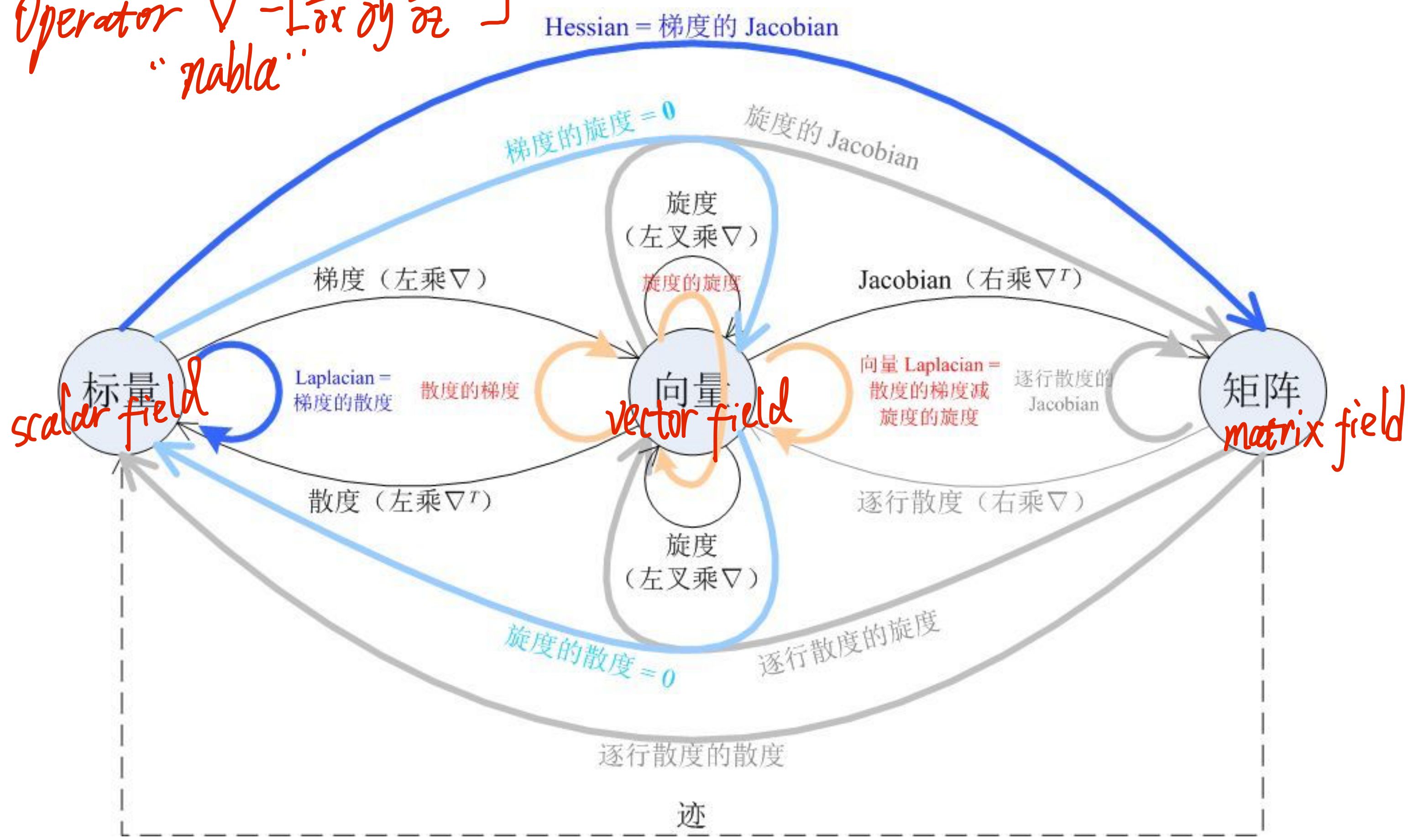
gradient、divergence、curl、

10935 梯度、散度、旋度、Jacobian、Hessian、Laplacian 的关系图

Operator $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \dots]^T$
"nabla"



