作业 1 简答

李子钰, 肖子达

2021 年 9 月 27 日

问题 1. *Solve the linear systems*

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \tag{2}$$

解答. 第一个方程组对于的增广矩阵是: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, 交换第一行与第三行得到 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. 接着把第一行的 -3 倍加到第三行, 以此消去第三行第一列的元素 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{bmatrix}$, 然后理由第二行的第一个非零元素消去第三行的第一个非零元素, 将之化简为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

由此可以立刻发现它没有解.

同样的，先写出第二个方程组的增广矩阵：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ 用第一行消去第二行的第一个非零元素，得到矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$，然后交换二三行[1]，得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \end{bmatrix}$，再用第二行消去第三行的第一个非零元素，得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，这里的第三行我们已经做了化简。现在你可以看出来这个方程是有解的，利用第三行的非零元素消去第二行和第一行的第三列的元素，得到矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 回忆这个矩阵对应方程组

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases} \tag{3}$$

由于我们只使用了初等行变换，课上的内容指出方程组 *(2)* 与方程组 *(3)* 是同解的，换句话说，*(3)* 就是 *(2)* 的解.

问题 2. *Do the three lines* $x_1 - 4x_2 = 1, 2x_1 - x_2 = -3$ *and* $-x_1 - 3x_2 = 4$ *have a common point of intersection? Explain.*

解答. 它们的公共交点对应着方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \tag{4}$$

的公共解，写出它增广矩阵并模仿问题一的方法，将之化简为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

[1]交换它们是为了让后面的计算简单一些.

发现 $(-\frac{13}{7}, -\frac{5}{7})$ 是它们的交点.

问题 3. *Do the three planes* $x_1+2x_2+x_3=4, x_2-x_3=1$ *and* $x_1+3x_2=0$ *have at least one common point of intersection? Explain.*

解答. 将其转化为方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

的公共解问题，并将对应增广矩阵化简为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 之后发现无解.

问题 4. *Suppose the system below is* ***consistent*** *(i.e. has a solution) for all possible values of f and g. What can you say about the coefficients c and d? Justify your answer.*

$$\begin{cases} x_1+3x_2=f \\ cx_1+dx_2=g \end{cases}$$

解答. 如果 $d-3c\neq 0$，那么可把增广矩阵化为 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-3g+fd}{d-3c} \\ 0 & 1 & \frac{g-fc}{d-3c} \end{array}\right]$，得到解 $x_1=\frac{3g-fd}{d-3c}, x_2=\frac{g-fc}{d-3c}$.

如果 $d-3c=0$，且 $g\neq fc$，那么把增广矩阵化为 $d-3c\neq 0$，那么可把增广矩阵化为 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & f \\ 0 & 0 & g-fc \end{array}\right]$ 后，即可发现它无解.

此时你也可以发现如果 $d-3c=0$,且 $g=fc$,增广矩阵即为 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有无穷多解.

因此，为保证对一切 f, g 都有解，只有 $d-3c\neq 0$.

问题 5. *Suppose a, b, c and d are constants such that a is not zero and the system below is consistent for all possible values of f and g. What can you say about the numbers a, b, c, d? Justify your answer.*

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=f \\ cx_1+dx_2=g \end{cases}$$

解答. 类似前一问题，我们可以猜测条件是 $ad-bc\neq 0$，如果这一条件成立，我们可以把增广矩阵化为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-bg+fd}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{ag-fc}{ad-bc} \end{bmatrix}$，因而其有解.

而当是 $ad-bc=0$ 时，把增广矩阵的第二行乘上 a 再加上第一行的 $-c$ 倍得到 $\begin{bmatrix} a & b & f \\ 0 & 0 & ag-fc \end{bmatrix}$ 由于 $a\neq 0$，总可以找到 f,g 使得 $ag-fc\neq 0$，从而方程组无解.

问题 6. *Solve the linear system*

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4=0 \\ -2x_1+4x_2+5x_3-5x_4=3 \\ 3x_1-6x_2-6x_3+8x_4=2 \end{cases}$$

解答. 先写出增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$，用第一行消去第二行和第三行的第一列元素得到 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，发现它可进一步化简为 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，从而无解.