数学实验 · 实验报告4

计算机系　计01　容逸朗　2020010869

1　6-3 按揭贷款

1.1　问题分析

首先需要通过数学方法构造按揭模型，然后利用题干给出的数据计算结果即可。

1.2　模型假设与建立

假设借款金额为 a 元，首付金额 b 元，每单位时间还款金额为 m 元，借期为 t 个单位时间，每个单位时间的利息为 r 。记 x_k 为第 k 个单位时间后剩余的借款数目，那么可列方程式如下：

$$\begin{gathered} x_{k+1} = (1+r)x_k - m, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \\ x_0 = a - b \\ x_t = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

利用 (1) 的前两条式子解得第 k 个单位时间剩余的借款数目为：

$$x_k = (1+r)^k(a-b) - m \cdot \sum_{i=0}^{k-1}(1+r)^i, \quad k = 1, 2, \dots, t \tag{2}$$

化简 (2) 可得：

$$x_k = \left(a - b - \frac{m}{r}\right)(1+r)^k + \frac{m}{r}, \quad k = 1, 2, \dots, t \tag{3}$$

整理方程并代入 $x_t = 0$ 得：

$$r(a-b)(1+r)^t - m(1+r)^t + m = 0 \tag{4}$$

1.3　算法设计

首先利用 `fplot` 画出函数的图像，判断根的左右界位置，将所得边界条件代入 `fzero` 中求解便可。

1.4　程序

```
format long;

a = 200000;
b = 50000;
m = 1000;
t = 15 * 12;
eps = 1e-10;

% 画图
tmp = 0.003;
hold on
```

```
axis([0 tmp -1 1]);
fplot(@(r)calmoney(r, a, b, m, t), [0, tmp]);
plot([0, tmp], [0, 0])
hold off

% 解方程
[x, fv, ef, out] = fzero(@calmoney, [0.0015, 0.0025], [], a, b, m, t);

% 参数分别为利率（未知）、本金、首付、月供、还款期数
function y = calmoney(r, a, b, m, t)
y = r * (a - b) * (1 + r) ^ t - m * (1 + r) ^ t + m;
end
```

