1. 对连通支的个数进行归纳：当图 G 有 k 个连通支时，$m \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$.

(1) 当 $k=1$ 时，$m \le \frac{1}{2}n(n-1)$ 成立.

(2) 假设 $k=x$ 时成立，当 $k=x+1$ 时，设前 x 个连通支包含 n_1 个点，m_1 条边，$(n_1<n)$

则由假设：$m_1 \le \frac{1}{2}(n_1-x+1)(n_1-x)$

对于最后一个连通支，设该连通支内有 m_2 条边，则有 $m_2 \le \frac{1}{2}(n-n_1-1)\cdot(n-n_1)$

要证 $m=m_1+m_2 \le \frac{1}{2}(n-x)(n-x-1)$

即证 $m_1+m_2-\frac{1}{2}(n-x)(n-x-1) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(n_1-x+1)(n_1-x)+\frac{1}{2}(n-n_1-1)(n-n_1)-\frac{1}{2}(n-x)(n-x-1) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad (n_1-x)^2+n_1-x+(n-n_1)^2-n+n_1-(n-x)^2+n-x \le 0$

$\Leftrightarrow \quad 2n_1^2-2n_1\cdot x-2n\cdot n_1+2\cdot n\cdot x+2n_1-2x \le 0$

$\Leftrightarrow \quad (n-1-n_1)\cdot(x-n_1) \le 0$

注意到 $n_1 \le n-1 < n$，$n_1 \ge x$（每个连通支内最少存在一点），有

$n-1-n_1 \ge 0$，$x-n_1 \le 0$. 故上式成立，即 $m \le \frac{1}{2}(n-x)(n-x-1)$ 成立.

综合 (1)(2) 知题设成立.

5. (a) 对任意边 $e_i \in E(G)$ {端点 v_a, v_b}，我们有 $d(v_a)+d(v_b) \le n$，这是因为图 G 不存在三角形，即不存在一点 $v_c \in V(G)$ $(c\ne a, c\ne b)$ 同时与 v_a, v_b 连接，故

$d(v_a)+d(v_b) \le 2+(n-2)=n$.

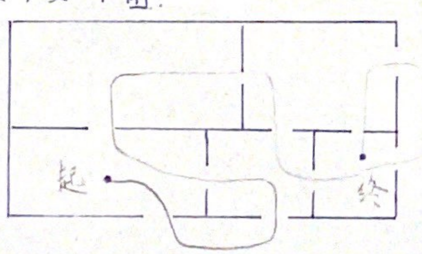
对 m 条边进行同一计算，有 $\Sigma d^2(v_i) \le m\cdot n$.

（这是因为对 m 条边进行遍历时，v_i 点会被经过 $d(v_i)$ 次，每次计算 $d(v_i)$，即 $d^2(v_i)$）

(b) 同 $\Sigma d^2(v_i) \le mn$ 使用柯西不等式，有：

$(mn)\cdot n \ge \Sigma d^2(v_i)\cdot n \ge (\Sigma d(v_i))^2 = (2m)^2$ 即 $m \le \frac{n^2}{4}$

6. 可以，如下图：



10 以点代人，相互认识则两点连线，得到图 G，若图 G 存在 H 回路，则问题得证。由条件知，对任意 $v_i, v_j \in V(G)$，都有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$，

若 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$。

若 $(v_i, v_j) \notin E(G)$，则必存在不同两点 $v_x, v_y \in V(G)$，使得 $(v_i, v_x), (v_x, v_j), (v_i, v_y), (v_y, v_j) \in E(G)$，否则若 $(v_i, v_x) \notin E(G)$，则 x, j 不认识 i，矛盾（反之，有 $(v_x, v_j) \notin E(G)$，此时 i, x 都不认识 j，矛盾，同理可证存在 y 与 i, j 相识）

因此也有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$，由推论 2-4.1 知图 G 存在 H 回路。

12 对任意小立方体标 A，与之相邻的立方体标为 B，邻点再标为 A，以此类推，在 $3\times3\times3$ 的立方体中进行以上操作（如右图），可见标 A 的共有 14 处，标 B 的共有 13 处，若存在 H 道路（且终点为中心立方体），则该道路沿 ABAB…AB… 或 BABA…BA… 的方式走完所有立方体，由于 $|A| = 14$，$|B| = 13$，要走完所有小立方体，则需由标 A 的立方体出发，回到标 A 的立方体，注意到中心立方体为 B，即该立方体不可能为起/终点。故不存在任何道路满足题意。