一、入门

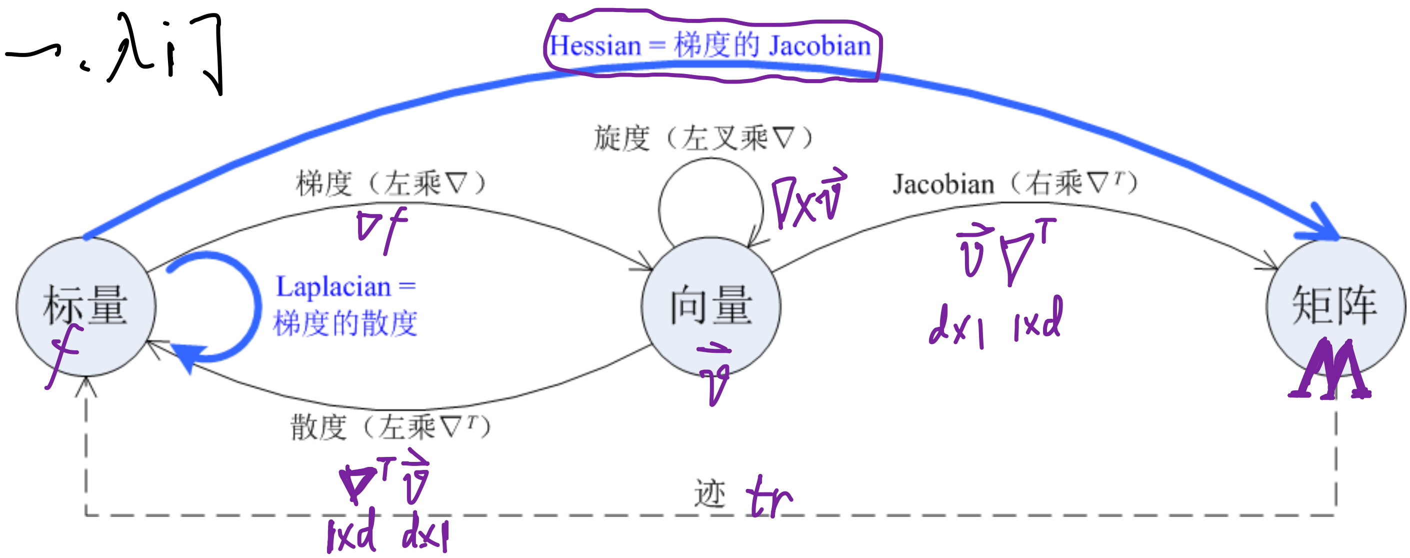
divergence 散度：描述一个vector是汇聚点（向内居多）还是发源点（向外居多）。

gradient 梯度：描述在某点P最大增长方向及大小。

curl 旋度：描述在空间某点P的无穷小(infinitesimal)量旋转(rotation)。

trace 迹：矩阵主对角线上值的和，也等于矩阵eigenvalues之和。

一. 入门



图中的细实线箭头表示了四种一阶微分运算，包括梯度、散度、旋度和 Jacobian。每条箭头的起点表示了相应运算的自变量的类型，终点表示了相应运算的因变量的类型，例如梯度运算是作用在标量上的，结果是向量。图中的「向量」默认为列向量。

这四种一阶微分运算可以统一用算符 ∇（读作 nabla）表示。Nabla 算符是一个形式向量

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad \text{(列向量)}$$

，它可以如下地作用于标量 f 或向量 $\vec{v}$ 上：

- 直接与标量 f 相乘，得到 f 的梯度 ∇f。 (gradient)　dx1 1x1 = dx1
- 与向量 $\vec{v}$ 点乘，得到 $\vec{v}$ 的散度

$$\nabla \cdot \vec{v} \quad \text{(divergence)}$$

。本文把点乘用矩阵乘法的形式写作 $\nabla^T \vec{v}$。　1xd dx1 = 1x1
- 与向量 $\vec{v}$ 叉乘，得到 $\vec{v}$ 的旋度 (curl)

