第一章 集合及其运算

§1 集合的概念

- 一些可区分的互不相同的东西构成的整体称为集合，其中的东西称为元素。
  - 集合用大写英文字母表示，元素用小写英文字母表示
  - 元素和集合的关系
    - 属于：$x \in A$
    - 不属于：$x \notin A$

§1 集合的概念

- 集合的表示
  - 枚举其元素
    - A={1,2,3}
    - A={1,2,3,…}
    - A={a,b,c,…,x,y,z}
  - 概括组成元素的性质 X={x|P(x)}
    - B={m|m是奇数}
- 有穷集合：含有有穷个元素
- 无穷集合：含有无穷个元素
- 空集：不含任何元素

§2 子集、集合的相等

定义1：设A,B为集合，如果 A中的每个元素都属于 B，则称A是B的子集，记为 $A\subseteq B$;
如果A $\subseteq$ B，且$\exists x\in B$使得$x\notin A$，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$。

1.$A\subseteq A$
2.若$A\subseteq B,B\subseteq C$,则$A\subseteq C$
3.$\phi\subseteq A$

§2 子集、集合的相等

定义2：设A, B为集合，如果 $A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，记为 $A = B$。

1.$A = A$

2.若$A = B$,则$B = A$

3.若$A = B$，$B = C$,则$A = C$

§2 子集、集合的相等

定义3：以集合为元素的集合　称为集族。

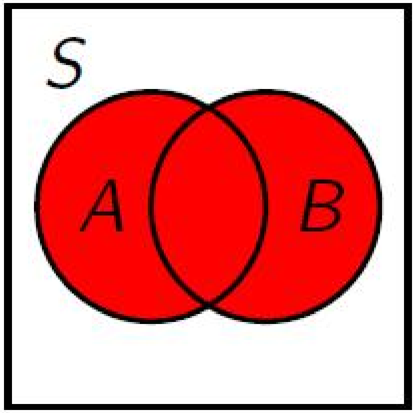
定义4：设A为集合，集族 $P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$
称为A的幂集，记为 2^A(或$P(A)$)。

§3集合的运算

定义1：设A, B为集合，则

$\{x \mid x \in A$或$x \in B\}$

称为A与B的并集，记为 $A \cup B$。



定理1.设A, B, C为集合，则

1.$A \cup B = B \cup A$

2.$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

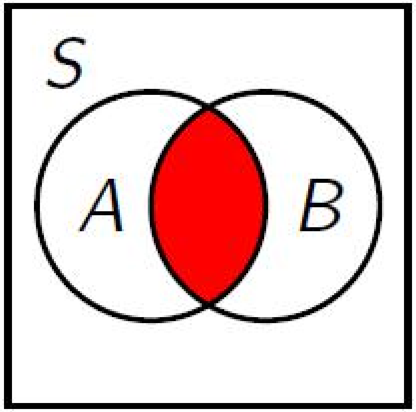
3.$\phi \cup A = A$

4.$A \cup A = A$

5.$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

§3集合的运算

定义 2：设A,B为集合，由属于 A 且属于B的一切元素组成的集合 称为A与B的交集，记为 $A\cap B$。



定理 2.设A,B,C为集合，则

6.$A\cap B = B\cap A$

7.$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

8.$A\cap A = A$

9.$A\cap \phi = \phi$

10.$A\cap B = A \Leftrightarrow A\subseteq B$

§3集合的运算

定理3.设$\{A_\xi\}_{\xi\in I}$，则

11.$A\bigcap(\bigcup\limits_{\xi\in I}A_\xi)=\bigcup\limits_{\xi\in I}(A\bigcap A_\xi)$

12.$A\bigcup(\bigcap\limits_{\xi\in I}A_\xi)=\bigcap\limits_{\xi\in I}(A\bigcup A_\xi)$

定理4.设A,B,C为集合，则

13.$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

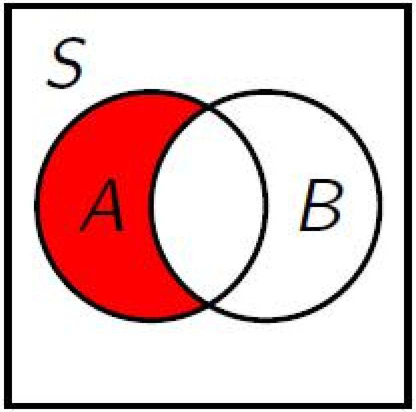
14.$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

15.$A\bigcap(A\bigcup B)=A$

16.$A\bigcup(A\bigcap B)=A$

§3集合的运算

定义3：设A,B为集合，则属于 A 但不属于 B的一切元素组成的集合称为A与B的差集，记为 $A\setminus B$。



定理5.设A,B,C为集合，则

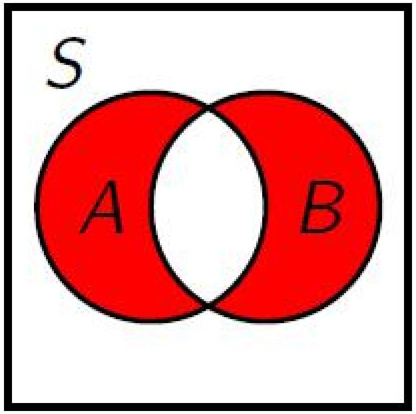
$$17.\ A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$$

