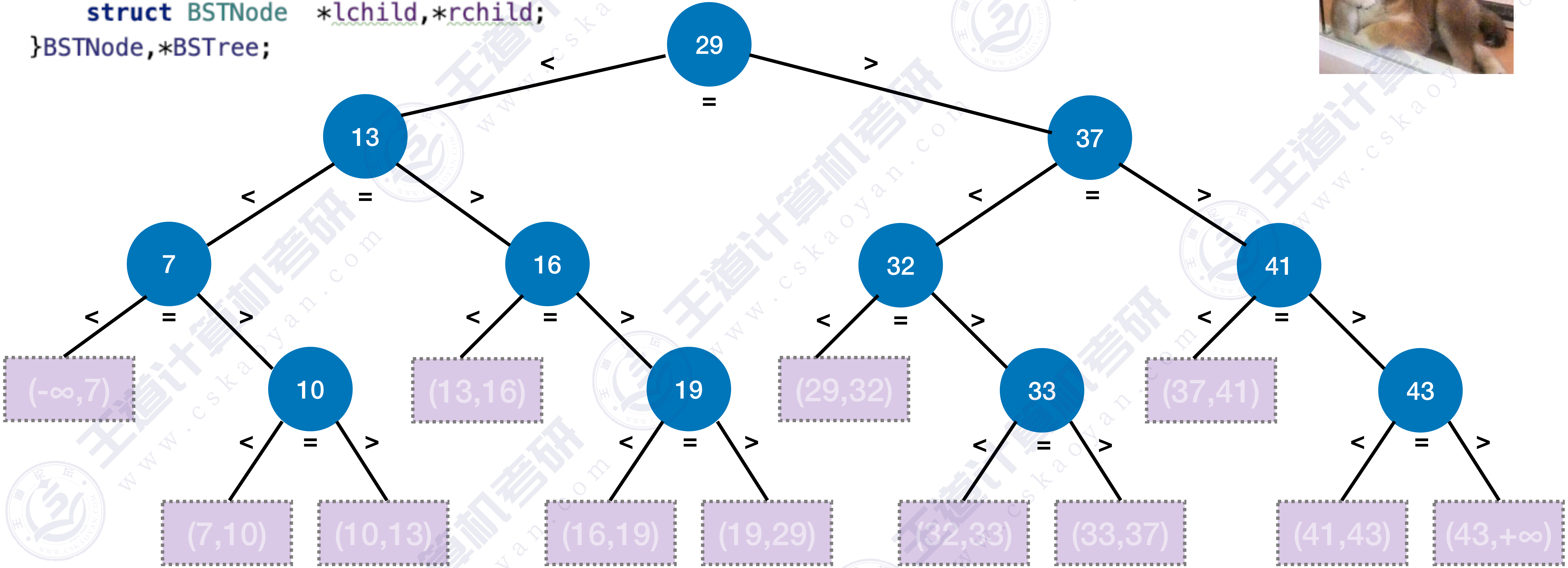
本节内容

B树

回顾：二叉查找树（BST）

```
//二叉排序树结点
typedef struct BSTNode{
    int key;
    struct BSTNode  *lchild,*rchild;
}BSTNode,*BSTree;
```

能不能变成m叉查找树?



5叉查找树

```
//5叉排序树的结点定义
struct Node {
    ElemType keys[4];         //最多4个关键字
    struct Node * child[5]; //最多5个孩子
    int num;      //结点中有几个关键字
};
```

