1 一元函数微分学的应用 - 物理应用与经济应用

1.1 物理应用

相关物理概念

1. 速度：位移对时间的变化率
2. 加速度：速度对时间的变化率
3. 牛顿第二定律（$F = ma$）

Example

已知质点运动的位移 s 关于时间 t 的函数为 $s = s(t)$，称其为质点的运动方程 (位移方程)，则质点的速度为

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t).$$

其加速度为

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v'(t) = s''(t).$$

此外，由链式法则可得

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

1.2 相关变化率

研究 $\frac{dA}{dB} = \frac{dA}{dC} \cdot \frac{dC}{dB}$

1. 若已知 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}, \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}B}$，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}C} = \frac{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}}{\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}B}}$$

2. 该等式建立了 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}$ 与 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}B}$ 的关系，其中 A, B, C 可以扩展为许多实际物理量
3. 若函数 $y = f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

所确定，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. = f'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

上式时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 由 $f'(x)$ 联系在一起，这种相互关联的变化率称为**相关变化率**

1.3 结论

1.4 定理

1.5 运算

1.6 公式

1.7 方法总结

1. 涉及相关变化率问题

   ① 建立相关变量方程

   ② 求导找出相关变化率，进而通过已知变化率求未知变化率

1.8 条件转换思路

1.9 理解