8.13. (i) 设 $a,b\in H_1$，则 a,b 可表示为 $a=x^{-1}\cdot h_a\cdot x$，$b=x^{-1}\cdot h_b\cdot x$（由于 $x\in G$，故 $x\cdot x^{-1}=e$）

此时，$ab=x^{-1}\cdot h_a\cdot x\cdot x^{-1}\cdot h_b\cdot x=x^{-1}\cdot h_a\cdot e\cdot h_b\cdot x=x^{-1}(h_a\cdot h_b)x\in H_1$，故 H_1 乘法封闭

(ii) 设 e 为 G 中单位元

则 $x^{-1}\cdot e\cdot x=x^{-1}\cdot x=e$，由于 H 是 G 的子群，故 $e\in H$，因此 $x^{-1}\cdot ex\in H_1$，即 $e\in H_1$

(iii) 对 $\forall a=x^{-1}\cdot hx\in H_1$，不妨设 $a^{-1}=x^{-1}h^{-1}x\in H$ 并记 G,H 中单位元为 e，则有

$$a\cdot a^{-1}=x^{-1}\cdot h\cdot x\cdot x^{-1}\cdot h^{-1}\cdot x=x^{-1}\cdot h\cdot e\cdot h^{-1}\cdot x=x^{-1}\cdot h\cdot h^{-1}x=x^{-1}\cdot e\cdot x=x^{-1}\cdot x=e$$

$$a^{-1}\cdot a=x^{-1}\cdot h^{-1}\cdot x\cdot x^{-1}\cdot h\cdot x=x^{-1}\cdot h^{-1}\cdot e\cdot h\cdot x=x^{-1}\cdot h^{-1}\cdot h\cdot x=x^{-1}\cdot e\cdot x=x^{-1}\cdot x=e$$

因此 a^{-1} 为 a 在 G 中的逆元。

结合 (i)(ii)(iii) 和定理 8.2.6 知 H_1 为 G 的子群。

8.14. 不妨设 $H_1,H_2,\dots,H_n$ 都是 G 的子群。

用归纳法 (i) H_1 是 G 的子群。

(ii) 设 $H_1\cap H_2\cap\cdots\cap H_K$ 是 G 的子群，记 $H_K'=H_1\cap H_2\cap\cdots\cap H_K$

对于 $H_{k+1}'=H_k'\cap H_{k+1}$，注意到 $H_1,H_2,\cdots,H_{k+1}$ 都是 G 的子群，故它们的单位元相等，并记之为 e，此时 $e\in H_1$，$e\in H_2\dots$，$e\in H_{k+1}$，故 $e\in H_{k+1}'$，

此时 H_{k+1}' 是 G 的非空子集，任取 $a,b\in H_{k+1}'$，则 $a,b\in H_k'$ 且 $a,b\in H_{k+1}$

由于 H_k'，H_{k+1} 也为 G 的子群，故由定理 8.2.7 知，$a\cdot b^{-1}\in H_k'$，$a\cdot b^{-1}\in H_{k+1}$

即 $a\cdot b^{-1}\in H_k'\cap H_{k+1}=H_{k+1}'$，因此 H_{k+1}' 也为 G 的子群。

结合 (1)(2) 知，G 中多个子群的交仍为子群。

8.21

$$\sigma\tau=\begin{bmatrix}2&1&5&6&3&4\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&5&6&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}=(1\ 3)(2\ 4)$$

$$\tau\sigma=\begin{bmatrix}4&3&5&6&1&2\\6&5&3&4&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&5&6&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&4&2&1\end{bmatrix}=(1\ 6)(2\ 5)$$

$$\sigma^{-1}=\begin{bmatrix}4&3&5&6&1&2\\1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}=(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)=(5\ 3)(3\ 2)(2\ 6)(6\ 4)(4\ 1)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1}=\sigma\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&5&6&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3&5&6&1&2\\1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&5&6&3&4\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3&5&6&1&2\\2&1&5&6&3&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&3&5&6&1&2\\3&4&1&2&5&6\end{bmatrix}=(1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$$

8.25. 若不存在阶为2的元素，则 $a \neq a^{-1}$，否则 $a^2 = a \cdot a^{-1} = e$

①若元素的阶为1，则该元素只能为 e.

