专题一 向量组与线性空间

1. Overview

2. 线性空间及其子空间的概念

2.1

2.2

1. 考试时请务必关注 $F[x]_{n+1}$ 是最高 n 次还是 n+1 次，不同老师/教材可能有不同定义方式。

2. $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ 维数为 1，$\mathbb{C}(\mathbb{R})$ 维数为 2：

括号内的 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 是数乘的系数。对于 $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ 只需取基为 1 即可，因为数乘时可以乘以复数，故 1 和 i 是线性相关的（$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot i = 0$，$k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ 有非零解）。

而对于 $\mathbb{C}(\mathbb{R})$，1，i 线性无关，因为 $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot i = 0$（$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$）只有零解。

2.3

例 1. (1)(2) 均为教材中提及的例子。

对于 (1)，$\mathbb{R}[x]_3$ 上定义的多项式加法，数乘应用在 $\mathbb{R}[x]_2$ 上，$\mathbb{R}[x]_2$ 中的元素相加或数乘一定也在 $\mathbb{R}[x]_2$ 中。

对于 (2)，回顾齐次非齐次线性方程组解空间即可。

例 2. 对于 $\mathbb{R}[x]_3$，取 $S = \{1, x, x^2\}$，则

① $L(S) \subseteq \mathbb{R}[x]_3$ 成立，因为 $S \subseteq \mathbb{R}[x]_3$，则 $L(S)$ 是 V 中包含 S 的最小子空间。（回顾讲义定理 2）

② $\mathbb{R}[x]_3 \subseteq L(S)$ 成立，因为 $\forall p(x) \in \mathbb{R}[x]_3$，$p(x)$ 可表示为 $p(x) = ax^2 + bx + c$（$a, b, c \in \mathbb{R}$），则 $p(x)$ 可由 $\{1, x, x^2\}$ 线性表示，故成立。

综上，$L(S) = \mathbb{R}[x]_3$，又 $|S| < \infty$，故 $\mathbb{R}[x]_3$ 为有限维线性空间。

对于 $\mathbb{R}[x]$，假设为有限维（一般用反证法），取 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$，其中必有关于 x 的最高次数，设为 r，则 $x^{r+1} \in \mathbb{R}[x]$ 无法表示。故找不到 $|S| < \infty$ 使得 $L(S) = \mathbb{R}[x]$，故为无限维空间。

2.4 习题

本节习题全部来源于教材第二章课后习题。

如果没有特殊需说明的问题，教材问题答案略过，详细解答在辅学网站参考书目"课本答案"一书中。

3 线性相关性

3.1

例 3 (1)(2) 见教材 P67 例 4，(3) 见教材 P67 例 5。

(4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，线性相关（原版打印有误，需更改为新版）。

(5) 设 $k_1 + k_2 \cdot 2^{-x} + k_3 \cdot 2^x = 0$（注意对任意 x 成立！）故对 $x = -1, 0, 1$ 都成立，即

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 & (x=0) \\ k_1 + \frac{1}{2}k_2 + 2k_3 = 0 & (x=1) \\ k_1 + 2k_2 + \frac{1}{2}k_3 = 0 & (x=-1) \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

故 $1, 2^x, 2^{-x}$ 线性无关。

3.2 本节内容请务必深刻理解

3.3 习题

A.1 教材 P87-88/10

A.2 教材 P87/9

A.3 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$，方程组的系数矩阵为

$$A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & a-6 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

只有零解，则 $a \neq -2$ 即可。

A.4 教材 P88/15

A.5 教材 P92/10

B.1 $\Leftarrow$ 显然符合线性相关定义。

$\Rightarrow$ 已知存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$。若 $k_1, \cdots, k_n$ 中从右向左看第一个不为 0 的是 k_i，即

$k_i \neq 0$，$k_{i+1} = \cdots = k_n = 0$。

（$i > 1$，因为 $\alpha_1 \neq 0$，故 $k_1\alpha_1 \neq 0$，与 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ 矛盾）。

于是有 $\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1})$ (*) —— 可以线性表示。

我们取满足 (*) 的最小 i，此时必有 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性无关，否则 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} = 0$ 中仍有不为 0 的，与最小 i 矛盾。

故表示法也唯一。

B.2 反证法，假设 $\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}$ 使得 $l_0\alpha + l_1\sigma(\alpha) + \cdots + l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$。

