第二章映射

定义1. 设X, Y为集合, $f \subseteq X \times Y$, 如果f满足

- (1) $\forall x \in X, \exists y \in Y,$ 使得 $(x,y) \in f$;
- (2) 若 $(x,y_1) \in f$, $(x,y_2) \in f$, 则 $y_1 = y_2$

则称f为X到Y的映射,记为 $f:X \rightarrow Y$ 。

如果 $(x,y) \in f$,则记为y = f(x), y称为x在f下的 \mathfrak{g} , x称为y在f下的原象。

定义**2.** 设f: X \rightarrow X,如果 \forall x \in X, f(x) = x,则称f为X上的恒等映射。 X上的恒等映射常记为 \mathbf{I}_{X} 。

定义3. 设f: X \rightarrow Y,A \subseteq X,当把f的定义域限制在A上时,就得到了一个 φ :A \rightarrow Y, \forall x \in A, φ (x) = f(x)。 φ 被称为f在A上的限制,并且常用f|A来代替 φ 。f称为 φ 在X上的扩张。

定义**4.** 设f: $A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$,则称f是X上的一个部分映射。

定义4. 两个映射f和g是相等的当且仅当f和g都是X到Y的映射,并且 $\forall x \in X$ 总有f(x)=g(x)。

定理**1.** 设A和B是有穷集,**f**:A \rightarrow B。如果**f**是满射,则|A| \geq |B|; 如果**f**是单射,则|A| \leq |B|。

定理2. 设A和B是有穷集且|A|=|B|,则f:A $\rightarrow B$ 是单射当且仅当f是满射。

定义5. 从X到Y的所有映射之集记为 $Y^x = \{f | f: X \rightarrow Y\}$ 。



§ 2 鸽舍原理

鸽舍原理: 如果把n+1个物体放到n个抽屉里,则必有一个抽屉里

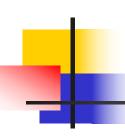
至少放了两个物体。



§ 2 鸽舍原理

鸽舍原理的强形式: 设q1,q2,...,qn为n个正整数。如果把 $q_1+q_2+...+qn=n+1$ 个物体放到n个盒子中,则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体,或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体,...,或者第n个盒子中至少含有 q_n 个物体。

推论: 如果把n(r-1)+1个物体放入n个盒子里,则至少有一个盒子中含有不少于r个物体。



§ 3 映射的一般性质

定义1: 设 $f:X\to Y,A\subseteq X$,A在f下的象定义为

 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}_{\circ}$

定义2: 设f:X→ Y, $B \subseteq Y$,B在f下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{ \mathbf{x} \in X | \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{B} \}_{\circ}$$

§

§ 3 映射的一般性质

定理1: 设f:X→ Y, A \subseteq Y, B \subseteq Y, 则 $(1) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$ $(2) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$ $(3) f^{-1}(A^{c}) = (f^{-1}(A))^{c};$ $(4) f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B).$

§ 3 映射的一般性质

定理2: 设f: $X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, 则

- $(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$
- (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
- (3) $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)_{\circ}$



§ 4 映射的合成

定义1: 设f: $X \rightarrow Y$, g: $Y \rightarrow Z$, 则从X到Z的映射h: $X \rightarrow Z$

称为 f与 g的合成, $\forall x \in X$, h(x) = g(f(x)), 记为 $g \circ f$,

即 $\forall x \in X, (g \circ f)(x) = g(f(x))_{\circ}$

定理1: 设f: $X \rightarrow Y$, g: $Y \rightarrow Z$, h: $Z \rightarrow W$, 则

 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)_{\circ}$

§ 4 映射的合成

定理2: 设I_x:X→X, f:X→ Y,则

$$f \circ I_{x} = f$$

§ 4 映射的合成



定理3: 设f:X→ Y, g:Y→ Z则

(1)如果f和g为单射,则gof为单射;

(2)如果f和g为满射,则g。f为满射;

(3)如果f和g为双射,则gof为双射。

定理4: 设f:X→Y,g:Y→Z则

(1)如果gof为单射,则f为单射;

(2)如果go f为满射,则g为满射;

