复变函数试题 （2021年12月30日, A卷，共10题，每题10分）

1. 求$min_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|$, 并求出取得最小模时$z$的取值范围及像$z^n+\alpha$的表达式. 这里$r>0$, $\alpha\in C$是常数，n 是正整数. (提示：分别就$|\alpha|\leq r^n$ 和$|\alpha|>r^n$ 进行讨论.)

2. 写出$\sin(x+iy)$的实部和虚部，并由此证明：方程$\sin(x+iy)=A+iB$有无穷多个解，这里x, y, A, $B\in R$, 且A, B是常数.

3. 设C_r是圆周：$|z|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处解析，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在原点的n阶导数的公式(Cauchy 高阶导数公式)，这里n是非负整数, 并由此证明：

(a). 若令$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(0)|\leq\frac{n!M(r)}{r^n}$; (5分)

(b). 若存在常数$M>0$，n是非负整数, 使得$|f(z)|\leq M\left(\sum_{k=0}^{n}|z|^k\right)$, $\forall z\in C$, 则$f(z)$为一次数不超过n的多项式. (5分)

4. 记$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$. 叙述幂级数$f(z)$的Abel定理的内容（2分）及收敛半径$(R>0)$的定义(2分）, 并分别给出具体例子（每例2分），说明存在幂级数使其在收敛圆周上(I) 处处发散；(II) 既有收敛的点，又有发散的点；(III) 处处收敛（以上例子均要给出级数的收敛半径的值及级数在收敛半径上收敛和发散的理由）.

5. 求复积分$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 5z^6}{z^n}dz$, 这里$n$是正整数.

6. 求复积分$I_1=\oint_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz$.

7. 求实积分$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, 这里$a>0$, $b>0$, $k>0$ 是常数.

8. 求实积分$I_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}$, 这里$r>0$是常数, n是正整数.

9. 定义$w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 这里a, b, c, d是实数且满足条件$ad-bc\neq 0$. 证明：$w(z)$将上半复平面$Im(z)>0$映成上半复平面$Im(w)>0$的充要条件是$ad-bc>0$. 这里$Im(z)$, $Im(w)$分别表示z, w的虚部.

10. 写出将单位圆盘$|z|<1$映到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式，并证明其满足不变式：

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$