МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу «Фундаментальная информатика» I семестр
Задание 3
«Вещественный тип. Приближенные вычисления. Табулирование функций»

Группа	М8О-109Б-22
Студент	Серый Н.О.
Преподаватель	Сысоев М.А.
Оценка	
Дата	

Москва, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Постановка задачи

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора. Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью $\varepsilon * 10^k$, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна сама определять машинное ε и обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 23:

Ряд Тейлора:

23	$x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Функция:

arctg x

Значения a и b соответственно:

0.0	0.5

Теоретическая часть

Формула Тейлора

— формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Машинное эпсилон

— числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству 1 + ε = 1. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определены для следующих типов:

float – $1.19 * 10^{-7}$, **double** – $2.20 * 10^{-16}$, **long double** – $1.08 * 10^{-19}$

Описание алгоритма

Просуммируем члены формулы Тейлора для каждой из строк таблицы, пока модуль разности суммы и значения функции меньше эпсилон.
Для этого будем искать новый член формулы и суммировать с результатом.

Практическая часть

Использованные переменные

Название переменной	Тип переменной	Смысл переменной
a	Long double	Начало отрезка
b	Long double	Конец отрезка
number	int	Число итераций
step	Long double	Разница между данным и предыдущим значениями
taylor_row	Long double	Член ряда Тейлора
sum	Long double	Сумма ряда Тейлора
iter	int	Номер данной итерации
LDBL_EPSILON	Long double	Машинный эпсилон. В моей системе: 2.2204460493e-16
x	Long double	Для неё производим вычисления

Исходный код программы:

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <float.h>

long double function(long double x){
   return atan(x);
}

int main(){
   long double a = 0.0;
   long double b = 0.5;

   int number;

   printf("Enter your number: ");
   scanf("%d", &number);

   printf("\n*~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
   printf("|          Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)              |\n");
   printf("*~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
   printf("|  x   | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |\n");
   printf("*~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~*~*\n");
   printf("| .3Lf  |       .19Lf           |       .19Lf           |   int value     |\n");
   printf("*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~*~*\n");

   long double step = (b - a) / (long double)number;
   long double taylor_row, sum;

   int iter = 0;

   for (long double x = a + step; x < b + step; x += step){
      for (int number = 0; number < 100; ++number) {
         taylor_row = pow(-1, number) * pow(x, 2 * number + 1) / (2 * number + 1);;
         sum += taylor_row;
         if (fabsl(sum - function(x)) < LDBL_EPSILON || iter > 100) {
            break;
         }
      }
      iter += 1;
      printf("| %.3Lf | %.19Lf | %.19Lf |       %d       |\n", x, sum, function(x), iter);
      sum = 0;
   }

   printf("*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
   printf("| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): %.10Le|\n", LDBL_EPSILON);
   printf("*~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
   return 0;
}
```

Входные данные

number (0<=number<100) – число разбиений отрезка на равные части,

Выходные данные

Программа должна вывести значение машинного эпсилон, а затем n+1 строку.

В каждой строке должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число A_1 — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, A_2 – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итерация, требуемых для вычисления, и Δ – разница значений A_1 и A_2 по модулю. A_1, A_2 и Δ должны быть выведены с точностью k знаков после запятой.

Протокол с тестами

Тест №1

Ввод:

8

Вывод:

```
c:\codes\kp3.exe
Enter your number: 8

*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|           Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)                    |
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|  x   | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |
*~~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| .3Lf  |        .19Lf          |        .19Lf          |   int value      |
*~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| 0.062 | 0.0624188099959573223 | 0.0624188099959573500 |       1       |
| 0.125 | 0.1243549945467613826 | 0.1243549945467614382 |       2       |
| 0.188 | 0.1853479499956947329 | 0.1853479499956947607 |       3       |
| 0.250 | 0.2449786631268640602 | 0.2449786631268641435 |       4       |
| 0.312 | 0.3028848683749713055 | 0.3028848683749714166 |       5       |
| 0.375 | 0.3587706702705723005 | 0.3587706702705722450 |       6       |
| 0.438 | 0.4124104415973874338 | 0.4124104415973873228 |       7       |
| 0.500 | 0.4636476090008059825 | 0.4636476090008060935 |       8       |
*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): 2.2204460493e-16|
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Тест №2

