数学实验·实验报告7

计算机系　计01　容逸朗　2020010869

10-8 服务员聘用

问题分析和模型假设

题目给出了全时服务员和半时服务员的工作时间和对应报酬，以及每个时段需要的人数，然后要求出满足上述条件下花费的最小金额。

模型需要作如下假设：

1. 可雇用的服务员人数无限
2. 工作、午饭的起始时间都在整点

模型建立

全时服务员的工作时间可以按午饭时间不同分为两种，第一种是 9am-12pm, 1pm-5pm，第二种是 9am-1pm, 2pm-5pm，这里我们分别记 $x_1, x_2 (\geq 0)$ 为雇用这两种全时服务员的人数。

半时服务员的工作时间则可以按照上班时间分为 5 类，即开始时间为 9am, 10am, 11am, 12pm, 1pm，分别记 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (\geq 0)$ 为雇用这 5 种半时服务员的人数。

在上面的假设下，我们要求：

$$\min f = 100 \sum_{i=1}^{2} x_i + 40 \sum_{i=1}^{5} y_i \tag{1}$$

约束条件为：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 &\geq 4 \\ x_2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\geq 6 \\ x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 + y_4 + y_5 &\geq 8 \\ x_1 + x_2 + y_5 &\geq 8 \end{aligned} \tag{2}$$

1. 若一天最多僱用 3 个半时服务员，则要加上约束条件：

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 3 \tag{3}$$

2. 若不能僱用半时服务员，则要加上约束条件：

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \tag{4}$$

3. 若无额外限制，则不需加上其他条件。

算法设计

问题为整数规划问题，可以利用 **LINGO** 软件求解。

程序

对于第 1 问：

```
1  MODEL:
2  
3  min = 100 * (x1 + x2) + 40 * (y1 + y2 + y3 + y4 + y5);
4  x1 + x2 + y1 >= 4;
5  x1 + x2 + y1 + y2 >= 3;
6  x1 + x2 + y1 + y2 + y3 >= 4;
7  x2 + y1 + y2 + y3 + y4 >= 6;
8  x1 + y2 + y3 + y4 + y5 >= 5;
9  x1 + x2 + y3 + y4 + y5 >= 6;
10 x1 + x2 + y4 + y5 >= 8;
11 x1 + x2 + y5 >= 8;
12 y1 + y2 + y3 + y4 + y5 <= 3;
13 @gin(x1); @gin(x2);
14 @gin(y1); @gin(y2);
15 @gin(y3); @gin(y4);
16 @gin(y5);
17 
18 END
```

对于第 2 问，将上面程序第 12 行改为下式即可：

```
y1 + y2 + y3 + y4 + y5 = 0;
```

对于第 3 问，删去上面程序第 12 行即可。

计算结果

LINGO 判断题目是 **PILP** 问题，符合假设。

1. 若一天最多雇用 3 个半时服务员，解得：

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 1, \quad y_5 = 2, \quad y_1 = y_3 = y_4 = 0$$

   此时最小费用为 820 元，其中 12pm 和 1pm 以及半时服务员的人数限制均起约束作用。

2. 若不能雇用半时服务员，则有：

$$x_1 = 5, \quad x2 = 6, \quad y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$$

   此时最小费用为 1100 元，其中 12pm 和 1pm 以及半时服务员的人数限制均起约束作用。

3. 若无额外限制，则有：

$$y_1 = 4, \quad y_4 = 2, \quad y_5 = 8, \quad x_1 = x_2 = y_2 = y_3 = 0$$

   此时最小费用为 560 元，其中 9am, 11am, 12pm 以及 4pm 的人数限制均起约束作用。

分析

从上面的结果可知，以半时服务员的限额为 3 个的 820 元为基础。若不允许雇用半时服务员，则需要增加 280 元的成本。若半时服务员的雇额无上限，则可以减少 260 元的成本。

全时服务员由于中午需要一小时休息，因此他们一天只会工作 7 小时，也就是说他们的时薪需要 14.33 元；作为对比，半时服务员的时薪仅为 10 元。需要注意的是，我们可以分别雇用 1 个 9am 和 1pm 开始工作的半时服务员，这样相当于用更低的价格得到一个不用午休的全时服务员，因此，在半时服务员的雇额无上限时，就不需要雇用全时服务员了。

