数学实验 · 实验报告8

计算机系　计01　容逸朗　2020010869

11-5 炮弹问题

问题分析

首先可以根据题意找出对应区域的密度公式，然后利用均值估计法或随机投点法计算积分即可。

模型假设与建立

不妨设目标中心为 $x=0,y=0$，记 $R=100$，那么目标区域可表示为：

$$C: x^2+y^2 \leq R^2 \tag{1}$$

又因为着点以圆心呈二维正态分布，故有 $\mu_x=\mu_y=0$，记 $\sigma_x=80,\sigma_y=50,r=0.4$ ，那么对于任意一点 (x,y) ，被命中的概率为：

$$\begin{aligned} p(x,y)= & \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}exp\Big\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\Big[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} \\ & -2r\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{2}$$

落在圆形区域的概率为：

$$P=4\iint_C p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx 4R^2\sum_{k=1}^{m}p(x_k,y_k) \tag{3}$$

算法设计

问题为多重积分计算，可以利用 `MATLAB` 软件生成随机数来模拟数值积分。

程序

```
format long

% 模型参数
rad = 100;
sigx = 80;
sigy = 50;
r = 0.4;
n = 100000;
cnt = 10;

% 均值估计法
P1 = 0;
```

```
for j = 1: cnt
    p = 0;
    x = unifrnd(-rad, rad, 1, n);
    y = unifrnd(-rad, rad, 1, n);
    for i = 1: n
        if x(i) ^ 2 + y(i) ^ 2 <= rad ^ 2
            u = pr(x(i), y(i), sigx, sigy, r);
            p = p + u;
        end
    end
    P1 = P1 + 4 * rad ^ 2 * p / n / (2 * pi * sigx * sigy * sqrt(1 - r ^ 2));
end
P1 = P1 / cnt

% 随机投点法
P2 = 0;
for j = 1: cnt
    m = 0;
    x = mvnrnd([0, 0], [sigx ^ 2, sigx * sigy * r; sigx * sigy * r, sigy ^ 2], n);
    for i = 1: n
        if (x(i, 1) ^ 2 + x(i, 2) ^ 2 <= rad ^ 2)
            m = m + 1;
        end
    end
    P2 = P2 + m / n;
end
P2 = P2 / cnt


function f = pr(x, y, sigx, sigy, r)
f = exp(-1.0 / (2 * (1 - r ^ 2)) * (x ^ 2 / sigx ^ 2 ...
    - 2 * r * x * y / (sigx * sigy) + y ^ 2 / sigy ^ 2));
end

```

计算结果

利用不同方法计算 10 次取平均可以得下面的结果：

n	均值估计法	随机投点法
10^6	0.69745	0.69782
10^7	0.69801	0.69788
10^8	0.69789	0.69792

分析

对于随机数算法，越多的取样点得出的结果就越精确，因此 n 越大的结果越可信。

注意到均值估计法的结果并没有沿着固定方向变大/缩小，这说明了一个可行的结果应在两者之间，为此我们可以估算 0.6979 左右为一个理想的结果。

另一个观察是均值估计法在不同 n 得出的结果的较为波动，而随机投点法则较为平稳，这可能是因为随机数的生成方式不同所导致的。

结论

炮弹落在圆形区域的结果为 69.79 %.

11-7 报童问题

问题分析和模型假设

题目给出了报纸的需求量的分布函数，以及批发价的计算方式等，要求求得报童可获得的最大利润。

为此我们可以参考课本的例 1 来建立模型，这里我们假设报纸的需求量服从正态分布。

模型建立

记报童购入的报纸数量为 n ，报纸批发价的相关系数 $A=0.5, K=50000$ ，那么每份报纸的价格为：

$$a(n)=A\left(1-\frac{n}{K}\right) \tag{4}$$

再记每份报纸卖出的价格为 $b=0.5$，每份报纸退回的价格为 $c=0.35$，那么报童的预期利润为：

$$\begin{aligned} V(n)= & \int_0^n[(b-a(n))x+(a(n)-c)(n-x)]p(x)\mathrm{d}x \\ & +\int_n^{\infty}(b-a(n))np(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$p(x)$ 是服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度函数，其中 $\mu=2000,\sigma=50$，那么有：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

为了求出最大利润，我们可以对 $V(n)$ 求导，得到：

$$\begin{aligned} V'(n)= & (b-a(n))np(n)-\int_0^n\{a(n)+na'(n)-c\}p(x)\mathrm{d}x \\ & -(b-a(n))np(n)+\int_n^{\infty}\{b-a(n)-na'(n)\}p(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7}$$

代入 $a(n)=A(1-\frac{n}{K}), a'(n)=-\frac{A}{K}$ 得到：

$$
\begin{aligned}
V'(n) &= -\int_0^n \left(A\left(1-\frac{n}{K}\right)-\frac{An}{K}-c\right)p(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_n^{\infty}\left(b-A\left(1-\frac{n}{K}\right)+\frac{An}{K}\right)p(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^n\left(A-\frac{2An}{K}-c\right)p(x)\mathrm{d}x+\int_n^{\infty}\left(b-A+\frac{2An}{K}\right)p(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{8}
$$

