

线性代数

Bowen

January 20, 2026

Contents

1 行列式	3
1.1 基础概念	3
1.2 性质	3
1.3 基础	3
1.3.1 完全展开式	3
1.3.2 余子式 & 代数余子式	3
1.4 定理	4
1.4.1 展开公式	4
1.4.2 乘法公式	4
1.5 公式	4
1.5.1 上 (下) 三角形	4
1.5.2 拉普拉斯展开式	5
1.5.3 范德蒙行列式	5
1.5.4 特征多项式	5
1.6 方阵行列式	5
1.7 克拉默法则	6
1.8 方法步骤	6
1.9 条件转换思路	7
1.10 理解	7
2 矩阵	7
2.1 基础概念	7
2.2 定理	9
2.3 运算	11
2.4 公式	13
2.4.1 行列式	13
2.4.2 转置	13
2.4.3 伴随	13
2.4.4 可逆	14
2.4.5 秩	14
2.4.6 分块矩阵	16
2.4.7 对角矩阵	17
2.4.8 特殊矩阵 n 次方	17

2.5 方法步骤	18
2.6 条件转换思路	19
2.7 理解	20
3 向量	22
3.1 基本概念	22
3.2 定理	23
3.3 运算	24
3.4 公式	24
3.5 方法步骤	24
3.6 条件转换思路	25
3.7 理解	26
4 线性方程组	27
4.1 基础概念	27
4.2 定理	29
4.3 运算	31
4.4 公式	31
4.5 方法步骤	31
4.6 条件转换思路	32
4.7 理解	32

1 行列式

1.1 基础概念

1. 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组程伟一个 n 阶排列，通常用 j_1, j_2, \dots, j_n 表示 n 阶排列
2. 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序，一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数，用 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 表示
3. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列

1.2 性质

1. 经转置行列式的值不变，即 $|A^T| = |A|$
2. 某行元素全为 0 \Rightarrow 行列式的值为 0
3. 两行相等 \Rightarrow 行列式的值为 0
4. 两行成比例 \Rightarrow 行列式的值为 0
5. 某行（列）有公因数 k ，可把 k 提到行列式外
6. 两行互换，行列式变号
7. 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
8. 某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变

1.3 基础

1.3.1 完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} \mathbf{a}_{1j_1} \mathbf{a}_{2j_2} \dots \mathbf{a}_{nj_n}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

1.3.2 余子式 & 代数余子式

1. 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij} ；称 $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij} ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2. 三阶行列式的代数余子式

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

1.4 定理

1.4.1 展开公式

1. n 阶行列式等于它的任意一行（列）的所有元素与他们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} (k = 1, 2, \dots, n) && \text{行} \\ &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} (k = 1, 2, \dots, n) && \text{列} \end{aligned}$$

2. 任意一行（列）的所有元素与其他行的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} &= 0 = 0 \quad (i \neq k \text{ 且 } i, k = 1, 2, \dots, n) \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} &= 0 = 0 \quad (j \neq k \text{ 且 } j, k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

1.4.2 乘法公式

设 \mathbf{A} , \mathbf{B} 都是 n 阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

1.5 公式

1.5.1 上（下）三角形

1. 主对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

2. 副对角线三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-2} \dots a_{n1}$$

1.5.2 拉普拉斯展开式

1. 主对角线

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ * & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

2. 副对角线

$$\begin{vmatrix} * & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

m, n 分别是方阵 A, B 的阶数

1.5.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

1.5.4 特征多项式

1. 设 $A = [a_{ij}]$ 是三阶矩阵, 则 A 的特征多项式

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - s_2\lambda + |A|$$

$$\text{其中 } s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.6 方阵行列式

1. 若 A 是 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵 $\Rightarrow |A^T| = |A|$
2. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |kA| = k^n |A|$
3. 若 A, B 都是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |AB| = |A||B|, |A^2| = |A|^2$
4. 若 A 是 n 阶矩阵 $\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$
5. 若 A 是 n 阶可逆矩阵 $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$
6. 若 A 是 n 阶矩阵, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A 的特征值 $\Rightarrow |A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$
7. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow |A| = |B|, |A + kE| = |B + kE|$
7. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$

1.7 克拉默法则

设有 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记系数矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 则其行列式为 $|\mathbf{A}|$ 。若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则方程组有唯一解, 并且第 i 个未知数 x_i 可由下式求得:

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中 \mathbf{A}_i 是将 \mathbf{A} 的第 i 列替换为常数列向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 后得到的矩阵, 即:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论 若齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

1. 系数行列式 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组只有零解
2. 系数行列式 $|A| = 0 \Leftrightarrow$ 方程组有非零解