从 l_0 开始从左向右看第一个不为 0 的为 l_i，则

$l_i\sigma^i(\alpha) + l_{i+1}\sigma^{i+1}(\alpha) + \cdots + l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$

两边同时作用 σ^{k-i-1}，由于 $\sigma^k(\alpha) = 0$，故 $\sigma^{k+1}(\alpha) = \sigma^{k+2}(\alpha) = \cdots = 0$。

则有 $l_i\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$，而 $l_i \neq 0$，$\sigma^{k-1}(\alpha) \neq 0$，矛盾！故 $\alpha, \cdots, \sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性无关。

B.3 教材 P91/6（可以尝试反证）

B.4 $k_0 + k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x} = 0$ ① 此题采用求导构造线性方程的方式：

求导 $\Rightarrow \begin{rcases} k_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = 0 & ② \\ k_1 \cdot \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + k_2 \cdot \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} = 0 & ③ \end{rcases} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \xrightarrow{①} k_0 = 0$

C.1 由于 $A_i^2 \neq 0$，故存在列向量 α_i 使得 $A_i^2\alpha_i \neq 0$。

若 $k_1A_1\alpha_1 + k_2A_2\alpha_2 + \cdots + k_mA_m\alpha_m = 0$ (*)

(*) 左右同乘 A_i（$i = 1, 2, \cdots, m$），则有 $k_iA_i^2\alpha_i = 0 \Rightarrow k_i = 0$

故 $A_1\alpha_1, \cdots, A_m\alpha_m$ 线性无关，故 $m \leq n$。（n 元列向量）

C.2 (1) $k_1 = \cdots = k_m = 0$ 时显然成立。（教材 P88/13 是特例）

若 $k_1, \cdots, k_m$ 不全为 0，且其中有 0，设 $k_i = 0$，则

$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ 有非零解，

故 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关，这与题设 m-1 个不相关矛盾！

(2) 由 $l_1 \neq 0$，由 (1)，$l_2, \cdots, l_m$ 均不为 0

① $k_1 = \cdots = k_m = 0$，成立。

② $k_1, \cdots, k_m$ 全不为 0，上式 $\times l_1$ − 下式 $\times k_1$ 有

$(l_1k_2 - k_1l_2)\alpha_2 + \cdots + (l_1k_m - k_1l_m)\alpha_m = 0$

而 $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则 $0 = l_1k_2 - k_1l_2 = \cdots = l_1k_m - k_1l_m$

$\Rightarrow \frac{k_1}{l_1} = \cdots = \frac{k_m}{l_m}$

4 向量组的秩，线性空间的维数，向量的坐标

4.1

4.2 例 4. 作为结论使用即可。

本节中线性方程组必考。

4.3

例 5. 按行化简的阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故取 1 2 4 / 1 3 4 / 1 2 5 / 1 3 5 列均可。

4.4

例 6. 见教材 P73/例 3

4.5 习题

A.1 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)$

(1) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$（或 $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$），秩数为 3。

(2) 即方程组有解 $\Rightarrow a = 9$

$\beta = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4$

A.2 教材 P89/24-25

A.3 即证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关。

反证法，若线性相关，则存在不全为 0 的 a_1, a_2, a_3, a_4 有

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$ (1)

由 $r(A) = r(B) = 3$ 可知，存在 b_1, b_2, b_3 有

$\alpha_4 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ (2)

(2) 代入 (1) 有

$(a_1 - a_4b_1)\alpha_1 + (a_2 - a_4b_2)\alpha_2 + (a_3 - a_4b_3)\alpha_3 + a_4\alpha_5 = 0$

而 $r(C) = 4$，故有 $\begin{cases} a_1 - a_4b_1 = 0 \\ a_2 - a_4b_2 = 0 \\ a_3 - a_4b_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$，矛盾！故得证。

A.4 即相当于从 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中选出 s-m 个向量去掉。

则秩 $\geq r - (s-m) = r + m - s$。

A.5

解答. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta, \gamma$ 线性相关, 所以存在不全为零的 $k_1, \cdots, k_n, k_{n+1}, k_{n+2}$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + k_{n+1}\beta + k_{n+2}\gamma = 0.$$

如果 $k_{n+1} = k_{n+2} = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 从而 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 矛盾. 所以 k_{n+1}, k_{n+2} 不全为零. 我们分下面两种情况:

(i) 如果 $k_{n+1} \neq 0$ 且 $k_{n+2} = 0$, 则得到 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出. 同理, 如果 $k_{n+1} = 0$ 且 $k_{n+2} \neq 0$, 则得到 γ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

