数学实验 · 实验报告1

计算机系　计01　容逸朗　2020010869

1　3-5 利用数值积分计算π

1.1　算法设计

注意到 $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$ 。因此只需要计算函数 $y = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ，便可得到 π 的近似值。

1.2　程序

```
format long;

N = 100000;
tol = 1e-6;

% trapzoid
x = 0: 1 / N: 1;
y = myFun(x);

ans1 = trapz(x, y)
dif1 = abs(ans1 - pi)

% Simpson with equal distribution points
ans2 = simp(x, y)
dif2 = abs(ans2 - pi)

% Simpson
ans3 = quad(@myFun, 0, 1, tol)
dif3 = abs(ans3 - pi)

% Gauss-Lobatto
ans4 = quadl(@myFun, 0, 1, tol)
dif4 = abs(ans4 - pi)

function y = myFun(x)
    y= 4 * (1 - x .^ 2) .^ 0.5;
end
```

等距辛普森公式实现：

```
function y = simp(x0, y0)
```

```
n = length(x0);
m = length(y0);

if n ~= m || n < 2 || mod(n, 2) ~= 1
    y = NaN;
    return;
end

h = (max(x0) - min(x0)) / (n - 1);
y = y0(1) + y0(n);

for i = 2: 2: n - 1
    y = y + 4 * y0(i);
end

for i = 3: 2: n - 1
    y = y + 2 * y0(i);
end

y = y * h / 3;
```

1.3 计算结果

利用上述程序可以得到如下结果：（误差在 10^{-6} 以内）

方法	等距梯形公式	等距辛普森公式	自适应辛普森公式	自适应 **Gauss-Lobatto**
结果	3.141592616402	3.141592639067	3.141592008745	3.141592647722
误差	$3.71872 * 10^{-8}$	$1.45227 * 10^{-8}$	$6.44844 * 10^{-7}$	$5.86702 * 10^{-9}$

（梯形公式和等距辛普森公式的积分区间都被平均分为 100000 份）

1.4 结果分析

由结果知， Matlab 的自适应 Gauss-Lobatto 公式在计算数值积分时的误差较 Matlab 的自适应辛普森公式低。在区间等分份数相等的情况下，辛普森公式的计算误差较等距梯形公式的误差小。

1.5 结论

当误差在 10^{-6} 以内时，利用上述方法得到 π 的值是 3.141592 。

2 3-10 机翼剖面

2.1 算法设计

题目要求求出 x 座标每改变 0.1 时相应的 y 座标，并求出围成区域的面积。

从机翼剖面的数据中可见，相邻两个 x 座标的差至少为 1，为此，我们需要通过插值的方法分别计算机翼上下剖面的点的位置，然后通过数值方法来计算面积，其面积应为：

$$Area = \int_{y=y_1(x)} dx - \int_{y=y_2(x)} dx$$

2.2 程序

```
format long;

x0 = [0 3 5 7 9 11 12 13 14 15];
y1 = [0 1.8 2.2 2.7 3.0 3.1 2.9 2.5 2.0 1.6];
y2 = [0 1.2 1.7 2.0 2.1 2.0 1.8 1.2 1.0 1.6];

x = 0: 0.1: 15;

% Lagrange Interpolation
y1_lagr = lagr(x0, y1, x);
y2_lagr = lagr(x0, y2, x);

subplot(2, 2, 1);
plot(x0, y1, 'bo', x0, y2, 'bo', x, y1_lagr, '-', x, y2_lagr, '-');
title("Lagrange Interpolation");

% Linear Interpolation
y1_linear = interp1(x0, y1, x);
y2_linear = interp1(x0, y2, x);

subplot(2, 2, 2);
plot(x0, y1, 'bo', x0, y2, 'bo', x, y1_linear, '-', x, y2_linear, '-');
title("Linear Interpolation");

% Spline Interpolation
y1_spline = spline(x0, y1, x);
y2_spline = spline(x0, y2, x);

subplot(2, 2, 3);
plot(x0, y1, 'bo', x0, y2, 'bo', x, y1_spline, '-', x, y2_spline, '-');
title("Spline Interpolation");

% area with trapzoid
area_lagr_trapz = trapz(x, y1_lagr) - trapz(x, y2_lagr)
area_linear_trapz = trapz(x, y1_linear) - trapz(x, y2_linear)
area_spline_trapz = trapz(x, y1_spline) - trapz(x, y2_spline)

% area with simpson
area_lagr_simp = simp(x, y1_lagr) - simp(x, y2_lagr)
area_linear_simp = simp(x, y1_linear) - simp(x, y2_linear)
```

```
area_spline_simp = simp(x, y1_spline) - simp(x, y2_spline)
```