Ввод: 16

Вывод:

```
c:\codes\kp3.exe
Enter your number: 16

*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|           Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)                          |
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|  x  | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |
*~~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| .3Lf  |        .19Lf          |         .19Lf         |   int value     |
*~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| 0.031 | 0.0312398334302682740 | 0.0312398334302682774 |       1        |
| 0.062 | 0.0624188099959573223 | 0.0624188099959573500 |       2        |
| 0.094 | 0.0934767811585894975 | 0.0934767811585894698 |       3        |
| 0.125 | 0.1243549945467613826 | 0.1243549945467614382 |       4        |
| 0.156 | 0.1549967419239410005 | 0.1549967419239409727 |       5        |
| 0.188 | 0.1853479499956947329 | 0.1853479499956947607 |       6        |
| 0.219 | 0.2153576996977380753 | 0.2153576996977380476 |       7        |
| 0.250 | 0.2449786631268640602 | 0.2449786631268641435 |       8        |
| 0.281 | 0.2741674511196589004 | 0.2741674511196587893 |       9        |
| 0.312 | 0.3028848683749713055 | 0.3028848683749714166 |       10        |
| 0.344 | 0.3310960767041321584 | 0.3310960767041321029 |       11        |
| 0.375 | 0.3587706702705723005 | 0.3587706702705722450 |       12        |
| 0.406 | 0.3858826693980736966 | 0.3858826693980737521 |       13        |
| 0.438 | 0.4124104415973874338 | 0.4124104415973873228 |       14        |
| 0.469 | 0.4383365598579579414 | 0.4383365598579578304 |       15        |
| 0.500 | 0.4636476090008059825 | 0.4636476090008060935 |       16        |
*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): 2.2204460493e-16|
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Тест №3

Ввод: 32

Вывод:

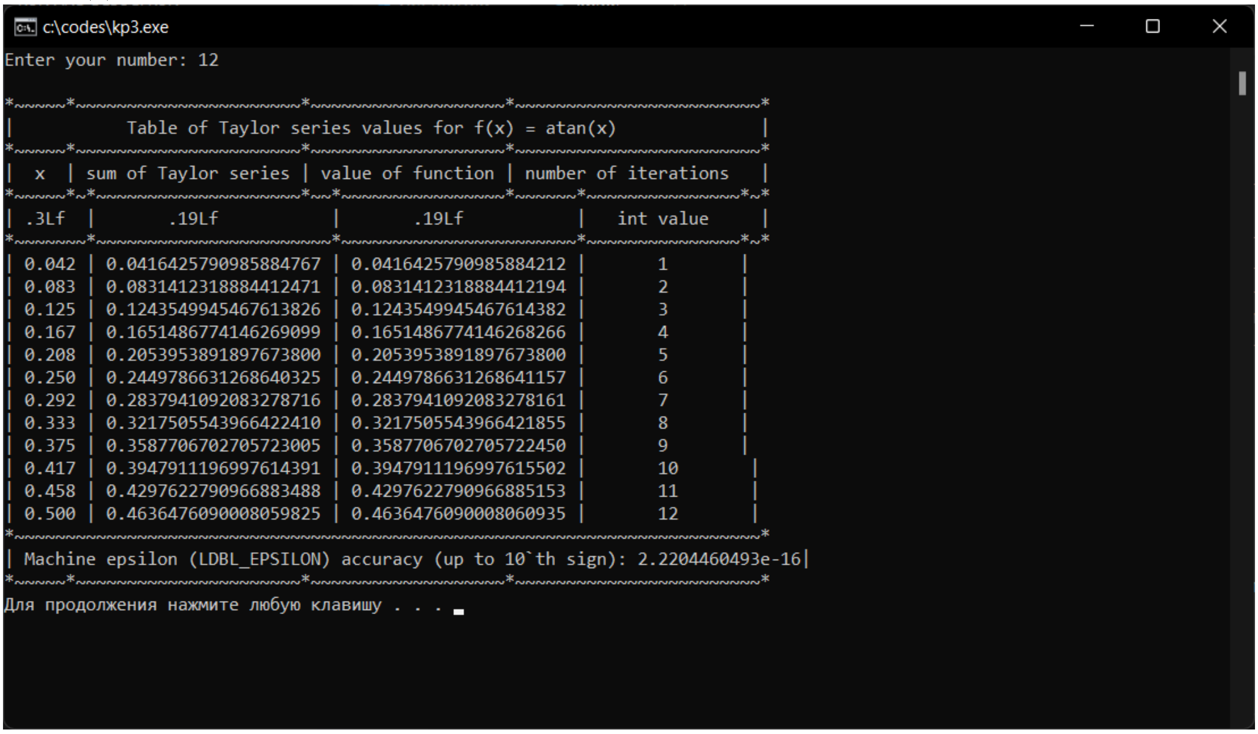
```
c:\codes\kp3.exe
Enter your number: 32