(ii) 如果 $k_{n+1} \neq 0$ 且 $k_{n+2} \neq 0$, 由 $k_{n+1} \neq 0$ 得到 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma$ 线性表出; 由 $k_{n+2} \neq 0$ 可以得到 γ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性表出. 这就得到 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma$ 等价. □

B.1 教材 P88/12

B.2

定理 3.2.4. 已知 A, B 是两个同级矩阵, 则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, 推广一下(把 B 写成 $-B$)就有

$$r(A \pm B) \leq r(A) + r(B).$$

解答. 设 A, B 的列向量分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, 并且 A, B 的秩分别为 r_1, r_2. 那么 $A+B$ 的列向量就是 $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$. 设 $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_{r_1}}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的极大线性无关组, $\beta_{l_1}, \cdots, \beta_{l_{r_2}}$ 是 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的极大线性无关组, 那么 $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$ 就可由 $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_{r_1}}, \beta_{l_1}, \cdots, \beta_{l_{r_2}}$ 线性表出, 从而 $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$ 的秩小于等于 $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_{r_1}}, \beta_{l_1}, \cdots, \beta_{l_{r_2}}$ 的秩, 同时 $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_{r_1}}, \beta_{l_1}, \cdots, \beta_{l_{r_2}}$ 的秩小于等于自身的向量个数 $r_1 + r_2$, 所以 $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$ 的秩就小于等于 $r_1 + r_2$. 即 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. □

推论. $r(A) = r(A - B + B) \leq r(A - B) + r(B)$, 所以 $r(A - B) \geq r(A) - r(B)$, 当然, 加个绝对值也是没有问题的:

$$r(A - B) \geq |r(A) - r(B)|.$$

B.3

七：设 E_{ij} 为第 i 行和第 j 列的元素为 1 其他元素均为 0 的 $n \times n$ 阶矩阵

① $k=0$ $a_{ji} = 0$ $i<j \Rightarrow W$ 为主对角线全为 0 的上三角矩阵全体 $\forall A \in W$ $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i \leq j} a_{ij}E_{ij}$

而 $B_1 = \{E_{ij} \mid i \leq j\}$ 又线性无关，$B_1 \subseteq W$ 故 B_1 是 W 的基 $\dim W = \frac{n(n+1)}{2}$

② $k=1$ $a_{ji} = a_{ij}$ $i \leq j \Rightarrow W$ 为对称矩阵全体 $\forall A \in W$ $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}$

而 $B_2 = \{E_{ij} + E_{ji}, E_{kk} \mid 1 \leq i,j,k \leq n$ $i<j\}$ 又线性无关，$B_2 \subseteq W$ 故 B_2 是 W 的基 $\dim W = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$

③ $k=2$ $a_{ii} = 2a_{ii}$ $(1 \leq i \leq n) \Rightarrow a_{ii} = 0$ $\forall A \in W$ $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i<j}(2E_{ij} + E_{ji})$

而 $B_3 = \{2E_{ij} + E_{ji} \mid i<j\}$ 又线性无关 $B_3 \subseteq W$ 故 B_3 是 W 的基 $\dim W = \frac{n(n-1)}{2}$

B.4

(1) W 非空是显然的，如 $f(x) = x - 1$。

$\forall f(x), g(x) \in W$，$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$

$\lambda f(1) = 0$。

故运算封闭，得证。

而 $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-1)(ax+b) = ax(x-1) + b(x-1) = a(x^2 - x) + b(x-1)$。

令 $k_1(x^2 - x) + k_2(x-1) = 0$（对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立）$\Rightarrow k_1 = k_2 = 0$

则 $\dim W = 2$，一组基为 $\{x-1, x^2 - x\}$。

(2) $\forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_3$，

$\sigma(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \sigma((\lambda f + \mu g)(x)) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\sigma(f(x)) + \mu\sigma(g(x))$。

故 σ 为线性映射。

取 $f(x)$ 一组基 $\{1, x, x^2\}$，则 $\mathrm{Im}\,\sigma = L(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2))$

故 $\mathrm{Im}\,\sigma = L(1) = \mathbb{R}$。

由维数公式，$\dim \mathbb{R}[x]_3 = \dim \mathrm{Im}\,\sigma + \dim \ker\sigma$

$\Rightarrow \dim \ker\sigma = 2$。

(3) 由 (1)，$f, g, h \in W$，而 $\dim W = 2$，故其中三个元素必线性相关。

B.5

(1) 略，按照定义证明即可。

(2)