1.8 方法步骤

1. 对于主对角线爪型行列式, 可用主对角线元素将其化为上(下)三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 对于副对角线爪型行列式, 可用副对角线元素将其化为反上(下)三角型来计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 把各行（列）均加到第一行（列）
4. 逐行（列）相加
5. 若有较多 0，可考虑直接用行（列）展开公式
6. 特殊的三对角线行列式
 - (a) 三角化法：逐行相加，构造上下三角型
 - (b) 递推法
 - (c) 归纳法
7. 数学归纳法
 - 普通数学归纳法 (Mathematical Induction)
 - (a) 验证 $n = 1$ 时，命题 f_n 成立；
 - (b) 假设 $n = k$ 时，命题 f_n 成立；
 - (c) 证明 $n = k + 1$ 时，命题 f_n 成立。
 - 强（完全）归纳法 (Strong Induction)
 - (a) 验证 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时，命题 f_n 成立；
 - (b) 假设当 $n < k$ 时，命题 f_n 均成立；
 - (c) 证明 $n = k$ 时，命题 f_n 成立。

1.9 条件转换思路

1. 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r(A) < n \text{ (其中 } n = \text{未知数的个数)} \\ &\Leftrightarrow |A| = 0 \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的列向量组线性相关} \end{aligned}$$

1.10 理解

2 矩阵

2.1 基础概念

1. m 行 n 列表格称为 $m \times n$ 矩阵，当 $m = n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵
2. 如果一个矩阵的所有元素都是 0，则称这个矩阵是零矩阵，可简记为 \mathbf{O}
3. 如果一个方阵，所有非主对角线元素都是 0，则称这个矩阵是对角矩阵
4. 两个 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, 如果对应的元素都相等，即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A = B$

5. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式称为 n 阶方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$
6. 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 称为矩阵 A 的转置矩阵, 记作 A^T
7. 如果方阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 是对称矩阵, 即 $a_{ij} = a_{ji}$
8. 如果方阵 A 满足 $A^T = -A$, 则称 A 是反对称矩阵, 即 $a_{ij} = -a_{ji}$
9. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵

10. 伴随矩阵是余子式矩阵的转置, 即 $A^* = [A_{ji}] = (A_{ij})^T$
11. n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, 如果存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E$ (单位矩阵) 成立, 则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵, B 是 A 的逆矩阵
12. 对 $m \times n$ 矩阵, 下列三种变换
 - (a) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行 (列)
 - (b) 互换矩阵某两行 (列) 的位置
 - (c) 把某行 (列) 的 k 倍加至另一行 (列)

称为矩阵的初等行 (列) 变换, 统称为矩阵的初等变换

13. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与矩阵 B 等价, 记作 $A \underset{\sim}{=} B$
14. 单位矩阵经过一次初等变换等到的矩阵称为初等矩阵
 - (a) $E_i(k)$ 单位矩阵第 i 行乘以常数 k
 - (b) E_{ij} 单位矩阵互换 i, j 行
 - (c) $E_{ij}(k)$ 单位矩阵第 j 行的 k 倍加至第 i 行
15. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 。向量内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

16. 向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

17. 若 $(\alpha, \beta) = 0$ 即 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$, 则称 α 与 β 正交, 记为 $\alpha \perp \beta$

18. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = A^TA = E$, 称 A 是 **正交矩阵**:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow A^T = A^{-1} \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的行 (列) 向量两两正交 (单位向量)} \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的每个行 (列) 向量长度均为 } 1 \\ &\Leftrightarrow A \text{ 的行 (列) 向量平方和为 } 1 \\ &\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1 \\ &\Rightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = -1 \end{aligned}$$

19. 若 A 是正交矩阵且 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则:

- (a) $\alpha_i^T \alpha_i = 1$
- (b) $\alpha_i^T \alpha_j = 0 \ (i \neq j)$
- 20. 在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行与 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这个行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式, 称其为矩阵 A 的一个 k 阶子式
- 21. 矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩, 记为 $r(A)$ 。零矩阵的秩规定为 0
- 22. 矩阵秩的理解

- (a) $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 任何 $r+1$ 阶子式 (若存在) 必全为 0
 - (a) $r(A) < r \Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为 0
 - (a) $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0
 - (a) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$
 - (a) $r(A) \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow 1 \leq r(A) \leq n$
 - (a) 若 A 是 n 阶矩阵
 - $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
 - $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆
 - (b) 若 A 是 $m \times n$ 阶矩阵 $\Leftrightarrow r(A) \leq \min(m, n)$

2.2 定理

1. 若 A 是可逆矩阵, 则矩阵 A 的逆矩阵唯一, 记为 A^{-1}

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & |A| \neq 0 \\ \Leftrightarrow & r(A) = n \\ \Leftrightarrow & A \text{ 的列 (行) 向量组线性无关} \\ \Leftrightarrow & A = P_1 P_2 \dots P_s, P_i (i = 1, 2, \dots, s) \text{ 是初等矩阵} \\ \Leftrightarrow & A \text{ 通过初等变换能化为单位矩阵} \\ \Leftrightarrow & A \text{ 与单位矩阵等价} \\ \Leftrightarrow & 0 \text{ 不是矩阵 } A \text{ 的特征值} \\ \Leftrightarrow & \text{齐次线性方程组 } Ax = 0 \text{ 只有零解}\end{aligned}$$