令 $V'(n)=0$ ，有：

$$
\left(A-\frac{2An}{K}-c\right)\int_0^n p(x)\mathrm{d}x=\left(b-A+\frac{2An}{K}\right)\int_n^{\infty}p(x)\mathrm{d}x \tag{9}
$$

由于题给的均值 μ 比标准差 σ 大得多，因此有 $\int_0^n p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^n p(x)\mathrm{d}x$ ，又因为概率分布的性质，我们又有 $\int_{-\infty}^n p(x)\mathrm{d}x=1-\int_n^{\infty}p(x)\mathrm{d}x$ ，将结果代入 (9) 式，又有：

$$
\int_{-\infty}^n p(x)\mathrm{d}x=\frac{b-A+\frac{2An}{K}}{b-c} \tag{10}
$$

除此之外，还需要保证 $V''(n)<0$ ，也就是：

$$
V''(n)=(c-b)p(n)+\frac{2A}{k}\int_0^{\infty}p(x)\mathrm{d}x \tag{11}
$$

算法设计

直接计算 (10) 式的难度较大，为此我们可以利用 **MATLAB** 的 **norminv** 函数计算正态分布的逆概率分布。

需要注意的是，与课本上的例子不同，$\frac{b-A+\frac{2An}{K}}{b-c}$ 并不是一个常数，而是一个与 n 相关的函数，因此我们可以考虑解下面的方程：

$$
F^{-1}\left(\frac{b-A+\frac{2An}{K}}{b-c}\right)-n=0 \tag{12}
$$

而解方程则可以利用 **MATLAB** 的 **fzero** 函数来完成。

程序

```
format long

b = 0.5;
c = 0.35;
mu = 2000;
sigma = 50;
A = 0.5;
K = 50000;

x = fzero(@(n)Vi(n, b, c, mu, sigma, A, K), [1, 3000])

if Vii(n, b, c, mu, sigma, A, K) < 0
```

```
    n
end

function y = Vi(n, b, c, mu, sigma, A, K)
    q = (b - A + 2 * A * n / K) / (b - c);
    y = norminv(q, mu, sigma) - n;
end

function y = Vii(n, b, c, mu, sigma, A, K)
    y = (c - b) * normpdf(n, mu, sigma) + 2 * A / K;
end

```

计算结果与分析

上述程序计算得出 $n = 1968$。

这个数值略低于报纸卖出量的均值 `2000`，考察 `(10)` 式可以知道，当 K 越大时，等号右侧的数值越小，相应地 n 的数值也会下降，这说明了适当减低进货量可以承担更低的风险。

除此之外，报纸批发价的算式也是相当神奇的，可以看到，当进货量 $n > K$ 时，每份报纸的购入价居然是负数，这并不合理，故猜想这里的 K 代表报商认为单一销售商的最大购入量不会超过 K 。

为了避免这一问题，每份报纸的购入价应当设有一个最小值，如 `0.1` 元等。

结论

报童应每天应购入 `1968` 份报纸。

11-9 轧钢问题

问题分析和模型假设

首先，我们知道加工钢材的长度呈正态分布，均值可调整，但方差则不能调整；

若轧出的钢条小于需求长度则整根报废，否则需要把过长的部分轧掉，记入浪费长度。

本题的目标是找出一个合适的长度均值使得每粗轧一根钢材的浪费最小。

模型建立

记钢材规定的长度为 $l = 2$，那么对于每粗轧一根钢材，我们有：

$$\begin{aligned}
W =& \int_0^l xp(x)\mathrm{d}x + \int_l^{+\infty} (x-l)p(x)\mathrm{d}x \\
\approx& \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x - \int_l^{+\infty} lp(x)\mathrm{d}x \\
=& m - l\int_l^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{13}$$

其中，钢材长度均值为 m，钢材长度标准差为 $\sigma = 0.2$，由于钢材粗轧后的长度满足正态分布 $N(m, \sigma)$，即：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{14}$$

目标是求出 W 的最小值。

算法设计

利用 **MATLAB** 的 **normcdf** 计算正态分布，并使用 **fminbnd** 函数求出最小值即可。

程序

```
format long

l = 2;
sigma = 0.2;

[mu, fval] = fminbnd(@(mu)W(l, mu, sigma), 1.5, 3)

function y = W(l, mu, sigma)
y = mu - l * (1 - normcdf(l, mu, sigma));
end
```

计算结果与分析

计算得出，应调整长度均值为 2.33269 米，此时期望的浪费为 0.42891 米。

可以看到，$2.33 > 2$，这说明我们更偏向从长了的钢管轧掉一部分的方案，而不是整根报废。

结论

要使每粗轧一根钢材的浪费最小，应调整长度均值为 2.33269 米。