清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：计01 姓名：名远朗 编号：2020010869 科目：离散 第 1 页

2. $\exists f: [0,1] \to [a,b]$，令 f 为双射函数 可取 $f(x) = b + (a-b)x$，$x \in [0,1]$

对 $\forall x \in [0,1]$ （此时 $a-b<0$）

$0 \le x \le 1 \Rightarrow (a-b) \le (a-b)x \le 0$

$\Rightarrow a \le b+(a-b)x \le b$

即 $f(x) \in [a,b]$

对 $\forall f(x) \in [a,b]$

$a \le f(x) \le b \Rightarrow a \le b+(a-b)x \le b$

$\Rightarrow a-b \le (a-b)x \le 0$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1$

即 $x \in [0,1]$

因此，f 为双射函数.

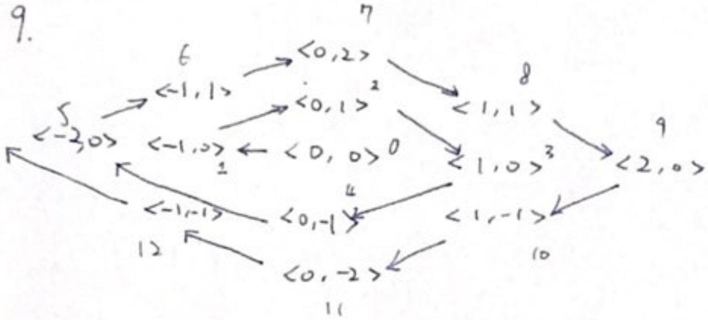
4. (1) $N-\{0\}$ (2) $N-\{1\}$ (3) $N-\{2\}$.

7. (1) $2^m \le k^m \le m^m \le (2^m)^m = 2^m$，故 $k^m = 2^m$.

(2) $2^m \le l^m \le m^m \le (2^m)^m = 2^m$，故 $l^m = 2^m$，

由(1)知 $k^m = 2^m$，故 $k^m = 2^m = l^m$

9.



如图所示，我们可以建立 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 与 N 之间的双射，对 $\forall \langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$\exists n\in N$ 与之对应，对 $\forall n \in N$，存在 $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 与之对应.

又 N 为可数集，故所有整数坐标点的集合是可数集.

10. (1) $|A| = 3$

(2) $|B| = \aleph_0$

(3) $|D| = \aleph_0$

(4) $B\cap D = \{x \mid (\exists n)(n\in N \land x = n^{10})\}$，$B\cap D \approx N$，$|B\cap D| = |N| = \aleph_0$

(5) $B\cup D = \{x \mid (\exists n)(n \in N \land (x = n^2 \lor x = n^5))\}$.

对 $B\cup D$ 中元素进行排列，由小至大分别为0,1,2,…，此时 $B\cup D$ 与 N 建立一一对应，

故 $|B\cup D| = |N| = \aleph_0$

(6) $|N_N| = |N|^{|N|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

(7) $|R_R| = |R|^{|R|} = \aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$