第二章 映射

§1 映射

定义1. 设X，Y为集合，f⊆ $X \times Y$, 如果f满足

（1）$\forall x \in X, \exists y \in Y$, 使得$(x, y) \in f$;

（2）若(x,y_1)∈ f，(x,y_2)∈ f, 则$y_1 = y_2$

则称f为X到Y的映射，记为f:X→ Y。

如果(x,y)∈ f, 则记为$y = f(x)$，y称为x在f下的象，x称为y在f下的原象。

§1 映射

定义2. 设f: X → X，如果$\forall x\in X, f(x)=x$，则称f为X上的恒等映射。X上的恒等映射常记为I_X。

定义3. 设f: X → Y，A⊆ X，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个φ:A→ Y，$\forall x\in A, \varphi(x)=$ f(x)。φ被称为f在A上的限制，并且常用f|A来代替φ。f称为φ在X上的扩张。

定义4. 设f: $A\to Y$，A ⊆ X，则称f是X上的一个部分映射。

§1 映射

定义4. 两个映射f和g是相等的当且仅当f和g都是X到Y的映射，并且

$\forall x \in$X总有f(x)=g(x)。

§1 映射

定理1. 设A和B是有穷集，f:A→ B。如果f是满射，则$|A| \geq |B|$;
如果f是单射，则$|A| \leq |B|$。

定理2. 设A和B是有穷集且$|A|=|B|$，则f:A→ B是单射当且仅当f是满射。

定义5. 从X到Y的所有映射之集记为$Y^X=\{f|f: X \to Y\}$。

§2 鸽舍原理

鸽舍原理： 如果把n+1个物体放到n个抽屉里，则必有一个抽屉里至少放了两个物体。

§2 鸽舍原理

鸽舍原理的强形式： 设$q1, q2, \ldots, qn$为n个正整数。如果把$q_1 + q_2 + \cdots + qn = n + 1$个物体放到$n$个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有$q_1$个物体，或者第二个盒子中至少含有$q_2$个物体， …， 或者第$n$个盒子中至少含有$q_n$个物体。

推论： 如果把n(r-1)+1个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子中含有不少于r个物体。

§3 映射的一般性质

定义1：设$f:X\to Y, A\subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}。$$

定义2：设$f:X\to Y, B\subseteq Y$，B在f下的原象定义为

$$f^{-1}(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}。$$

§3 映射的一般性质

定理1：设$f:X\to Y, A\subseteq Y, B\subseteq Y$，则

（1）$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

（2）$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

（3）$f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$;

（4）$f^{-1}(A\vartriangle B)=f^{-1}(A)\vartriangle f^{-1}(B)$。

§3 映射的一般性质

定理2：设f:X→ Y, A $\subseteq$ X, $B \subseteq X$, 则

（1）$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

（2）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

（3）$f(A \vartriangle B) \supseteq f(A) \vartriangle f(B)$。

§4 映射的合成

定义1：设f:X→ Y, g: $Y \to Z$, 则从X到Z的映射h: $X \to Z$

称为 f与 g的合成，$\forall x \in X$，$h(x) = g(f(x))$，记为$g \circ f$，

即$\forall x \in X$，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$。

定理1：设f:X→ Y, g: $Y \to Z$, $h: Z \to W$, 则

$$（h\circ g）\circ f = h \circ (g \circ f)。$$

§4 映射的合成

定理2：设I_x:X→X，f:X→ Y, 则

$$f \circ I_x = f$$

§4 映射的合成

定理3：设$f:X\to Y, g:Y\to Z$则

(1)如果f和g为单射，则$g\circ f$为单射；

(2)如果f和g为满射，则$g\circ f$为满射；

(3)如果f和g为双射，则$g\circ f$为双射。

定理4：设$f:X\to Y, g:Y\to Z$则

(1)如果$g\circ f$为单射，则f为单射；

(2)如果$g\circ f$为满射，则g为满射；

(3)如果$g\circ f$为双射，则f为单射，g为满射。

§5 逆映射

定义1：设$f:X\to Y$, 如果存在一个映射$g:Y\to X$，使得$g\circ f = I_X$且$f\circ g= I_Y$，则称f是可逆的，且g称为f的逆映射。