$$\nabla \times \vec{v}$$

dx1 dx1

。
- 若允许偏导算符写在变量的右边，则 $\vec{v}\nabla^T$ 就可以表示 $\vec{v}$ 的 Jacobian。

图中的粗实线箭头表示了两种二阶微分运算，它们可以由两个一阶微分

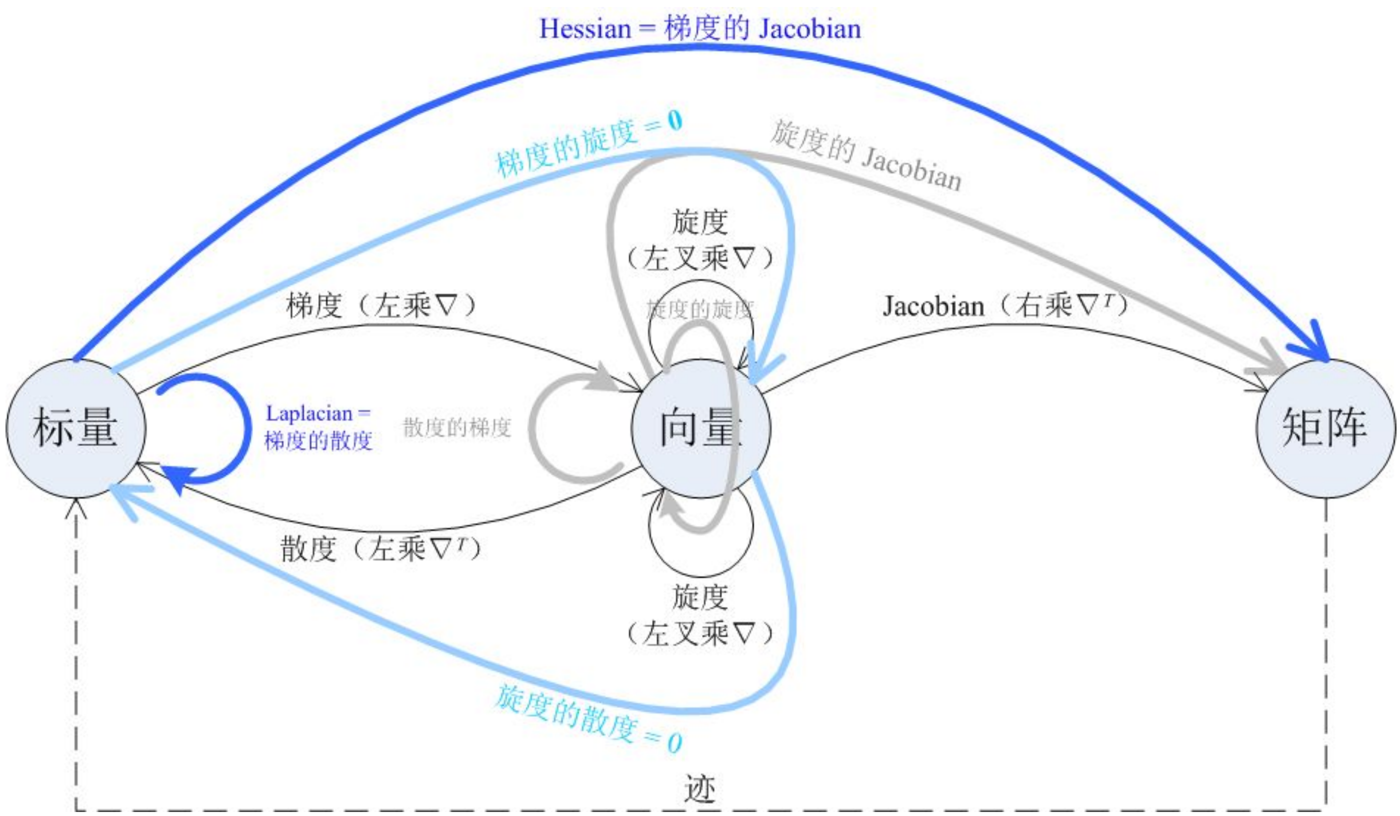
运算组合而成，即：

- 梯度的散度就是 Laplacian；= divergence (gradient) : $\nabla^T(\nabla f)$
- 梯度的 Jacobian 就是 Hessian。= Jacobian (gradient) : $\nabla f \nabla^T$.

图中的虚线箭头表示了一种不涉及微分的运算（迹）。在微分运算之后接上「迹」运算，可能得到另一种微分运算，如：

- Jacobian 的迹就是散度；divergence = tr (Jacobian)
- Hessian 的迹就是 Laplacian。= tr (Hessian)

二、入迷



图中的四种一阶微分运算两两搭配，一共可以得到 7 种二阶微分运算。第一节的图中画出了两种，本节的图中画出了另外五种（浅蓝色与灰色）。这五种二阶微分运算并没有特别的名字，但其中有两种是恒等于 0 的：