如何查找

查找目标：9

如何查找

查找目标：9

注：每个结点内也可以折半查找

如何查找

查找目标：41

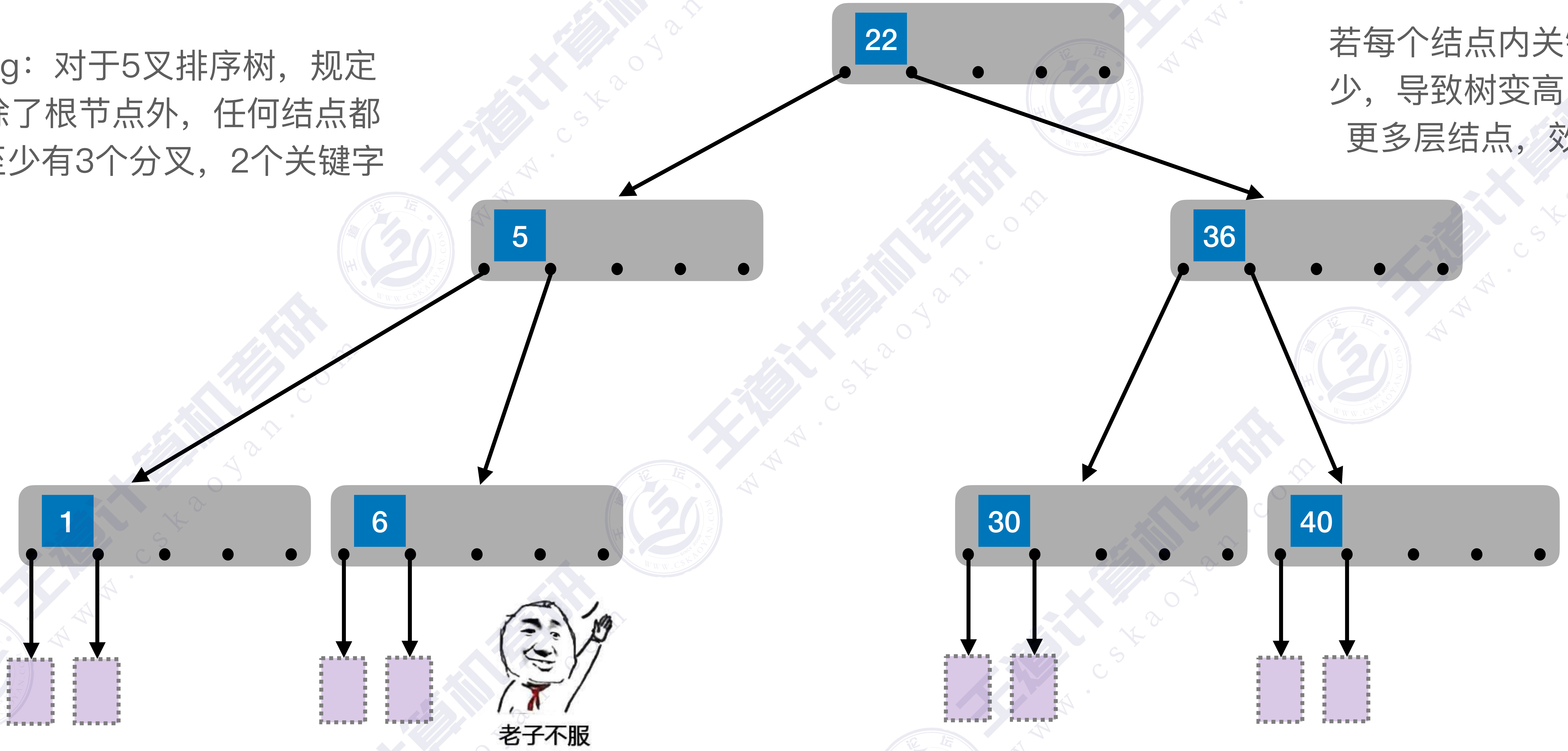
如何查找

查找目标：41

如何保证查找效率

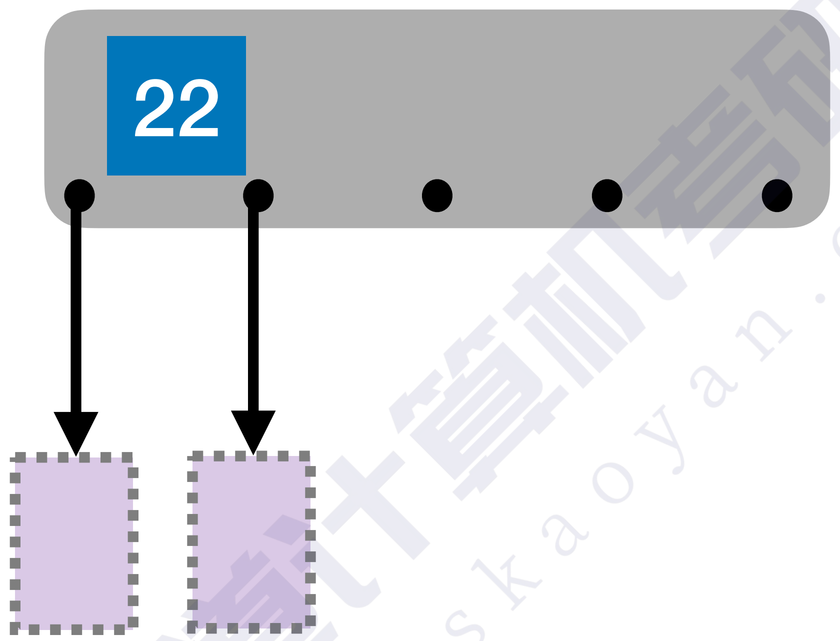
eg：对于5叉排序树，规定除了根节点外，任何结点都至少有3个分叉，2个关键字

若每个结点内关键字太少，导致树变高，要查更多层结点，效率低



策略：m叉查找树中，规定除了根节点外，任何结点至少有$\lceil m/2 \rceil$个分叉，即至少含有$\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键字