3. n 阶矩阵 A 不可逆

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & |A| = 0 \\ \Leftrightarrow & r(A) < n \\ \Leftrightarrow & A \text{ 的列 (行) 向量组线性相关} \\ \Leftrightarrow & A \text{ 无法表示为初等矩阵的乘积} \\ \Leftrightarrow & A \text{ 无法通过初等变换能化为单位矩阵} \\ \Leftrightarrow & 0 \text{ 是矩阵 } A \text{ 的特征值} \\ \Leftrightarrow & \text{齐次线性方程组 } Ax = 0 \text{ 有非零解}\end{aligned}$$

4. $A \stackrel{\sim}{=} B$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & r(A) = r(B) \\ \Leftrightarrow & A \text{ 通过初等变换能化为 } B \\ \Rightarrow & |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0, |A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0. \text{ 即 } A, B \text{ 的行列式同时为 } 0 \text{ 或同时不为 } 0\end{aligned}$$

5. 若 A 是 n 阶矩阵, 且满足 $AB = E$, 则必有 $BA = E$

6. 用初等矩阵 P 左 (右) 乘矩阵 A , 其结果 $PA(AP)$ 就是对矩阵 A 作一次相应的初等行 (列) 变换 \Rightarrow 左乘行变换, 右乘列变换

6. 初等矩阵均可逆, 其逆矩阵是同类型的初等矩阵, 即

倍乘 $E_i^{-1}(k) = E_i(1/k)$ 第 i 行 (或列) 乘以非零常数 k 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 乘以 $1/k$

互换 $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ 交换第 i 行 (或列) 和第 j 行 (或列) 的逆矩阵是其本身

倍加 $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$ 第 i 行 (或列) 加上 k 倍第 j 行 (或列) 的逆矩阵是第 i 行 (或列) 加上 $-k$ 倍第 j 行 (或列)

7. 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 与 Q , 使 $PAQ = B$

8. 秩 $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩

9. 矩阵经初等变换后秩不变

2.3 运算

1. 设 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记作 $A + B = C$
2. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记作 kA
3. 设 A, B, C, \mathbf{O} 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:
 - (a) $A + B = B + A$
 - (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
 - (c) $A + \mathbf{O} = A$
 - (d) $A + (-A) = \mathbf{O}$
 - (e) $1A = A$
 - (f) $k(lA) = (kl)A$
 - (g) $(kA)^n = k^n A^n$
 - (h) $k(A + B) = kA + kB$
 - (i) $(k + l)A = kA + lA$

4. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = [b_{ij}]$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = [c_{ij}]$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum \text{第 } i \text{ 行} \times \text{第 } j \text{ 列}$$

称为 A 与 B 的乘积, 记作 $C = AB$

5. 矩阵乘法有下列法则:

- (a) $A(BC) = (AB)C$
 - (b) $A(B + C) = AB + AC$
 - (c) $(A + B)C = AC + BC$
 - (d) $(kA)(lB) = klAB$
 - (e) $AE = EA = A$
 - (f) $\mathbf{O}A = A\mathbf{O} = \mathbf{O}$
6. 设 A 是 n 阶矩阵, k 是正整数,
 - (a) A 的 k 次方幂 $A^k = A \cdot A \dots A$ (k 个 A)
 - (b) $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$
 - (c) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$
 - (d) $(A^k)^l = A^{kl}$

7.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

10. $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + \textcolor{red}{AB} + \textcolor{red}{BA} + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

11. $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{E}$

(a) $E - A^3 = (E - A)(E + A + A^2)$

(b) $E + A^3 = (E + A)(E - A + A^2)$

(c) $AB - 2B - 4A = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{B} - 4\mathbf{E}) = 8\mathbf{E}$

12. 设 α 和 β 都是列向量, 则

(a) 列向量·行向量: $\alpha\beta^T = (\beta\alpha^T)^T$, 两者都是 n 阶矩阵 (互为转置)

(b) 行向量·列向量: $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$ 是一个数

(c)

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{对称矩阵})$$

(d) $r(\alpha\alpha^T) = 1$

(e) $\alpha\alpha^T$ 特征值是 $\|\alpha\|^2, 0, 0, \dots, 0 (n-1 \uparrow)$

(f)

$$\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad (\text{平方和})$$

13. 向量

- $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- $(k\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$
- $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$

2.4 公式

2.4.1 行列式

1. $|A^T| = |A|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|AB| = |A||B|$, $|A^2| = |A|^2$
4. $|\textcolor{red}{A}^*| = |A|^{n-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

2.4.2 转置

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $(E + A)^T = E + A^T$

2.4.3 伴随

1. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A$
2. $AA^* = A^*A = |A|E$
3. $A^* = |A|A^{-1}$
4. A 可逆有 $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $(A^*)^T = (A^T)^*$
7. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
8. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
 - (a) 若 A 不可逆 ($|A| = 0$), 则
 - i. 且 $n \geq 3$ 时, $(A^*)^* = O$
 - ii. 且 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$