1.5 计算结果

代入题干给出的数据：$a = 200000, b = 50000, m = 1000, t = 180$ ，得到函数的图像如下：

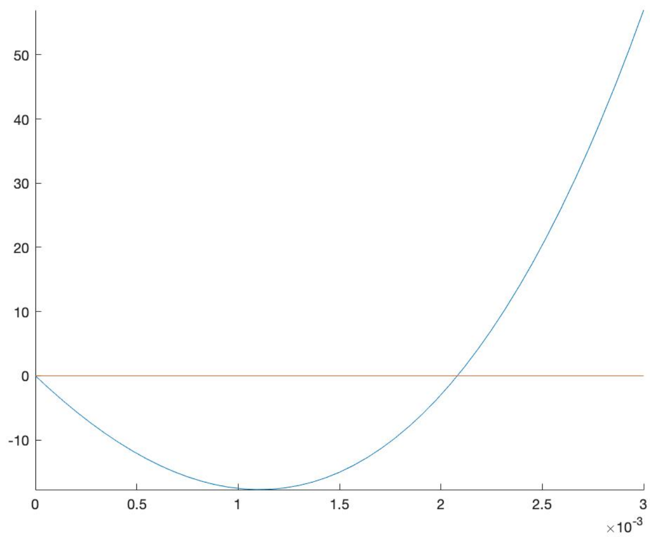

图1 利率–还款比例图

由此可知，根的区间大约在 $[0.0015, 0.0025]$ 之间，利用 `fzero` 得到月利率为 0.20812% ；

对于问题 2 的第一家银行，可以用 $a = 500000, b = 0, m = 4500, t = 15 \times 12$ 调用上面的程序，得到：

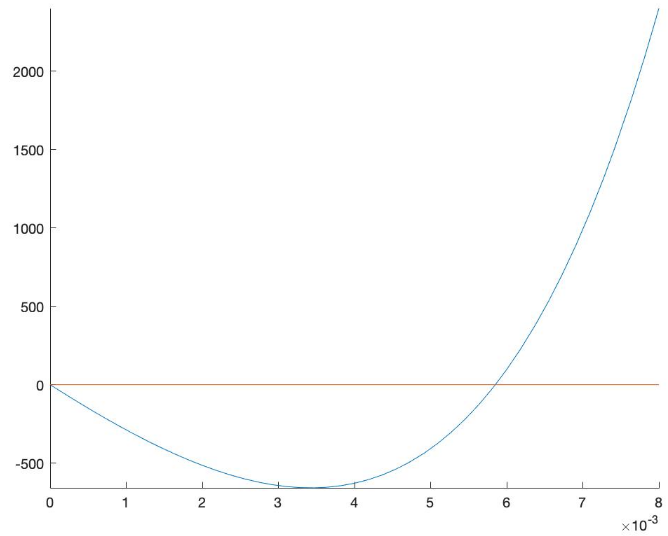

图2　银行一的利率–还款比例图

代入区间 $[0.005, 0.007]$ 解得，第一家银行的月利率为 0.58508% ，换算年利率为 7.0210% ；

再以 $a = 500000, b = 0, m = 45000, t = 20$ 调用上面的程序，得到：

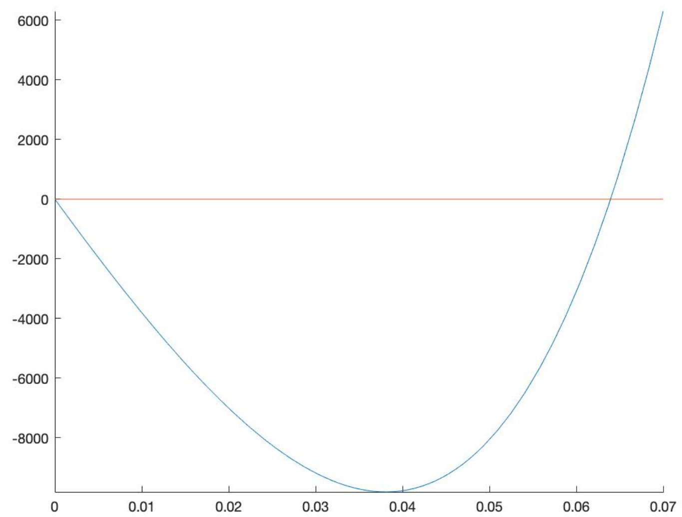

图3　银行二的利率–还款比例图

代入区间 $[0.006, 0.008]$ 解得，第二家银行的年利率为 6.3949% ，由此可知第二家银行利率较优惠。（虽然利率较低，但第二家银行的借期较长，导致总还款额 $45000 \times 20 = 900000$ 比第一家银行的 $4500 \times 15 \times 12 = 810000$ 来得更高）

1.6　结论

1. 小张夫妇的贷款月利率为 0.20812% ；
2. 单以利率而言，第二家银行的年利率为 6.3949% 较第一家的 7.0210% 更优，但第二家银行总还款额会比第一家银行来得高。

2 6-6 共沸混合物

2.1 问题分析

根据课上的例题，我们不难建立模型，然后根据给定的数据找出解便可。

2.2 模型假设与建立

设 x_i 为第 i 种物质占比，T 为温度，P 为压强（单位 mmHg）。已知参数 a_i, b_i, c_i 与交互作用矩阵 Q，则问题满足以下方程组：

$$x_i\left(\frac{b_i}{T+c_i}+\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right)-1-a_i+\ln P\right)=0 \tag{5}$$

欲求此方程组的解，需要加上另外一个条件（物质占比的和为 1 ），其等式为：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1 \tag{6}$$

利用此式做如下替换： $x_n=1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ ，此时 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, T$ 共 n 个未知数恰好组成方程组。