(2) 解 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 为 V_1 的一组基，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为 V_2 的一组基, 则

$$\gamma_i = (\alpha_i, 0), i = 1, \cdots, m, \delta_j = (0, \beta_j), j = 1, \cdots, n$$

为 $V_1 \times V_2$ 的一组基, 从而 $\dim(V_1 \times V_2) = m + n$. 事实上, 设

$$k_1\gamma_1 + \cdots + k_m\gamma_m + l_1\delta_1 + \cdots + l_n\delta_n = \mathbf{0},$$

即

$$(k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m, l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

故

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0, l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n = \mathbf{0},$$

于是 $k_1 = \cdots = k_m = l_1 = \cdots = l_n = 0$. 这就证明了 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m, \delta_1, \cdots, \delta_n$ 线性无关.

$\forall (\alpha, \beta) \in V_1 \times V_2$, 设

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m, \beta = l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n,$$

则

$$(\alpha, \beta) = k_1\gamma_1 + \cdots + k_m\gamma_m + l_1\delta_1 + \cdots + l_n\delta_n,$$

这就证明了 $V_1 \times V_2$ 中的任一向量都可由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m, \delta_1, \cdots, \delta_n$ 线性表示. 从而结论成立.

B.6

(1) E（单位矩阵）$\in C(A)$，故 $C(A)$ 非空。

$\forall B_1, B_2 \in C(A)$，$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1 + B_2)A$

$A \cdot \lambda B_1 = \lambda AB_1 = \lambda B_1A$

故运算封闭，得证。

(2) $C(A) = F^{n \times n}$

(3) 由专题三中的结论，$C(A)$ 为全体对角矩阵构成的集合。

故 $\dim C(A) = n$，基矩阵 $B_K = (b_{ij})_{n \times n}$ 有 $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = k \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$\{B_1, \cdots, B_n\}$ 为一组基。

B.7

(1) 易，略。

(2)

(2) 注意到 B 的列向量为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 设 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t (t = n - r)$, 则易知

$$B_{11} = (\alpha_1, 0, \cdots, 0), B_{12} = (0, \alpha_1, \cdots, 0), \cdots, B_{1n} = (0, 0, \cdots, \alpha_1),$$

$$B_{21} = (\alpha_2, 0, \cdots, 0), B_{22} = (0, \alpha_2, \cdots, 0), \cdots, B_{2n} = (0, 0, \cdots, \alpha_2),$$

$$\vdots$$

$$B_{t,1} = (\alpha_t, 0, \cdots, 0), B_{t,2} = (0, \alpha_t, \cdots, 0), \cdots, B_{t,n} = (0, 0, \cdots, \alpha_t)$$

为 $S(A)$ 的一组基, 故 $\dim S(A) = n(n - r)$.

C.1

解答. 我们对 r 用递推法: 当 $r = 1$ 时, 由于 α_1 线性无关, 所以 $\alpha_1 \neq 0$. 已知 α_1 可以被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 设为

$$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_n\beta_n.$$

由于 $\alpha_1 \neq 0$, 所以至少存在一个 i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得 $k_i \neq 0$, 不妨就设 $k_1 \neq 0$, 那么

$$\beta_1 = \frac{1}{k_1}(\alpha_1 - k_2\beta_2 - \cdots - k_n\beta_n).$$

这就说明 β_1 可以由 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 即 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 与 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是等价的.

当 $r = 2$ 时, 已知 α_1, α_2 线性无关且可以被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 根据 $r = 1$ 的情况可设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 与 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是等价的. 那么 α_2 自然可以由 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 设为

$$\alpha_2 = l_1\alpha_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_n\beta_n.$$

由于 α_1, α_2 线性无关, 所以必然存在 $j \geq 2$ 使得 $l_j \neq 0$, 不妨就设 $l_2 \neq 0$, 则

$$\beta_2 = \frac{1}{l_2}(\alpha_2 - l_1\alpha_1 - l_3\beta_3 - \cdots - l_n\beta_n).$$

即 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 与 $\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 是等价的. 由等价的传递性就有: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 是等价的, 这就是 $r = 2$ 的情况.

递推一下, 我们知道对任意的正整数 r 命题都成立. □

C.2

证 (1) 令 $W = L(\alpha)$, 其中 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 即可.