结论

1. 若一天最多雇用 3 个半时服务员，则最小费用为 820 元，分别雇用 2 个中午休息 12pm-1pm 的全时服务员、5 个中午休息 1pm-2pm 的全时服务员、1 个 10am 上班的半时服务员和 2 个 1pm 上班的半时服务员。
2. 若不能雇用半时服务员，则最小费用为 1100 元，比第一种情况高 280 元，这时雇用 5 个中午休息 12pm-1pm 的全时服务员、6 个中午休息 1pm-2pm 的全时服务员。
3. 若半时服务员的雇额无上限，则最小费用为 560 元，比第一种情况低 260 元，这时需要分别雇用 4, 2, 8 个 9am, 12pm, 1pm 上班的半时服务员。

10-9 原油采购与加工

问题分析和模型假设

题目给出了公司现有的原油量，可供购买的原油量及价格，成品油的售出价格及对应的最少含油量，这时需要列出对应模型并按照连续规划与整数规划两种方法求解。

模型需要作如下假设：

1. 原油混合后总质量不变

模型建立

记公司现有原油 A, B 各 x_1, x_2 吨，汽油甲由 a_1, a_2 吨 A, B 组成，汽油乙由 b_1, b_2 吨 A, B 组成，购买的原油 A 分别为 m_1, m_2, m_3 吨。（其中 m_1, m_2, m_3 分别对应 3 种价格的油料购买量）

这时根据条件，有：

$$\begin{gathered} x_1 \leq 500 \\ x_2 \leq 1000 \\ \frac{a_1}{a_1+a_2} \geq 0.5 \\ \frac{b_1}{b_1+b_2} \geq 0.6 \end{gathered} \tag{5}$$

原料的量不应小于产品的重量：

$$\begin{gathered} a_1+b_1 \leq x_1+m_1+m_2+m_3 \\ a_2+b_2 \leq x_2 \end{gathered} \tag{6}$$

购买原油量的限制：

$$
\begin{aligned}
m_1 &\leq 500 \\
m_2 &\leq 500 \\
m_3 &\leq 500 \\
m_2(m_1 - 500) &= 0 \\
m_3(m_2 - 500) &= 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

我们要求：

$$
\max f = 4800 \times (a_1 + a_2) + 5600 \times (b_1 + b_2) - 10000 m_1 - 8000 m_2 - 6000 m_3 \tag{8}
$$

算法设计

问题为连续规划和整数规划问题，可以直接利用 `LINGO` 软件求解。

程序

1. 连续模型代码

```
1  model:
2  
3  max = 4800 * (a1 + a2) + 5600 * (b1 + b2) - 10000 * m1 - 8000 * m2 - 6000 * m3;
4  x1 <= 500;
5  x2 <= 1000;
6  0.5 * a1 >= 0.5 * a2;
7  0.4 * b1 >= 0.6 * b2;
8  a1 + b1 <= x1 + m1 + m2 + m3;
9  a2 + b2 <= x2;
10 m1 <= 500;
11 m2 <= 500;
12 m3 <= 500;
13 m2 * (m1 - 500) = 0;
14 m3 * (m2 - 500) = 0;
15 
16 end
```

2. 整数模型代码

在上方代码的第 15 行中加入下面代码：

```
@gin(a1); @gin(a2);
@gin(b1); @gin(b2);
@gin(x1); @gin(x2);
@gin(m1); @gin(m2); @gin(m3);
```

计算结果

1. 使用连续模型求解时，`LINGO` 判断题目是 `QP` 问题，符合假设。此时各变数为：

$$
a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = 1500, \quad b_2 = 1000, \quad m_1 = m_2 = 500, \quad m_3 = 0
$$

此时总收益为 500 万元，此时仅有 $m_3 \leq 500$ 的松驰变量非 0。

2. 使用整数模型求解时，`LINGO` 判断题目是 `PIQP` 问题，符合假设。此时各变数为：

$$
a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = 1500, \quad b_2 = 1000, \quad m_1 = m_2 = 500, \quad m_3 = 0
$$

此时总收益为 500 万元，此时仅有 $m_3 \leq 500$ 的松驰变量非 0。

分析

模型在取到最优解时，大部分松驰变量都为 0，从等式对应的物理意义而言，应当使用所有原油库存，且生产的汽油甲和乙只需满足最低原料比例（50%, 60%）即可。

从上面的结果可知，应当生产尽量多的汽油乙而不生产汽油甲，这是因为原油 B 的数量有限，故生产原油 B 占比较低的汽油乙可以生产比汽油甲更多的量，注意到乙的利润比甲更高，因此使用所有原油库存并购买更多的原油 A 来生产汽油乙是十分合理的。