2.3 算法设计

首先根据模型列出对应的函数，然后利用 `fsolve` 功能解方程组，最后尝试四种物质的不同组合（若只有两种物质，则简单地设对应值为 0.5 ，三种则为 0.333 ，如此类推）并适当调整温度（由低至高尝试，一般而言取 $50-100$ 之间的数字即可），从而得到尽可能多的解。

2.4 程序

```
format short;

% 常数
a = [18.607, 15.841, 20.443, 19.293];
b = [3643.31, 2755.64, 4628.96, 4117.07];
c = [239.73, 219.16, 252.64, 227.44];
Q = [1, 0.192, 2.169, 1.611;
     0.316, 1, 0.477, 0.524;
     0.377, 0.360, 1, 0.296;
     0.524, 0.282, 2.065, 1];
P = 760;
n = 4;

% 初始值
XT0 = [.5, .5, 0., 50];
[XT, Y] = fsolve(@chem, XT0, [], n, a, b, c, Q, P);

function y = chem(XT, n, a, b, c, Q, P)
x(n) = 1;

```

```
for i = 1: n - 1
    x(i) = XT(i);
    x(n) = x(n) - x(i);
end

T = XT(n);
p = log(P);

for i = 1: n
    d(i) = x * Q(i, 1: n)';
    dd(i) = x(i) / d(i);
end

for i = 1: n
    y(i) = x(i) * (b(i) / (T + c(i)) + log(x * Q(i, 1: n)') + ...
        dd * Q(1: n, i) - a(i) - 1 + p);
end

end
```

2.5 计算结果

下表展示了不同初始值给出的（不同）结果，其中 x_i 是 i 在共沸混合物中的占比，T 是温度，单位为 $^{\circ}C$ 。

初始值	x_1	x_2	x_3	x_4	T
$(0, 0, 0, 100)$	0.00	0.00	0.00	100.00	97.77
$(0, 0, 1, 80)$	0.00	0.00	100.00	0.00	82.56
$(0, 1, 0, 100)$	0.00	100.00	0.00	0.00	80.12
$(1, 0, 0, 80)$	100.00	0.00	0.00	0.00	64.55
$(0.5, 0.5, 0, 50)$	62.47	37.53	0.00	0.00	58.14
$(0, 0.5, 0.5, 60)$	0.00	58.58	41.42	0.00	71.97
$(0, 0.5, 0, 80)$	0.00	78.03	0.00	21.97	76.96

又因为共沸混合物应由至少两种物质构成，因此可行的解只有三种，如下所示：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 62.47\%, \quad & x_2 &= 37.53\%, \quad & T &= 58.14^{\circ}C \\
x_2 &= 58.58\%, \quad & x_3 &= 41.42\%, \quad & T &= 71.97^{\circ}C \\
x_2 &= 78.03\%, \quad & x_4 &= 21.97\%, \quad & T &= 76.96^{\circ}C
\end{aligned}
$$

2.6 结论

题目给出的四种物质不可能在 $760mmHg$ 下同时存在，所有可行解已在 2.5 节中给出，这里不再赘述。

3 6-8 商品价格

3.1 问题分析

题目要求根据模型（已给出），找出商品价格变化规律，同时观察是否有混沌现象出现。

3.2 模型假设与建立

利用题干给出的所有方程，容易得到生产方期望价格 $q(t)$ 的递推方程：

$$q(t+1) = \frac{r}{d}(c - arctan(\mu \cdot q(t)) + (1-r) \cdot q(t) \tag{7}$$

其中，c, d 为需求模型中的参数（实验中会调整 c 的大小，而 d 则作常数），r 是价格调整时的系数（也是常数），$q(t)$ 表示 t 个单位时间时生产方期望的价格。

3.3 算法设计

利用课件给出的 `chaos` 函数找到分岔点的大概分布位置，然后调整递归区间找到更多的分岔点，最后通过这些分岔点找出不同收敛情况的 c ，然后画出对应的图像验证分岔点的正确性。

