清華大學 数学作业纸

TSINGHUA UNIVERSITY

班级：计01　姓名：冷逸朗　编号：2020010869　科目：概统　

10. 记 $X_\alpha^* = \frac{X_\alpha - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$，则 X_α^* 的 Laplace 变换 $E(e^{-\lambda \cdot X_\alpha^*}) = E(e^{-\lambda \cdot \frac{X_\alpha - \alpha}{\sqrt{\alpha}}}) = e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot E(e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} X_\alpha})$

由于 X_α 服从 Poisson 分布，故 X_α 的母函数：$g(z) = E(z^{X_\alpha}) = e^{\alpha(z-1)}$

故 $E(e^{-\lambda \cdot X_\alpha^*}) = e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot E(e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} \cdot X_\alpha}) = e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot g(e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}) = e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot e^{\alpha(e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}} - 1)}$

利用Taylor展开，$E(e^{-\lambda X_\alpha^*}) = e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot e^{\alpha \cdot [1 + (-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}) + \frac{\lambda^2}{2\alpha} - \frac{\lambda^3}{6\alpha^{3/2}}(1+\varepsilon(0)) - 1]}$

$$= e^{\lambda\sqrt{\alpha}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{\alpha} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6\sqrt{\alpha}}(1+\varepsilon(0))} \longrightarrow e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad (当 \alpha \to \infty 时)$$

因为 $e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 的 Laplace 变换，故 X_α^* 收敛到 $N(0,1)$ 的 Laplace 变换，由连续性定理知 X_α^* 的分布函数点点收敛到 $N(0,1)$ 的分布函数上，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{X_\alpha - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \le u) = \Phi(u)$

12. 每秒通过的车流量参数 $\alpha = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

记 T_i 为第 $i-1$ 辆车通过后，到下一辆（第 i 辆车）通过需时的随机变量，则需求 $P(S_n \ge N)$，其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$

由于车流量满足 Poisson 分布，由公式 (7.2.11) 知 S_n 的密度函数为 $f(u) = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} u^{n-1} \cdot e^{-\alpha u}$，$u>0$。

故 $P(S_n \ge N) = \int_N^\infty \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \cdot u^{n-1} \cdot e^{-\alpha u} du$.

13. 记 X_i 为第 i 次掷出的点数的随机变量，则 $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_{100}$ 为 100 次掷出的点数和。

欲求 $P(330 \le S_n \le 380)$，需要求：$E(S_n)$ 和 $\sigma(S_n)$

又 $E(T_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$，$E(T_1^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$，故 $\sigma^2(T_1) = E(T_1^2) - E(T_1)^2 = \frac{35}{12}$

故 $E(S_n) = 100 E(T_1) = 350$，$\sigma(S_n) = \sqrt{100\sigma^2(T_1)} = 10\sqrt{\frac{35}{12}}$

$$P(330 \le S_n \le 380) = P\left(\frac{330 - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le \frac{380 - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) = P\left(\frac{330-350}{10\sqrt{\frac{35}{12}}} \le \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le \frac{380-350}{10\sqrt{\frac{35}{12}}}\right)$$

$$= P\left(-2 \cdot \sqrt{\frac{12}{35}} \le \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le 3\sqrt{\frac{12}{35}}\right) \approx \Phi\left(3\sqrt{\frac{12}{35}}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{\frac{12}{35}}\right)$$

15. 记 $X_i = \begin{cases} 1, & 选择此戏院, p=\frac{1}{2} \\ 0, & 不选择此戏院, p=\frac{1}{2} \end{cases}$，取 $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$，$E(S) = 1000 \times \frac{1}{2} = 500$，$Var(S) = 1000 \times \frac{1}{4} = 250$

要求 $P(S > N) < 1\%$ 即求 $P(S \le N) \ge 0.99$，由中心极限定理，$P(\frac{S-500}{\sqrt{250}} \le \frac{N-500}{\sqrt{250}}) \approx \Phi(\frac{N-500}{\sqrt{250}})$

由表知 $\Phi(2.33) = 0.9901$，故 $\frac{N-500}{\sqrt{250}} \ge 2.33 \Rightarrow N \ge 536.8$，即至少需要 537 个座位.

16. 记 X_i 为每个选民对候选人的支持，则 $X_i = \begin{cases} 0, & 概率 1-p \\ 1, & 概率 p. \end{cases}$

若调查了 n 个选民，则 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，现求 $P(|\frac{S_n}{n} - p| \le 4.5\%) \ge 95\%$

由中心极限定理 $p(|\frac{S_n}{n} - p| \le 4.5\%) = P(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{npq}} \le \frac{0.045n}{\sqrt{npq}}) \simeq 2\Phi(\frac{0.045n}{\sqrt{npq}}) - 1 \ge 0.75 \Rightarrow \Phi(\frac{0.045n}{\sqrt{npq}}) \ge 0.975$

查表知 $\Phi(1.96) = 0.975$，故 $\frac{0.045n}{\sqrt{npq}} \ge 1.96 \Rightarrow n \ge 1897p(1-p)$，又 $p(1-p) \le \frac{1}{4}$，故 $n \ge 475$.

17. 对于 $\forall a, b \in R$ 且 $a<b$，有 $\Phi((a,a+n)) - \Phi((b,b+n)) = (\Phi(a+n) - \Phi(a)) - (\Phi(b+n) - \Phi(b))$

$$= \int_a^{a+n} e^{-u^2/2} du - \int_b^{b+n} e^{-u^2/2} du = \int_0^n e^{-\frac{(a+u)^2}{2}} du - \int_0^n e^{-\frac{(b+u)^2}{2}} du = \int_0^u e^{-\frac{(a+u)^2}{2}} - e^{-\frac{(b+u)^2}{2}} du$$

$$= \int_0^n e^{-\frac{(b+u)^2}{2}} \left(e^{(\frac{a+u}{b+u})^2} - 1\right) du$$

因为 $e^{-\frac{(b+u)^2}{2}} > 0$，$(\frac{a+u}{b+u})^2 > 0$ $(a>b)$，故 $e^{(\frac{a+u}{b+u})^2} > e^0 = 1$，因此 $e^{-\frac{(b+u)^2}{2}}(e^{(\frac{a+u}{b+u})^2} - 1) > 0$

所以 $\int_0^n e^{-\frac{(b+u)^2}{2}}(e^{(\frac{a+u}{b+u})^2} - 1) du > 0$，即 $\Phi((a,a+n)) - \Phi((b,b+n)) > 0$，故 $\Phi((a,a+n)) > \Phi((b,b+n))$，对 $\forall a<b \in R$.

取 $a=0, b=1, n=2$ 有 $\Phi((0,2)) > \Phi((1,3))$ 得证!