清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：计01　姓名：吴逸朗　编号：2020010869　科目：概统　第 1 页

2. 记每张彩票的收益为随机变量 $X(\omega)$，则 $X=\begin{cases}50000, & 1/10^7\\ 2500, & 9/10^7\\ 250, & 90/10^7\\ 25, & 900/10^7\\ 0, & 1-1000/10^7\end{cases}$

故 $E(X)=50000\times\frac{1}{10^7}+2500\times\frac{9}{10^7}+250\times\frac{90}{10^7}+25\times\frac{900}{10^7}+0=\frac{47}{4000}$.

80% 彩票售出期望付出奖金：$80\%\times10^7\times E(X)=8\times10^6\times\frac{47}{4000}=94000$.

期望利润：$80\%\times10^7\times0.05-80\%\times10^7\times E(X)=306000$.

3. 记 $X_i(\omega)$ 为第 i 个居民区抽到黑人屋主的随机变量．$(i=1,2,3,4,5)$

则 $E(X_1)=\frac{3}{13}$，$E(X_2)=\frac{2}{12}$，$E(X_3)=\frac{4}{13}$，$E(X_4)=\frac{3}{14}$，$E(X_5)=\frac{4}{14}$

由于每个居民区抽出 2 户，故题目所求为 $2E(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)=\frac{94}{39}$

4. 记 $X(\omega)$ 为每个色子掷出点数的随机变量，则 $E(X)=\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}$

现掷 6 颗色子，期望点数和为 $6\cdot E(X)=21$，若每颗色子掷 n 次，点数和为 $6n\cdot E(X)=21n$

又 $E(X^2)=\frac{1}{6}\times(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$

故 $\sigma^2(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{91}{6}-(\frac{21}{6})^2=\frac{35}{12}$

掷 6 颗色子，方差为 $6\sigma^2(X)=\frac{35}{2}$，若每颗色子掷 n 次，方差为 $6n\sigma^2(X)=\frac{35}{2}n$

5. 记 $X(\omega)$ 为出现重大缺陷的随机变量，$Y(\omega)$ 则为轻微缺陷的随机变量，

则 $X=\begin{cases}1, & 1\%\\ 0, & 99\%\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & 5\%\\ 0, & 95\%\end{cases}$

50 个螺丝出现重大缺陷的期望为 $50E(X)=50\times1\%=0.5$，出现轻微缺陷的期望为 $50E(Y)=50\times5\%=2.5$

6. 记 $X(\omega)$ 为出现黑桃的随机变量，则 $X=\begin{cases}1, & 13/52\\ 0, & 39/52\end{cases}$，故 $E(X)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

一手桥牌出现黑桃的期望为 $13\cdot E(X)=\frac{13}{4}$．

记 $X_i(\omega)$ 为出现第 i 种花色 $(i=1,2,3,4)$ 的随机变量，则 $X_i=\begin{cases}1, & 1-\binom{39}{13}/\binom{52}{13}\\ 0, & \binom{39}{13}/\binom{52}{13}\end{cases}$，$i=1,2,3,4$.

故 $E(X_1+X_2+X_3+X_4)=4\times\left(1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}\right)$

7. 记 X 为第 i 站无人下车的情况，由于各人独立，故 $P(X)=1-(\frac{6}{7})^{25}$

记 $X_i(\omega)$ 第 i 站的随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 1-(\frac{6}{7})^{25}\\ 0, & (\frac{6}{7})^{25}\end{cases}$，1 表示该站无人下车，0 则反之，$i=1,2,\cdots,7$.

故 $E(\sum_{i=1}^{7}X_i)=\sum_{i=1}^{7}E(X_i)=7\times\left[1-(\frac{6}{7})^{25}\right]$

11. 题目可简化为求第一次出现次品的期望生产次数减1（即假设第一次前刚生产出次品）

记 X_i 为第 i 次时首次出现次品，则 $P(X_i) = (98\%)^{i-1} \times 2\%$

现求 $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[(i-1)\times(98\%)^{i-1}\times 2\%\right] = 2\% \times \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(98\%)^{i} = 2\%\cdot\frac{98\%}{(1-(98\%))\cdot 2\%} = 49.$

12. 记 $X_i(w)$ 为第 i 次刚好打开门的随机变量.

题目求 $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_6) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_6)$

$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4} + \cdots + 6\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

15. 设 X_i 为首次出现与第一张相同的情况时需要 i 次的情况（不包括第一张的次数）

则 $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)\cdot\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{i-1} = \frac{1}{N-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^{i-1}\right) = \frac{N^2+1}{N-1} = N+1.$

设 Y_i 为首 i 次无重复的情况，Z_i 为第 i 次时出现重复（前 $i-1$ 次无重复）的情况.

则 $P(Y_i) = \frac{\binom{N}{i}\cdot i!}{N^i} = \frac{N!}{N^i(N-i)!}$　（$P(Y_0) = 1$.）

$P(Z_i) = \frac{i-1}{N}\cdot P(Y_{i-1}) = \frac{i-1}{N}\cdot\frac{N!}{N^{i-1}\cdot(N-i+1)!} = \frac{(i-1)\ N!}{N^i\ (N-i+1)!}$

期望值 $E(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n + \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{N+1} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{i(i-1)\cdot N!}{N^i(N-i+1)!}$