  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  线性无关
- (c)  $Ax = 0$  的任一解都有由  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  线性表出
- (d) 解向量个数

= 无关解个数

= 自由变量个数

=  $t = n - r(A)$ ，其中  $n = A$  的列向量个数

9. 如果  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一组基础解系，那么对任意常数  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ,

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_t\eta_t$$

是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的通解

10.  $Ax = 0$  的基础解系是不唯一的

11. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果  $\alpha$  既是方程组 (I) 的解，也是方程组 (II) 的解，则称  $\alpha$  是方程组 (I) 和 (II) 的公共解

12. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果  $\alpha$  是方程组 (I) 的解，则  $\alpha$  必是 (II) 的解；反过来，如果  $\alpha$  是方程组 (II) 的解，则  $\alpha$  必是 (I) 的解，则称 (I) 和 (II) 同解

13.  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$  且  $Ax = 0$  的解全是  $Bx = 0$  的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

$\Leftrightarrow$  矩阵  $A$  和  $B$  的行向量组等价

14. 矩阵乘法一般没有交换律，若  $AB = BA$ ，就称  $A$  与  $B$  可交换

## 4.2 定理

1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组
2. 设  $n$  元非齐次线性方程组, 对它的增广矩阵施行高斯消元法, 得到梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & a_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) 如果  $d_{r+1} \neq 0$ , 方程组**无解**
  - (b) 如果  $d_{r+1} = 0$ , 方程组**有解**, 并且
    - i. 当  $r = n$  时有**唯一解**
    - ii. 当  $r < n$  时有**无穷多解**
3. 齐次线性方程组只有**零解 (唯一解)**

$$\Leftrightarrow r(A) = n$$

4. 齐次线性方程组有**非零解 (有无穷多解)**

$$\Leftrightarrow r(A) < n$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的列向量线性无关}$$

$$\Leftrightarrow \text{若 } m = n, \text{ 则 } |A| = 0$$

5. 当  $m < n$  (即方程的个数  $<$  未知数的个数) 时, 齐次线性方程组必有**非零解 (有无穷多解)**
6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩  $r(A) = r < n$ , 则  $Ax = 0$  的基础解系由  $n - r(A)$  个线性无关的解向量所构成
7. **有解判定定理:** 非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解的充分必要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相等, 即  $r(A) = r(\bar{A})$ :

$$\text{若 } r(A) = r(\bar{A}) = n$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组有唯一解}$$

$$\text{若 } r(A) = r(\bar{A}) < n$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组有无穷解}$$

**方程组有解**

$$\begin{cases} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow A \text{ 的行向量组线性无关} \\ \text{原因: } r(A) \leq r(\bar{A}) \leq m \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = m \end{cases}$$

**非齐次线性方程组  $Ax = b$  无解**

$$\begin{cases} \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow b \text{ 不能由 } A \text{ 的列向量线性表出} \\ \Rightarrow |A| = 0 \end{cases}$$

## 8. 解的性质

- (a) 如果  $\eta_1, \eta_2$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的两个解, 那么其线性组合仍是该齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解
- (b) 如果  $\alpha, \beta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个解, 则  $\alpha - \beta$  是导出组  $Ax = 0$  的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 有无穷多解}$$

- (c) 如果  $\alpha$  是齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $\eta$  是导出组  $Ax = 0$  的解, 则  $\alpha + \eta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解
- (d) 使用 **最小公约数** 构造解:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{是两个解}, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad \text{是三个解},$$

故可构造:

$$3(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

- (e) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  是  $Ax = b$  的解

- i. 且  $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$  仍是  $Ax = b$  的解
- ii. 且  $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$  仍是  $Ax = 0$  的解

9. 解的结构: 对非齐次线性方程组  $Ax = b$ , 若  $r(A) = r(\bar{A}) = r$ , 且已知  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  是导出组  $Ax = 0$  的基础解系,  $\zeta_0$  是  $Ax = b$  的每个已知解, 则  $Ax = b$  的通解为

$$\zeta_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  为任意常数

10. 通解表示为:

$$\begin{aligned} \text{通解} &= \text{特解} + k_1\text{解向量}_1 + k_2\text{解向量}_2 + \dots \\ &= \text{特解} + \text{齐次方程 } Ax = 0 \text{ 的通解} \end{aligned}$$

特解构造方法:

特解 = 令自由变量为 0, 主元为常数项

特解  $\Leftarrow$  通过单个  $b$  构造, 即除/减  $(n+1)$  个解  $- n$  个解)

齐次方程  $Ax = 0$  的通解:

通解 = 自由变量列的相反数

通解 =  $\alpha - \beta$  或通过 **最小公倍数** 法构造



- (a) 验证  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  是  $Ax = 0$  的解
  - (b) 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  线性无关
  - (c)  $t = n - r(A)$
3. 非齐次线性方程组求解方法
- (a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
  - (b) 求导出组的几个基础解系
  - (c) 求方程组的一个特解 (为简捷, 可令自由变量全为 0)
  - (d) 按解的结构写出通解
  - (e) 注: 当方程组中含有参数时, 分析讨论要严谨不要丢情况
4. 公共解处理方法 (例 4.16)
- (a) (I)(II) 联立求解
  - (b) 通过 (I) 与 (II) 各自的通解, 寻找非零公共解
  - (c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中, 如果仍是解, 寻找  $k_1, k_2$  所对应满足的关系式而求出公共解
5. 证明两方程同解
- (a) 定义
  - (b)  $r(A) = r(B)$  且  $Ax = 0$  的解全是  $Bx = 0$  的解

## 4.6 条件转换思路

1. 抽象方程组 (例 4.9)
- (a) 解的结构
  - (b) 解的性质
  - (c) 秩

## 4.7 理解