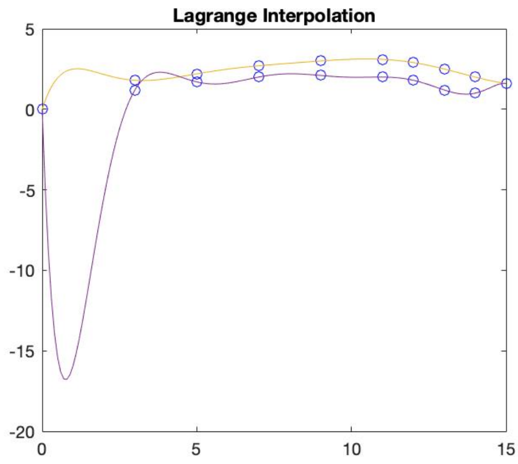
其中拉格朗日插值计算程序如下:

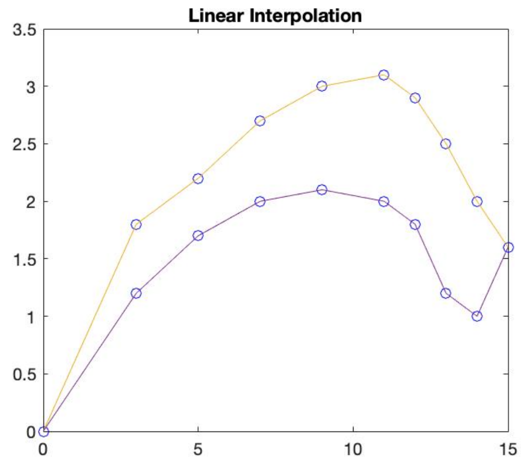
```
function y = lagr (x0, y0, x)
n = length(x);
m = length(x0);

for i = 1: n
    s = 0;
    for j = 1: m
        tmp = 1;
        for k = 1: m
            if k ~= j
                tmp = tmp * (x(i) - x0(k)) / (x0(j) - x0(k));
            end
        end
        s = s + tmp * y0(j);
    end
    y(i) = s;
end
```

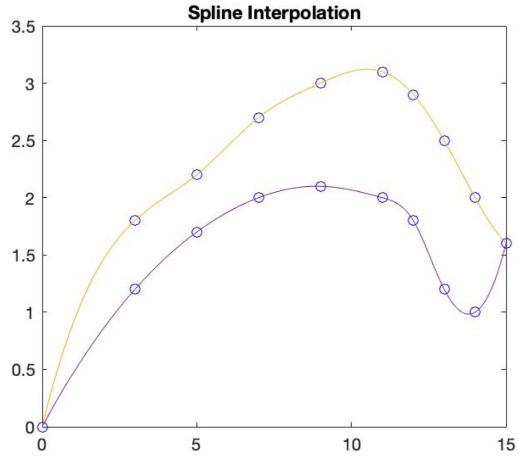
等距辛普森公式的实现同 1.2 小节。

2.3 计算结果

插值结果（图示）:







面积计算结果：

插值方式 / 积分方法	梯形公式	辛普森公式
拉格朗日插值	40.30436	40.35531
分段线性插值	10.75000	10.75000
三次样条插值	11.34439	11.34602

2.4 结果分析

从上图可见，拉格朗日插值的振动较大，特别是 y_2 的线段在 $x \in [0, 2]$ 之间出现了不寻常的振动，同时存在部分区间内 y_2 的值比 y_1 的值更大的情况，这都使得实际加工不能采用拉格朗日插值法生成的点。

