

1 函数极限的概念与性质

1.1 基础概念

$x \setminus f(x)$	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ $0 < x_0 - x < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $x < -N$ $\Rightarrow f(x) > M$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ $ x > N$ $\Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x > N$ $\Rightarrow f(x) < -M$	$\forall M > 0, \exists N > 0,$ $ x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$

1.2 函数极限的性质

1. 唯一性: 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么极限唯一

• 函数极限存在的充要条件: 左右极限存在且相等

2. 局部有界性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在正常数 M 和 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$

• 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内是连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定有界

3. ★局部保号性:

- 脱帽严格不等
- $\lim f > 0 \Rightarrow f > 0$
- $\lim f < 0 \Rightarrow f < 0$
- 带帽非严格不等
- $f \geq 0 \Rightarrow \lim f \geq 0$

- $f \leq 0 \Rightarrow \lim f \leq 0$

1.3 等价无穷小

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 称为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

5. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小

- $x \sim \sin x$
- $x \sim \tan x$
- $x \sim \arcsin x$
- $x \sim \arctan x$
- $x \sim \ln(1+x) \Rightarrow \ln u \sim u-1 \quad (u \rightarrow 1)$
- $x \sim e^x - 1$
- $x \sim \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1 - (\cos x)^a \sim \frac{a}{2}x^2 \quad (a \neq 0)$
- $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$
- $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

7. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e \sim -\frac{e}{2}x \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n - e \sim -\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n}$

- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $(1+\frac{1}{n})^n - e$ 与 $\frac{a}{n}$ 是等价无穷小, 则 $a = -\frac{e}{2}$
- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1+\frac{1}{n})^n - e \sim -\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n}$

1.4 结论

1. 极限存在必有界，有界极限不一定存在
2. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在，则存在 $\delta > 0$ ，当 $x \in (a, a + \delta)$ 时， $f(x)$ 有界

1.5 定理

1.6 运算

1.7 公式

1. $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$
2. $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

1.8 方法总结

1. 遇到 e^∞ ，需讨论 $e^{-\infty}$ 和 $e^{+\infty}$
2. 分段函数在分段点处的极限要考虑左、右极限
3. 对于 $e^{\tan x} - e^{\sin x}$ ，通常先提取公因式，使其化为 $e^\square - 1$ 的形式。

1.9 条件转换思路

1.10 理解

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ ，在定义中 $x \neq x_0$ ，但 $f(x)$ 可以等于 A (绝对值是非负的)