数学实验 · 实验报告6

计算机系　计01　容逸朗　2020010869

1　8-10 污水处理

1.1　问题分析和模型假设

题目已知工厂 1 上游的江水流量和污水浓度，国家标准规定的水的污染浓度、江水的自净系数、各个工厂的污水流量和浓度和使污水下降一个单位浓度所需的处理费用。

除此之外，还需要作如下假设：

1. 污水处理费用与污水处理前后的浓度差和污水流量成正比；
2. 上下游相邻工厂之间的江水不会受到其他污染，并会自净；
3. 居民点位于工厂正对面的位置，无偏移；
4. 污水排出后，瞬间完成融合。

1.2　模型建立

首先，记工厂 i 的上游江水浓度为 $P_{in,i}$，上游江水流量为 $W_{in,i}$；下游江水浓度为 $P_{out,i}$，下游江水流量为 $W_{out,i}$，工厂自身的污水流量为 w_i，污水（处理前）浓度为 ρ_i，（处理后）的浓度为 c_i，江水自净系数 k_i，污水厂处理系数 m_i。

由污水总量守恒：

$$\begin{gathered} P_{in,i} \cdot W_{in,i} + w_i \cdot c_i = P_{out,i} \cdot W_{out,i} \\ W_{out,i} = W_{in,i} + w_i \\ c_i \leq \rho_i \end{gathered} \tag{1}$$

对于上下游相邻工厂，又有：

$$\begin{gathered} W_{in,i+1} = W_{out,i} \\ P_{in,i+1} = P_{out,i} \cdot k_i \end{gathered} \tag{2}$$

污水处理总价为：

$$f = \sum_i w_i \cdot m_i \cdot (c_i - p_i) \tag{3}$$

对于问题 1，由 (2) 知污水经过一段距离后浓度需要会降低，因此只要保证离开污水厂后，与江水混合的浓度满足条件即可（记国家标准为 S）：

$$P_{out,i} \leq S \tag{4}$$

对于问题 2，则只需关注上游的污水浓度便可：

$$P_{in,i} \leq S \tag{5}$$

1.3 算法设计

已知工厂数为 $n=3$，工厂 1 的上游江水流量和浓度分别为 $W_{in,1}=1000, P_{in,1}=0.8$，工厂自身的污水流量 $w_i=5$，污水厂处理系数 $m_i=1$，第 $1-2, 2-3$ 工厂之间的江水自净系数分别为 $k_1=0.9, k_2=0.6$，三间工厂污水处理前浓度 $\rho_1=100, \rho_2=60, \rho_3=50$，国家污水标准 $S\leq 1$，现求：

$$\underset{c_i-\rho_i}{argmin}\sum_{i=1}^{3} 5\times 1\times(\rho_i-c_i) \tag{6}$$

综合 (1), (2) 有：

$$P_{out,i}=\begin{cases}\frac{P_{in,i}\cdot W_{in,i}+w_i\cdot c_i}{W_{in,i}+w_i}, & i=1\\ \frac{P_{out,i-1}\cdot k_{i-1}\cdot W_{out,i-1}+w_i\cdot c_i}{W_{in,i}+w_i}, & i\geq 2\end{cases} \tag{7}$$

代入数值有：

$$\begin{aligned} P_{out,1}&=\frac{1000\times 0.8+5\times c_1}{1000+5}\leq 1\\ P_{out,2}&=\frac{1005\times 0.9\times P_{out,1}+5\times c_2}{1005+5}\leq 1\\ P_{out,3}&=\frac{1010\times 0.6\times P_{out,2}+5\times c_3}{1010+5}\leq 1\end{aligned} \tag{8}$$

由于约束条件与目标函数皆为线性，故问题为线性规划问题，可以利用 LINGO 软件求解。

1.4 程序

```
1  MODEL:
2
3  sets:
4  var/1..3/:x, P;
5  endsets
6
7  MIN = 5 * (100- x(1) + 60 - x(2) + 50 - x(3));
8  x(1) <= 100;
9  x(2) <= 60;
10 x(3) <= 50;
11 P(1) = (1000 * 0.8 + 5 * x(1))/1005;
12 P(2) = (1005 * 0.9 * P(1) + 5 * x(2)) / 1010;
13 P(3) = (1015 * 0.6 * P(2) + 5 * x(3)) / 1015;
14 P(1) <= 1;
15 P(2) <= 1;
16 P(3) <= 1;
17
18 END
```