3.4 程序

3.4.1 主程序

```
format short;

% 题干常数
u = 4.8;
d = 0.25;
r = 0.3;

% 画出分岔图
chaos(@(x, c)myIter(x, c, u, d, r), 0.5, [-2, 2, 0.001], [1600, 1615]);
xlabel("c")
ylabel("q(t),t\rightarrow\infty")

% 画图参数
tmp_c = [1.5 1 0.92 0.9 0.896 0.8945];
m = 6;
n = 50;

% 对不同的 c 采样
for j = 1: m
    f = 0.01;
    % 计算不同时间的价格取值
    for i = 1: n
        f(i + 1) = myIter(f(i), tmp_c(j), u, d, r);
    end
    s(:, j) = f';
```

```
end

% 绘图
k = (0: n)';
for j = 1: m
    subplot(2, 3, j);
    plot(k, s(:, j));
    title("c=" + string(tmp_c(j)))
end

function y = myIter(x, c, u, d, r)
y = r * (c - atan(u * x)) / d + (1 - r) * x;
end
```

3.4.2 chaos.m

```
function chaos(iter_fun, x0, r, n)
kr = 0;
for rr = r(1): r(3): r(2)
    kr = kr + 1;
    y(kr, 1) = feval(iter_fun, x0, rr);
    for i = 2: n(2)
        y(kr, i) = feval(iter_fun, y(kr, i - 1), rr);
    end
end
plot([r(1): r(3): r(2)], y(:, n(1) + 1: n(2)), 'k.');
```