(2) 反证法. 若 $\dim W_1 > 1$, 则在 W_1 中存在两个线性无关的向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

设 $a_1 = kb_1, k \in \mathbb{F}$, 由 $\alpha, \beta \in W_1$ 以及 W_1 是线性空间可知 $\alpha - k\beta \in W_1$ 且 $\alpha - k\beta \neq 0$, 但是

$$\alpha - k\beta = (0, a_2 - kb_2, \cdots, a_n - kb_n).$$

这与 W_1 中的非零向量的分量都不为 0 矛盾. 故结论成立.

(3)

证 反证法. 若 $\dim W > r + 1$, 则在 W 中存在 $r + 2$ 个线性无关的向量, 设为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1(r+1)} \\ a_{1(r+2)} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2(r+1)} \\ a_{2(r+2)} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{(r+1)1} \\ \vdots \\ a_{(r+1)(r+1)} \\ a_{(r+1)(r+2)} \\ \vdots \\ a_{(r+1)n} \end{pmatrix}, \alpha_{r+2} = \begin{pmatrix} a_{(r+2)1} \\ \vdots \\ a_{(r+2)(r+1)} \\ a_{(r+2)(r+2)} \\ \vdots \\ a_{(r+2)n} \end{pmatrix},$$

考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}$ 的前 $r + 1$ 个分量构成的向量组

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1(r+1)} \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2(r+1)} \end{pmatrix}, \cdots, \beta_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{(r+1)1} \\ \vdots \\ a_{(r+1)(r+1)} \end{pmatrix}, \beta_{r+2} = \begin{pmatrix} a_{(r+2)1} \\ \vdots \\ a_{(r+2)(r+1)} \end{pmatrix},$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}$ 是 $r + 2$ 个 $r + 1$ 维的向量组，所以一定线性相关，从而存在不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_{r+1}, k_{r+2}$ 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{r+1}\beta_{r+1} + k_{r+2}\beta_{r+2} = \mathbf{0},$$

由于 W 是线性空间，故

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} \in W,$$

并且由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}$ 线性无关知

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} \neq \mathbf{0},$$

但是

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2}$$

的前 $r + 1$ 个分量都是 0，这与条件矛盾.

5 线性空间的交与和

5.1

覆盖定理的证明：(1) 为两个空间的情况，(2) 为推广。

解答. (1) 由于 V_1, V_2 都是非平凡线性子空间, 所以 V 中存在 $\alpha \notin V_1$, 如果 $\alpha \notin V_2$, 则结论已经成立. 若 $\alpha \in V_2$, 由 V_2 非平凡知存在 $\beta \notin V_2$, 考虑 $\alpha + \beta$ 与 $2\alpha + \beta$, 显然这两个向量都不属于 V_2(否则得到 $\beta \in V_2$), 并且这两个向量也不能同时都属于 V_1(否则两个向量相减得到的 α 也属于 V_1, 矛盾), 这就说明 $\alpha + \beta$ 与 $2\alpha + \beta$ 中至少有一个向量既不属于 V_1, 也不属于 V_2.

(2) $s = 2$ 时由 (1) 知命题成立, 现在设命题对 $s - 1$ 个空间也成立, 那么对于 s 个空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$, 利用假设知存在向量 $\alpha \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1}$, 如果 $\alpha \notin V_s$, 则结论已经成立. 若 $\alpha \in V_s$, 由 V_s 非平凡知存在 $\beta \notin V_s$, 现在考虑 $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \cdots, s\alpha + \beta$, 这是 s 个向量, 其中每一个都不属于 V_s(因为如果 $k\alpha + \beta \in V_s$, 同时 $\alpha \in V_s$ 就可以得到 $\beta \in V_s$, 矛盾), 同时, 这 s 个向量中, 不可能存在两个向量同属于一个 V_i $(i = 1, 2, \cdots, s-1)$, 原因是若 $k\alpha + \beta$ 与 $l\alpha + \beta$ $(k \neq l)$ 都属于 V_i, 则两个向量的差 $(k - l)\alpha \in V_i$, 即 $\alpha \in V_i$, 这与假设是矛盾的. 这就说明 $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \cdots, s\alpha + \beta$ 这 s 个向量中, 至少有一个向量 $j\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$. □

例 7. 由覆盖定理知

存在 $\alpha_1 \in V, \alpha_1 \notin V_i, i = 1, 2, \cdots, s$.

