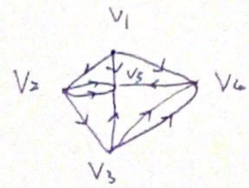
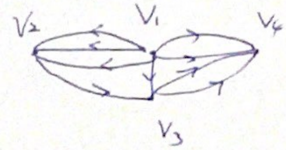
3.4. (a). 任取一个基本关联矩阵（边方向如右图）



$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ -1 & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & 1 & 1 & 1 & \\ & -1 & & & & & -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

此时树的总数为 $\det(B_5 \cdot B_5^T) = \det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 101$

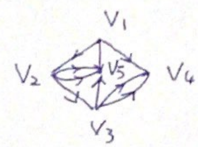
(b) 将 v_1, v_5 视为一点 v_1，任取一个基本关联矩阵（边方向如右图）



$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & -1 & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

必含 (v_1, v_5) 的树数目为 $\det(B_4 \cdot B_4^T) = \det\begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 44$.

(c) 任取一个关联矩阵，(边方向如右图，去掉边 (v_4, v_5))



$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ -1 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & -1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & & & & & -1 & -1 & \end{bmatrix}$$

不含 (v_4, v_5) 的树数目为 $\det(B_5 \cdot B_5^T) = \det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 60$

3.5. (a) 取关联矩阵 $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & & & 1 & 1 & & & -1 & & \\ & & & -1 & & 1 & -1 & & -1 & \\ & -1 & & & & -1 & 1 & & & -1 \\ & & -1 & & -1 & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；则 $\vec{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & & -1 & & \\ & & & -1 & & & -1 & & -1 & \\ & -1 & & & & -1 & & & & -1 \\ & & -1 & & -1 & & & & & \end{bmatrix}$

以 v_1 为根的根树数目为. $\det(\vec{B_1} \cdot B_1^T) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 24$

(b) 关联矩阵 $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & & 1 & 1 & & & -1 & & \\ & & -1 & & 1 & -1 & & -1 & \\ & -1 & & & & 1 & & & -1 \\ & & & -1 & -1 & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\vec{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & -1 & & \\ & & -1 & & & -1 & & -1 & \\ & -1 & & & & & & & -1 \\ & & & -1 & -1 & & & & \end{bmatrix}$

则以 v_1 为根，不含 (v_1, v_5) 的根树数目为 $\det(\vec{B_1} \cdot B_1^T) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 8$

(c) 令原图 G 中删去 (v_5, v_3) 和 (v_4, v_3)，

此时关联矩阵 $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & & & 1 & 1 & & -1 & \\ & & & -1 & & 1 & & \\ & -1 & & & & -1 & & -1 \\ & & -1 & & -1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\vec{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & -1 & \\ & & & -1 & & & & \\ & -1 & & & & -1 & & -1 \\ & & -1 & & -1 & & & \end{bmatrix}$

故必含 (v_2, v_3) 且以 v_1 为根的根树数目为 $\det(\vec{B_1} \cdot B_1^T) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 9$

清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：计01　姓名：容逸朗　编号：2020010869　科目：离散　第 2 页

11. 由定理 3.4.3，我们可以在 C' 中找出一个行列式非零的4阶矩阵，那么它必定是一棵余树，取 C' 中的 1235 行，有

$$C_{f_0}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix}\end{array}$$

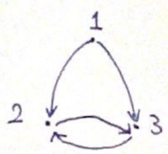
，此时 $e_1e_2e_3e_4$ 对应一棵余树（$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$）

对 C 进行初等行变换，有 $C_f=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=(I \quad C_{f_{12}})$

由定理 3.4.8，有

$$S_f=(S_{f_{11}} \quad I)=(-C_{f_{12}}^T \quad I)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.



关联矩阵 $B_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，此时 $\vec{B_1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

以 v_1 为根的根树有 $\det(\vec{B_1}\cdot B_1^T)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$

但 $\det(\vec{B_1}\cdot\vec{B_1}^T)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 3$，原题得证。

13. 考虑图G的生成树：[由于图删去任意一点仍是连通图，故删去此生成树后其他边也为连通图。]

① 对任意树，必定存在至少一个叶结点，记该点为 V_0，首先，将 V_0 的所有边割去，并记这些边为 S_0，对原生成树而言，该树仅被删去一条与叶子连结的边，对于 $V-\{V_0\}$ 的部分仍然连通，由于 V_0 所有边均被删去，因此 $\{V_0\}$ 与 $V-\{V_0\}$ 互不连通，故 S_0 为G的一个割集。

② 由于割集矩阵每一行均有偶数个1，故 S_0 为偶，即 V_0 度为偶，称 V_0 为"已计算"。

③ 考虑原生成树的一个非叶结点，若此点删去所有与之连接的"已计算"的点的边后，在生成树中度为1，可把此结点（记为 V_x），进行操作 ① 记 $V_1=\{V_x$，所有与 V_x 连接的"已计算"点$\}$，由①知 V_1 与 $V-V_1$ 互不连通，此时与 V_1 任意点相连的边构成的集合为G的割集，由于所有"已计算"的点度数为偶，且这一割集对应矩阵行有偶数个1，即 V_1 的所有边总和为偶数，由此知 V_x 度为偶。

④ 注意到一棵树在删去叶子后至少存在一个叶子，故我们可以不断找到符合 ③ 的结点进行操作，直至剩下一点，由于与其余点相关的边均被删去，此点被孤立，也为割集，由于图的总度数为偶及其他结点度数为偶，知此点度也为偶。

⑤ 由于所有点的度数为偶，由定理2.3.1知图G存在欧拉回路。