*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|           Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)                          |
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|  x  | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |
*~~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| .3Lf  |        .19Lf          |         .19Lf         |   int value     |
*~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| 0.016 | 0.0156237286204768226 | 0.0156237286204768313 |       1        |
| 0.031 | 0.0312398334302682740 | 0.0312398334302682774 |       2        |
| 0.047 | 0.0468407129159696609 | 0.0468407129159696539 |       3        |
| 0.062 | 0.0624188099959573223 | 0.0624188099959573500 |       4        |
| 0.078 | 0.0779666338315423008 | 0.0779666338315423008 |       5        |
| 0.094 | 0.0934767811585894975 | 0.0934767811585894698 |       6        |
| 0.109 | 0.1089419569898658069 | 0.1089419569898657930 |       7        |
| 0.125 | 0.1243549945467613826 | 0.1243549945467614382 |       8        |
| 0.141 | 0.1397088742891634816 | 0.1397088742891636481 |       9        |
| 0.156 | 0.1549967419239410005 | 0.1549967419239409727 |       10        |
| 0.172 | 0.1702119252854745468 | 0.1702119252854744080 |       11        |
| 0.188 | 0.1853479499956947329 | 0.1853479499956947607 |       12        |
| 0.203 | 0.2003985538258783727 | 0.2003985538258785115 |       13        |
| 0.219 | 0.2153576996977380753 | 0.2153576996977380476 |       14        |
| 0.234 | 0.2302195872768438845 | 0.2302195872768437179 |       15        |
| 0.250 | 0.2449786631268640602 | 0.2449786631268641435 |       16        |
| 0.266 | 0.2596296294082573453 | 0.2596296294082575118 |       17        |
| 0.281 | 0.2741674511196589004 | 0.2741674511196587893 |       18        |
| 0.297 | 0.2885873618940775764 | 0.2885873618940774099 |       19        |
| 0.312 | 0.3028848683749713055 | 0.3028848683749714166 |       20        |
| 0.328 | 0.3170557532091470287 | 0.3170557532091470287 |       21        |
| 0.344 | 0.3310960767041321584 | 0.3310960767041321029 |       22        |
| 0.359 | 0.3450021772071051318 | 0.3450021772071051318 |       23        |
| 0.375 | 0.3587706702705723005 | 0.3587706702705722450 |       24        |
| 0.391 | 0.3723984466767542578 | 0.3723984466767542023 |       25        |
| 0.406 | 0.3858826693980736966 | 0.3858826693980737521 |       26        |
| 0.422 | 0.3992207695752525987 | 0.3992207695752525431 |       27        |
| 0.438 | 0.4124104415973874338 | 0.4124104415973873228 |       28        |
| 0.453 | 0.4254496373700422107 | 0.4254496373700422662 |       29        |
| 0.469 | 0.4383365598579579414 | 0.4383365598579578304 |       30        |
| 0.484 | 0.4510696559885233325 | 0.4510696559885234991 |       31        |
| 0.500 | 0.4636476090008059825 | 0.4636476090008060935 |       32        |
*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): 2.2204460493e-16|
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
```

Тест №4

Ввод: 12

Вывод:



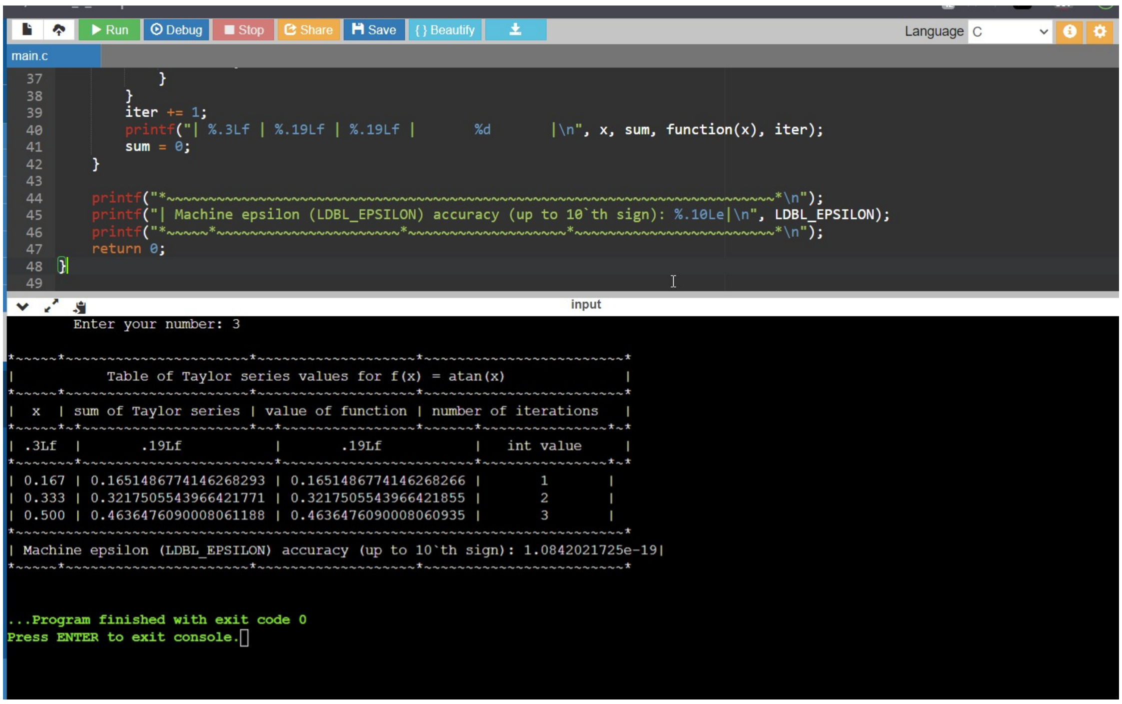
```
c:\codes\kp3.exe
Enter your number: 12

