第四章 无穷集合及其基数

§1 可数集

定义1. 如果从自然数N到集合X存在一个一一对应f：N→X，则称集合X为无穷可数集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集，简称不可数集。

§1 可数集

定理1. 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$$

因此，A可写成$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$。

§1 可数集

定理2. 无穷集合A必包含可数子集。

§1 可数集

定理3. 可数集的任一无穷子集也是可数集。

§1 可数集

定理4. 设A是可数集，M是有穷集，则$A \cup M$是可数集。

§1 可数集

定理5. 设$A_1,A_2,\ldots,A_n(n\geq 1)$都是可数集，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 也是可数集。

§1 可数集

定理6. 设A1，A2，…，An，…为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

§1 可数集

定理7. 全体有理数之集Q是可数集。

§1 可数集

定理8. 设M是一个无穷集，A是有穷集或可数集，则M~M∪A。

定理9. 设M是一个无穷不可数集，A为M的至多可数子集（即A为有穷集合或可数集合），则M~M\\A。

§1 可数集

定理10. 设A_1，A_2，…，$A_n(n\geq 2)$都为可数集，则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$是可数集。

§2 连续统集

定理1. 区间[0,1] 中的所有实数构成的集合为不可数集合。

§2 连续统集

定义1. 凡与集[0,1]对等的集称为具有"连续统的势"的集，或简称连续统。

§2 连续统集

定理2. 设A_1，A_2，…，A_n是n个两两不相交的连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 是连续统，及$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim[0,1]$。

定理3. 设A_1，A_2，…，A_n, …为两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$是连续统，及$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim[0,1]$。

推论1. 全体实数之集是一个连续统。

推论2. 无理数之集是一个连续统。

推论3. 超越数之集是一个连续统。

§2 连续统集

定理4. 令B为0、1的无穷序列构成的集合，则B~[0,1]。

定理5. 令S={f|f:N→{0,1}}，则S~[0,1]。于是，若A为可数集，则2^A~[0,1]。

定理6. 正整数的无穷序列之集与区间[0,1]对等。

§2 连续统集

定理7. 设A_1，A_2均为连续统，则$A_1 \times A_2 \sim [0,1]$。

定理8.设A_1，A_2，…，A_n均为连续统，则$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim [0,1]$。

定理9. 设$I \sim [0,1]$，并且$\forall l \in I, A_l \sim [0,1]$，则$\bigcup_{l \in I} A_l \sim [0,1]$。

§3 基数及其比较

定义1. 设A是一个集合，凡与A一一对应的集合均赋予同一个记号α，则称α为A的基数，记为$|A|$。

定义1′（冯·诺依曼）. 凡与A对等的集合形成的集族称为A的基数。

§3 基数及其比较

定义2. 设α，β分别为集合A和B的基数，如果A与B的一个子集对等，但A与B不对等，则称α小于β，记为$\alpha < \beta$。

§3 基数及其比较

定理1（康托）.对任一集合M，$|M|<|2^M|$。

§4 康托-伯恩斯坦定理

定理4.1 设A，B是两个集合。如果存在单射$f:A\to B$与单射$g:B\to A$，则A与B对等。