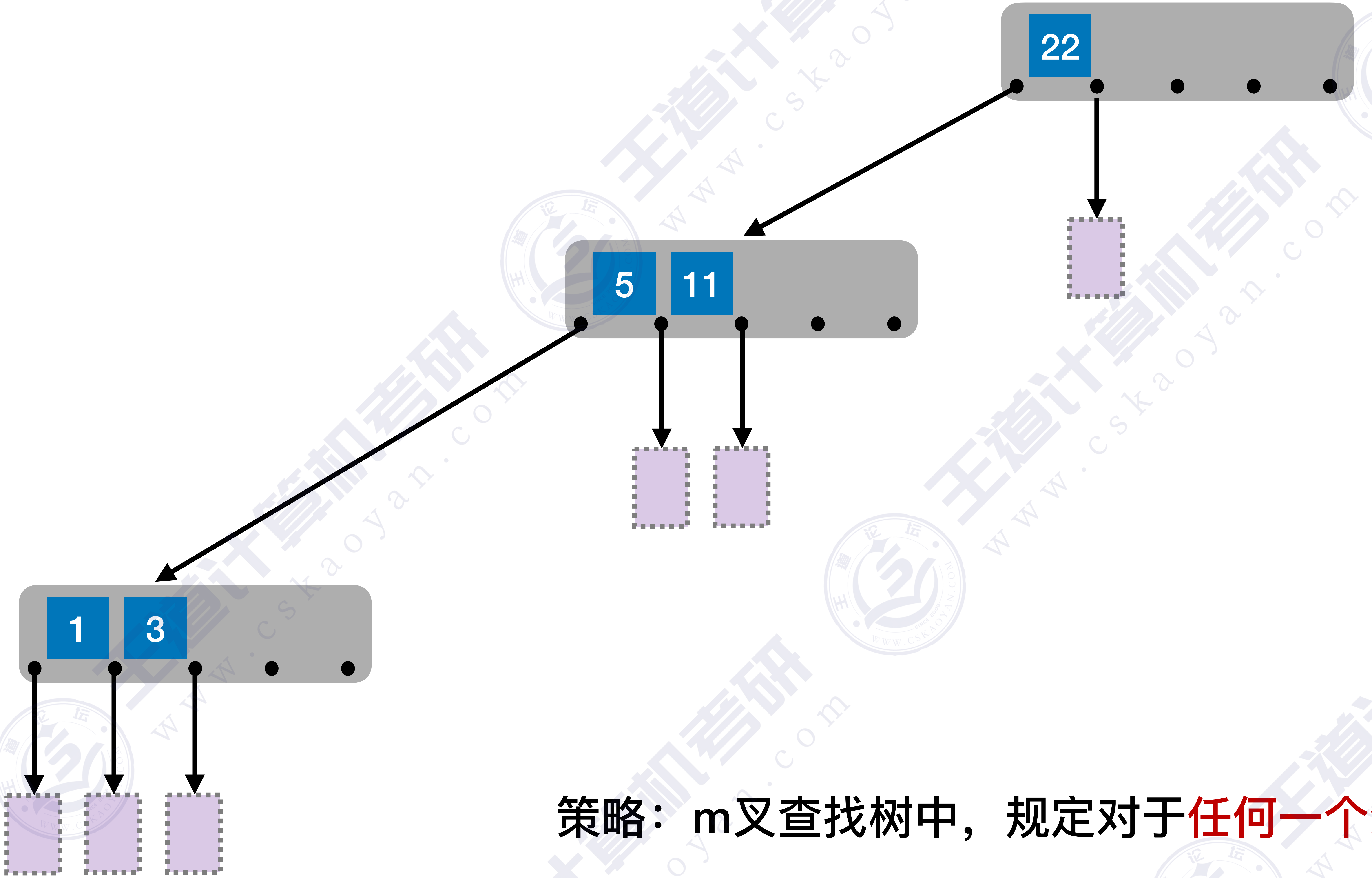
如何保证查找效率



如果整个树只有1个元素，根节点只有两个分叉

策略：m叉查找树中，规定除了根节点外，任何结点至少有$\lceil m/2 \rceil$个分叉，即至少含有$\lceil m/2 \rceil - 1$个关键字