定理1：设$f:X\to Y$, f是可逆的充分必要条件是f为双射。

§5 逆映射

定理2：设$f:X\to Y$, 如果f可逆，则f的逆映射是唯一的，记为f^{-1}。

定理3：设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$都是可逆的，则gf也可逆且$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$，$(f^{-1})^{-1}=f$。

§5 逆映射

定义2：设f:X→ Y, 如果存在一个映射g:Y→ X使得$g \circ f = I_x$，则称f是左可逆的，g称为f的左逆映射。而如果存在一个映射h:Y→X，使得$f \circ h = I_Y$，则称f是右可逆的，h称为f的右逆映射。

定理4：设f:X→ Y, 则

（1）f左可逆的充分必要条件是f为单射；

（2）f右可逆的充分必要条件是f为双射。

§6 置换

定义1：有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。

如果$|S|=n$，则S上的置换就说成是n次置换。

§6 置换

定义2：设σ是S上的一个n次置换，若$i_1\sigma$=i_2,$i_2\sigma$=i_3,…,
$i_{k-1}\sigma = i_k, i_k\sigma$=$i_1$，而$\forall i \in S\backslash\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，$i\sigma$=i，则称$\sigma$是一个k-循环置换，记为$(i_1i_2\ldots i_k)$。2-循环置换称为对换。

定理1：设$\sigma = (i_1i_2\ldots i_k)$与$\beta = (j_1j_2\ldots j_r)$是两个没有共同数字的循环置换，则$\sigma$与$\beta$可交换，即$\sigma\beta=\beta\sigma$。

§6 置换

定理2：每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序，这个分解是唯一的。

定理3：每个置换都能被分解成若干个对换的乘积。

§6 置换

定理4：如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换的个数的奇偶性是不变的。

定义3：一个置换称为偶置换，如果这个置换能被分解为偶数个对换的乘积；如果一个置换能被分解为奇数个对换的乘积，则这个置换叫做奇置换。

定理4：n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于n!/2。

§7 代数运算

定义1：设X，Y，Z为任意三个非空集。一个从$X\times Y$到Z的映射φ称为X与Y到Z的一个二元代数运算。当$X=Y=Z$时，则称φ为X上的二元代数运算。

定义2：从集合X到集合Y的任一映射都称为X到Y的一元代数运算。若$X=Y$，则X到X的一元运算称为X上的一元代数运算。

定义3：设$A_1,A_2,\dots,A_n,D$为非空集合。一个从$A_1\times A_2\times\dots\times A_n$到D的映射$\varphi$称为$A_1,A_2,\dots,A_n$到D的一个n元代数运算。如果$A_1=A_2=\dots=A_n=D=A$，则称为A上的n元代数运算。

§7 代数运算

定义4：设“$\circ$”是集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a,b,c\in X$，恒有$a\circ b=b\circ a$，则称二元代数运算“$\circ$”满足交换律。如果$\forall a,b,c\in X$，恒有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，则称二元代数运算“$\circ$”满足结合律。

定义5：设“+”与“$\circ$”是集合X上的两个二元代数运算。如果$\forall a,b,c\in X$，恒有$a\circ(b+c)=(a\circ b)+(a\circ c)$，则称二元代数运算“$\circ$”对“+”满足左分配律。如果$\forall a,b,c\in X$，恒有$(b+c)\circ a=(b\circ a)+(c\circ a)$，则称二元代数运算“$\circ$”对“+”满足右分配律。

§7 代数运算

定义6：设(S,+)与(T，⊕)为两个代数系。如果存在一个一一对应φ：S→T，使得 ∀x,y∈S，恒有

$\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$，则称代数系(S,+)与(T, ⊕)同构，并记为$S \cong T$,而$\varphi$称为这两个代数系间的一个同构。

§8 集合的特征函数

定义1：设X是一个集合，E⊆ X。从X到{0,1}的如下的一个映射χ_E称为E的特征函数：$\forall x \in X$，

$$\chi_E(\mathrm{x})=\begin{cases}1, 如果 x \in E \\ 0, 如果 x \notin E\end{cases}$$

定理1：令Ch(X) = $\{\chi|\chi: X \to \{0,1\}\}$，则$2^X$与$Ch(X)$是一一对应的。