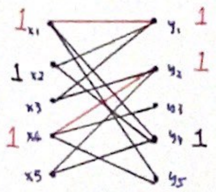
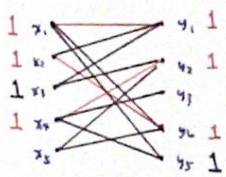
1. 

(1) $U=\{x_2\}$ $V=\varnothing$

$T(U)=\{y_1,y_4\}$，$y_4\in T(U)-V$，且未标记

增广路 $P=(x_2,y_4)$

$M=\{(x_1,y_1)(x_4,y_2),(x_2,y_4)\}$



(2) $U=\{x_3\}$ $V=\varnothing$

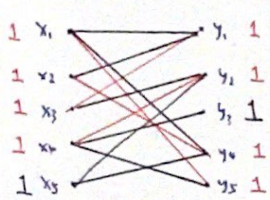
$T(U)=\{y_1,y_2\}$，$y_1\in T(U)-V$

$U=\{x_3,x_1\}$，$V=\{y_1\}$

$T(U)=\{y_1,y_2,y_4,y_5\}$，$y_5\in T(U)-V$ 且未标记

增广路 $P=(x_3,y_1,x_1,y_5)$

$M=\{(x_4,y_2),(x_2,y_4),(x_3,y_1)(x_1,y_5)\}$



(3) $U=\{x_5\}$，$V=\varnothing$

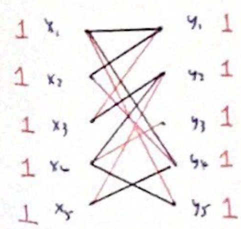
$T(U)=\{y_2,y_4\}$，$y_2\in T(U)-V$

$U=\{x_5,x_4\}$ $V=\{y_2\}$

$T(U)=\{y_2,y_4,y_3,y_5\}$，$y_3\in T(U)-V$ 且未标记.

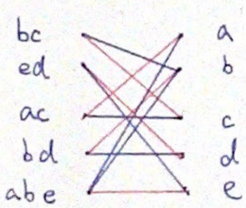
增广路 $P=\{x_5,y_2,x_4,y_3)$

$M=\{(x_2,y_4),(x_3,y_1)(x_1,y_5)(x_5,y_2),(x_4,y_3)\}$



X中所有结点均有标记，M为最大匹配.

2. 本题可转化为求 bc, ed, ac, bd, abe 与 a, b, c, d, e 的完美匹配.



左图是其中一种完美匹配（红线为其匹配），即

$M=\{(bc,c),(ed,d),(ac,a),(bd,b),(abe,e)\}$

3. 若树存在两个(或以上)的完美匹配，不妨设 M_1 和 M_2 为其中两个不同的完美匹配，显然 $M_1\oplus M_2\neq\varnothing$，记 $M_1-M_2=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\cdots(x_k,y_k)\}$，$M_2-M_1=\{(x_1',y_1'),(x_2',y_2')\cdots(x_k',y_k')\}$，则有 $x_1',x_2'\cdots,x_k'$ 为 $x_1,x_2\cdots,x_k$ 的一个不同排序，$y_1',y_2'\cdots,y_k'$ 则为 $y_1,y_2,\cdots y_k$ 的不同排序（因为 $|X|=|Y|$，减去相同的边后剩下的点相同），故 $x_1,x_2,\dots x_k$，$y_1\cdots,y_k$ 在 $M_1\oplus M_2$ 中出现了两次，也就是说以 $M_1\oplus M_2$ 为边组成的图存在环，又因为树不存在环，矛盾.

因此树最多存在一个完美匹配.

8.
$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c}8\\10\\9\\11\\9\\7\end{array} & \begin{bmatrix}5&4&5&3&5&8\\7&3&6&6&6&10\\5&6&8&4&2&9\\11&7&6&8&3&2\\8&9&5&4&6&7\\7&4&3&2&4&5\end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccc}0&0&0&0&0&0\end{array}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{c}8\\10\\9\\11\\9\\7\end{array} & \begin{bmatrix}3&4&3&5&3&0\\3&7&4&4&4&0\\4&3&1&5&7&0\\0&4&5&3&8&9\\1&0&4&5&3&2\\0&3&4&5&3&2\end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccc}0&0&0&0&0&0\end{array}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{c}7\\9\\8\\10\\9\\6\end{array} & \begin{bmatrix}3&3&2&4&2&0\\3&6&3&3&3&0\\4&2&0&4&6&0\\0&3&4&2&7&9\\2&0&4&5&3&3\\0&2&3&4&2&2\end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccc}1&0&0&0&0&1\end{array}\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{c}5\\7\\6\\8\\7\\4\end{array} & \begin{bmatrix}3&3&2&2&0&0\\3&6&3&1&1&0\\4&2&0&2&4&0\\0&3&4&0&5&9\\2&0&4&3&1&3\\0&2&3&2&0&2\end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccc}3&2&2&0&0&3\end{array}\end{array}$$

此时得到其中一个方案：$\{C_{15}, C_{26}, C_{33}, C_{44}, C_{52}, C_{61}\}$

$\sum(l(x_i)+l(y_j)) = 47$.

