数 学 作 业 纸

（科目：高数）

班级：计01　　姓名：岑逸朗　　编号：2020010869　　第 1 页

2.12.(1) 证明：先将 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)\wedge\neg R$ 化为合取范式，得

$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$

建立子句集　$S=\{P\vee Q,\ \neg P\vee R,\ \neg Q\vee R,\ \neg R\}$

归结过程

(1) $\neg P\vee R$

(2) $\neg R$

(3) $P\vee Q$

(4) $\neg Q\vee R$

(5) $\neg P$　　(1)(2) 归结

(6) Q　　(3)(5) 归结

(7) $\neg Q$　　(2)(4) 归结

(8) $\square$　　(6)(7) 归结

定理 3.2.1　$\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$

证明：(1) $\vdash (Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$　　公理4

(2) $\vdash (Q\to R)\to((\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R))$　　(1)代入 $\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$　　(2)定义1

定理 3.2.2　$\vdash P\to P$

证明：(1) $\vdash (P\to(P\vee Q))$　　公理2

(2) $\vdash (P\to(P\vee P))$　　(1)代入 $\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash ((P\vee P)\to P)$　　公理1

(4) $\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$　　定理3.2.1

(5) $\vdash ((P\vee P)\to P)\to((P\to(P\vee P))\to(P\to P))$　　(4)代入 $\frac{Q}{P\vee P}$，$\frac{R}{P}$

(6) $\vdash (P\to P\vee P)\to(P\to P)$　　(3)(5)分离

(7) $\vdash P\to P$　　(2)(6)分离

定理 3.2.3　$\vdash \neg P\vee P$

证明：(1) $\vdash P\to P$　　定理3.2.2

(2) $\vdash \neg P\vee P$　　(1) 定义1

定理 3.2.4　$\vdash P\vee\neg P$

证明：(1) $\vdash P\vee Q\to Q\vee P$　　公理3

(2) $\vdash \neg P\vee P\to P\vee\neg P$　　(1)代入 $\frac{P}{\neg P}$，$\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash \neg P\vee P$　　定理3.2.3

(4) $\vdash P\vee\neg P$　　(2)(3)分离

数 学 作 业 纸

（科目：离散 ）

班级：计01　　姓名：[name]　　编号：202001069　　第 2 页

定理 3.2.5 $\vdash P \to \neg\neg P$

证明：(1) $\vdash P \vee \neg P$　　定理 3.2.4

(2) $\vdash \neg P \vee \neg\neg P$　　(1) 代入 $\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash P \to \neg\neg P$　　(2) 定义 1

定理 3.2.6 $\vdash \neg\neg P \to P$

(1) $\vdash P \to \neg\neg P$　　定理 3.2.5

(2) $\vdash \neg P \to \neg\neg\neg P$　　(1) 代入 $\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash (Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$　　公理 4

(4) $\vdash (\neg P \to \neg\neg\neg P) \to ((P \vee \neg P) \to (P \vee \neg\neg\neg P))$　　(3) 代入 $\frac{Q}{\neg P}$，$\frac{R}{\neg\neg\neg P}$

(5) $\vdash (P \vee \neg P) \to (P \vee \neg\neg\neg P)$　　(2)(4) 分离

(6) $\vdash P \vee \neg P$　　定理 3.2.4

(7) $\vdash P \vee \neg\neg\neg P$　　(5)(6) 分离

(8) $\vdash P \vee Q \to Q \vee P$　　公理 3

(9) $\vdash P \vee \neg\neg\neg P \to \neg\neg\neg P \vee P$　　(8) 代入 $\frac{Q}{\neg\neg\neg P}$

(10) $\vdash \neg\neg\neg P \vee P$　　(7)(9) 分离

(11) $\vdash \neg\neg P \to P$　　(10) 定义 1.

3.1 (1) 证明：① $\vdash \neg\neg P \to P$　　定理 3.2.6

② $\vdash \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \to \neg P \vee \neg Q$　　① 代入 $\frac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

③ $\vdash \neg(P \wedge Q) \to \neg P \vee \neg Q$　　② 定义 2.