9.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如果 } r(A) = n, \\ 1, & \text{如果 } r(A) = n - 1, \\ 0, & \text{如果 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

10. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (二阶矩阵), 则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 。主对调, 副变号

2.4.4 可逆

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}(k \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
8. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |P^{-1}||P| = 1$

9.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} & a \\ b & \\ c & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \\ \frac{1}{a} & \end{bmatrix}$$

2.4.5 秩

1. $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(A A^T)$
2. 当 $k \neq 0$ 时, $r(kA) = r(A)$
3. $r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$
4. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则
 - (a) $r(AB) \leq r(A)$ 并且 $r(AB) \leq r(B)$, 即 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
 - (b) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$
 - (c) $r(A, AB) = r(A)$ 详见理解 1
 - (d) $r(B, BA) = r(B)$

(e) 且 $AB = O$, 则

i. $r(A) + r(B) \leq n$

ii. B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解

• 按列分块, 有

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_s], AB = A[b_1, b_2, \dots, b_s] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s] = [0, 0, \dots, 0]$$

因此

$$Ab_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

(f) 且 $AB = C$, 则

i. 矩阵 $C(AB)$ 的行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 B 的行向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出

• 对 B, C 按列分块, 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + \dots + a_{2n}\beta_n = \alpha_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{cases}$$

ii. 矩阵 $C(AB)$ 的列向量可由 A 的列向量线性表出

5. 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B) = r(BA)$

6. 若 A 列满秩, 则 $r(AB) = r(B)$

7. 若 A 行满秩, 则 $r(AB) = r(A)$

8. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, C 是 $s \times t$ 矩阵, 则

$$r(AB) + r(BC) \leq r(ABC) + r(B)$$

9.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

10.

$$r \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

11. 若 $A \sim B$, 则

(a) $r(A) = r(B)$

(b) $r(A + kE) = r(B + kE)$

2.4.6 分块矩阵

1. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

2. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}ZC^{-1} \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}ZB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

4. 若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

(a)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} B & Z \\ O & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & -B^*ZC^* \\ O & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} B & O \\ Z & C \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |C|B^* & O \\ -C^*ZB^* & |B|C^* \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} Z & B \\ C & O \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |B|C^* \\ |C|B^* & -\textcolor{red}{B}^*ZC^* \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & Z \end{bmatrix}^* = (-1)^{mn} \begin{bmatrix} -\textcolor{red}{C}^*ZB^* & |B|C^* \\ |C|B^* & O \end{bmatrix}$$

2.4.7 对角矩阵

1. $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$

2.

$$\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_1 & & \\ & b_2a_2 & \\ & & b_3a_3 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

2.4.8 特殊矩阵 n 次方

1. 若 $r(A) = 1$, 则

- (a) A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积
- (b) $A^2 = lA$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
- (c) $A^n = l^{n-1}A$ 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

2. 设 A 为 $n \times n$ 上三角矩阵, 主对角线为 0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

则:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = 0, \quad A^k = 0 \text{ 当 } k \geq n$$

3. 若 $B = P^{-1}AP$, 则 $B^2 = P^{-1}A^2P$, 即

- (a) $\mathbf{B}^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}$
- (b) $A^n = PB^nP^{-1}$

2.5 方法步骤

1. 已知矩阵 A , 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为对角矩阵, 求 P, Q

- (a) 标准型: 对角矩阵是特征值
- (b) 初等行变换: 对 A 做初等行变换化为上三角矩阵 $B([A|E] \rightarrow [B|P])$ 得到 P , 再对 B 做列变换或 B^T 作行变换化为对角矩阵 $\Lambda([B^T|E] \rightarrow [\Lambda|Q])$ 得到 Q

2. 由 A^* 求 A

- (a) $|A^*|$
- (b) $|A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow |A|$
- (b) $AA^* = |A|E \Rightarrow A = |A|(A^*)^{-1}$

3. 秩求法

- $|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$
- $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$
- 初等行变换矩阵秩不变
- 找不为 0 的子式 $\leq r(A)$
- $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$

4. 求特殊矩阵的 n 次方

- 分块
- 若 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A$, 其中 $l = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
- $P^{-1}AP = B \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}, B^n = P^{-1}A^nP$
- 观察多少次幂之后是 0, 之后的都是 0
- 对角矩阵的 n 次方

5. 求伴随矩阵 A^*

- 定义
- $A^* = |A|A^{-1}$

6. 求可逆矩阵

- 求代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} (k \neq 0)$
- 用初等行变换

$$(A \ E) \xrightarrow{\text{由上往下}} (\text{上三角...}) \xrightarrow{\text{由下往上}} (*) \xrightarrow{\text{某行乘} k} (E \ A^{-1})$$

- 分块

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

2.6 条件转换思路

1. 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 是 $n \times s$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则

