概率論與數理統計 期末考

2021秋 胡家信 考題回憶版 by BoxWorld

填空題 (30@1)

1. 樣本空間 $\Omega=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$，令 $A_1\in\Omega, A_2\in\Omega$，則事件 $A_1\cap A_2=2$ 發生的概率為 _____ 。
2. 設事件 A,B,C 兩兩獨立，且 $A,B,C=\varnothing$，若 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)<0.5$，且 $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，則$\mathbb{P}(A)=$ _____ ，$\mathbb{P}(B\cup C)=$ _____ 。
3. 考慮不定方程 $x_1+x_2+x_3=6$ ，則滿足方程的正整數解 (x_1,x_2,x_3) 的個數為 _____ ，滿足該方程的非負整數解 (x_1,x_2,x_3) 的個數為 _____ 。
4. 1. 設隨機變量 X 的密度函數為一個連續函數 $f(x),x\in(-\infty,+\infty)$，則 X^2 的密度函數的表示式為 _____ ；
   2. 設隨機變量 $Y\sim N(1,\sigma^2)$，且 $\mathbb{P}(0<Y<2)=0.2$，那麼 $\mathbb{P}(Y<0)=$ _____ ；
   3. 設隨機變量 $Z\sim B(n,p)$，$\mathbb{E}(Z)=3$，$Var(Z)=1.2$，則 $p=$ _____ ，$n=$ _____ ；
5. 設隨機變量 X 的概率分佈是 $\mathbb{P}(X=k)=\frac{C}{k!}(k=0,1,2,\dots)$，則 $\mathbb{E}(X^2)=$ _____ ；若 $X_j,j=1,2,\dots,n,\dots$ 是一列相互獨立且與 X 同分佈的隨機變量，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i\le 3n)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i\le n)}$ 的值為 _____ 。
6. 設隨機變量 Θ 服從區間 $(-\pi,\pi)$ 的均勻分佈，$X=cos\Theta, Y=sin\Theta$ ，則 X,Y 的協方差 $Cov(X,Y)=$ _____ ；再設 $U=tan\Theta$ ，則 U 的概率密度函數 $f(u)=$ _____ ，從而 U 服從 _____ 分佈（填名稱）。
7. 設總體服從參數為 $\lambda>0$ 的 Poisson 分佈，$\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ 是簡單抽樣，則 X_1 的生成函數為 $g(z)=$ _____ ，參數λ 的極大似然估計為 _____ 。
8. 設黑箱中有 A,B 兩種紙牌，A 紙牌的數量為 a，B 紙牌的數量為 $a+1$，每次抽一張後不放回，X_n 表示第 $n(1\le n\le a)$ 次抽牌中 A 出現的次數，則對任意整數 $k=0,1,\dots,n$，$\mathbb{P}(X_n=k)=$ _____ ，且 $\mathbb{E}(X_n)=$ _____ ，$Var(X_n)=$ _____ 。
9. 設總體由 4 個數 $\{1,2,3,4\}$ 組成，從總體抽出 2 個數，當抽樣重覆時，樣本均值 $\bar{X}$ 的方差 $Var(\bar{X})$ 的值為 _____ ；當抽樣不重覆時，樣本均值 $\bar{X}$ 的方差 $Var(\bar{X})$ 的值為 _____ 。
0. 設總體服從正態分佈 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 為簡單隨機抽樣，其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 為樣本均值，$S^2=\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n}$ 為樣本方差，則隨機變量 $\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\mu}{S}$ 服從自由度為 _____ 的 _____分佈；隨機變量 $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ 服從_____分佈；隨機變量 $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ 服從自由度為 _____ 的 _____分佈。
1. 設隨機變量 X 服從參數為 $\lambda>0$ 的指數分佈，記隨機變量 $Y=[X]+1$ （$[X]$ 是 X 的下取整，如 $[1.2]=1,[-3.8]=-4$ 等），那麼 Y 的概率分佈 $\mathbb{P}(Y=k)=$ _____ $(k=1,2,\dots,n)$，$\mathbb{E}(Y)=$ _____ 。
2. 設 (X,Y) 的聯合密度函數為 $f(x,y)=a(6-x-y),0<x<2<y<4$，則 $a=$ _____ ，X 的邊緣密度函數為 $g_x(x)=$_____。（標明定義域）

計算題

1. （1@8） 粒子從原點每次獨立向左或向右移動一格，概率均為 $\frac{1}{2}$ ，設 Y_n 是粒子第 n 步時的位置，是一個隨機變量，求 $\mathbb{P}(Y_n \geq 0, 1 \leq n \leq 4)$。
2. （1@3） 兩家電影院競爭 m 名顧客，顧客獨立、且選擇兩家電影院的機會一樣。問每家電影院應該設置多少張椅子，使得顧客因椅子缺乏而離開的概率小於 p？（寫出計算步驟即可）
3. （1@5） 設總體服從參數為 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分佈，但參數 λ 未知，為估計 λ ，從總體抽出 n 個簡單樣本 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 。已知 λ 的先驗分佈的密度函數為 $\pi(\lambda) = e^{-\lambda}, \lambda > 0$ ，計算 λ 的貝葉斯做計值 $\hat{\lambda}_B$。（請推導詳細步驟）
4. （1@6） 設總體服從區間 $(0, \theta)$ 的均勻分佈，$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是簡單隨機抽樣，令 $V_n = max(X_1, \ldots, X_n)$，給定 $\alpha \in (0,1)$，計算常數 $c_n > 1$ ，使得區間 $(V_n, c_n V_n)$ 成為一個置信水平為 $1-\alpha$ 的置信區間。

證明題

1. （1@2） 設 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是一列事件，證明：$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - n + 1$。
2. （1@3） 設隨機變量 X, Y 相互獨立， $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$，$Y$ 服從 $(0,1)$ 上的均勻分佈，記 $Z = X + Y$。證明 Z 服從 $(0,2)$ 上的均勻分佈。
3. （1@3） 設總體的均值為 $\mu > 0$（但 μ 未知)且方差有限，$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 是來自總體的簡單樣本。定義集合

$$\Gamma := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i X_i : c_i \in \mathbb{R} \right\}, \Gamma_U := \{T \in \Gamma : T\text{是}\mu\text{的無偏估計}\}$$

   1. 證明：$T = \sum_{i=1}^n c_i X_i \in \Gamma_U$ 當且僅當 $\sum_{i=1}^n c_i = 1$；
   2. 證明：在總體均值 μ 的無偏估計中，樣本均值 $\bar{X}$ 是 Γ_U 中最有效的無偏估計。

加分題

1. （1@4） 給定 $x > 0$ ，利用概率論的知識證明：對任意的 $t \in (0, x)$，有 $\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq \lambda x} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1$，其中 $\mathbb{N}$ 表示非負整數集。
2. （1@3） 設 $X \sim N(0,1)$。對任意 $x > 0$ ，證明 $\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}$ 。