如何保证查找效率

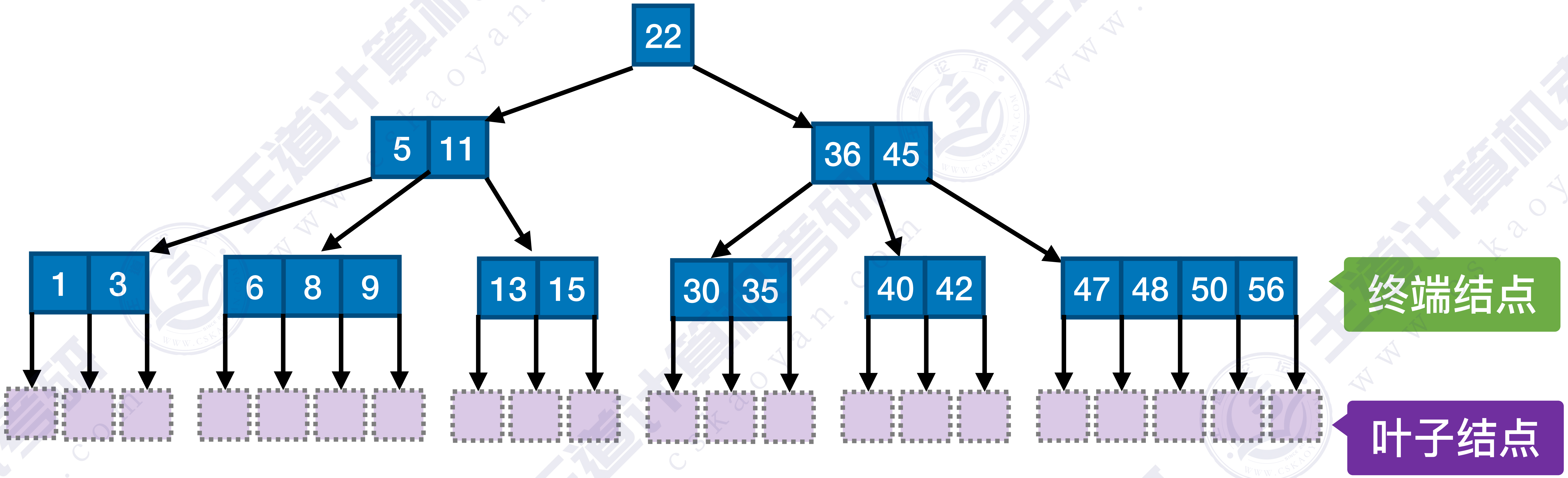


不够“平衡”，树会很高，要查很多层结点

策略：m叉查找树中，规定对于**任何一个结点，其所有子树的高度都要相同**。

B树

B树



B树，又称多路平衡查找树，B树中所被允许的孩子个数的最大值称为B树的阶，通常用m表示。一棵m阶B树或为空树，或为满足如下特性的m叉树：

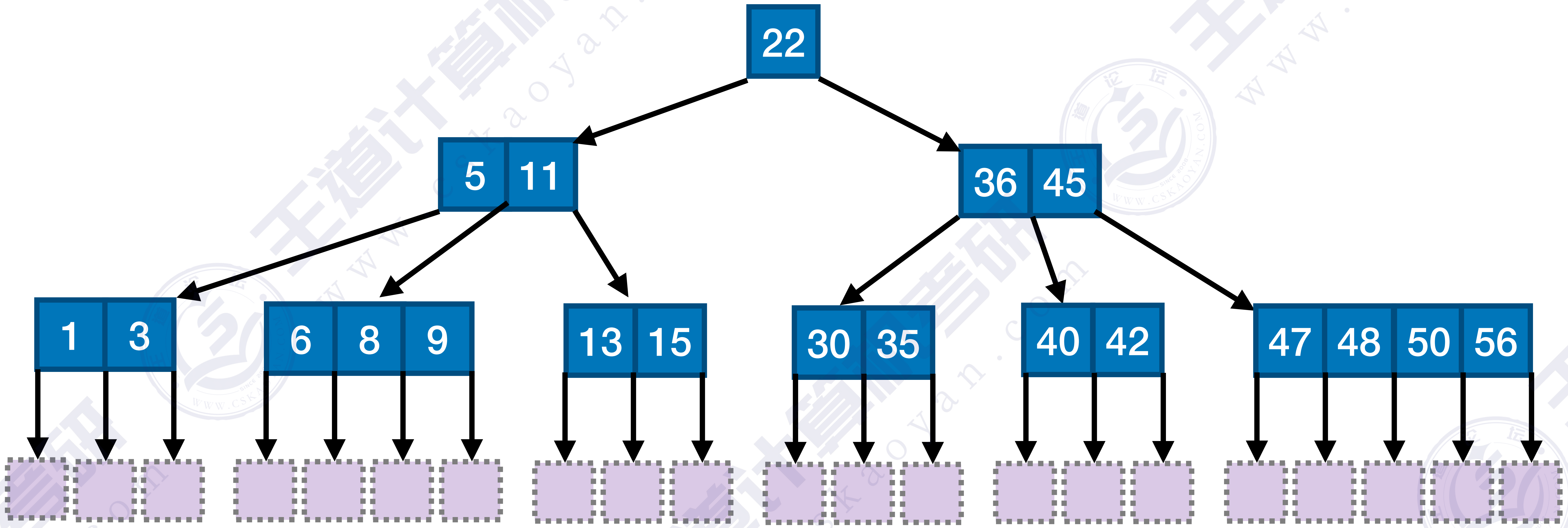
1）树中每个结点至多有m棵子树，即至多含有m–1个关键字。

2）若根结点不是终端结点，则至少有两棵子树。

3）除根结点外的所有非叶结点至少有 $\lceil m/2 \rceil$ 棵子树，即至少含有 $\lceil m/2 \rceil$–1个关键字。

