1. 集合中不能出现相同的元素，故 $\{1,2,1,2,3\}$ 不是一个集合。

3. 可以，令 $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{2x\mid x\in\mathbb{Z}\}$，此时有 $B\subset A$

我们可以构造一个函数 $f: A\to B$，$f(x)=2x$

由于 f 是一一对应的，因此 A, B 等势，故 $|A|=|B|$.

8. 首先证明：$A\subset B \Rightarrow AB=A$，若 $A\subset B$，对 $\forall x\in AB \Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$ $(A\subset B) \Rightarrow x\in A \Rightarrow AB\subset A$

若 $A\subset B$，对 $\forall x\in A \Rightarrow x\in B \Rightarrow x\in AB \Rightarrow A\subset AB$

因此 $AB=A$.

再证 $AB=A \Rightarrow A\subset B$. 若 $AB=A$，对 $\forall x\in A \Rightarrow x\in AB \Rightarrow x\in B$，故 $A\subset B$

故 $A\subset B \Leftrightarrow AB=A$.

下证 $A\subset B \Rightarrow A\cup B=B$，若 $A\subset B$，对 $\forall x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$ or $x\in B$ $(A\subset B) \Rightarrow x\in B \Rightarrow A\cup B\subset B$

若 $A\subset B$，对 $\forall x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow B\subset A\cup B$

因此 $A\cup B=B$

再证 $A\cup B=B \Rightarrow A\subset B$，当 $A\cup B=B$ 时，$\forall x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in B$，即 $A\subset B$

故 $A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B$.

9. 要证 $AB=\phi \Leftrightarrow A\setminus B=A \Leftrightarrow A\cup B=A\triangle B$. 只需证 ①：$AB=\phi \Rightarrow A\setminus B=A$，② $A\setminus B=A \Rightarrow A\cup B=A\triangle B$

③ $A\cup B=A\triangle B \Rightarrow AB=\phi$.

先证①. $AB=\phi \Rightarrow A\setminus B=A$，$A\setminus B=AB^c=A(1-B)=A-AB=A-\phi=A$.

再证② $A\setminus B=A \Rightarrow A\cup B=A\triangle B$，$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup(BA^c)=(A\cup B)\cap(A\cap A^c)$

$=(A\cup B)\cap C=A\cup B$.

证③. $A\cup B=A\triangle B \Rightarrow AB=\phi$，注意到 $A\triangle B=A\cup B-A\cap B$，因此 $A\cup B=A\cup B-A\cap B$

所以 $AB=A\cap B=\phi$.

由①②③知题设成立

12. 证明：$\forall x\in(A\cup B)\setminus(C\cup D) \Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\notin C\cup D \Rightarrow (x\in A$ 或 $x\in B)$ 且 $x\notin C$ 且 $x\notin D$.

$\Rightarrow x\in A\setminus C$ 或 $x\in B\setminus D \Rightarrow x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus D)$.

故 $(A\cup B)\setminus(C\cup D)\subset(A\setminus C)\cup(B\setminus D)$

15. 证明：(1) $A\subset B \Rightarrow I_A \le I_B$，对 $\forall x\in A$，有 $x\in B$，故 $I_A(x)=I_B(x)=1$，因此 $I_A\le I_B$

$I_A\le I_B \Rightarrow A\subset B$，对 $\forall x\in A$，有 $I_A(x)=1$，又因为 $I_A\le I_B$，故 $I_B(x)=1$，即 $x\in B$，故 $A\subset B$。

综上 $A\subset B \Leftrightarrow I_A\le I_B$。

(2) $A\cap B=\phi \Rightarrow I_A\cdot I_B=0$，由于 $A\cap B=\phi$，对 $\forall x\in A$，有 $x\notin B$，即 $I_A(x)=1$，$I_B(x)=0 \Rightarrow I_A(x)\cdot I_B(x)=0$。

另一方面，对 $\forall x\in B$，则有 $x\notin A$，即 $I_A(x)=0$，$I_B(x)=0 \Rightarrow I_A(x)\cdot I_B(x)=0$。

若 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，则 $I_A(x)\cdot I_B(x)=0$。