§3集合的运算

定义4：设A,B为集合，则集合

$(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$

称为A与B的对称差，记为 $A \Delta B$。



定理5.设A,B,C为集合，则

$18. A \Delta B = B \Delta A$

$19. (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

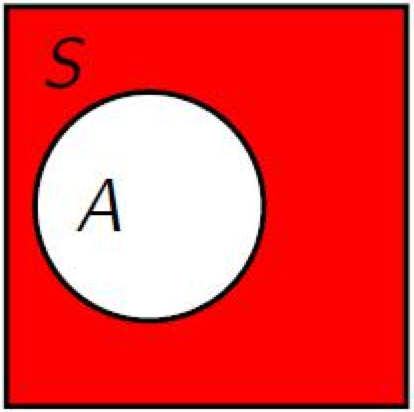
$20. (A \Delta A) = \phi$

$21. A \Delta \phi = A$

$22. A \bigcap (B \Delta C) = (A \bigcap B) \Delta (A \bigcap C)$

§4补集、De Morgan公式

定义5.设$A \subseteq S$,则A对S的补集定义为$S \setminus A$，记为$A^c(\overline{A}, A^{'}, C_s A)$。



定理 5.设S为集合， $A \subseteq S$,则

$23.\phi^c = S$

$24.S^c = \phi$

$25.A \bigcup A^c = S$

$26.A \bigcap A^c = \phi$

§5 笛卡尔乘积

定义1：设a,b是两个对象， a放在b的前面（a为第一个， b为第2个），则称 a与b构成一个序对，记为 (a,b)。当$a=b$时,(a,a)也是序对。

定义2：设A,B为集合， A与B的笛卡尔积记为$A\times B$，它是集合$\{(x,y)\mid x\in A$且$y\in B\}$。

§5 笛卡尔乘积

定理1：设A，B，C为集合，则

32. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

33. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

34. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

§5 笛卡尔乘积

定义3：一个n元组是n个元素按照一定的顺序排列构成的整体，若第　一个为x_1,第二个为x_2, ...,第n个为x_n，则这个n元组记为$(x_1, x_2, ..., x_n)$。称两个n元组（$x_1, x_2, ..., x_n$）与$(y_1, y_2, ..., y_n)$是相等的，当且仅当 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$。

§5 笛卡尔乘积

定义4：设$A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 2)$为n个集合，集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{A_i}, \mathrm{i} = 1,2,\ldots, \mathrm{n}\}$$

称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔积，并记为 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，

或简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。

于是，

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{A_i}, \mathrm{i} = 1,2,\ldots, \mathrm{n}\}$$

§6 有穷集合的基数

6.1 映射

定义1.设X, Y是集合，如果有一个法 则f,
使得$\forall x \in X$, Y中有唯一的元素 y与之对应,
则称f为X为Y的一个映射，记为 $f: X \to Y$。

定义2.令$f: X \to Y$,
(1) 如果$\forall x_1, x_2$且$x_1 \neq x_2$,则$f(x_1) \neq f(x_2)$,则f称为单射；
(2) 如果$\forall y \in Y, \exists x \in X$，使得$y = f(x)$,则$f$称为满射；
(3) 如果f即使单射又是满射，则 f称为一一对应（双射）。

§6 有穷集合的基数

定义3. 设X是一个集合，如果 $X=\phi$,则称X为有穷集合且其基数为 0；如果 $X\neq\phi$,但存在一个自然数 n,使得从 A到$\{1,2,\ldots,n\}$有一个一一对应，则 x称为有穷集合且其基数为n。X的基数记为 $|X|$。

定义4.如果A与B的一个真子集间有一个 一一对应，但A与B之间不存在一一对应， 则称 $|A|$小于$|B|$，记为 $|A|<|B|$。

§6 有穷集合的基数

定义3. 设X是一个集合，如果 $X=\phi$,则称X为有穷集合且其基数为 0；如果 $X\neq\phi$,但存在一个自然数 n,使得从 A 到 $\{1,2,\ldots,n\}$ 有一个一一对应，则 x 称为有穷集合且其基数为 n。X 的基数记为 $|X|$。

定义4.如果 A 与 B 的一个真子集间有一个 一一对应，但A与B之间不存在一一对应， 则称 $|\mathrm{A}|$ 小于 $|\mathrm{B}|$，记为 $|\mathrm{A}|<|\mathrm{B}|$。

§6 有穷集合的基数

记数法则：

(1) 设A,B为两个不相交的有穷集 合，则 $|A\cup B|=|A|+|B|$;

设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为两两不相交的有穷集 合，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|;$$

(2)设A,B为有穷集合，则 $|A\times B|=|A|\cdot|B|$;

(3)设S为有穷集合， $A\subseteq S$，则$|A^C|=|S|-|A|$。

§6 有穷集合的基数

容斥原理：

设A, B为两个有穷集合，则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$；

$|A \cup B \cup C| = ?$

推广一下，得到下面一 般的公式：

§6 有穷集合的基数

(I)设$A_1, A_2, \ldots, A_n$都是有穷集合，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

(II)设$A_1, A_2, \ldots, A_n$都是有穷集合 S的子集，则

$$|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c| = |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c| = |S \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| = |S| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$$