5）所有的叶结点都出现在同一层次上，并且不带信息（可以视为外部结点或类似于折半查找判定树的查找失败结点，实际上这些结点不存在，指向这些结点的指针为空）。

B树

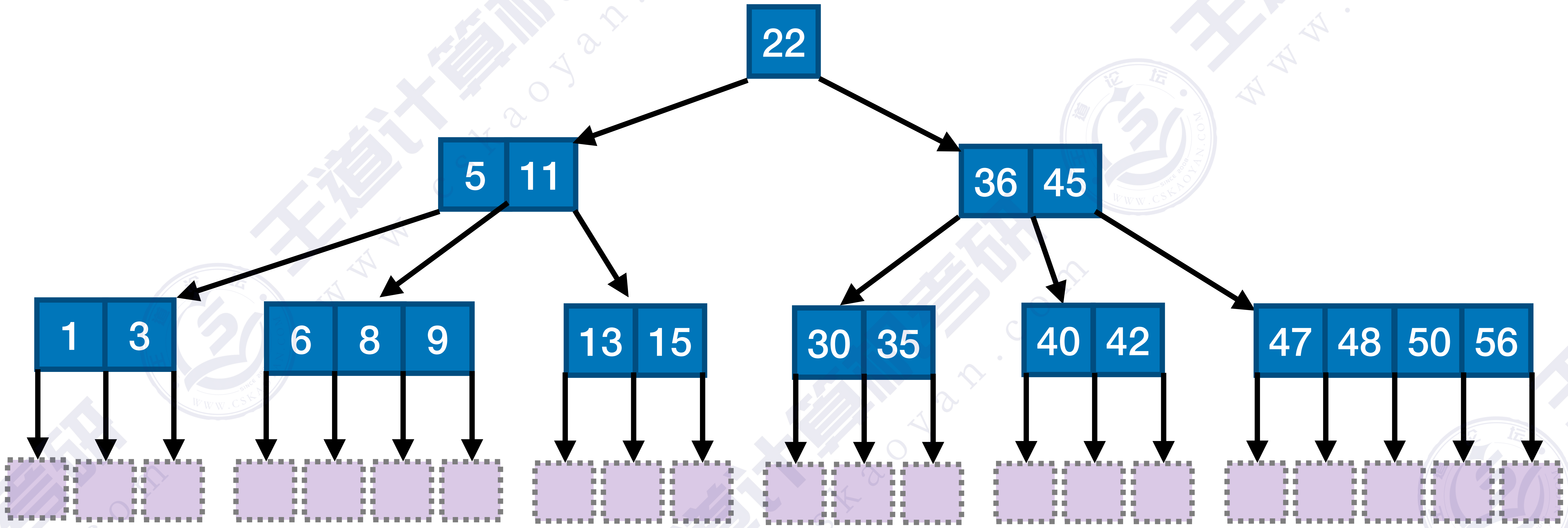


4）所有非叶结点的结构如下：

n	P_0	K_1	P_1	K_2	P_2	…	K_n	P_n

其中，Ki（i = 1, 2,…, n）为结点的关键字，且满足K1 < K2 <…< Kn；Pi（i = 0, 1,…, n）为指向子树根结点的指针，且指针Pi–1所指子树中所有结点的关键字均小于Ki，Pi所指子树中所有结点的关键字均大于Ki，n（$\lceil m/2 \rceil$– 1≤n≤m – 1）为结点中关键字的个数。