3.5 计算结果及分析

下图给出了出现混沌现象的位置：

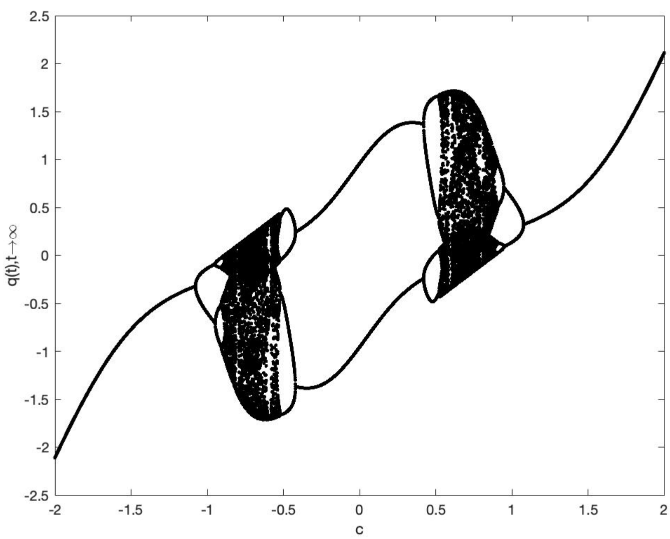

图4 方程解的整体混沌现象

根据 3.2 小节的讨论知，c 不应该为负数，为此我们只需讨论 $c \geq 0$ 的情况。

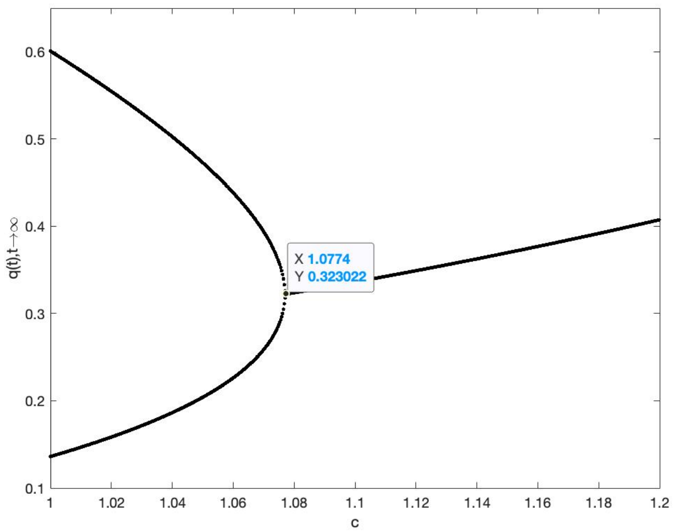

图5 分岔点 1

从上图可知，第一个分岔点落在 $b_1 = 1.0774$ 的地方。

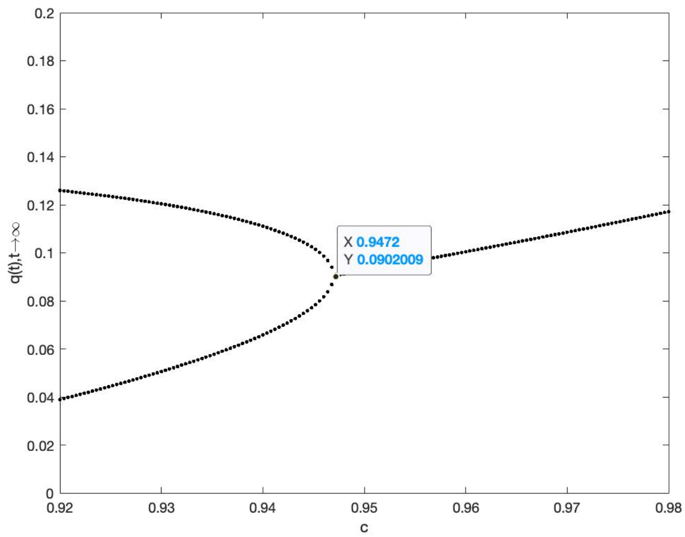

图6 分岔点 2

从图 6 可知第二个分岔点落在 $b_2 = 0.9472$ 的地方。

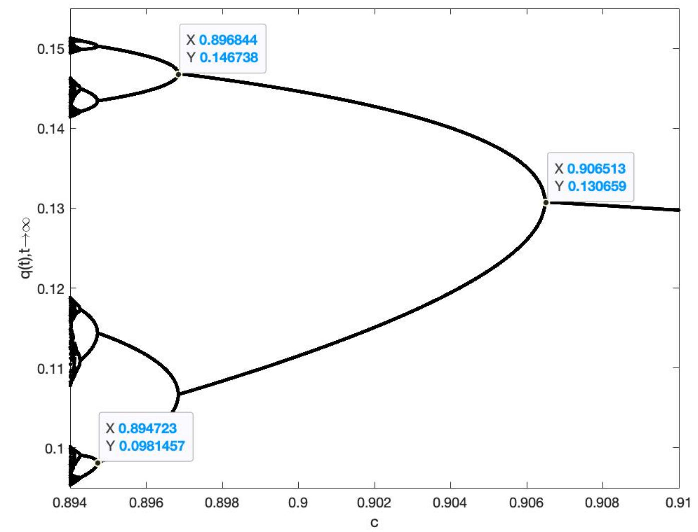

图7　分岔点 3，4，5

从图 7 可见，第三、四、五个分岔点分别落在 $b_3 = 0.906513, b_4 = 0.896844, b_5 = 0.894723$ 的地方。

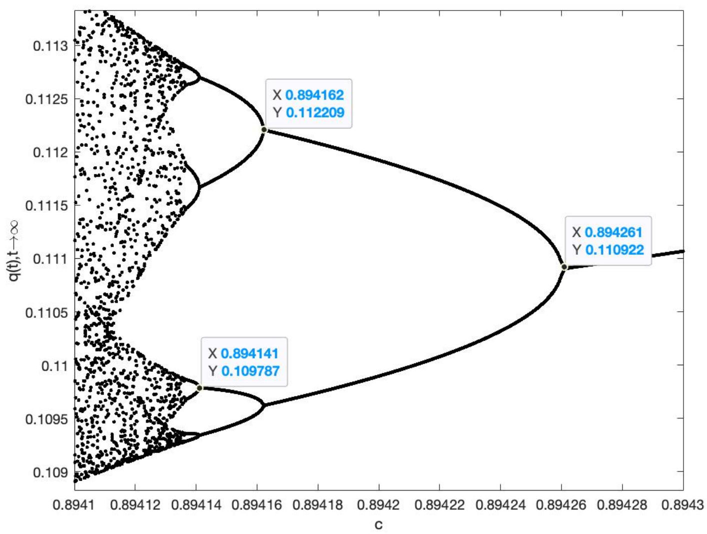

图8　分岔点 6，7，8

从图 8 可见，第六、七、八个分岔点分别落在 $b_6 = 0.894261, b_7 = 0.894162, b_8 = 0.894141$ 的地方。