因此 $A\cap B=\phi \Rightarrow I_A\cdot I_B=0$。

$I_A\cdot I_B=0 \Rightarrow A\cap B=\phi$，对 $\forall x\in A$，有 $I_A(x)=1$，由 $I_A\cdot I_B=0$ 知 $I_B(x)=0$，即 $x\notin B$，

对 $\forall x\in B$，有 $I_B(x)=1$，由 $I_A\cdot I_B=0$ 知 $I_A(x)=0$，即 $x\notin A$，故 $A\cap B=\phi$

因此，$I_A\cdot I_B=0 \Rightarrow A\cap B=\phi$

综上所述，$I_A\cdot I_B=0 \Leftrightarrow A\cap B=\phi$。

18. 证明：讨论 a.b 大小，若 $a>b$，则 $a\vee b=a$，$a\wedge b=b$，故 $a+b=a\vee b+a\wedge b$。

若 $a=b$，则 $a\vee b=a\wedge b=a$（或 b），故 $a+b=2a=a\vee b+a\wedge b$

若 $a<b$，则 $a\vee b=b$，$a\wedge b=a$，有 $a+b=a\wedge b+a\vee b$

综上，对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$，有 $a+b=a\vee b+a\wedge b$。(1)

下证，$I_{A\cup B}+I_{A\cap B}=I_A+I_B$。

由(1)知，$I_A+I_B=I_A\vee I_B+I_A\wedge I_B=I_{A\cup B}+I_{A\cap B}$。（由1.44，1.45可知），证毕。

19. 解：$I_{A\setminus B}=I_{AB^c}=I_A\cdot I_{B^c}=I_A(1-I_B)=I_A-I_A\cdot I_B$。

$I_{A-B}=I_A-I_B$

20. 解：$I_{A\cup B\cup C}=1-(1-I_{A\cup B\cup C})=1-I_{A^c\cap B^c\cap C^c}=1-(1-I_A)(1-I_B)(1-I_C)$

$=I_AI_BI_C-I_AI_B-I_AI_C-I_BI_C+I_A+I_B+I_C$

21. 解：注意到 $I_{A\cup B}=1-I_{A^c\cap B^c}=1-(1-I_A)(1-I_B)=I_A+I_B-I_{AB}$。

由20，有 $I_{ABC}=I_A\cdot I_B\cdot I_C=I_AI_B+I_AI_C+I_BI_C-I_A-I_B-I_C+I_{A\cup B\cup C}$

$=(I_AI_B-I_A-I_B)+(I_AI_C-I_A-I_C)+(I_BI_C-I_B-I_C)+I_A+I_B+I_C+I_{A\cup B\cup C}$.

$=-I_{A\cup B}-I_{A\cup C}-I_{B\cup C}+I_A+I_B+I_C+I_{A\cup B\cup C}$.

证毕.

6. 由于P, Q均为概率测度，故有 (i) 对$\forall A\subset\Omega$，$P(A), Q(A)\geq 0$，对$\forall A,B\subset\Omega$ 且 $A\cap B=\phi$，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 以及 $Q(A+B)=Q(A)+Q(B)$，(ii) $P(\Omega)=Q(\Omega)=1$.

下证 $aP+bQ$ $\left(\begin{matrix}a+b=1\\ a,b\geq 0\end{matrix}\right)$ 也为概率测度：(i) 对$\forall A\subset\Omega$，$a\cdot P(A)\geq 0$，$b\cdot Q(A)\geq 0$，故 $(aP+bQ)(A)\geq 0$

(ii) 对$\forall A,B\subset\Omega$ 且 $A\cap B=\phi$，$(aP+bQ)(A+B)=aP(A)+aP(B)+bQ(A)+bQ(B)=(aP+bQ)(A)+(aP+bQ)(B)$

(iii) $(aP+bQ)(\Omega)=a+b=1$.

故 $aP+bQ$ 也为概率测度.

