数 学 作 业 纸

（科目：Linear Algebra）

班级：CS01　　姓名：[illegible]　　编号：2020010869　　第 1 页

Problem 2.3.9

(a) $M = P_{23} E_{21} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ -1&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ -1&1&0 \end{bmatrix}$

(b) $M = E_{31} P_{23} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ -1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ -1&1&0 \end{bmatrix}$. this is beacuse we need E_{31} to change row 3.

Problem 2.3.12

(1)
$$\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7&8&9 \\ 4&5&6 \\ 1&2&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9&8&7 \\ 6&5&4 \\ 3&2&1 \end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ -1&1&0 \\ -1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&1 \\ 1&4&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&3 \\ 0&-1&-2 \\ 0&2&-3 \end{bmatrix}$$

Problem 2.3.17

Sol. It gives $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&2&4 \\ 1&3&9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$ and $a=2, b=1, c=1$ is the solution.

Problem 2.3.26.

Sol. We can add two column to A and get $[A \ b \ b^*]$.

$$\begin{bmatrix} 1&4&1&0 \\ 2&7&0&1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&4&1&0 \\ 0&-1&-2&1 \end{bmatrix} \to \quad x = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \ x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problem 2.3.28

Sol. $AB = I \Rightarrow ABC = I \cdot C \Rightarrow A(BC) = C \Rightarrow A \cdot I = C \Rightarrow A = C$

Problem 2.4.6

Sol. $(A+B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 2&2 \\ 3&0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 10&4 \\ 6&6 \end{bmatrix}$, $A^2+2AB+B^2 = \begin{bmatrix} 1&2 \\ 0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14&0 \\ 0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1&0 \\ 3&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16&2 \\ 3&0 \end{bmatrix}$

The correct rule should be $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Problem 2.4.15

Sol (a) True (Otherwise we can let A be a $m \times n$ matrix, then $n \neq m$ could not be multiple).

(b) False (If A is $m \times n$ and B is $n \times m$, then AB is $m \times m$ and BA is $n \times n$ matrix).

(c) True (As (b))

(d) False (If $B = 0$, A is unnessary to be identify).

数 学 作 业 纸

（科目：Linear Algebra.

班级：CS01　　姓名：寇述朗　　编号：2020010869　　第 2 页

Problem 2.4.18

Sol. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Problem 2.4.21

Sol.

$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ $A^3 = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&8 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^3\cdot A = \begin{bmatrix} 0&0&0&8 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

So $Av = \begin{bmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 2z \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix}$ $A^2v = \begin{bmatrix} 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4z \\ 4t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A^3v = \begin{bmatrix} 0&0&0&8 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A^4v = 0$.

Problem 2.4.24

Sol. $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(A_1)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(A_1)^3 = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(A_1)^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $(A_2)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $(A_2)^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $(A_2)^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(A_3)^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(A_3)^3 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & a^{n-1}b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problem 2.4.26

Sol. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}[3\,3\,0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}[1\,2\,1] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 10 & 14 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Problem 2.4.32

Sol $AX = A\cdot[x_1\, x_2\, x_3] = [Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; Ax_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

Problem 1.

(a) Prove: $(rI)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(rI)$

(b) Sol: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Let $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, we have $c=0$ and $a=d$, so $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ is the answer.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$

Let $\begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$, we have $b=0$ and $a=d$ so $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ is the answer.

For both case, we can let $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, which means $b=c=0$, and the matrix commute with both matrix is $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Problem 2.

Sol. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 6 \\ -14 & 16 \end{bmatrix}$$