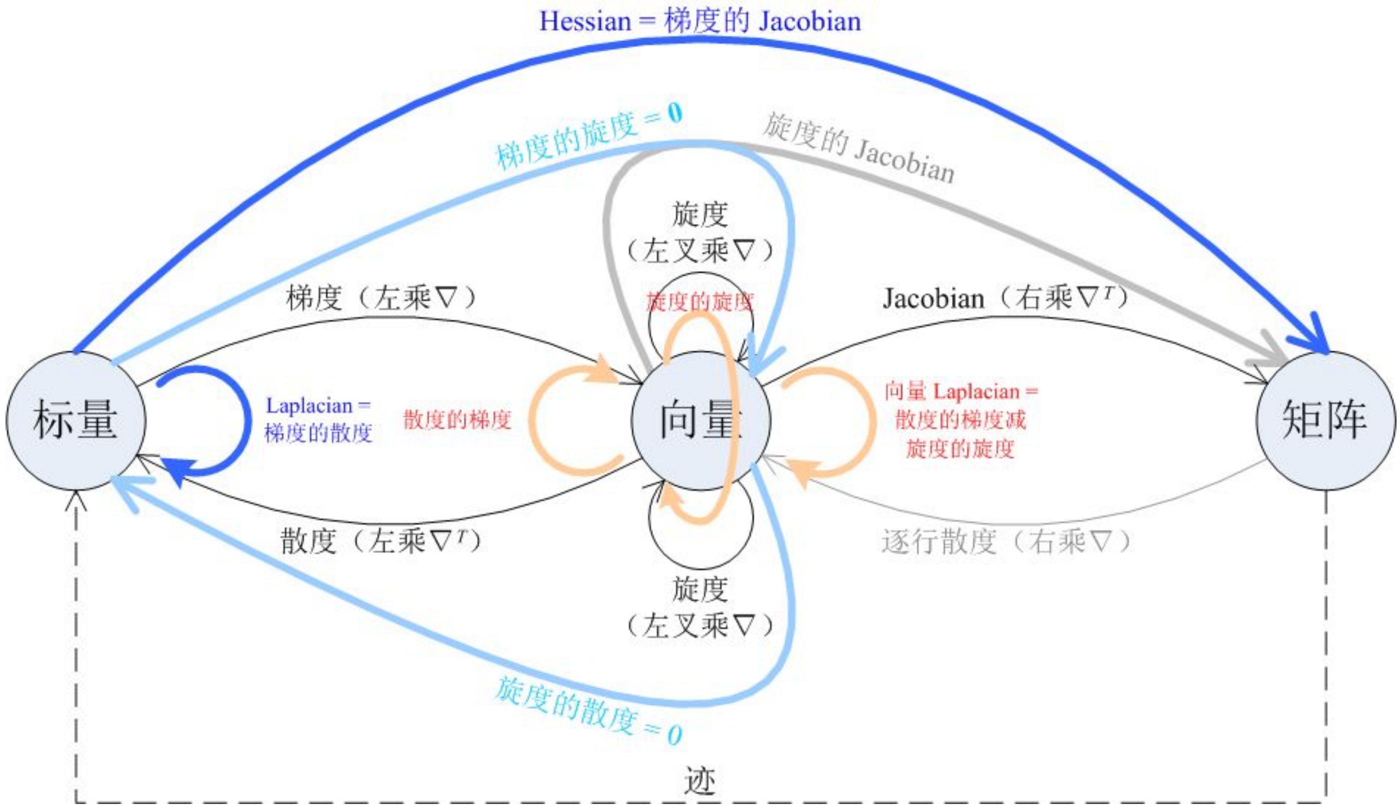
- 梯度的旋度恒为零向量；curl(gradient) ≡ 0

- 旋度的散度恒为 0。 $div(curl) \equiv 0$

其中，「梯度无旋」可以用下面的图形象说明（图片来自 ）：

如果梯度有旋会怎么样?

三、入魔



Laplacian 是一个作用于标量的二阶微分运算，其结果也是标量。但我们也可以把它作用于一个向量的每一个元素，得到一个向量；这种运算称为向量 Laplacian。