(3)如果gof为双射,则f为单射,g为满射。



定义1:设 $f:X \rightarrow Y$,如果存在一个映射 $g:Y \rightarrow X$,使得 $g \circ f =$

 I_X 且 $f \circ g = I_Y$,则称f是可逆的,且g称为f的逆映射。

定理1: 设f:X→Y,f是可逆的充分必要条件是f为双射。

§ 5 逆映射

定理**2**: 设 $f:X \rightarrow Y$, 如果f可逆,则f的逆映射是唯一的,记为 f^{-1} 。

定理3:设f:X→Y,g:Y→Z都是可逆的,则gf也可逆且

 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}, (f^{-1})^{-1}=f_{\circ}$

§ 5 逆映射

定义2: 设f:X→ Y, 如果存在一个映射g:Y→ X使得 $g \circ f = I_x$,则称f是左可逆的,g称为f的左逆映射。而如果存在一个映射h:Y→X,使得 $f \circ h = I_y$,则称f是右可逆的,h称为f的右逆映射。

定理4: 设f:X→Y,则

- (1) f左可逆的充分必要条件是f为单射;
- (2) f右可逆的充分必要条件是f为双射。



定义1: 有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。

如果|S|=n,则S上的置换就说成是n次置换。

§6置换

定义2: 设 σ 是S上的一个n次置换,若 $i_1\sigma=i_2,i_2\sigma=i_3,...$, $i_{k-1}\sigma=i_k,i_k\sigma=i_1$,而 $\forall i \in S \setminus \{i_1,i_2,...,i_k\}$, $i\sigma=i$,则称 σ 是一个k-循环置换,记为 $(i_1i_2...i_k)$ 。2-循环置换称为对换。

定理**1**: 设 $\sigma = (i_1 i_2 ... i_k)$ 与 $\beta = (j_1 j_2 ... j_r)$ 是两个没有共同数字的循环置换,则 σ 与 β 可交换,即 σ $\beta = \beta \sigma$ 。



§6置换

定理2:每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序,这个分解是唯一的。

定理3:每个置换都能被分解成若干个对换的乘积。



§ 6 置换

定理4:如果把置换分解成若干个对换的乘积,则对换的个数的奇偶性是不变的。

定义3:一个置换称为偶置换,如果这个置换能被分解为偶数个对换的乘积;如果一个置换能被分解为奇数个对换的乘积,则这个置换叫做奇置换。

定理4: n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等,都等于n!/2。

§ 7 代数运算

定义1:设X,Y,Z为任意三个非空集。一个从 $X \times Y$ 到Z的 映射 φ 称为X与Y到Z的一个二元代数运算。当X = Y = Z时,则 称 φ 为X上的二元代数运算。

定义2: 从集合X到集合Y的任一映射都称为X到Y的一元代数运算。若X=Y,则X到X的一元运算称为X上的一元代数运算。

定义3:设 $A_1,A_2,...,A_n,D$ 为非空集合。一个从 $A_1\times A_2\times...\times A_n$ 到D的映射 φ 称为 $A_1,A_2,...,A_n$ 到D的一个n元代数运算。如果 $A_1=A_2=...=A_n=D=A$,则称为A上的n元代数运算。

§ 7 代数运算

定义4: 设 "。" 是集合X上的一个二元代数运算。如果 ∀a,b,c∈X,恒有a∘b=b∘a,则称二元代数运算"。"满足交换律。 如果∀a,b,c∈X,恒有(a∘b)。c=a∘(b∘c),则称二元代数运算 "。"满足结合律。

定义5: 设 "+"与 "o"是集合X上的两个二元代数运算。如果 $\forall a,b,c \in X$,恒有ao(b+c)=(aob)+(aoc),则称二元代数运算"o"对"+"满足左分配律。如果 $\forall a,b,c \in X$,恒有(b+c)oa=(boa)+(coa),则称二元代数运算"o"对"+"满足右分配律。

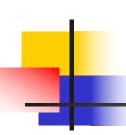
§ 7 代数运算

定义6: 设(S,+)与(T,⊕)为两个代数系。如果存在一个一

一对应 φ : S→T,使得 \forall x,y∈S,恒有

 $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,则称代数系(S,+)与(T, \oplus)同构,并

记为S≅T,而φ称为这两个代数系间的一个同构。



§ 8 集合的特征函数

定义1: 设X是一个集合, $E\subseteq X$ 。从X到 $\{0,1\}$ 的如下的一个映射 χ_E 称为E的特征函数: $\forall x\in X$,

$$\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, 如果x \in E \\ 0, 如果x \notin E \end{cases}$$

定理1: 令Ch(X) = $\{\chi | \chi : X \to \{0,1\}\}$,则 2^X 与Ch(X)

是一一对应的。