第三章 关系

§1 关系的概念

定义1. 设A，B是两个集合，一个从A× B到{是，否}的映射R，称为从A到B的一个二元关系，或A与B间的一个二元关系。$\forall(a,b) \in A \times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为"是"，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果(a,b)在R下的象为“否”，则称a与b不符合关系R。若A=B，则称R为A上的二元关系。

§1 关系的概念

定义2. 设A与B是两个集合。A× B的任一子集称为从A到B的一个二元关系。如果(a,b)∈ R，则称a与b符合关系R，并记为aRb；如果$(a,b) \notin R$，则称a与b不符合关系R。如果$A = B$，则称R为A上的一个二元关系。

§2 关系的性质

定义1. X上的关系R称为自反的，如果$\forall x \in X$，xRx。

§2 关系的性质

定义2.X上的二元关系R称为反自反的，如果$\forall x \in X$都有$(x,x) \notin R$。

§2 关系的性质

定义3.设R为X上的二元关系。如果$\forall x, y \in X$，只要xRy就有yRx，则称R为对称的。

§2 关系的性质

定义4. 设R为X上的二元关系。对X的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则x=y，那么称R为反对称的。

§2 关系的性质

定义5. 设R为X上的二元关系，如果对X上的任意x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz，则称R为传递关系。

§3 关系的合成运算

定义1. 设R是A到B，S是B到C的二元关系。R与S的合成是A到C的一个二元关系，记成$R\circ S$，并且

$$R\circ S=\{(x,z)|(x,z)\in A\times C\text{且}\exists y\in B\text{使得}xRy\text{且}yRz\}\text{。}$$

定理1. 设R_1，R_2，R_3分别是从A到B，B到C，C到D的二元关系，则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)\text{。}$$

§4 关系的闭包

定义1. 设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+=\bigcap_{R\subseteq R'\text{且}R'\text{是传递的}} R'$$

定理1. 关系R的传递闭包R^+是传递关系。

§4 关系的闭包

定理2. 设R为X上的二元关系，则

$$R^{+}=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

定理3. 设X为n元集，R为X上的二元关系，则

$$R^{+}=\bigcup_{i=1}^{n} R^i。$$

§5 关系矩阵和关系图

定义1. 设X是一个n元集，并且其元素编了号，不妨设$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$。

类似的，设$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$。令R是X到Y的一个二元关系。

由R定义一个$m\times n$矩阵$B=(b_{ij})$如下：$\forall(x_i,y_j)\in X\times Y$,

$$b_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}x_iRy_j\\0,\text{若}(x_i,y_j)\notin R\end{cases}$$

矩阵B称为关系R的矩阵。

§6 等价关系与集合的划分

定义1. 集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时满足以下三个性质：

1. R是自反的，即$\forall x \in X$，xRx；
2. R是对称的，即如果xRy，则yRx；
3. R是传递的，即如果xRy且yRz，则xRz。

§6 等价关系与集合的划分

定义2.设≅ 是X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集$E_x = \{y|y \in X且x \cong y\}$称为$x$关于 ≅ 的等价类，或简称为$x$的等价类。

x的等价类也常记为[x]={y|y∈X且x≅y}。

§6 等价关系与集合的划分

定义3. 设X为集合，X的一些非空子集形成的集族 **A**称为X的一个划分，如果A具有性质

1）$\forall A,B \in \mathbf{A}$, 若$A \neq B$, 则 $A \cap B = \phi$；

2) $\bigcup_{A \in \mathbf{A}} A = X$

§6 等价关系与集合的划分

定理1. 设$\cong$ 是X上的一个等价关系，则 $\cong$的所有等价类的集合是X的一个划分。

定理2. 设**A**是集合X的一个划分。令

$$\cong = \cup_{A\in\boldsymbol{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系且**A**就是$\cong$等价类之集。

§8 偏序关系与偏序集

定义1. 集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

1. R是自反的，即$\forall x \in X, xRx$；

2.R是反对称的，即如果xRy且yRx，则x=y；

3.R是传递的，即如果xRy且yRz，则xRz。

定义2. 设$\leq$ 是X上的一个偏序关系，则称$(X, \leq)$为偏序集。

§8 偏序关系与偏序集

定义3. 集合X上的偏序关系$\leq$ 叫做全序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立。全序关系也称为线性关系。X与全序关系 $\leq$ 构成的二元组$(X, \leq)$称为全序集。

§8 偏序关系与偏序集

定义3. 设(X,≤)是一个偏序集，$B \subseteq X$。如果存在一个元素$a \in B$使得$\forall x \in B$有$x \le a$，则称a是B中的最大元素。如果存在一个元素$b \in B$使得$\forall x \in B$有$b \le x$，则称b是B中的最小元素。

§8 偏序关系与偏序集

定义3. 设(X,≤)是一个偏序集，$A \subseteq X$。A中元素s称为A的极大元素，如果A中没有元素t使得s<t；A中元素s称为A的极小元素，如果A中没有元素t使得t<s。

§8 偏序关系与偏序集

定义4. 设(X,≤)是一个偏序集，$B \subseteq X$。如果存在一个元素$a \in X$使得对B中的每个元素x都有$x \leq a$，则称a为B的一个上界。如果存在一个元素b，使得对B的每一个元素x都有b≤ x，则称b为B的一个下界。

§8 偏序关系与偏序集

定义4. 设(X,≤)是一个偏序集，$B \subseteq X$。如果B有上界且B的一切上界之集有最小元素，则这个最小元素称为B的上确界， 记为sup B；类似的，如果B有下届且B的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为B的下确界，记为inf B。