- (a) \mathbf{B} 的列向量是齐次方程组 $\mathbf{Ax} = 0$ 的解
- (b) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$
- (c) 若 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为方阵, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$
- (d) 且 A, B 非零, 则

$$\begin{aligned} &\Rightarrow r(A) < n \text{ 且 } r(B) < n \\ &\Rightarrow A \text{ 列向量线性相关} \\ &\Rightarrow B \text{ 行向量线性相关} \end{aligned}$$

2. 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 则:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -a_{ij} \\ A^* &= (A_{ij})^T = (-a_{ij})^T = -(a_{ij})^T = -A^T \end{aligned}$$

3. 若 $A^* = A^T$, 则 $A_{ij} = a_{ij}$

4. 矩阵 A 经过若干次初等行变换得到矩阵 B , 则

- (a) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解
- (b) $A \stackrel{\sim}{=} B, B = PA$
- (c) $r(A) = r(B)$

5. 矩阵 A 经过若干次初等列变换得到矩阵 B , 则

- (a) $A \stackrel{\sim}{=} B, B = AQ$
- (b) $r(A) = r(B)$

6. $A^* \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq n - 1$ (A 中至少有一个 $n - 1$ 阶子式不为 0)

7. 若 A, B, C 为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 则

$$\begin{aligned}\Rightarrow & |A||B||C| = 1 \\ \Rightarrow & ABC \text{ 均可逆} \\ \Rightarrow & BC = A^{-1} \Rightarrow BCA = E \\ \Rightarrow & AB = C^{-1} \Rightarrow CAB = E\end{aligned}$$

8. $r(A + AB) \Rightarrow$ 加法, 找可逆, 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B)$

9. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $r(A)$ 为秩

- **基本定义:** 秩 = 列向量或行向量的最大线性无关个数
- **行列式:** 方阵 A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
- **线性相关性:**
 - 列满秩 \Rightarrow 列向量线性无关
 - 行满秩 \Rightarrow 行向量线性无关
- **齐次方程:** $Ax = 0$
 - 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = n$
 - 非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$, 解空间维数 $n - r(A)$
- **矩阵运算:**
 - $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
 - $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
- **逆矩阵:** 列满秩 \rightarrow 左逆, 行满秩 \rightarrow 右逆; 方阵满秩 \rightarrow 可逆
- **特征值:** 方阵秩 $< n \Rightarrow 0$ 是特征值; 方阵满秩 $\Rightarrow 0$ 不是特征值

10. A 为 n 阶矩阵, A 各行元素之和都为 0, 则

- 列向量都是 1 是 $Ax = 0$ 的解
- A 的行向量线性相关
- $r(A) < n$

2.7 理解

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 (XY) 表示分块矩阵, 则 $r(A, AB) == r(A)$

(a) 记 $AB = C$, 对 A, C 按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 矩阵的秩就是列向量组的秩, 故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(A)$$

2. A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 $r(A) = m, r(B) = m$

解析

已知 $AB = E_m$, 则

$$\therefore AB = E_m \Rightarrow r(AB) = r(E_m) = m,$$

又因为

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, \quad r(A) \leq m, r(B) \leq m,$$

$$\therefore r(A) = m, \quad r(B) = m.$$

3. 矩阵相乘 \Leftrightarrow 两个数的积相加

3. 秩

- (a) 给定一个矩阵 A , 它的秩就是矩阵中线性无关的行 (或列) 的最大个数
- (b) 秩 == 矩阵所包含的“独立信息量”
- (c) e.g. 如果你有 10 行数据, 但其中 5 行其实是由另外 5 行“复制”或“线性组合”出来的, 那么这些重复的信息是“冗余的”, 真正“独立”的信息只有 5 行 $\Rightarrow r(A) = 5$
- (c) 解线性方程组: 判断方程有没有解、是不是唯一解
 - i. 方程 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = r(\bar{A})$
 - i. 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = \text{变量数}$
 - i. 多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < \text{变量数}$
- (d) 判断向量独立性: 度量“向量空间中有多少个独立方向”
 - i. 如果列向量组成的矩阵 $r(A) = \text{列数} \Rightarrow$ 向量组线性无关
 - i. 否则线性相关
- (e) 维度的桥梁: 刻画了“变换的本质效果”
 - i. 秩本质上就是矩阵对应线性映射的像空间 (列空间) 的维数
 - ii. 这告诉我们, 线性变换把空间压缩到了几维。
 - iii. e.g. 3×3 矩阵 A
 - $r(A) = 3 \Rightarrow$ 保留三维空间的全部信息 (可能只是旋转或缩放)
 - $r(A) = 2 \Rightarrow$ 把三维空间压缩成二维平面
 - $r(A) = 1 \Rightarrow$ 压缩成一条直线
 - $r(A) = 0 \Rightarrow$ 全部压缩成原点
- (f) 与行列式、可逆性关系: 可逆性的根本判据
 - i. 如果 n 阶矩阵 A , $r(A) = n$, 那么 A 可逆, $|A| \neq 0$
 - ii. 如果 $r(A) < n$, 矩阵 A 不可逆