根据这些分岔点数据可以选择不同的 c ，画出对应的图像：

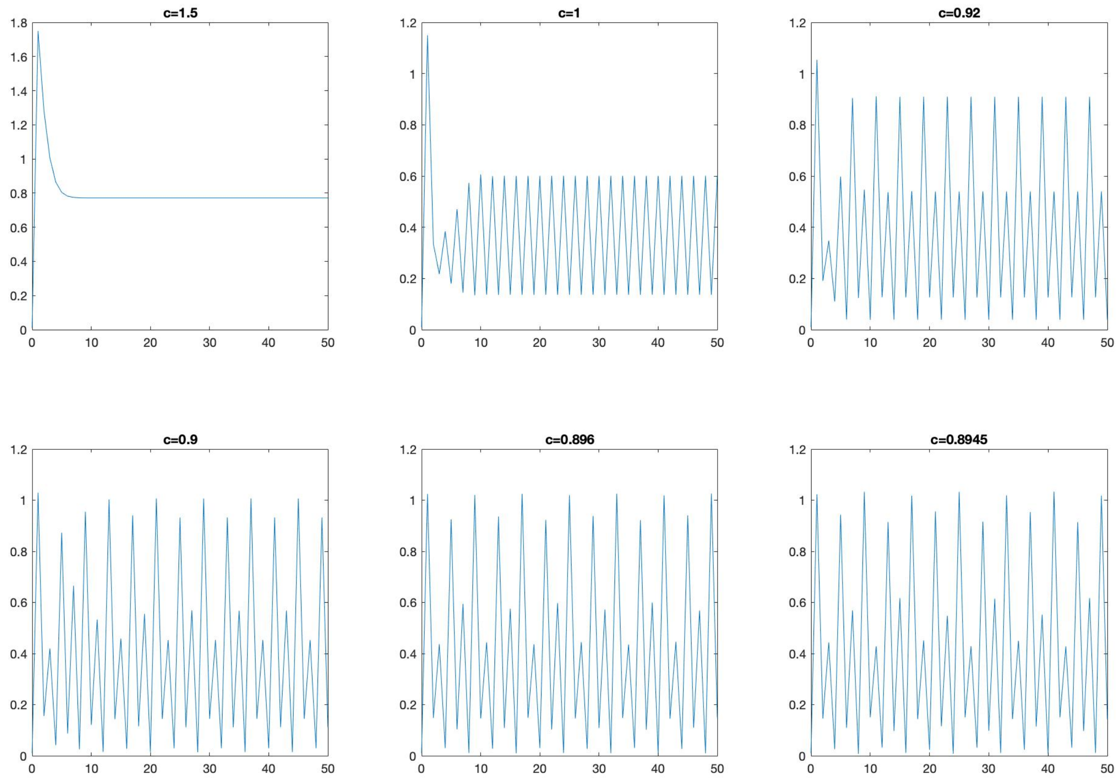

图9　不同初值的计算结果

上图中 c 由大至小对应的图像分别有：0 （收敛），$1, 2, 4, 8, 16$ 个收敛子列，这说明了分岔点的正确性。

最后讨论分岔点的极限，不妨记 B_i 如下：

$$B_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+2} - b_{i+1}} \tag{8}$$

结合上面的分岔点数据，不难得到：

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
值	3.20004	4.20798	4.55870	4.59091	4.66667

由此可以看出 B_i 确实在向 4.6692 （*Feigenbaum* 常数）趋近，因此这是符合 *Feigenbaum* 规律的。

3.6　结论

1. 递推方程随着参数 c 的减小而出现更多分岔（价格波动大），在 $c < 0.895$ 时已经出现混沌现象。
2. 分岔点的极限趋势符合 *Feigenbaum* 规律。