B树



m阶B树的核心特性：

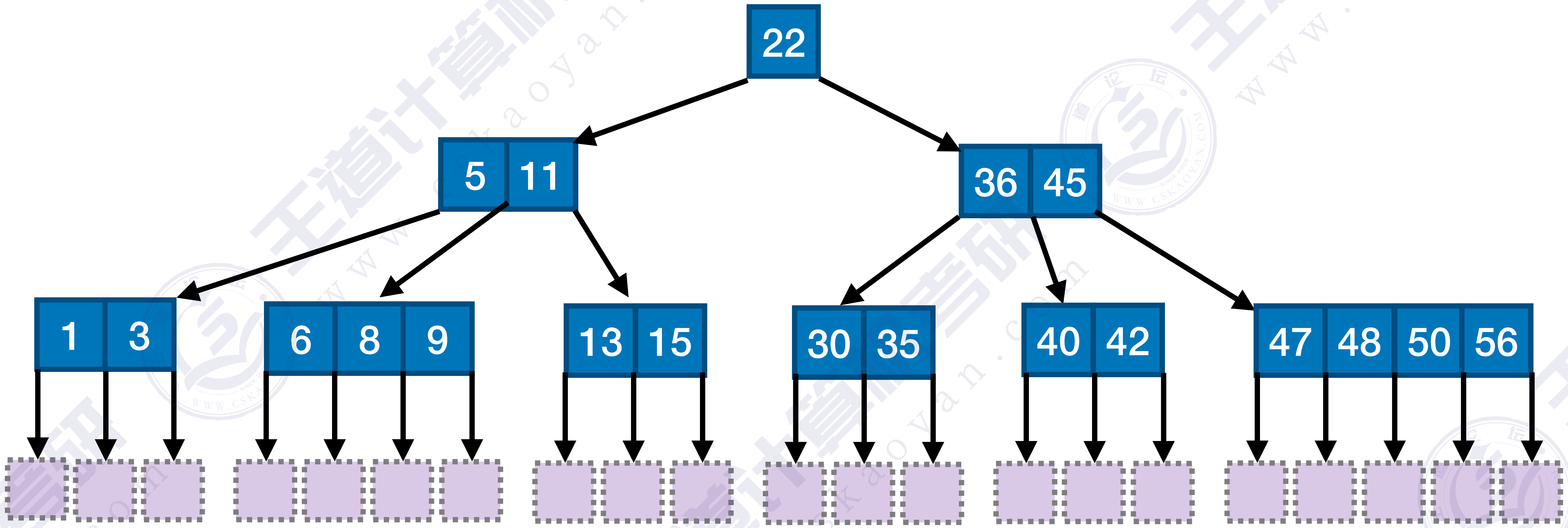
1） 根节点的子树数∈[2, m]，关键字数∈[1, m–1]。

  其他结点的子树数∈[$\lceil m/2 \rceil$, m]；关键字数∈[$\lceil m/2 \rceil$–1, m–1]