3 向量

3.1 基本概念

1. n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 或 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维向量，其中 a_1, a_2, \dots, a_n 称为向量 α 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量
2. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，如果存在不全为零的数 k ，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$
则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关
 - (a) 有零向量
 - (b) 两向量成比例
 - (c) $n+1$ 个 n 维向量
3. 向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2})^T, \dots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm})^T$ 及向量组 $\widetilde{\alpha_1} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1})^T, \widetilde{\alpha_2} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{s2})^T, \dots, \widetilde{\alpha_m} = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{sm})^T$ ，其中 $s \leq r$ ，则称 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_m}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的延伸组（或称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \dots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组）
4. 对 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 β ，若存在实数 k_1, k_2, \dots, k_n ，使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \beta$$
则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合，或者说 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出（示）
5. 设有两个 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ，如果 (I) 中每个向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都可由 (II) 中的向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出
6. 如果 (I)(II) 这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个向量组等价
7. 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中，若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性相关，再加进任一向量 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, s)$ ，向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 就线性相关，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组
 - 极大线性无关组可以表示向量组中任一向量
 - 极大线性无关组不唯一，但其内的向量个数一致，即向量组的秩
8. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩
 - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
 - $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq n$
9. 初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，也不会改变它们之间的线性组合系数
10. 线性表示具有传递性

3.2 定理

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

\Leftrightarrow 其次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0$ 有非零解

\Leftrightarrow 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$, s 表示未知数的个数或向量个数

\Leftrightarrow 若向量组是方阵 (n 个 n 维向量), 则 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

2. 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

3. $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

4. 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 相关 \Rightarrow 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 相关

5. 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 无关 \Rightarrow 部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关

6. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \Rightarrow 延伸组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性无关

7. $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ 线性相关 \Rightarrow 缩短组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

8. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

\Leftrightarrow 非齐次线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]^T = \beta$ 有解

\Leftrightarrow 秩 $r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta]$

9. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中必有一个向量可用其余向量线性表出; 反之, 若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出, 则这 s 个向量必线性相关

10. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一

11. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。即如果多数向量能用少数向量线性表出, 那么多数向量一定线性相关

12. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且它可由可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $s \leq t$

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$

14. 如果 (I)(II) 是两个等价的向量组, 则 $r(I) = r(II)$

15. 如果 $r(A) = r$, 则 A 中有 r 个线性无关的列向量, 而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合, 也就是 $r(A) = A$ 的列秩

16. 一般地, $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩

17. A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 的解向量组的秩为 $n - r(A)$

3.3 运算

1. 设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则

- (a) $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T$
- (b) $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T$
- (c) $0\alpha = 0$
- (d) $(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
- (e) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (f) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (g) $\alpha + 0 = \alpha$
- (h) $\alpha + (-\alpha) = 0$
- (i) $1\alpha = \alpha$
- (j) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (k) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (l) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

3.4 公式

3.5 方法步骤

1. 判断多个向量是否线性相关

- 含有零向量 $\mathbf{0} \Rightarrow$ 线性相关
- 两个向量成比例 \Rightarrow 线性相关
- 存在关系 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ (定义) \Rightarrow 线性相关

2. 线性无关的判定与证明: 若向量的坐标没有给出, 通常用**定义法**或**秩的理论**或**反证法**

(a) **定义法**证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
- ii. \Downarrow 恒等变形(同乘: 看条件 + 构造条件或重组)
- iii. $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$

(b) **秩证** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

- i. $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s][x_1, x_2, \dots, x_s]^T = 0$ 只有零解
- ii. $\Leftrightarrow \text{秩r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$
 - $r(A) = A$ 的列秩 = A 的行秩
 - $r(AB) \leq r(A)$ 且 $r(AB) \leq r(B)$
 - 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$
 - 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n$, 则 $r(AB) = r(B)$

- 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = \mathbf{O}$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

(c) 反证法

(d) 线性方程组 $Ax = 0$

- 只有零解 \Leftrightarrow 线性无关
- 有非零解 \Leftrightarrow 线性相关

(e) 若是 n 个 n 维向量

- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0 \Leftrightarrow$ 相关
- $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0 \Leftrightarrow$ 无关

3. 判断能否线性表出

(a) 若向量坐标具体 \Rightarrow 非齐次线性方程组是否有解

- 有解 \Rightarrow 能线性表出
- 无解 \Rightarrow 不能线性表出

(b) 若向量坐标没有 \Rightarrow 线性相关或秩

- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 线性表出
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \Rightarrow$ 不能线性表出
- 线性相关

4. 求向量组的秩

- 设向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的矩阵为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ 对 A 作初等行变换得到行最简形矩阵 A' , 则

$$r(A') = r(A) = \text{向量组}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \text{ 的秩}$$