②由于 a 与 a^{-1} 总是成对出现的，而 $\langle a \rangle$ 和 $\langle a^{-1} \rangle > 2$

① 和 ② 的元素总数为奇数，与群的阶数为偶数矛盾.

故必存在 $a \neq e$ 的元素，使得 $a^2 = e$

8.27. $\alpha = (1\,3\,2\,4)$　$\alpha^2 = (1\,2)(3\,4)$　$\alpha^3 = (1\,4\,2\,3)$　$\alpha^4 = e$.

因此 $\langle \alpha \rangle = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, e\}$，记 H 为其子群.

对 S_4 中元素进行遍历，有

▷ $e \cdot H = H$

▷ $(1\,2) \cdot H = \{(1\,3)(2\,4), (3\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2)\} = H_1$

$(3\,4) \cdot H = \{(1\,4)(2\,3), (1\,2), (1\,3)(2\,4), (3\,4)\} = H_1$

▷ $(1\,3) \cdot H = \{(2\,4\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,2), (1\,3)\} = H_2$

▷ $(2\,4) \cdot H = \{(1\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,2\,3), (2\,4)\} = H_3$

▷ $(1\,4) \cdot H = \{(1\,3\,2), (1\,2\,4\,3), (2\,3\,4), (1\,4)\} = H_4$

▷ $(2\,3) H = \{(1\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,3), (2\,3)\} = H_5$

$(1\,2\,3) H = \{(2\,4), (1\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,2\,3)\} = H_3$

$(1\,2\,4) H = \{(1\,3\,4\,2), (1\,4\,3), (2\,3), (1\,2\,4)\} = H_5$

$(1\,3\,2) H = \{(1\,2\,4\,3)\ (2\,3\,4)\ (1\,4)\ (1\,3\,2)\} = H_4$

$(1\,3\,4) H = H_3$　　$(1\,2\,3\,4) H = H_2$　　$(1\,4\,3\,2) H = H_3$

$(1\,4\,2) H = H_2$　　$(1\,2\,4\,3) H = H_4$　　$(1\,2)(3\,4) H = H$

$(1\,4\,3) H = H_5$　　$(1\,3\,2\,4) H = H$　　$(1\,3)(2\,4) H = H_1$

$(2\,3\,4) H = H_4$　　$(1\,3\,4\,2) H = H_5$　　$(1\,4)(2\,3) H = H_1$

$(2\,4\,3) H = H_2$　　$(1\,4\,2\,3) H = H$

左陪集为 $\{H, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$

▷ $H \cdot e = H$

▷ $H(1\,2) = \{(1\,4)(2\,3), (3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,2)\} = H_1$

▷ $H(1\,3) = \{(1\,2\,4), (1\,4\,3\,2), (2\,3\,4), (1\,3)\} = H_6$

▷ $H(2\,3) = \{(1\,3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,4\,2), (2\,3)\} = H_7$

▷ $H(2\,4) = \{(1\,3\,2), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,4)\} = H_8$

▷ $H(1\,4) = \{(2\,4\,3), (1\,3\,4\,2), (1\,2\,3), (1\,4)\} = H_9$

$H(3\,4) = \{(1\,3)(2\,4), (1\,2), (1\,4)(2\,3), (3\,4)\} = H_1$

$H(123) = H_9$　$H(142) = H_7$　$H(1324) = H$　$H(12)(34) = H$

$H(132) = H_8$　$H(234) = H_6$　$H(1342) = H_9$　$H(13)(24) = H_1$

$H(134) = H_7$　$H(243) = H_9$　$H(1423) = H$　$H(14)(23) = H_1$

$H(143) = H_8$　$H(1234) = H_8$　$H(1432) = H_6$

$H(124) = H_6$　$H(1243) = H_7$

故右陪集为 $\{H, H_1, H_6, H_7, H_8, H_9\}$

8.30 由于 A, B 是 G 的子群，故 $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, $|G| \neq 0$，又因为 $B \subseteq A$，故：

$$[G:B] = \frac{|G|}{|B|} = \frac{|G|}{|A|} \cdot \frac{|A|}{|B|} = [G:A][A:B]$$