2）对任一结点，其所有子树高度都相同

3）关键字的值：子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<….（类比二叉查找树 左<中<右）

B树的高度



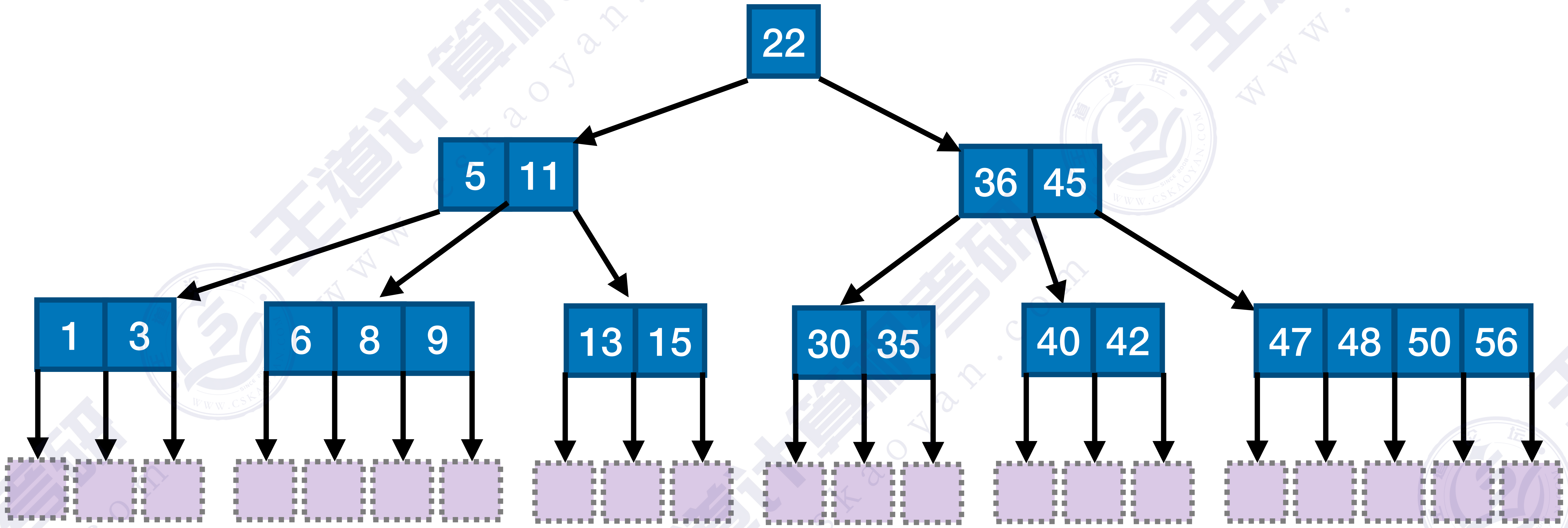
注：大部分学校算B树的高度不包括叶子结点（失败结点）

问题：含n个关键字的m阶B树，最小高度、最大高度是多少？

最小高度——让每个结点尽可能的满，有m-1个关键字，m个分叉，则有

n≤$(m-1)(1+m+m^2+m^3+...+m^{h-1})=m^h-1$，因此 $h \geq log_m(n+1)$

B树的高度



注：大部分学校算B树的高度不包括叶子结点（失败结点）

最大高度——让各层的分叉尽可能的少，即根节点只有2个分叉，其他结点只有$\lceil m/2 \rceil$个分叉

各层结点至少有：第一层 1、第二层 2、第三层 2$\lceil m/2 \rceil$ … 第h层 2$(\lceil m/2 \rceil)^{h-2}$

第h+1层共有叶子结点（失败结点） 2$(\lceil m/2 \rceil)^{h-1}$ 个

n个关键字的B树必有n+1个叶子结点，则 $n+1 \geq 2(\lceil m/2 \rceil)^{h-1}$，即$h \leq log_{\lceil m/2 \rceil}\frac{n+1}{2}+1$

n个关键字将数域切分为n+1个区间

B树的高度

问题：含n个关键字的m叉B树，最小高度、最大高度是多少?

最大高度——让每个结点包含的关键字、分叉尽可能的少。记 $k=\lceil m/2 \rceil$

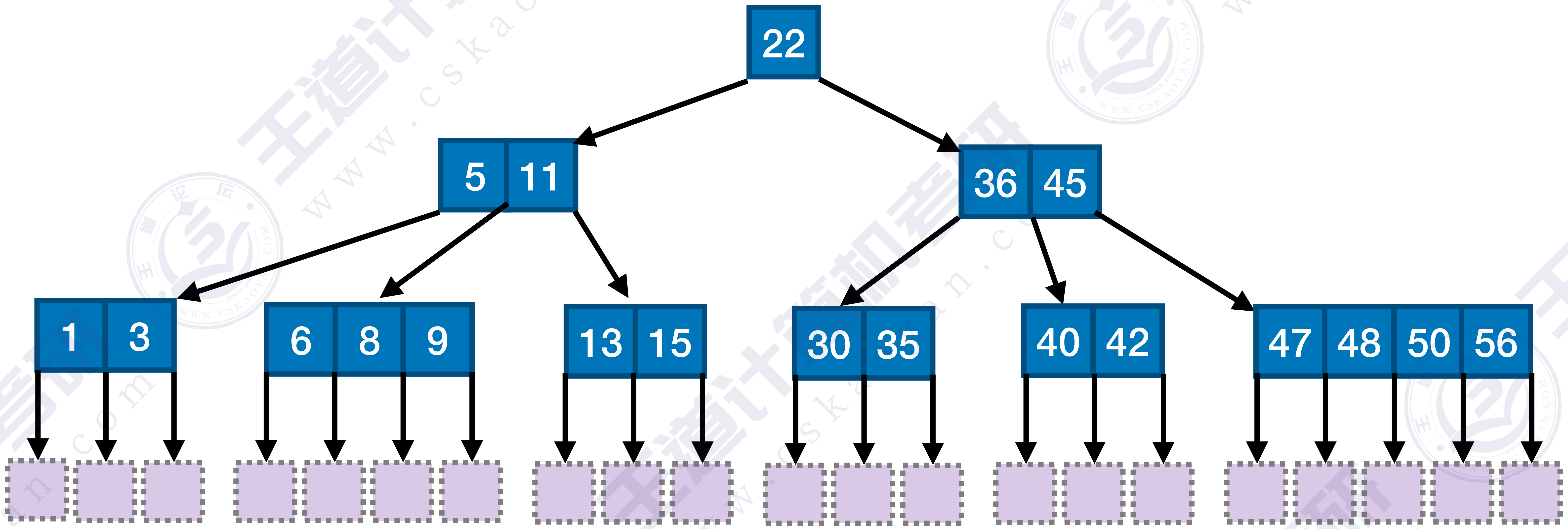
	最少结点数	最少关键字数
第一层	1	1
第二层	2	2(k-1)
第三层	2k	2k(k-1)
第四层	$2k^2$	$2k^2(k-1)$
…	…	….
第h层	$2k^{h-2}$	$2k^{h-2}(k-1)$

