清华大学 数学作业纸

TSINGHUA UNIVERSITY

班级：计01　姓名：容逸朗　编号：2020010869　科目：概统　

19. 只对0张：$\frac{1}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$

只对2张：注意到必定有一张红色和一张黑色猜对，否则若猜对的两张同色，则剩余的两张也对，不符合只对两张的条件，故概率为 $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{3}$

全对：仅有一种可能，即 $\frac{1}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$

20. 若人不作区分，则同一站全部下车的概率为 $\frac{4}{\binom{18}{3}}=\frac{1}{204}$，每站都有人下车的概率为 $\frac{\binom{14}{3}}{\binom{18}{3}}=\frac{91}{204}$.

若区分人，则同一站下车概率为 $\frac{4}{4^{15}}=\frac{1}{4^{14}}$，每站都有人下车的概率为 $\frac{15!\binom{14}{3}}{4^{15}}$

21. (i) 书可分辨，堆有编号：$2^{10}-2=1022$ 种（减去两种堆为空的情况）

(ii) 书可分辨，堆无编号：$\frac{2^{10}-2}{2}=511$

(iii) 书不可分辨，堆有编号：9（一堆分别拿1~9本书）

(iv) 书不可分辨，堆无编号：5（分别为 1-9, 2-8, 3-7, 4-6, 5-5）.

25. 在标记的鱼中找出7条，同时找出未被标记的鱼93条，概率为 $\frac{\binom{100}{7}\binom{n-100}{93}}{\binom{n}{100}}$

28. 应用(3.3.9)，有 $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n-n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$，当 $k>n$ 时，$\binom{n}{k}=0$，故 $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^2$

1. 不妨设 X 是可数样品空间 Ω 上的随机变量，则对 $\forall\omega\in\Omega$，有 $\omega\to X(\omega)$

对于 $X+X$，有 $\omega\to X(\omega)+X(\omega)=2X(\omega)$，故 $X+X=2X$

同理，对于 $X-X$，有 $\omega\to X(\omega)-X(\omega)=0$，故 $X-X=0$.

2. $P(X=k)=\frac{1}{3}, k=1,2,3$；$P(Y=k)=\frac{1}{3}, k=1,2,3$；$P(Z=k)=\frac{1}{3}, k=1,2,3$.

故这三个随机变量有相同的概率分布.

$P(X+Y=k)=\frac{1}{3}, k=3,4,5$；$P(Y+Z=k)=\frac{1}{3}, k=3,4,5$；$P(Z+X=k)=\frac{1}{3}, k=3,4,5$.

3. $P(X+Y-Z=k)=\frac{1}{3}, k=0,2,4$；

$P(\sqrt{X^2+Y^2}\cdot Z)=\frac{1}{3}, k=\sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{20}$；

$P\left(\frac{Z}{|X-Y|}=3\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(\frac{Z}{|X-Y|}=1\right)=\frac{2}{3}$.

4. 不妨取 $P(\omega_1)=\frac{1}{10}, P(\omega_2)=\frac{1}{10}, P(\omega_3)=\frac{1}{5}, P(\omega_4)=\frac{1}{5}, P(\omega_5)=\frac{2}{5}$

此时取 $X(\omega_1)=1, X(\omega_2)=2, X(\omega_3)=3, X(\omega_4)=4, X(\omega_5)=5$ 和

$Y(\omega_1)=\pi, Y(\omega_2)=\sqrt{3}, Y(\omega_3)=\sqrt{2}, Y(\omega_4)=\sqrt{3}, Y(\omega_5)=\pi$ 满足条件.

$P(XY=k_1)=\frac{1}{10}, k_1=\pi \text{ or } 2\sqrt{3}$,

$P(XY=k_2)=\frac{1}{5}, k_2=3\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$

$P(XY=5\pi)=\frac{2}{5}$

11 对于 $x\leq 0$，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u}du=\frac{1}{2}e^{\lambda u}$

对于 $x>0$，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u}du+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda u}du$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}$.

记 $F_{|X|}(x)=P(|X|\leq x)$，那么当 $x\leq 0$ 时，$F_{|X|}(x)=0$

当 $x>0$ 时，$F_{|X|}(x)=P(|X|\leq x)=P(-x\leq X\leq x)=F_X(x)-F_X(-x)=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$

故 $f_0(u)=[F_{|X|}(x)]'=(1-e^{-\lambda x})'=\lambda e^{-\lambda x}$，$x>0$. 为 $|X|$ 的密度函数.

15. $\sum_{n=1}^{m}p_n=\sum_{n=1}^{m}cq^{n-1}\cdot p=cp\cdot\sum_{n=1}^{m}q^{n-1}=cp\cdot\frac{1-q^m}{1-q}=c\cdot(1-q)\cdot\frac{1-q^m}{1-q}=c\cdot(1-q^m)=1$，故 $c=\frac{1}{1-q^m}$