11.105. X 满足二项式分布，故 $f(x|\theta)=\binom{n}{x}\cdot\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$，$\theta\in(0,1)$

先验分布 $\pi(\theta)=4\theta^3$

故 (X,θ) 的联合密度函数 $h(x,\theta)=f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)=4\binom{n}{x}\cdot\theta^{x+3}(1-\theta)^{n-x}$

因此，后验分布的密度函数 $\pi(\theta|x)=\dfrac{h(x,\theta)}{\int h(x,\theta)d\theta}=\dfrac{4\binom{n}{x}\theta^{x+3}(1-\theta)^{n-x}}{4\binom{n}{x}\int_0^1\theta^{x+3}(1-\theta)^{n-x}d\theta}=\dfrac{\theta^{x+3}(1-\theta)^{n-x}}{B(x+4,n-x+1)}$

$(\theta\in(0,1))$

11.106 随机变量服从二项式分布，即 $f(x|\theta)=\binom{10}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{10-x}$

先验分布 $\pi(\theta)=1$

联合密度函数 $h(x,\theta)=f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)=\binom{10}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{10-x}$

由此知后验分布的密度函数 $\pi(\theta|x)=\dfrac{h(x,\theta)}{\int h(x,\theta)d\theta}=\dfrac{\binom{10}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{10-x}}{\binom{10}{x}\int_0^1\theta^{x}(1-\theta)^{10-x}dx}=\dfrac{\theta^{x}(1-\theta)^{10-x}}{B(x+1,11-x)}$，$\theta\in(0,1)$

令 $x=2$，有 $\pi(\theta|x)=\dfrac{\theta^2(1-\theta)^8}{B(3,9)}$

11.109 设 $X_1,X_2\cdots X_n$ 为 n 个样本，由于随机变量服从泊松分布，故：

$$f(x|\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}=e^{-\lambda n}\cdot\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$$

由因为先验分布满足Gamma分布，故 $\pi(\lambda)=\dfrac{\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}$，$\lambda>0$

因此，$h(x,\lambda)=f(x|\lambda)\pi(\lambda)=\dfrac{e^{-\lambda(n\beta+1)/\beta}\cdot\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{x_1!x_2!\cdots x_n!\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}$

故 $\pi(\lambda|x)=\dfrac{h(x,\lambda)}{\int h(x,\lambda)d\lambda}=\dfrac{e^{-\lambda(n\beta+1)/\beta}\cdot\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{\int_0^{\infty}e^{-\lambda(n\beta+1)/\beta}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}d\lambda}=\dfrac{e^{-\lambda\cdot\frac{n\beta+1}{\beta}}\cdot\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{\left(\frac{\beta}{n\beta+1}\right)^{n\bar{x}+\alpha}\Gamma(n\bar{x}+\alpha)}$，$\lambda>0$

令 $\alpha=2,\beta=5,\bar{x}=14$，有 $\pi(\lambda|x)=\dfrac{e^{-\lambda\cdot\frac{6}{5}}\lambda^{15}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\cdot\Gamma(16)}\sim\Gamma(16,\frac{5}{6})$

故平均值为 $16\times\frac{5}{6}=\frac{40}{3}$，方差 $16\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{100}{9}$

11.112 样本服从正态分布 $N(\bar{X},\sigma^2)$，故：

$$f(x|\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\cdot e^{-\frac{\Sigma(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

由于 $\sum_{k=1}^{n}(x_i-\theta)^2=\sum_{k=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\theta-\bar{x})^2$，只关注带 θ 的项，有：

$$f(x|\theta)\propto e^{-\frac{n(\theta-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

先验分布 $\sim N(\mu,\nu^2)$，有 $\pi(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}}\cdot e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\nu^2}}\propto e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\nu^2}}$

又 $\pi(\theta|x)\propto f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\propto e^{\left(-\frac{n(\theta-\bar{x})^2}{2\sigma^2}-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\nu^2}\right)}=e^{-\frac{\left[\theta-\frac{n\nu^2\bar{x}+\mu^2\sigma^2}{n\nu^2+\sigma^2}\right]^2}{2\cdot\frac{\sigma^2\nu^2}{n\nu^2+\sigma^2}}}$，$\theta\in(-\infty,\infty)$

令 $\bar{x}=2,n=20,\sigma=0.3,\mu=1.5,\nu^2=0.1$

有 $\mu_{post}=\dfrac{n\nu^2\bar{x}+\mu^2\sigma^2}{n\nu^2+\sigma^2}=1.98$，$\nu_{post}=\dfrac{\sigma^2\nu^2}{n\nu^2+\sigma^2}=0.00431$

即后验分布 $\sim N(1.98,\ 0.00431)$