Laplacian 运算作用于标量 f 上的结果可以用 nabla 算符写成

$$\nabla^T \nabla f$$

。这种写法无法直接推广到向量 Laplacian，因为

$$\nabla^T \nabla \vec{v}$$

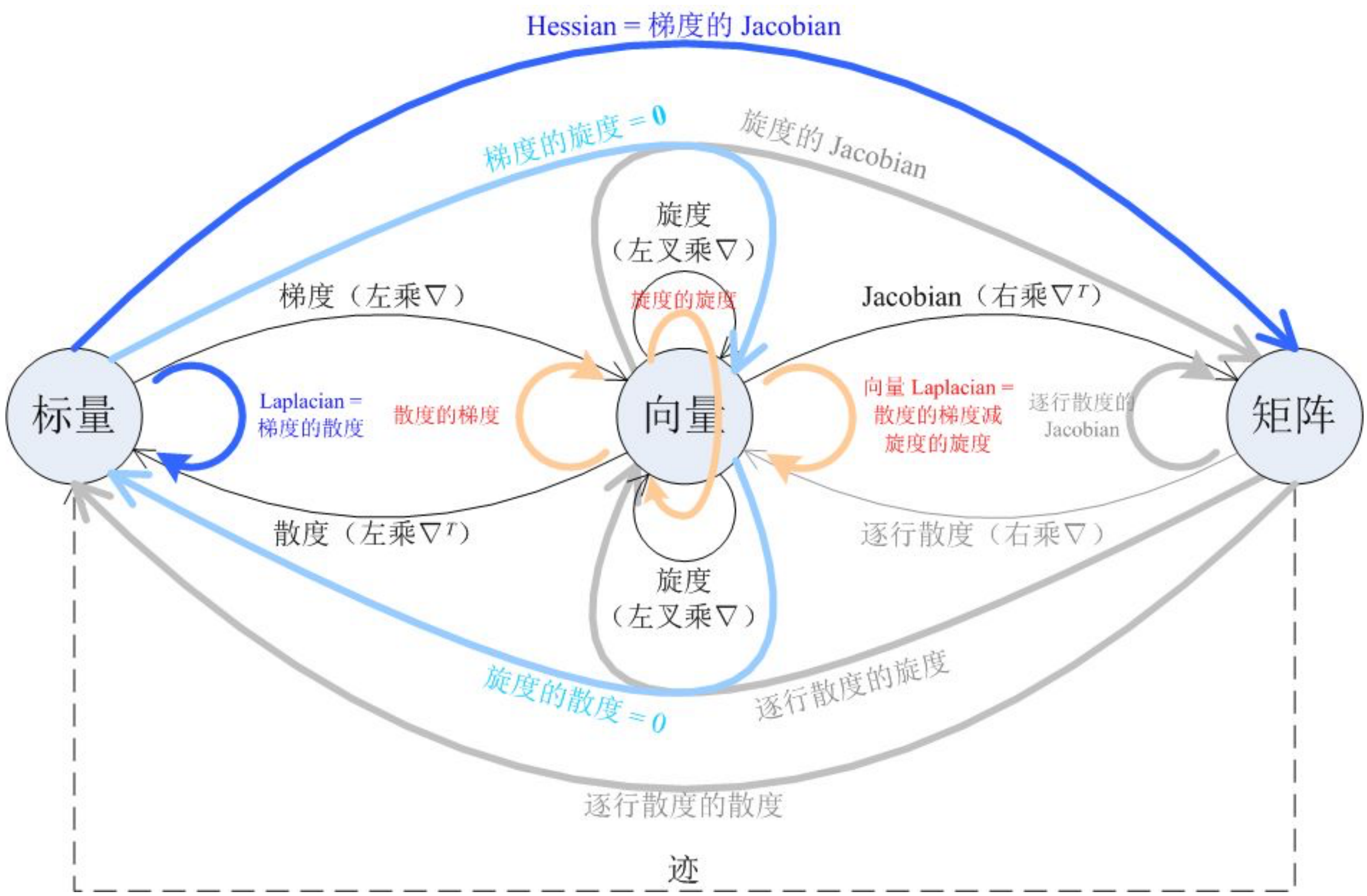
里 ∇ 无法直接跟 $\vec{v}$ 做矩阵乘法。但如果允许偏导算符写在变量右边，那就可以把向量 Laplacian 表示成

$$\vec{v} \nabla^T \nabla$$

。这是 Jacobian 运算与「矩阵右乘 ∇ 」运算的复合；后者的效果是对矩阵的每一行求散度。图中恰好有一个为「逐行散度」运算准备的空位，我们把它补充到图中。

向量 Laplacian 的结果，恰好等于「散度的梯度」与「旋度的旋度」之差。为了体现出这种关系，我把「从向量到向量」的三种二阶微分运算改用橙红色箭头表示。

四、入土



既然引入了「逐行散度」这个一阶微分运算，那就索性把它能组合出来的二阶微分运算也全都放到图里去吧！这样就得到了一个完美对称的图，它包含了 11 种二阶微分运算，其中：

- 有两种比较常见：Laplacian 和 Hessian；
- 有两种恒等于零：「梯度的旋度」和「旋度的散度」；
- 有三种满足减法关系：向量 Laplacian = 散度的梯度 - 旋度的旋度；
- 剩下的四种没有专门的名字，也很罕见。

其中任何一种微分运算后面接上「迹」，都可以得到另一种同阶微分运算：

divergence

- Jacobian 的迹就是散度；(*)
- Hessian 的迹就是 Laplacian；(*)
- 旋度的 Jacobian 的迹就是旋度的散度，恒等于 0；
- 矩阵逐行散度的 Jacobian 的迹，就是它的逐行散度的散度。

但需要注意只能在运算之后接上「迹」，在运算之前接「迹」是不行的，比如矩阵的迹的梯度不等于它的逐行散度。

如果有读者知道图中几种没有名字的运算叫什么名字、有什么用途，或者在图中内容之外还有什么值得包括进来的微分运算，欢迎补充。