对于第 (2) 小问，将上面程序的 $14-16$ 行改为下式即可：

```
P(1) * 0.9 <= 1;
P(2) * 0.6 <= 1;
```

1.5 计算结果与分析

LINGO 判断题目是 LP 问题，符合假设。

对于第 (1) 问，解得：

$$f_{min} = 489.50, \quad c_1 = 41.0, \quad c_2 = 21.1, \quad c_3 = 50.0$$

其中第 $4, 8, 9$ 条起约束作用，即：$c_3 \le 50, P_{out,1} \le 1, P_{out,2} \le 1$ 。

对于第 (2) 问，解得：

$$f_{min} = 188.33, \quad c_1 = 63.33, \quad c_2 = 60.0, \quad c_3 = 50.0$$

其中第 $3, 4, 8$ 条起约束作用，即：$c_2 \le 60, c_3 \le 50, P_{in,2} \le 1$ 。

由 (1)(2) 的结果知，当只限制上游水质时，所需花费远少于限制所有河段水质的花费，这主要是得益于江水的净化机制，若净化效果减少则两者的差距会相对减少。

1.6 结论

限制所有河段水质时，最小花费 489.50 万元；只限制居民点上游水质时，最小花费为 183.33 万元。

2 9-4 液体混合

2.1 问题分析

首先可以根据题目给出的数据列出不等式组，然后解出非线性规划方程组即可。

2.2 模型假设与建立

不失一般性，假设原料甲乙丙的含硫量分别为 S_1, S_2, S_3， 由于生产工艺要求，需要先混合原料甲乙，记 x_i 为原料 i（甲乙简记为 $1, 2$）的用量，那么有混合后的浓度和质量分别为（假设混合后质量不变）：

$$\begin{gathered} \rho = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{x_1 + x_2} \\ y_1 = x_1 + x_2 \end{gathered} \tag{9}$$

记 $y_{i,j}$ 为原料 i （1 代表甲乙混合物，2 代表丙）用于生产产品 j （A, B 简记为 $1, 2$）的用量，同时产品 A, B 的含硫量不能超过 L_1, L_2 ，则有：

$$\begin{gathered} \frac{y_{1,j} \cdot \rho + y_{2,j} \cdot S_3}{y_{1,j} + y_{2,j}} \le L_j, \quad j = 1, 2 \\ y_{1,1} + y_{1,2} \le y_1 \end{gathered} \tag{10}$$

又甲乙丙的供应量不超过 Q_1, Q_2, Q_3， A, B 的最大市场需求量为 T_1, T_2 ，有：

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2} y_{i,j} \le T_j, \quad j=1,2 \\
x_1 \le Q_1 \\
x_2 \le Q_2 \\
y_{2,1}+y_{2,2} \le Q_3
\end{gathered} \tag{11}
$$

记原料甲乙丙的进货价分别为 m_1, m_2, m_3，产品 A, B 的售价为 p_1, p_2 ，则要求：

$$
max \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} p_j \cdot y_{i,j} - \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot x_i - m_3 \cdot (y_{2,1}+y_{2,2}) \tag{12}
$$

2.3 算法设计

已知甲乙丙的含硫量分别为 $S_1=3\%, S_2=1\%, S_3=2\%$，进货价分别为 $m_1=6, m_2=16, m_3=10$ (千元/吨)，产品 A, B 的含硫量不能超过 $L_1=2.5\%, L_2=1.5\%$ ，售价为 $p_1=9, p_2=15$（千元/吨），甲乙丙的供应量不超过 $Q_1=Q_2=Q_3\le 500$ (吨)，A, B 的最大市场需求量为 $T_1=100, T_2=200$ (吨)，那么有：

$$
\begin{cases}
\rho = \frac{3x_1+1x_2}{x_1+x_2} \\
x_1 \le 500 \\
x_2 \le 500 \\
y_{2,1}+y_{2,2} \le 500 \\
y_{1,1}+y_{1,2} \le x_1+x_2 \\
y_{1,1}\cdot(\rho-2.5)+y_{2,1}\cdot(S_3-2.5) \le 0 \\
y_{1,2}\cdot(\rho-1.5)+y_{2,2}\cdot(S_3-1.5) \le 0 \\
y_{1,1}+y_{2,1} \le 100 \\
y_{1,2}+y_{2,2} \le 200
\end{cases} \tag{13}
$$

