1　不等式

1.1　基础概念

1.2　结论

1.3　定理

1.4　运算

1.5　公式

1. 若 $b > a > 0$，则 $a \le |x| < b \Leftrightarrow a \le x < b$或$-b < x \le -a$

2. 均值不等式: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}, \qquad a,b>0$

3. $a^2+b^2 \ge 2ab$

   - $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \qquad a,b>0$
   - $\dfrac{a}{b} \le \dfrac{a^2+\dfrac{1}{b^2}}{2}$
   - $a+\dfrac{1}{a} \ge 2, \qquad a>0$
   - $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

4. 三角不等式: $||a|-|b|| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$

   - $||a|-|b|| = |a+b| \Leftrightarrow ab \le 0$
   - $|a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow ab \ge 0$
   - $||a|-|b|| = |a-b| \Leftrightarrow ab \ge 0$
   - $|a-b| = |a|+|b| \Leftrightarrow ab \le 0$

5. 柯西不等式:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \ge (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

   令 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$，则有

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \ge \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$$

   注: $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2)^2$

6. Bernoulli（伯努利）不等式: $(1+x)^n \ge 1+nx, x>-1$

7. 若 $0<a<x<b, 0<c<y<d$，则 $\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$

8. $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x<\tan x, \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

9. $\sin x<x, \quad x>0$

10. 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$x<\tan x<\frac{4}{\pi}x$

11. $\arctan x\leq x\leq \arcsin x, \quad 0\leq x\leq 1$

12. $e^x\geq x+1, \quad x$为任意值

13. $x>0$ 时，$x-1\geq \ln x$ 或 $x\geq \ln x+1$

14.
$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}, \quad x>0,$$
或等价地，
$$\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x, \quad x>0.$$

证明

令 $f(t)=\ln t$，在 $[x,1+x]$ 用拉格朗日中值定理

1.6 方法步骤

1.7 条件转换思路

1. $x_n>0,\ a>0, \frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{a}$

1.8 理解