则 $\alpha_1 \neq 0$. 令 $V_{s+1} = L(\alpha_1)$, 则 V_{s+1} 为 V 的真子空间, 同样存在 $\alpha_2 \in V, \alpha_2 \notin V_i, i = 1, 2, \cdots, s, s+1$. 则 α_1, α_2 线性无关, 否则 $\alpha_2 \in V_{s+1}$. 矛盾. 令 $V_{s+2} = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 继续下去可知

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \notin V_1, \cdots, V_s.$$

5.2

例 8

解答. 显然所有满足 $ABX = 0$ 的 BX 组成的集合 V 是 P^k 的一个线性子空间(对加法和数乘封闭). 接下来说明其维数为 $r(B) - r(AB)$:

记 $V_1 = \{X \mid BX = 0\}$, $V_2 = \{X \mid ABX = 0\}$, 显然 $V_1 \subseteq V_2$, 取 V_1 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 扩为 V_2 的一组基, 设为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$, 则 $r = n - r(B)$, $s = n - r(AB)$. 于是

$$V = \{BX \mid ABX = 0\} = L(B\alpha_1, \cdots, B\alpha_r, B\alpha_{r+1}, \cdots, B\alpha_s) = L(B\alpha_{r+1}, \cdots, B\alpha_s).$$

下面证明 $B\alpha_{r+1}, \cdots, B\alpha_s$ 线性无关: 若

$$k_{r+1}B\alpha_{r+1} + \cdots + k_sB\alpha_s = 0.$$

则 $B(k_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + k_s\alpha_s) = 0$, 即 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + k_s\alpha_s \in V_1$, 从而可以由 V_1 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出, 设为

$$k_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + k_s\alpha_s = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r.$$

即

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r - k_{r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - k_s\alpha_s = 0.$$

结合 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 可知 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 所以 $B\alpha_{r+1}, \cdots, B\alpha_s$ 线性无关.

从而 $\dim V = s - r = (n - r(AB)) - (n - r(B)) = r(B) - r(AB)$. □

5.3

补空间不唯一：考虑线性空间基不唯一就很好理解。

例 9. 子空间容易验证，略去，直接证明直和：

和：$B_1 = \frac{A + A^T}{2}$ 为对称矩阵，$B_2 = \frac{A - A^T}{2}$ 为反对称矩阵，且有 $A = B_1 + B_2$。

下面证直和:

方法一: 利用零向量分解唯一. O 是 n 级零矩阵, 设 $O = B + C$, 其中 B 是对称矩阵, C 是反称矩阵, 则 $O' = B' + C'$ 有 $O = B - C$, 解方程可得 $B = C = O$, 这就证明了零矩阵分解是唯一的.

方法二: 利用 $V_1 \cap V_1 = \{0\}$. 设 $A \in V_1 \cap V_2$, 则 A 既是对称矩阵, 又是反称矩阵, 所以 $A' = A = -A$, 解得 $A = O$, 那就说明 $V_1 \cap V_1 = \{0\}$.

方法三: 利用 $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$. 显然 $\dim V = n^2$(并且我们还知道**基本矩阵** E_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$ 就是 V 的一组基), 下面考虑 $\dim V_1$, 对于任意 $A \in V_1$, 我们知道 A 是下面的样子

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

我们发现它是由 a_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ 这 $n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 个数决定的, 于是 V_1 的维数就是 $\frac{n(n+1)}{2}$, 并且 E_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 与 $E_{ij} + E_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ 是它的一组基.

同理, 我们知道 V_2 的维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$, 并且 $E_{ij} - E_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ 是它的一组基.(注意: 反称矩阵对角元肯定为零)

所以

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim V.$$

以上三种方法都说明 $V = V_1 \oplus V_2$. □

例 10

解答. 先记 $W = V_1 + V_2$. 若 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 $B\alpha = C\alpha = 0$, 所以

$$A\alpha = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \alpha = 0.$$

由于 A 可逆, 知 $\alpha = 0$, 所以 $V_1 \cap V_1 = \{0\}$, 即 $W = V_1 \oplus V_2$.