例：取 $P(\{1\})=\frac{1}{2}$，$P(\{2\})=\frac{1}{2}$，$Q(\{1\})=\frac{1}{3}$，$Q(\{2\})=\frac{2}{3}$，$\Omega=\{1,2\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2\}$

注意到 $b=1-a$，
此时 $(aP+bQ)(A)=\frac{a}{2}+\frac{1-a}{3}=\frac{a+2}{6}$，$(aP+bQ)(B)=\frac{a}{2}+\frac{2-2a}{3}=\frac{4-a}{6}$.
由于$a\geq 0$，故 $(aP+bQ)(A), (aP+bQ)(B)\geq 0$.
$(aP+bQ)(A+B)=(aP+bQ)(\Omega)=a+(1-a)=1$ $\left(=\frac{a+2}{6}+\frac{4-a}{6}=(aP+bQ)(A)+(aP+bQ)(B)\right)$

7. 由于P为概率测度，故P满足 (i) 对$\forall A\subset\Omega$，$P(A)\geq 0$ (ii) 对$\forall A,B\subset\Omega$ 且 $A\cap B=\phi$，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$，(iii) $P(\Omega)=1$.

对于$\frac{P}{2}$，(i) 对$\forall A\subset\Omega$，$\frac{P}{2}(A)=\frac{1}{2}\cdot P(A)\geq 0$

(ii) 对$\forall A,B\subset\Omega$ 且 $A\cap B=\phi$，有 $\frac{P}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(P(A)+P(B))=\frac{P}{2}(A)+\frac{P}{2}(B)$.

(iii) $\frac{P}{2}(\Omega)=\frac{1}{2}\cdot P(\Omega)=\frac{1}{2}\neq 1$.

故 $\frac{P}{2}$ 满足 (i)(ii)，不满足 (iii)

对于P^2，(i) 对$\forall A\subset\Omega$，$P^2(A)=[P(A)]^2\geq 0$.

(iii) $P^2(\Omega)=P(\Omega)\cdot P(\Omega)=1\times 1=1$.

(ii) 由 Example 1 知，$P(A)=\frac{28}{550}$，$P(B)=\frac{47}{550}$，$P(A+B)=\frac{75}{550}$

此时 $P^2(A+B)=\frac{75^2}{550^2}$，$P^2(A)+P^2(B)=\frac{28^2+47^2}{550^2}$

由于 $75^2\neq 28^2+47^2$，故 $P^2(A+B)\neq P^2(A)+P^2(B)$.

故 P^2 满足 (i)(iii)

8. (a) 证明：$\because$ $A\cap B\cap C\subset A$，$A\cap B\cap C\subset B$，$A\cap B\cap C\subset C$

$\therefore$ $P(A\cap B\cap C)\leq P(A)$，$P(A\cap B\cap C)\leq P(B)$，$P(A\cap B\cap C)\leq P(C)$

$\therefore$ $P(A\cap B\cap C)\leq P(A)\wedge P(B)\wedge P(C)$

(b) 证明 $\because$ $A\cup B\cup C\subset A$，$A\cup B\cup C\subset B$，$A\cup B\cup C\subset C$

$\therefore$ $P(A\cup B\cup C)\geq P(A)$，$P(A\cup B\cup C)\geq P(B)$，$P(A\cup B\cup C)\geq P(C)$

$\therefore$ $P(A\cup B\cup C)\geq P(A)\vee P(B)\vee P(C)$

9. $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geq P(A)+P(B)-1$

($\because$ $A\cup B\subset\Omega$ $\therefore$ $P(A\cup B)\leq P(\Omega)=1$)

例：$\Omega=\{1,2,3\}$　$A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3\}$，$P(\{k\})=\frac{1}{3}$，$k=1,2,3$.

则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=0$，$P(BC)=\frac{1}{3}$

此时有 $P(AB)=0=0=P(A)+P(B)-1$

$P(BC)=\frac{1}{3}>0=P(B)+P(C)-1$

清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：计01 姓名：容逸朗 编号：2020010869 科目：概率论 第 4 页

10 $p(A)\cdot p(A)=p(A) \Rightarrow p(A)[p(A)-1]=0 \Rightarrow p(A)=0$ 或 $p(A)=1$.

存在 $p(A)=0$ 但 $A\neq\phi$ 的情况，如 $\Omega=\{1,2\}$，其中 $p(\{1\})=0$，$p(\{2\})=1$

此时令 $A=\{1\}\neq\phi$，但 $p(A)=0$.