h层的m阶B树至少包含关键字总数 $1+2(k-1)(k^0+k^1+k^2+\ldots+k^{h-2}) = 1+2(k^{h-1}-1)$

若关键字总数少于这个值，则高度一定小于h，因此 $n \geq 1+2(k^{h-1}-1)$

得，$h \leq log_k \frac{n+1}{2} + 1 = log_{\lceil m/2 \rceil} \frac{n+1}{2} + 1$

B树的高度



注：大部分学校算B树的高度不包括叶子结点（失败结点）

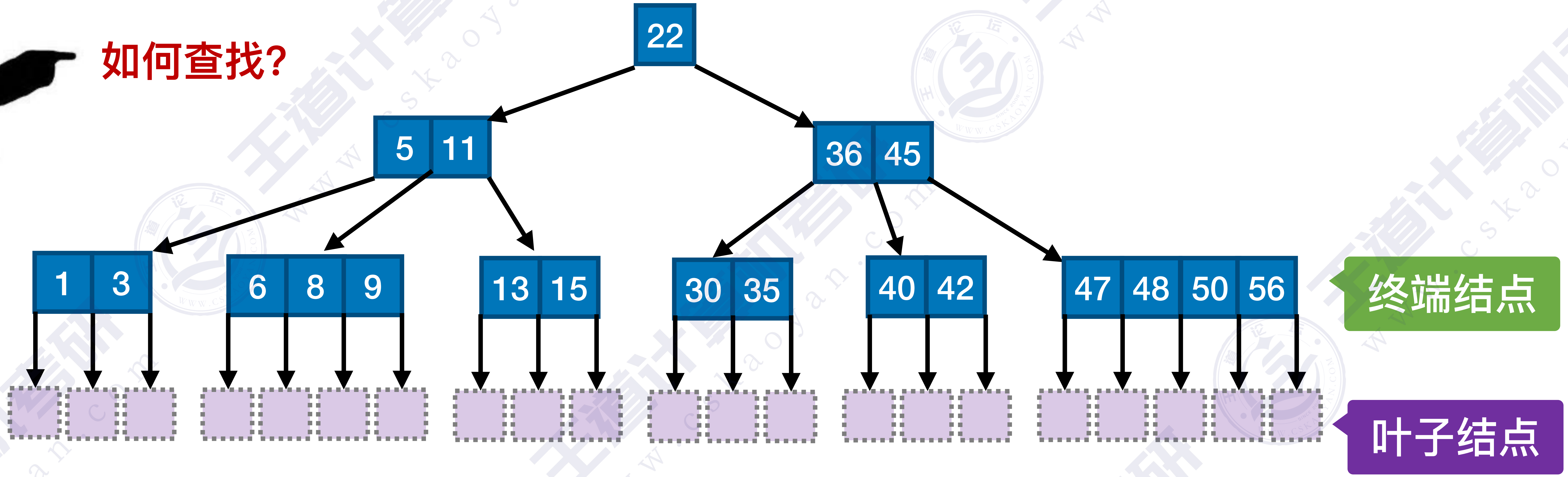
问题：含n个关键字的m阶B树，最小高度、最大高度是多少？

$$log_m(n+1) \le h \le log_{\lceil m/2 \rceil}\frac{n+1}{2}+1$$

知识回顾与重要考点

如何查找?

字不重要，
看图！



m阶B树的核心特性：

尽可能"满"

1）　根节点的子树数∈[2, m]，关键字数∈[1, m−1]。

其他结点的子树数∈[$\lceil m/2 \rceil$, m]；关键字数∈[$\lceil m/2 \rceil$−1, m−1]

尽可能"平衡"

2）对任一结点，其所有子树高度都相同

3）关键字的值：子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<….（类比二叉查找树 左<中<右）

含n个关键字的m叉B树，$log_m(n+1) \le h \le log_{\lceil m/2 \rceil}\frac{n+1}{2}+1$