最后说 $W = P^n$: 显然 $r(B) = r, r(C) = n - r$, 则 $\dim V_1 = n - r$, $\dim V_2 = n - (n - r) = r$. 所以

$$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim P^n.$$

又 $W = V_1 \oplus V_2 \subseteq P^n$, 从而 $W = P^n$, 即

$$P^n = V_1 \oplus V_2.$$ □

5.4 习题

A.1 教材 P77/例 3。

A.2 辅学网站 1-2 题。

A.3 记 $W = V_1 + V_2$，若 $\alpha \in V_1 \cap V_2$，则

$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_n \\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow \alpha = 0$，故 $W = V_1 \oplus V_2$

下证 $W = \mathbb{F}^n$。

对于 V_1，$A = (1, \cdots, 1)$，则 V_1 为 $AX = 0$ 的解空间。

故 $\dim V_1 = \dim \mathbb{F}^n - r(A) = n - 1$。

对于 V_2，令 $x_1 = \cdots = x_n = a$，则 $\alpha = (a, \cdots, a) = a \cdot (1, \cdots, 1) \in V_2$。

故 $(1, \cdots, 1)$ 为 V_2 的基，故 $\dim V_2 = 1$。

故 $\dim V_1 + \dim V_2 = n$。综上有 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$。

B.1 教材 P161/11

B.2

1 (1) $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \Rightarrow 0 \in V_2 \Rightarrow V_2 \neq \emptyset$

$\forall \xi, \eta \in V_2$ 设 $\xi = \sum_{i=1}^{n} s_i\alpha_i$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{i} = 0$，$\eta = \sum_{i=1}^{n} t_i\alpha_i$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{i} = 0$。$\forall k, l \in F$ $k\xi + l\eta = \sum_{i=1}^{n}(ks_i + lt_i)\alpha_i$ 则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{ks_i + lt_i}{i} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{i} + l\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{i} = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$ 故 $k\xi + l\eta \in V_2$ 所以 V_2 是子空间

(2) 设 $\xi \in V_1 \cap V_2$

$\xi \in V_1 \Rightarrow \exists \lambda$ s.t. $\xi = \lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n) = \lambda\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2 + \cdots + n\lambda\alpha_n$

$\xi \in V_2 \Rightarrow \lambda + \frac{2\lambda}{2} + \cdots + \frac{n\lambda}{n} = n\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\forall \eta \in V$ 设 $\eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i$ 设 $t = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{n})$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - it}{i} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\lambda_i}{i} - t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{i} - nt = 0 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i - t(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n) \in V_2$

$\eta = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i = \underbrace{t(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n)}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i - t(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n)}_{\in V_2} \Rightarrow V \subseteq V_1 + V_2$

$V_1 + V_2$ 显然 $\subseteq V$ 故 $V = V_1 + V_2$

$\begin{rcases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{rcases} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$

B.3

例 6.2.28 (华中师范大学,2004) 设 $\mathbb{P}$ 是数域,$V_1 = \{A \in \mathbb{P}^{n \times n} \mid A^T = A\}, V_2 = \{B \in \mathbb{P}^{n \times n} \mid B$是上三角矩阵$\}$.

(1) 证明:V_1, V_2 都是 $\mathbb{P}^{n \times n}$ 的子空间;

(2) 证明:$\mathbb{P}^{n \times n} = V_1 + V_2, \mathbb{P}^{n \times n} \neq V_1 \oplus V_2$.

证 (1) 略.

(2) 首先,$V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{P}^{n \times n}$. 其次

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &= \frac{n^2 - n}{2} + n + \frac{n^2 - n}{2} + n - n \\ &= n^2 = \dim \mathbb{P}^{n \times n}. \end{aligned}$$

从而 $\mathbb{P}^{n \times n} = V_1 + V_2$. 由于 $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, 故 $\mathbb{P}^{n \times n} \neq V_1 \oplus V_2$.

例 6.2.29 (厦门大学,2013) 设 $\mathbb{F}$ 是数域,V_1 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶上三角矩阵的全体,V_2 是 $\mathbb{F}$ 上 n 阶反对称矩阵的全体, 即

$$V_1 = \{A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid a_{ij} = 0, 1 \leqslant j < i \leqslant n\}, V_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid A^T = A\}.$$

(1) 证明:$\mathbb{F}^{n \times n}$ 中的任意矩阵 A 均可表示为一个上三角矩阵和一个反对称矩阵的和;

(2) 证明:$\mathbb{F}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$.

证 (1) 设 $A = B + C$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ -c_{12} & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{1n} & -c_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

即 $B \in V_1, C \in V_2$. 则可得

$$b_{ii} = a_{ii}, i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$-c_{ij} = a_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, i \neq j,$$

$$b_{ij} + c_{ij} = a_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, i \neq j,$$

从而

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{21} & \cdots & a_{1n} + a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} + a_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

故结论成立.