5. 记 A_0 为满足 $\delta(A_0)=\max\limits_{A\subseteq X}\delta(A)$ 的集合，

(1) 先证 $G'(X-A_0, \Gamma(X)-\Gamma(A_0), E_0)$ 中存在完全匹配。

对于任意 $B\subseteq X-A_0$，必有 $|\Gamma(B)|\geq|B|$，否则，若存在 $|B|>|\Gamma(B)|$，则可以把不能匹配的点加入 A_0，这与 $\delta(A_0)=\max\limits_{A\subseteq X}\delta(A)$ 矛盾，故 $|\Gamma(B)|\geq|B|$，由 Hall 定理知 G' 存在完全匹配，大小 $|M'|=|X-A_0|=|X|-|A_0|$

(2) 再证 $G''(A_0, \Gamma(A_0), E_0')$ 中存在 $|M''|=|\Gamma(A_0)|$ 的匹配

对 $\forall B\subseteq\Gamma(A_0)$，设 $\Gamma_1(B)$ 为 B 在 A_0 中的相邻点集合。

由于 $\delta(A_0)=\max\limits_{A\subseteq X}\delta(A)$，故有 $\delta(A_0)\geq\delta(A_0-\Gamma_1(B))$

注意到 $\Gamma(A_0-\Gamma_1(B))\subseteq\Gamma(A_0)-B \Rightarrow |\Gamma(A_0-\Gamma_1(B))|\leq|\Gamma(A_0)|-|B|$ ①

又因为 $\delta(A_0)\geq\delta(A_0-\Gamma_1(B)) \Rightarrow |A_0|-|\Gamma(A_0)|\geq(|A_0|-|\Gamma_1(B)|)-|\Gamma(A_0-\Gamma_1(B))|$

(结合 ①式得) $|A_0|-|\Gamma(A_0)|\geq|A_0|-|\Gamma_1(B)|-|\Gamma(A_0)|+|B|$

$\Rightarrow |\Gamma_1(B)|\geq|B|$，也就是说，对任意 $B\subseteq\Gamma(A_0)$ 都存在到 A_0 的完全匹配.

对 $\Gamma(A_0)$ 而言，存在大小 $|M''|=|\Gamma(A_0)|$ 的匹配

结合 (1)(2) 知 G 中存在大小为 $|X|-|A_0|+|\Gamma(A_0)|=|X|-\delta(A_0)=|X|-\delta(G)$ 的匹配.

由于 A_0 中至少存在 $\delta(G)$ 个点不能匹配，故 G 的最大匹配不大于 $|X|-\delta(G)$

所以 G 的最大匹配大小为 $|X|-\delta(G)$

班级：计01　　姓名：[illegible]　　编号：2020010869　　科目：离散　　

7. 对原题进行转换，对于任意矩阵 M，若元素 $m_{ij}=1$，则对应行列 $d(x_i)$ 及 $d(y_j)$ 都加一。
因此原题可变为，给出图 $G(X, Y, E)$，对 X 中任意元素，其度 $d(x_i)=k$；对 Y 中任意元素 $d(y_j)\le k$。存在 k 个完全匹配，且互相无相同边。

(1) $k=1$ 时，取 $P_1=A$ 即为所求。

(2) 对任意 $k>1$，由于 $d(x_i)=k$，$d(y_i)\le k$，故必能找到一组完全匹配，此时，若 Y 中存在 $d(y_j)=k$ 的未匹配结点，若能找到一个点 x_0 与 y_j 相连且 x_0 与 y_0（$d(y_0)<k$）相连，则断开 (x_0, y_0)，连接 (x_0, y_j)，否则找到一个点 x_1 与 y_0 相连，且 x_1 与 y_1 相连（$d(y_1)<k$），此时断开 (x_1, y_1)，连接 (x_1, y_j)，若不能，则继续搜索（必能找到一个 x_i，满足 $d(y_i)<k$，否则 $|Y|$ 的总度数比 $|X|$ 多 k，与 $|X|=|Y|$ 矛盾，每次操作后，Y 中度为 k 的结点数少 1，有限次操作后，Y 中任意结点的度均小于 k，问题规模降为 $k-1$，不断进行 (2)，问题变为 (1)，原题成立。