- 若存在 r 阶子式不为零, 则 r 为矩阵的秩, 对应的 r 个向量构成一组最大线性无关组

3.6 条件转换思路

1. 向量组(I)(II)等价

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出且 } (II) \text{ 可由 } (I) \text{ 线性表出} \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) = r(I, II) \\ &\Leftrightarrow r(I) = r(II) \text{ 且 } (I) \text{ 可由 } (II) \text{ 线性表出} \end{aligned}$$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以表示任意一个三维向量

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{三者线性无关} \\ &\Leftrightarrow \text{三者是一组基底} \\ &\Leftrightarrow (a, b, c)^T \text{ 能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示} \end{aligned}$$

3. 如果 $\gamma = (a, b, c)^T$ (任意向量) 不能由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性表出
- $$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 不可表示任意一个三维向量}$$
- $$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关}$$
- $$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$$
4. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 如果线性相关 \Rightarrow 构成一个平面或一条直线
5. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则
- (a) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关
 - (b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关
 - (c) 对于任意实数 k , 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关
 - (d) 对于任意实数 k , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$
 - $k = 0 \Rightarrow$ 相关
 - $k \neq 0 \Rightarrow$ 无关
6. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 $\Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$
7. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示法不唯一
- $$\Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 有无穷多解}$$
- $$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) < 3$$
- $$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关}$$
8. $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$
- $$\Leftrightarrow Ax = \beta \text{ 无解}$$
- $$\Rightarrow \beta \text{ 不能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表出}$$

3.7 理解

1. 线性相关无关 $\Rightarrow Ax = 0$ 齐次方程组非零解的问题
2. 线性表示 $\Rightarrow Ax = \beta$ (其中 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$) 非齐次方程组解的问题
 - 非齐次方程组的解向量 x 即为线性表示的系数
 - 对于 n 维向量, 有 n 个方程, 未知数个数等于向量个数
 - 根据秩的不同, 线性表示有三种情况:
 - (a) **唯一表示:** $r(A) = r(A, \beta) = n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 向量组线性无关
 - (b) **无穷多表示:** $r(A) = r(A, \beta) < n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 向量组线性相关
 - (c) **无表示:** $r(A) < r(A, \beta)$, β 不能由 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 线性表示

4 线性方程组

4.1 基础概念

1. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**。用矩阵表示为: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

2. 如果 $b_i = 0 (\forall i = 1, 2, \dots, m)$, 则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

为**齐次线性方程组**

3. 若用一组数 c_1, c_2, \dots, c_n 分别代替方程组中的 x_1, x_2, \dots, x_n , 使 m 个等式都成立, 则称有序数组 (c_1, c_2, \dots, c_n) 是方程组的一组解。解方程组就是要找出方程组的全部解

4. 非齐次线性方程组的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**, 而由全体系数组成的矩阵

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

称为非齐次线性方程组的**系数矩阵**

5. 如果两个方程组有相同的解集合, 则称它们是**同解方程组**

6. 下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**

(a) 用一个非零常数乘方程的两边

- (b) 把某方程的 k 倍加到另一方程上
- (c) 互换两个方程的位置

线性方程组经初等变换化为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量通常称为主变量，其余的未知量称为自由变量

7. 选择自由变量准则：去掉自由变量后主变量行列式不能为 0
8. 向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，如果
 - (a) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 $Ax = 0$ 的解
 - (b) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关
 - (c) $Ax = 0$ 的任一解都有由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性表出
 - (d) 解向量个数

$$= \text{无关解个数}$$

$$= \text{自由变量个数}$$

$$= t = n - r(A), \text{ 其中 } n = A \text{ 的列向量个数}$$
9. 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组基础解系，那么对任意常数 c_1, c_2, \dots, c_n ，

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_t\eta_t$$
是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解
10. $Ax = 0$ 的基础解系是不唯一的
11. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 既是方程组 (I) 的解，也是方程组 (II) 的解，则称 α 是方程组 (I) 和 (II) 的公共解
12. 对于方程组 (I) 和 (II)，如果 α 是方程组 (I) 的解，则 α 必是 (II) 的解；反过来，如果 α 是方程组 (II) 的解，则 α 必是 (I) 的解，则称 (I) 和 (II) 同解
13. $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) \text{ 且 } Ax = 0 \text{ 的解全} \subset Bx = 0 \text{ 的解}$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵 } A \text{ 和 } B \text{ 的行向量组等价}$$
14. 矩阵乘法一般没有交换律，若 $AB = BA$ ，就称 A 与 B 可交换

4.2 定理

1. 线性方程组的初等行变化把线性方程组变成与它同解的方程组
2. 设 n 元非齐次线性方程组, 对它的增广矩阵施行高斯消元法, 得到阶梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ c_{21} & \cdots & c_{2r} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{rr} & \cdots & a_{rn} & & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & \end{bmatrix}.$$