然后根据 (13) 的条件解出：

$$
\underset{x_i, y_{i,j}}{max}\,(9(y_{1,1}+y_{2,1})+15(y_{1,2}+y_{2,2})-6x_1-16x_2-10(y_{2,1}+y_{2,2})) \tag{14}
$$

第 (2) 小问可将 (13) 中的 $y_{1,1}+y_{2,1}\le 100$ 改为 $y_{1,1}+y_{2,1}\le 600$；

第 (3) 小问可将 (14) 式改为：

$$
\underset{x_i, y_{i,j}}{max}\,(9(y_{1,1}+y_{2,1})+15(y_{1,2}+y_{2,2})-6x_1-13x_2-10(y_{2,1}+y_{2,2})) \tag{15}
$$

受限于 (12) 中的 ρ ，使得问题不能转化为线性问题求解，因此只能利用 LINGO 求解非线性规划问题。

2.4 程序

（下面的程序需要开启 `global slover`）

```
model:

sets:
var/1..2/:x;
a/1..2/:;
b/1..2/:;
C(a, b):y;
```

```
8  endsets
9
10 max = 9 * (y(1,1) + y(2,1)) + 15 * (y(1,2) + y(2,2)) - 6 * x(1) - 16 * x(2)
   - 10 * (y(2,1) + y(2,2));
11 rho = (0.03 * x(1) + 0.01 * x(2)) / (x(1) + x(2));
12 x(1) <= 500;
13 x(2) <= 500;
14 y(2,1) + y(2,2) <= 500;
15 y(1,1) + y(1,2) <= x(1) + x(2);
16 y(1,1) * (rho - 0.025) - y(2,1) * 0.005 <= 0;
17 y(1,2) * (rho - 0.015) + y(2,2) * 0.005 <= 0;
18 y(1,1) + y(2,1) <= 100;
19 y(1,2) + y(2,2) <= 200;
20 end
```

对于第 (2) 小问，将上面程序的 18 行改为下式即可：

```
y(1,1) + y(2,1) <= 600;
```

对于第 (3) 小问，将上面程序的 10 行改为下式即可：

```
max = 9 * (y(1,1) + y(2,1)) + 15 * (y(1,2) + y(2,2)) - 6 * x(1) - 13 * x(2)
- 10 * (y(2,1) + y(2,2));
```

2.5 计算结果

LINGO 求解时判断模型类型为 NLP，符合讨论。

2.5.1 第 (1) 问

对于第 (1) 问，解得：

$$f_{min} = 400.00, \quad \rho = 1\%, \quad x_1 = 0.0, \quad x_2 = 100.0,$$
$$y_{1,1} = 0.0, \quad y_{1,2} = 100.0, \quad y_{2,1} = 0.0, \quad y_{2,2} = 100.0$$

其中第 10 条起约束作用，即：$y_{1,2} + y_{2,2} \leq 200$。

2.5.2 第 (2) 问

对于第 (2) 问，解得：

$$f_{min} = 600.00, \quad \rho = 3\%, \quad x_1 = 300.0, \quad x_2 = 0.0,$$
$$y_{1,1} = 300.0, \quad y_{1,2} = 0.0, \quad y_{2,1} = 300.0, \quad y_{2,2} = 0.0$$

其中第 9 条起约束作用，即：$y_{1,1} + y_{2,1} \leq 600$。

2.5.3 第 $(3)-(1)$ 问

对于第 (3) – (1) 问，解得：

$$
\begin{gathered}
f_{min}=750.00, \quad \rho=1.5\%, \quad x_1=50.0, \quad x_2=150.0, \\
y_{1,1}=0.0, \quad y_{1,2}=200.0, \quad y_{2,1}=0.0, \quad y_{2,2}=0.0
\end{gathered}
$$