(2) 显然 $V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$. 其次, 由 (1) 知 $\mathbb{F}^{n \times n} \subseteq V_1 + V_2$, 从而 $\mathbb{F}^{n \times n} = V_1 + V_2$. 又 $\forall A \in V_1 \cap V_2$, 易知 $A = \mathbf{0}$, 故 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. 故 $\mathbb{F}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$.

B.4

解答. 由维数公式得

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

即

$$(\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)) + (\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)) = 1.$$

于是, 要么 $\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 要么 $\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 0$, 从而要么 $V_1 \subseteq V_2$, 要么 $V_2 \subseteq V_1$. □

B.5

解答. 必要性是显然的. 看充分性: 已知 $V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{0\}$, 现在证和是直和. 我们设

$$0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i \ (i = 1, 2, \cdots, s)$$

所以

$$\alpha_s = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}) \in V_s \cap \sum_{j=1}^{s-1} V_j = \{0\}.$$

即 $\alpha_s = 0$, 与此同时也得到 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1} = 0$, 同样的方法得到 $\alpha_{s-1} = 0$, 递推就有 $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 即零向量分解唯一, 所以 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和. □

B.6 教材 P92/11 知道即可，本题是拓展结论。

B.7

证 充分性显然.

必要性. 反证法. 设 $V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m), m < n$, 将其基扩充为 V 的基

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n.$$

则

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) \\ &= V_1 \oplus L(\alpha_{m+1} + \alpha_1, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n), \end{aligned}$$

而 $L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n) \neq L(\alpha_{m+1} + \alpha_1, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n)$. 矛盾.

C.1

(1) $\forall A, B \in U$，$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0$

$tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = 0$，故 U 运算封闭。

取 $A = 0 \in U$，故 U 非空。

取 $A = E \in W$，故 W 非空。

$\forall A = \lambda_1 E$，$B = \lambda_2 E \in W$，$A + B = (\lambda_1 + \lambda_2)E \in W$。

$\lambda A = \lambda\lambda_1 E \in W$。运算封闭

综上有 U，W 为 V 的子空间。

(2) 对于 W，基为 $\{E\}$，$\dim W = 1$。

对于 V，令 E_{ij} 为第 i 行第 j 列是 1，其余是 0 的 n 阶方阵。

不考虑对角线，V 的基中包含 $E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \cdots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1}$

考虑对角线，$a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0$。

令 $a_{11} = k_1, \cdots, a_{n-1,n-1} = k_{n-1}$，则 $a_{nn} = -k_1 - \cdots - k_{n-1}$。

则 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ -k_1 - \cdots - k_{n-1} \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

故 V 中还有 n-1 个基：$E_{11} - E_{nn}, E_{22} - E_{nn}, \cdots, E_{n-1,n-1} - E_{nn}$

故 $\dim V = \frac{n^2 + n - 2}{2}$

(3) 设 $V' = U + W$，设 $A \in U \cap W$，则 $A = \lambda E$，则 $tr(A) = n\lambda = 0$

故 $A = 0$，故 $V' = U \oplus W$，下证 $V' = V$。

由于 V 的基为 $E_{11}, \cdots, E_{nn}, E_{12} + E_{21}, \cdots, E_{n-1,n} + E_{n,n-1}$

故 $\dim V = \frac{n^2 + n}{2} = \dim W + \dim U = \dim V'$

又已知 $V' \subseteq V$，故 $V = V'$ 得证。

2. **解答.** 由于 $W_0 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$, 则

$$W_0 = (W_1 \cap W_0) \cup (W_2 \cap W_0) \cup \cdots \cup (W_s \cap W_0).$$

其中 $W_1 \cap W_0, W_2 \cap W_0, \cdots, W_s \cap W_0$ 是 W_0 的线性子空间, 由覆盖定理, 我们知道必然有 i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 使得 $W_0 = W_i \cap W_0$, 这就说明 $W_0 \subseteq W_i$. □

3. 由于 $\ker(\sigma_i - \sigma_j)$ $(1 \leq i < j \leq s)$ 构成 V 上 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个线性空间。

但由覆盖定理，$\exists \alpha$ 不属于任何 $\ker(\sigma_i - \sigma_j)$ 中，得证。

4. 此题涉及多项式，此处不证，但大家可以留意注 F 方的应用。