*1. 设图G中，一个点代表一座工厂，每条边代表相邻两点（工厂）有联系。

若每座工厂只与其他三座工厂有联系（即每点度为3）此时图的总度数为 $9\times 3=27$ 不为偶数，与图的性质矛盾。

若只有4座工厂与偶数个厂有联系，那么有 $9-4=5$ 个厂与奇数个厂有联系，此时图的总度数 $4\times$偶 $+5\times$奇 为奇数，与图的性质矛盾。

2. 若存在孤立节点，那么我们可以去掉此点，假定剩下的点组成完全图 K_{n-1}，此时总边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，与已知的 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 矛盾，故G不存在孤立节点。

3. 注意到此图为完全图，则总点数为n，那么有

$$d^+(v_i)+d^-(v_i)=n-1 \quad (v_i\in V)$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{v_i\in V}(d^+(v_i))^2 &= \sum_{v_i\in V}\left[(n-1)-d^-(v_i)\right]^2\\ &= \sum_{v_i\in V}\left[(n-1)^2-2(n-1)d^-(v_i)+(d^-(v_i))^2\right]\\ &= n(n-1)^2-2(n-1)\sum_{v_i\in V}d^-(v_i)+\sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2\\ &= n(n-1)^2-2(n-1)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+\sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2\\ &= \sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2\end{aligned}$$

（注意到 $\sum_{v_i\in V}d^-(v_i)$ 与图的总边数相等）

*4. 令 (a,b,c) 代表 8升瓶、5升瓶、3升瓶中分别装有 a升，b升，c升 的水，题意转化为 $a+b+c=8$，并使 $(8,0,0)\to(4,4,0)$ 的方法。

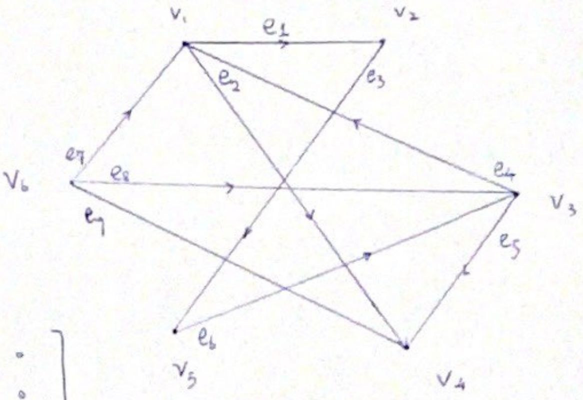
$$(\overset{\curvearrowright}{8,0},0)\to(3,\overset{\curvearrowright}{5,0})\to(\overset{\curvearrowleft}{3,2,3})\to(6,\overset{\curvearrowright}{2,0})\to(\overset{\curvearrowright}{6,0},2)\to(1,\overset{\curvearrowright}{5,2})\to(\overset{\curvearrowleft}{1,4,3})$$

$$\to(4,4,0)$$

班级：计01 姓名：容迭朗 编号：2020010869 科目：离散数学Ⅱ 第 2 页

8. 邻接矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关联矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

边列表：

A：(1 1 2 3 3 5 6 6 6)

B：(2 4 5 1 4 3 1 3 4)

正向表：

A：(1 3 4 6 6 7 10)

B：(2 4 5 1 4 3 1 3 4)