其中第 10 条起约束作用，即：$y_{1,2}+y_{2,2}\leq 200$。

2.5.4 第 $(3)-(2)$ 问

对于第 (3) – (2) 问，解得：

$$
\begin{gathered}
f_{min}=750.00, \quad \rho=1.5\%, \quad x_1=50.0, \quad x_2=150.0, \\
y_{1,1}=0.0, \quad y_{1,2}=200.0, \quad y_{2,1}=0.0, \quad y_{2,2}=0.0
\end{gathered}
$$

其中第 10 条起约束作用，即：$y_{1,2}+y_{2,2}\leq 200$。又解：

$$
\begin{gathered}
f_{min}=750.00, \quad \rho=2.5\%, \quad x_1=450.0, \quad x_2=150.0, \\
y_{1,1}=600.0, \quad y_{1,2}=0.0, \quad y_{2,1}=0.0, \quad y_{2,2}=0.0
\end{gathered}
$$

其中第 9 条起约束作用，即：$y_{1,1}+y_{2,1}\leq 600$ 。

2.6 分析

从上面的数据可见，当市场需求相若时，生产 B 的利润较 A 为高，但当 A 的需求远大于 B 时则可以考虑生产产品 A，以达到薄利多销的效果。若原料乙的进货价降低，则生产利润会显著提升，这是因为乙的含硫量较低，是生产单价较高的 B 的必需品，而 B 的利润较 A 为高的原因。（从第 (3) – (2) 问可知，生产 600 吨的 A 的收益才与 200 吨 B 相同）

2.7 结论

第 (1) 问：购买原料乙和丙各 100 吨，然后生产 200 吨 B，此时最大利润为 40 万元；

第 (2) 问：购买原料甲和丙各 300 吨，然后生产 600 吨 A，此时最大利润为 60 万元；

第 (3) – (1) 问：购买原料甲 50 吨、乙 150 吨，然后生产 200 吨 B，此时最大利润为 75 万元；

第 (3) – (2) 问：购买原料甲 50 吨、乙 150 吨，然后生产 200 吨 B；或者购买原料甲 450 吨、乙 150 吨，然后生产 600 吨 A 均可取得最大利润，为 75 万元。

3 9-8 股票投资

3.1 问题分析和模型假设

记 $x_{i,j}$ 为股票 i （$1,2,3$ 分别代表 A,B,C）在第 t 年的收益率，那么 1955 年的期望收益可以通过 $X_i(i=1,2,3)$ 的期望和方差来估算收益（和风险）：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= aE(X_1)+bE(X_2)+cE(X_3) \\
D(X) &= a^2D(X_1)+b^2D(X_2)+c^2D(X_3)+2abCov(X_1,X_2) \\
&\quad +2bcCov(X_2,X_3)+2caCov(X_3,X_1)
\end{aligned} \tag{16}
$$

上式中 a,b,c 为三种股票的配比，满足下面的条件：

$$\begin{gathered} a+b+c=1 \\ 0 \leq a,b,c \leq 1 \end{gathered} \tag{17}$$

题目要求至少得到 $T\%$ 的收益，因此我们的目标是求出在此条件下的最小风险，也就是：

$$\begin{gathered} 1+T\% \leq E(X) \\ \underset{a,b,c}{\operatorname{argmin}} D(X) \end{gathered} \tag{18}$$

3.2 算法设计

根据题目给出的 $x_{i,j}$ 可以算出对应的期望：

$$\begin{bmatrix} 1.089083 & 1.213666 & 1.234583 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵为：

$$Cov = \begin{bmatrix} 0.010807 & 0.012407 & 0.013075 \\ 0.012407 & 0.058391 & 0.055426 \\ 0.013075 & 0.055426 & 0.094226 \end{bmatrix}$$