3.1 (2) 证明：① $\vdash P \to \neg\neg P$　　定理 3.2.5

② $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$　　① 代入 $\frac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

③ $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$　　② 定义 2

3.1 (3) 证明：① $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$　　定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to ((P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P)))$　　① 代入 $\frac{Q}{P \vee Q}$，$\frac{R}{Q \vee P}$

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$　　公理 3

④ $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$　　②③ 分离

⑤ $\vdash P \to (P \vee Q)$　　公理 2

⑥ $\vdash P \to (Q \vee P)$　　④⑤ 分离

3.1 (4) 证明：① $\vdash P \to (Q \vee P)$　　3.1 (3)

② $\vdash Q \to (\neg P \vee Q)$　　① 代入 $\frac{P}{Q}$，$\frac{Q}{\neg P}$

③ $\vdash Q \to (P \to Q)$　　② 定义 1.

3.2 (1) 证明：① $\neg Q \wedge (P \to Q) \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P$　　(写成相继式)

② $\neg Q,\ P \to Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P$　　$(\wedge \Rightarrow)$

③ $P \to Q \stackrel{s}{\Rightarrow} Q, \neg P$　　$(\neg \Rightarrow)$

④ $Q \stackrel{s}{\Rightarrow} Q, \neg P$ 而且

$\stackrel{s}{\Rightarrow} P, Q, \neg P$　　$(\to \Rightarrow)$

⑤ $P, Q \stackrel{s}{\Rightarrow} Q$ 而且　　$(\Rightarrow \neg)$

$P \stackrel{s}{\Rightarrow} P, Q$

⑤为公理，从而定理成立.

(2) 证明：① $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P \vee \neg R$　　(写成相继式)

② $P \to Q,\ R \to S,\ \neg Q \vee \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$　　$(\wedge \Rightarrow)(\Rightarrow \vee)$

③' $P \to Q,\ R \to S,\ \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$　　$(\vee \Rightarrow)$

③'' $P \to Q,\ R \to S,\ \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

④' $P \to Q,\ S, \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$　　(③' $\to \Rightarrow$)

④'' $P \to Q,\ \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} R, \neg P, \neg R$

⑤' $P \to Q,\ S, \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$　　(③'' $\to \Rightarrow$)

⑤'' $P \to Q,\ \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} R, \neg P, \neg R$

⑥' $Q, S, \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

⑥'' $S, \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, P, \neg R$　　(④' $\to \Rightarrow$)

⑦' $Q, \neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} R, \neg P, \neg R$

⑦'' $\neg Q \stackrel{s}{\Rightarrow} P, R, \neg P, \neg R$　　(④'' $\to \Rightarrow$)

⑧' $Q, S, \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

⑧'' $S, \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} P, \neg P, \neg R$　　(⑤' $\to \Rightarrow$)

⑨' $Q, \neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} R, \neg P, \neg R$

⑨'' $\neg S \stackrel{s}{\Rightarrow} P, R, \neg P, \neg R$　　(⑤'' $\to \Rightarrow$)

⑩' $P, Q, R, S \stackrel{s}{\Rightarrow} Q$　　(⑥' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑩'' $P, R, S \stackrel{s}{\Rightarrow} P, Q$　　(⑥'' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑪' $P, Q, R \stackrel{s}{\Rightarrow} Q, R$　　(⑦' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑪'' $P, R \stackrel{s}{\Rightarrow} P, Q, R$　　(⑦'' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑫' $P, Q, R, S \stackrel{s}{\Rightarrow} S$　　(⑧' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑫'' $P, R, S \stackrel{s}{\Rightarrow} P, S$　　(⑧'' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑬' $P, Q, R \stackrel{s}{\Rightarrow} R, S$　　(⑨' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑬'' $P, R \stackrel{s}{\Rightarrow} P, R, S$　　(⑨'' $\neg \Rightarrow, \Rightarrow \neg$)

⑩'~⑬''均为公理，从而定理成立.

数 学 作 业 纸

（科目：离散 ）

班级：计01　　姓名：容逸朗　　编号：2020010869　　第 4 页

3.2(3) 证明：① $\neg(P\wedge Q) \overset{S}{\Rightarrow} \neg P\vee\neg Q$　（写成相继式）

② $\neg(P\wedge Q) \overset{S}{\Rightarrow} \neg P, \neg Q$　$(\Rightarrow\vee)$

③ $\overset{S}{\Rightarrow} \neg P, \neg Q, P\wedge Q$　$(\neg\Rightarrow)$

④ $P, Q \overset{S}{\Rightarrow} P\wedge Q$　$(\Rightarrow\neg)$

⑤' $P, Q \overset{S}{\Rightarrow} P$

⑤'' $P, Q \overset{S}{\Rightarrow} Q$　$(\Rightarrow\wedge)$

由⑤'⑤''均为公理，从而定理成立.