分段线性插值与三次样条插值的结果相近，但从图中可以看见三次样条插值生成的线段更为平滑，因此更为适合作为机翼使用。

2.5 结论

实际加工可采用三次样条插值的结果，这时的面积约为 11.346 。

3 3-12 过桥车辆总数

3.1 问题分析

题目给出了某些时刻的车流量，要求通过这些数据计算一整天通过的车流量，为此可以通过插值的方法，补充其他时刻的数据。

3.2 模型假设

车流量表示为时间 t （以分钟计）的函数 $f(t)$ ，其中 $f(t)$ 表示 $[t, t+1)$ 时刻内通过的车辆总数。

为方便计算，这里假设 $f(t)$ 是连续且非负的函数。

3.3 模型建立

根据 3.2 的假设，此时题目所求的车流量公式应为：

$$C = \int_0^{1439} f(t)\,dt$$

3.4 算法设计

首先，我们需要假设 $f(t)$ 是分段线性的，那么可以通过三次样条插值计算出非采样点的车流量数据。

然后，我们需要假设 $f(t)$ 是光滑的，这时可以利用梯形公式得到线段的积分结果。

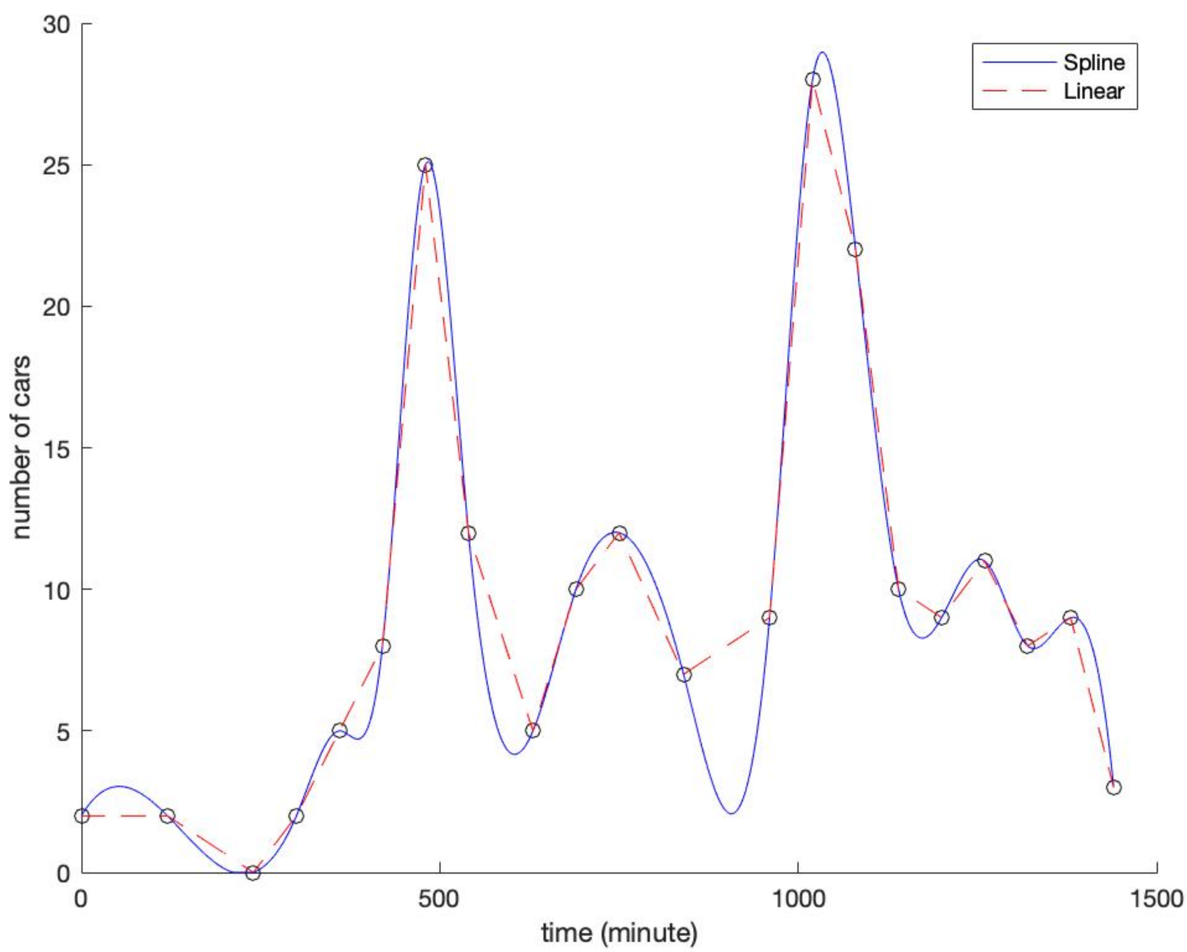
3.5 程序

```
format long;

% change hour to minute
x0 = [0 2 4 5 6 7 8 9 10.5 11.5 12.5 14 16 17 18 19 20 21 22 23 24] * 60;
y0 = [2 2 0 2 5 8 25 12 5 10 12 7 9 28 22 10 9 11 8 9 3];

% linear and spline interpolation
x = 0 : 1440;
y_linear = interp1(x0, y0, x);
y_spline = spline(x0, y0, x);

% non-negative function
x_linear = max(0, y_linear);
y_spline = max(0, y_spline);

% area
area_linear = trapz(x, y_linear)
area_spline = round(trapz(x, y_spline))

```

```
hold on;
p1 = plot(x0, y0, "ko");
p2 = plot(x, y_spline, "b-");
p3 = plot(x, y_linear, "r--");

xlabel("time (minute)");
ylabel("number of cars");
legend([p2, p3], "Spline", "Linear");
hold off;
```

3.6 计算结果

插值结果（图示）：



计算结果：

插值方法	分段线性插值	三次样条插值
车流量	12990	12670

3.7 结果数学分析

从图中可见，分段线性插值和三次样条插值的结论是相近的，差距较大的地方在 $t \in [900, 960]$ 处，导致这种结果的原因在于此区域左右侧出现了差距较大的数据，三次样条插值为了保持线段的光滑性，在此区间内会出现不寻常的凹陷，而分段线性插值则没有。

3.8 结果实际意义

从图中可以看到有两个车流量较大的时段（500，早上八点；1000，下午五点）位于早高峰和晚高峰的位置上，而中午十二点左右和晚上九点的车流量比其他非高峰时段的车流量要多，这对应着午饭、晚饭的时间。

凌晨四点左右（250）的时段车流量最少。

奇怪的地方在于下午三时半（930）的位置，（三次样条插值的情况下）这个时间的车流量比凌晨一点的还少，是不合理的，而分段线性插值的结果则较为理想。

因此整体来说，结论符合日常生活思维，但细节有待改善。

3.9 结论

每天通过车流量约为 12830 辆。