而题目给出 $T=15$ ，故 (18) 式变为：

$$\begin{gathered} 1.15 \leq E(X) \\ \underset{a,b,c}{\operatorname{argmin}} D(X) \end{gathered} \tag{19}$$

第 (1) 问的期望年收益率为 $10\% - 100\%$ ，故可以将 (18) 中的条件改为：

$$1.1 \leq E(X) \leq 2.0 \tag{20}$$

第 (2) 问增加了一种无风险的投资方式 D，其中 $D(X_4)=0, E(X_4)=1.05$ ，更改条件 (17) 为：

$$\begin{gathered} a+b+c+d=1 \\ 1.15 \leq E(X)+dE(X_4) \\ \underset{a,b,c,d}{\operatorname{argmin}} D(X+d(X_4)) = \underset{a,b,c,d}{\operatorname{argmin}} D(X) \end{gathered} \tag{21}$$

第 (3) 问的初始持仓为 $50\%, 35\%, 15\%$，若需要考虑买卖股票 i 时的手续费，不妨记买入 i 的量为 x_i ，卖出量为 y_i ，此时有：

$$\begin{gathered} a+b+c+0.01\sum_{i=1}^{3}(x_i+y_i)=1 \\ a=0.5+x_1-y_1 \\ b=0.35+x_2-y_2 \\ c=0.15+x_3-y_3 \end{gathered} \tag{22}$$

注意到约束条件为线性，而目标方程则为二次式，故问题需要用二次规划的方式求解，求解部分用 LINGO 较优，作图则可以利用 matlab 完成 。

3.3 程序

先计算方差和协方差矩阵:

```
format long

% 模型参数
x = [1.3000 1.2250 1.1490;
    1.1030 1.2900 1.2600;
    1.2160 1.2160 1.4190;
    0.9540 0.7280 0.9220;
    0.9290 1.1440 1.1690;
    1.0560 1.1070 0.9650;
    1.0380 1.3210 1.1330;
    1.0890 1.3050 1.7320;
    1.0900 1.1950 1.0210;
    1.0830 1.3900 1.1310;
    1.0350 0.9280 1.0060;
    1.1760 1.7150 1.9080];

% 计算协方差和期望值
cov(x)
mean(x)
```

3.3.1 原题

```
model:
min = a^2 * 0.010807 + b^2 * 0.058392 + c^2 * 0.094227
+ 2*a*b * 0.012407 + 2*b*c * 0.055426 + 2*c*a * 0.013075;
1.089083 * a + 1.213666 * b + 1.234583 * c >= 1.15;
a + b + c = 1;
end
```

3.3.2 第 (1) 问

```
format long

% 模型参数
x = [1.3000 1.2250 1.1490;
    1.1030 1.2900 1.2600;
    1.2160 1.2160 1.4190;
    0.9540 0.7280 0.9220;
    0.9290 1.1440 1.1690;
    1.0560 1.1070 0.9650;
    1.0380 1.3210 1.1330;
```

```matlab
    1.0890 1.3050 1.7320;
    1.0900 1.1950 1.0210;
    1.0830 1.3900 1.1310;
    1.0350 0.9280 1.0060;
    1.1760 1.7150 1.9080];

% 初始值
H = 2 * cov(x);
A = -mean(x);
v = 0.1: 0.001: 0.235;

ans = [];
Dx = [];

% 解二次规划
opt = optimoptions(@quadprog, 'Display', 'off');
for i = v
    b = -1 - i;
    x = quadprog(H, [0 0 0], A, b, [1 1 1], 1, [0 0 0], [1, 1, 1], [], opt);
    % 计算方差
    d = x' * H * x / 2;
    Dx = [Dx d];
    ans = [ans x];
end

% 画图
figure()
hold on
l1 = plot(v, ans(1, :), 'DisplayName', 'A');
l2 = plot(v, ans(2, :), 'DisplayName', 'B');
l3 = plot(v, ans(3, :), 'DisplayName', 'C');
xlabel('期望收益');
ylabel('股票分配比例');
legend('Location', 'northeast');

figure()
hold on
plot(v, Dx);
xlabel('期望收益');
ylabel('风险（方差）');
```