*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|           Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)                      |
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|  x   | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |
*~~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| .3Lf  |         .19Lf          |         .19Lf          |   int value    |
*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| 0.042 | 0.0416425790985884767 | 0.0416425790985884212 |       1        |
| 0.083 | 0.0831412318884412471 | 0.0831412318884412194 |       2        |
| 0.125 | 0.1243549945467613826 | 0.1243549945467614382 |       3        |
| 0.167 | 0.1651486774146269099 | 0.1651486774146268266 |       4        |
| 0.208 | 0.2053953891897673800 | 0.2053953891897673800 |       5        |
| 0.250 | 0.2449786631268640325 | 0.2449786631268641157 |       6        |
| 0.292 | 0.2837941092083278716 | 0.2837941092083278161 |       7        |
| 0.333 | 0.3217505543966422410 | 0.3217505543966421855 |       8        |
| 0.375 | 0.3587706702705723005 | 0.3587706702705722450 |       9        |
| 0.417 | 0.3947911196997614391 | 0.3947911196997615502 |       10        |
| 0.458 | 0.4297622790966883488 | 0.4297622790966885153 |       11        |
| 0.500 | 0.4636476090008059825 | 0.4636476090008060935 |       12        |
*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): 2.2204460493e-16|
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Тест №5 (online-compiler)

Ввод: 3

Вывод: **(значение машинного эпсилон другое!)**



```
        }
    }
    iter += 1;
    printf("| %.3Lf | %.19Lf | %.19Lf |       %d        |\n", x, sum, function(x), iter);
    sum = 0;
  }

  printf("*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
  printf("| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): %.10Le|\n", LDBL_EPSILON);
  printf("*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*\n");
  return 0;
}
```

```
Enter your number: 3

*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|           Table of Taylor series values for f(x) = atan(x)                      |
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
|  x   | sum of Taylor series | value of function | number of iterations   |
*~~~~~~*~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| .3Lf  |         .19Lf          |         .19Lf          |   int value    |
*~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~*~*
| 0.167 | 0.1651486774146268293 | 0.1651486774146268266 |       1        |
| 0.333 | 0.3217505543966421771 | 0.3217505543966421855 |       2        |
| 0.500 | 0.4636476090008061188 | 0.4636476090008060935 |       3        |
*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*
| Machine epsilon (LDBL_EPSILON) accuracy (up to 10`th sign): 1.0842021725e-19|
*~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~*


...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.
```

Вывод

В ходе работы я познакомился с понятием машинного эпсилон. Как новичок я заблуждался о том, что его значение связано с наименьшим числом в выбранном формате. На самом деле оно зависит от размера мантиссы. В моей системе точность уменьшена, и потому его значение посчитано как 2.2204460493e-16.

Список используемых источников

[1] Функция pow в C — URL: https://www.programiz.com/c-programming/library-function/math.h/pow

[2] Функция fabsl в C — URL: http://all-ht.ru/inf/prog/c/func/fabs,fabsf,fabsl.html

[3] Спецификатор для Machine Epsilon – URL: https://www.demo2s.com/c/c-printf-ldbl-epsilon-le-n-ldbl-epsilon.html

[4] Статья о точности Machine Epsilon для разных систем — URL: https://it.wikireading.ru/25936