- (a) 如果 $d_{r+1} \neq 0$, 方程组无解
 - (b) 如果 $d_{r+1} = 0$, 方程组有解, 并且
 - i. 当 $r = n$ 时有唯一解
 - ii. 当 $r < n$ 时有无穷多解
 3. 齐次线性方程组只有零解 (唯一解)
- $$\Leftrightarrow r(A) = n$$
4. 齐次线性方程组有非零解 (有无穷多解)
- $$\Leftrightarrow r(A) < n$$
- $$\Leftrightarrow A \text{ 的列向量线性无关}$$
- $$\Leftrightarrow \text{若 } m = n, \text{ 则 } |A| = 0$$
5. 当 $m < n$ (即方程的个数 < 未知数的个数) 时, 齐次线性方程组必有非零解 (有无穷多解)
 6. 设齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A) = r < n$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系由 $n - r(A)$ 个线性无关的解向量所构成
 7. **有解判定定理:** 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等, 即 $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}})$:

若 $r(A) = r(\bar{A}) = n$ 若 $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 方程组有解 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 无解	\Leftrightarrow 方程组有唯一解 \Leftrightarrow 方程组有无穷解 $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow A \text{ 的行向量组线性无关} \\ \text{原因: } r(A) \leq r(\bar{A}) \leq m \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = m \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{A}) + 1 = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}}) \\ \Leftrightarrow b \text{ 不能由 } A \text{ 的列向量线性表出} \\ \Rightarrow A = 0 \end{array} \right.$
--	--

8. 解的性质

- (a) 如果 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解, 那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解
- (b) 如果 α, β 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的两个解, 则 $\alpha - \beta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 有无穷多解}$$

- (c) 如果 α 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解, η 是导出组 $Ax = 0$ 的解, 则 $\alpha + \eta$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解
- (d) 使用 **最小公约数** 构造解:

$\alpha_1 + \alpha_2$ 是两个解, $\alpha_2 + 2\alpha_3$ 是三个解,

故可构造:

$$3(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

- (e) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解
 - i. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{b}$ 的解
 - ii. 且 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解

- 9. **解的结构:** 对非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 若 $r(A) = r(\bar{A}) = r$, 且已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, ζ_0 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的每个已知解, 则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\zeta_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_{n-r} 为任意常数

- 10. 通解表示为:

$$\begin{aligned} \text{通解} &= \text{特解} + k_1 \text{解向量}_1 + k_2 \text{解向量}_2 + \dots \\ &= \text{特解} + \text{齐次方程 } Ax = 0 \text{ 的通解} \end{aligned}$$

特解构造方法:

$$\begin{aligned} \text{特解} &= \text{令自由变量为 } 0, \text{ 主元为常数项} \\ \text{特解} &\Leftarrow \text{通过单个 } b \text{ 构造, 即除/减 } (n+1 \text{ 个解} - n \text{ 个解}) \end{aligned}$$

齐次方程 $Ax = 0$ 的通解:

$$\begin{aligned} \text{通解} &= \text{自由变量列的相反数} \\ \text{通解} &= \alpha - \beta \text{ 或通过 } \text{最小公倍数} \text{ 法构造} \end{aligned}$$

4.3 运算

4.4 公式

4.5 方法步骤

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

(a) 判断何时 $a = 0$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & a & \end{array} \right]$$

若 $a = 0$ 则有可能无解

i. $\forall a$ 均有解

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & a & 0 \end{array} \right]$$

ii. 若 $b \neq 0$ 必无解

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ & & \\ & 0 & b \end{array} \right]$$

(b) e.g.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ & a-1 & a+2 & -3 \\ & & 2a+6 & a-9 \end{array} \right]$$

从下向上依次检查与 0 的关系

i. 先看 $2a + 6 = 0$

ii. 再看 $a - 1 = 0$

唯一解	$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$	$\Leftrightarrow a \neq 1$ 且 $a \neq -3$
无穷解	$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$	$\Leftrightarrow a = 1$
无解	$\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$	$\Leftrightarrow a = -3$

2. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 需要

- (a) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解
- (b) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关
- (c) $t = n - r(A)$

3. 非齐次线性方程组求解方法

- (a) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵
- (b) 求导出组的几个基础解系
- (c) 求方程组的一个特解 (为简捷, 可令自由变量全为 0)
- (d) 按解的结构写出通解
- (e) 注: 当方程组中含有参数时, 分析讨论要严谨不要丢情况

4. 公共解处理方法 (例 4.16)

- (a) (I)(II) 联立求解
- (b) 通过 (I) 与 (II) 各自的通解, 寻找非零公共解
- (c) 把 (I) 的通解带入 (II) 中, 如果仍是解, 寻找 k_1, k_2 所对应满足的关系式而求出公共解

5. 证明两方程同解

- (a) 定义
- (b) $r(A) = r(B)$ 且 $Ax = 0$ 的解全是 $Bx = 0$ 的解

4.6 条件转换思路

1. 抽象方程组 (例 4.9)

- (a) 解的结构
- (b) 解的性质
- (c) 秩

4.7 理解