3.3.3 第 (2) 问

```
model:
min = a^2 * 0.010807 + b^2 * 0.058392 + c^2 * 0.094227
+ 2*a*b * 0.012407 + 2*b*c * 0.055426 + 2*c*a * 0.013075;
1.089083 * a + 1.213666 * b + 1.234583 * c + 1.05 * d >= 1.15;
a + b + c + d = 1;
end
```

3.3.4 第 (3) 问

```
model:
min = a^2 * 0.010807 + b^2 * 0.058392 + c^2 * 0.094227
+ 2*a*b * 0.012407 + 2*b*c * 0.055426 + 2*c*a * 0.013075;
1.089083 * a + 1.213666 * b + 1.234583 * c >= 1.15;
a + b + c + 0.01 * (x1 + x2 + x3 + y1 + y2 + y3) = 1;
a = 0.5 + x1 - y1;
b = 0.35 + x2 - y2;
c = 0.15 + x3 - y3;
end
```

3.4 计算结果及讨论

LINGO 判断模型类型为 QP，符合假设。

3.4.1 原题

利用 (17)(19) 式，可知在收益至少为 15% 下的最小风险和对应取值如下：

$$minD(X) = 0.02241, \quad a = 53.01\%, \quad b = 35.65\%, \quad c = 11.34\%$$

从中可知，虽然股票 B, C 的期望收益（$21\%, 23\%$）比股票 A 的 8% 更高，但由于前两者的风险（方差）更大，因此在取得特定的收益时会购买更多的 A 来平衡风险。

3.4.2 第 (1) 问

需要注意的是，虽然题目的要求是求出 $10\% - 100\%$ 期望收益时的风险和投置配比，但是题给的三种股票的最大期望值也不过是股票 C 的 23.5%，因此预期收益超过这一数字的话是没有必要讨论的。

在限定收益为 $10\% - 23.5\%$ 时，我们可以得到下面的投资分配图：

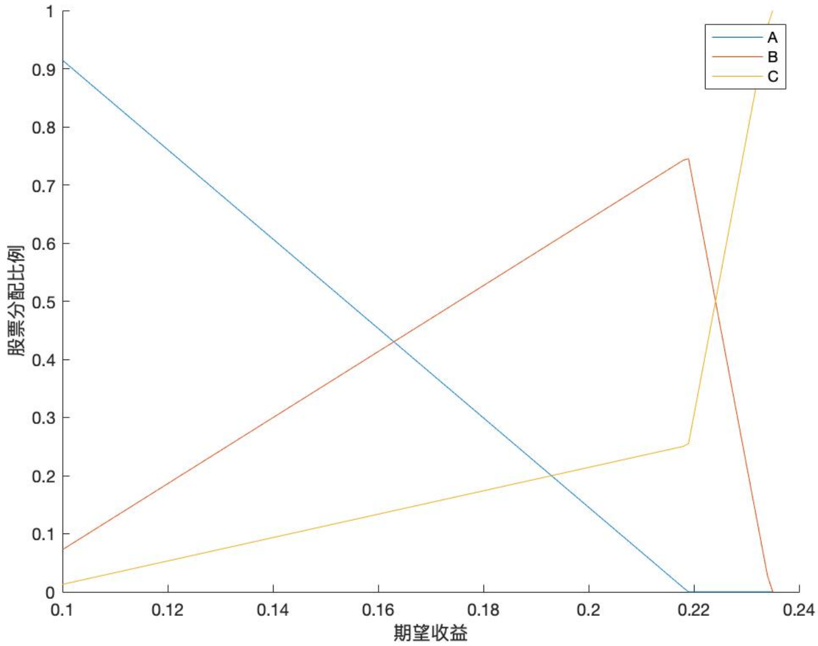

图1　不同预期收益下的投资分配图

而投资风险变化则如下图示:

