（科目：Linear Algebra）

数 学 作 业 纸

班级： CS01　　姓名：容逸朗　　编号：2020010869　　第 1 页

Problem 2.5.6

Sol (a). We can multiple $AB = AC$ by A^{-1}, then we have $A^{-1}A \cdot B = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$.

(b). Let $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, so $AB = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \end{bmatrix}$ and

$AC = \begin{bmatrix} c_{11}+c_{21} & c_{12}+c_{22} \\ c_{11}+c_{21} & c_{12}+c_{22} \end{bmatrix}$. If $AB = AC$, we have $\begin{cases} b_{11}+b_{21} = c_{11}+c_{21} \\ b_{12}+b_{22} = c_{12}+c_{22} \end{cases}$

thus, we can let $b_{11}-c_{11} = x$ and $b_{12}-c_{12} = y$, then $b_{21}-c_{21} = -x$ and $b_{22}-c_{22} = -y$

which means $B - C = \begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix}$ produces $AB = AC$.

Problem 2.5.7.

Sol. (a) eqn.1 + eqn.2 − eqn.3 = 0 but right side $0+0-1 = -1 \neq 0$, so $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ could not have a solution.

(b). Because of eqn1 + eqn2 − eqn3 = 0, so $b_1+b_2-b_3$ must equal to zero.

(c) Row 3 becomes zero row and does not have third pivot.

Problem 2.5.11.

Sol (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ gives $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ has no inverse.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gives $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ is invertible.

Problem 2.5.21

Sol. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ are the 6 matrixs that is invertible.

Problem 2.5.25.

Sol

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right] = [I\ A^{-1}]$$

so $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

We have $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 - 1 + 2 + 2 + 2 = 0$, so B has no inverse.

Problem 2.5.28

Sol.

$$[A\ I]=\left[\begin{array}{cc|cc}0&2&1&0\\2&2&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}2&2&0&1\\0&2&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&-1&1\\0&2&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0\end{array}\right]=[I\ A^{-1}],\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

Problem 2.5.31

Sol

$$[A\ I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&-1&1&0&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&-1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]=[I\ A^{-1}]$$

So $x=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}$

Problem 2.5.39

Sol.

$$[A\ I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-a&0&0&1&0&0&0\\0&1&-b&0&0&1&0&0\\0&0&1&-c&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-ab&0&1&a&0&0\\0&1&-b&0&0&1&0&0\\0&0&1&-c&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-abc&1&a&ab&0\\0&1&0&-bc&0&1&b&0\\0&0&1&-c&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&a&ab&abc\\0&1&0&0&0&1&b&bc\\0&0&1&0&0&0&1&c\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]=[I\ A^{-1}],\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&a&ab&abc\\0&1&b&bc\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Problem 2.6.6

Sol.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&-6\end{bmatrix}=U.$$

$$E_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\quad E_{21}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{21}^{-1}\cdot E_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}U.$$

Problem 2.6.8

Sol

$$E=E_{32}\cdot E_{31}\cdot E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-c&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\ac-b&c&1\end{bmatrix}$$

$$L=E_{21}^{-1}\ E_{31}^{-1}\ E_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}.$$

数 学 作 业 纸

（科目：Linear Algebra）

班级：CS 01　　姓名：容逸朗　　编号：2020010869　　第 3 页

Problem. 2.6.13.

Sol. $A = LU = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a&a&a&a \\ 0&b-a&b-a&b-a \\ 0&0&c-b&c-b \\ 0&0&0&d-c \end{bmatrix}$, so $a \neq 0$, $b \neq a$, $c \neq b$ and $d \neq c$ is the condition.

Problem 2.6.15

Sol $\begin{bmatrix} 1&0 \\ 4&1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$ gives $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2&4 \\ 0&1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ gives $x = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$LU = \begin{bmatrix} 1&0 \\ 4&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2&4 \\ 0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&4 \\ 8&17 \end{bmatrix}$ so $\begin{bmatrix} 2&4 \\ 8&17 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2&4 \\ 0&1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c.$

Problem 2.6.16

Sol. $Lc = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ gives $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Ux = \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gives $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = LU = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&2&2 \\ 1&2&3 \end{bmatrix}$

Problem 1.

Sol.

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&2&2&2&0&1&0&0 \\ 1&2&3&3&0&0&1&0 \\ 1&2&3&4&0&0&0&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&1&0&0 \\ 0&1&2&2&-1&0&1&0 \\ 0&1&2&3&-1&0&0&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&1&2&0&-1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&2&-1&0 \\ 0&0&1&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&2&-1&0 \\ 0&0&1&0&0&-1&2&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \end{array}\right] = [I\ A^{-1}]$$

So. $x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&-1&0&0 \\ -1&2&-1&0 \\ 0&-1&2&-1 \\ 0&0&-1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Problem 2.

Sul

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&-1&-1&1 \\ 1&-1&1&-1 \\ 1&1&-1&-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&-2&-2&0 \\ 0&-2&0&-2 \\ 0&0&-2&-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&-2&-2&0 \\ 0&0&2&-2 \\ 0&0&-2&-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&-2&-2&0 \\ 0&0&2&-2 \\ 0&0&0&-4 \end{bmatrix}, \text{ so } U = \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&-2&-2&0 \\ 0&0&2&-2 \\ 0&0&0&-4 \end{bmatrix}$$

$$L = \left(\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&1&0&0 \\ -1&0&1&0 \\ -1&0&0&1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ -1&-1&1&1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&-1&1 \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&-1&1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ gives $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&-2&-2&0 \\ 0&0&2&-2 \\ 0&0&0&-4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ gives $x = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$