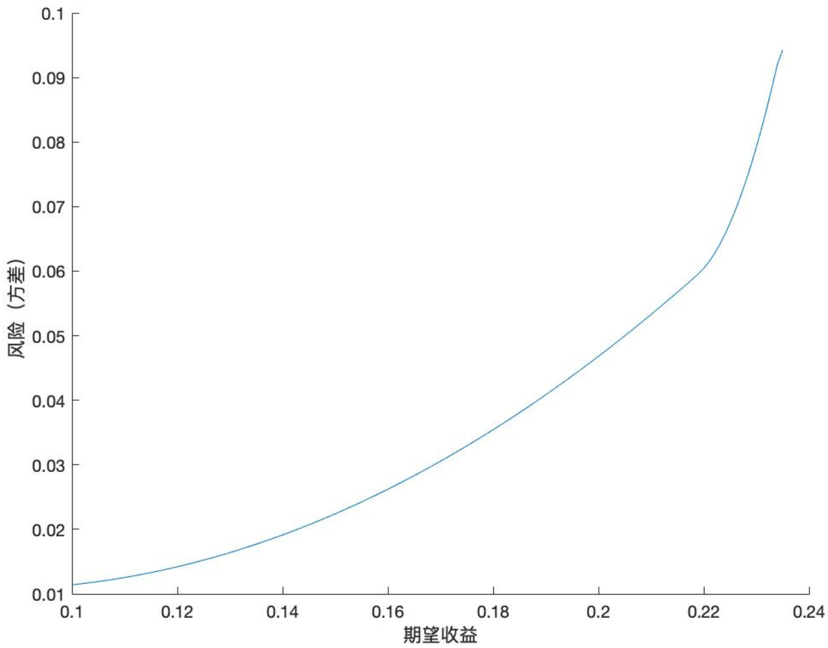

图2　不同预期收益下的投资风险图

从图 1 中可见，在预期收益率越低的情况下，投资者应购买更多的股票 A 来降低风险，不过当预期收益率变高的情况下，需要减少股票 A 的配比并提升股票 B 和 C 的比例以获得理想的收益，当预期收益率超过股票 B 的期望值时，代表 B 的曲线急速向下，而代表 C 的曲线则急速上升，同时 A 的占比则下降为零。这是为了得到预想中的收益所需的策略，但从图 2 中可见，这样做的后果便是风险的快速上升。当然，从生活常识而言，高风险高回报是十分合理的。

3.4.3 第 (2) 问

利用 (21) 式，可知最小风险和对应取值如下：

$$minD(X) = 0.02080, \quad a = 8.69\%, \quad b = 42.85\%, \quad c = 14.34\%, \quad d = 34.12\%$$

虽然 D 的收益比 A 低，但由于 D 是零风险的，因此相较 3.4.1 的讨论，新的投置组合可以购买更多的高风险产品（如 B, C）来搏取更高的收益，同时通过配置更多的低风险产品 D 来平衡风险。

3.4.4 第 (3) 问

利用 (19)(22) 式，可知最小风险和对应取值如下：

$$\begin{gathered} minD(X) = 0.02261, \quad a = 52.647\%, \quad b = 35.000\%, \quad c = 12.299\%, \\ x_1 = 2.647\%, \quad y_3 = 2.70\%, \quad x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0 \end{gathered}$$

也就是说，应当卖出相当于投资总额（含手续费） 2.7% 的股票 C ，买入相当于投资总额（含手续费） 2.647% 的股票 A 。整体而言，即使换手需要手续费，最优的投置组合仍然更偏好低风险的股票 A 。

3.5 结论

1. 当期望收益率为 15% 时，投资股票 A, B, C 的比例分别为 $53.01\%, 35.65\%, 11.34\%$ 的风险最低；
2. 当期望收益率为 $10\% - 100\%$ 时（应不超过 23.5%），投资组合如图 1 所示，整体风险的变化如图 2 所示，整体是随着期望收益的提速而不断上升的；
3. 若出现无风险的投资方式时，投资股票 A, B, C 和其他投资 D 的比例应为 $8.69\%, 42.85\%, 14.34\%, 34.12\%$；
4. 若交易时收取交易额的 1% 为手续费，在初始持仓为 $50\%, 35\%, 15\%$ 的情况下，则应该卖出相当于投资总额（含手续费） 2.7% 的股票 C ，同时买入 2.647% 的股票 A 可以使投资风险降至最低。