结论

该公司应购买 1000 吨原油 A，并利用所有原油库存（500 吨原油 A 和 1000 吨原油 B）来生产 2500 吨的汽油乙，最大利润为 500 万元。

10-11 钢管下料

问题分析和模型假设

题目是典型的钢管下料问题，已知需要的钢管长度，原料钢管的长度，要求满足上述条件的最小费用。

模型需要作如下假设：

1. 若切割频率相同，则增加的费用仍然按规律变化（即一个增加 x，另一个增加 x + 1）
2. 假设每根原料钢管的价格为 1 个单位

模型建立

记原料钢管的长度为 L ，余料的长度不超过 R，需要的钢管长度分别为 l_1, l_2, l_3, l_4 ，分别需要 n_1, n_2, n_3, n_4 根。对于第 i 种切割方式，分别切割出 a_{ij} 根长度为 l_j 的钢管，并且使用这种切割方式的次数为 u_i，那么根据题设有：

$$\min f = \sum_{i=1}^{4} u_i \times (1 + 0.1i) \tag{9}$$

这里假设：

$$u_i \geq u_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{10}$$

对于每种切割方式，有如下约束条件：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \cdot l_j \leq L, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ L - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \cdot l_j \leq R, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{11}$$

为了保证切割的总根数符合条件：

$$\sum_{i=1}^{4} u_i \cdot a_{ij} \geq n_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

又因为一根钢管最多生产 5 根产品：

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} \leq 5, \quad i = 1,2,3,4 \tag{13}$$

算法设计

首先将题给条件 $L = 1850, R = 100, l = [290, 315, 350, 455], n = [15, 28, 21, 30]$ 代入上面的式子中，然后利用 **LINGO** 求解。

需要注意，对于变量数量十分多的模型而言，需要增加额外条件以降低求解的时间：

我们知道，钢管使用的下界为：

$$\left\lceil \frac{15 \times 290 + 28 \times 315 + 21 \times 350 + 30 \times 455}{1850} \right\rceil = 19$$

一个可行的上界为：

$$\left\lceil \frac{15}{\left\lfloor \frac{1850}{290} \right\rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{28}{\left\lfloor \frac{1850}{315} \right\rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{21}{\left\lfloor \frac{1850}{350} \right\rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{30}{\left\lfloor \frac{1850}{455} \right\rfloor} \right\rceil = 22$$

程序

```
model:

sets:
  t/ 1..3/:;
  col/ 1..4/: l, n, c, u;
  link(col, col): a;
endsets

data:
  l = 290 315 350 455;
  n = 15 28 21 30;
  c = 1.1 1.2 1.3 1.4;
  _L = 1850;
  _R = 100;
enddata

min = @sum(col(i): c(i) * u(i));
  @for(t(i): u(i) > u(i + 1));
  @for(col(i): @sum(col(j): a(i,j) * l(j)) <= _L);
  @for(col(i): @sum(col(j): a(i,j) * l(j)) >= _L - _R);
  @for(col(j): @sum(col(i): a(i,j) * u(i)) >= n(j));
  @for(col(i): @sum(col(j): a(i,j)) <= 5);
  @for(col(i): @gin(u(i)));
  @for(link(i, j): @gin(a(i, j)));
  @sum(col(i): u(i)) >= 19;
  @sum(col(i): u(i)) <= 22;
end
```

计算结果

LINGO 判断题目是 **PIQP** 问题，符合猜想。

方案	l=290	l=315	l=350	l=455	使用次数
1	1	2	0	2	14
2	0	0	5	0	4
3	2	0	1	2	1
4	0	0	0	4	0

此时需要相当于 21.5 条钢管的总价的材料和切割费用。

分析

注意到上式给出的解共利用了 19 根钢管，这也是理论最小值的数字。

若去掉上、下界（程序对应的 25, 26 行），那么算法的求解速度是不可接受的。在本题中使用约束条件，可以使有效的解范围大大缩小，从而加快求解的时间。

结论

最小的费用相当于 21.5 条钢管的总价，方案为：

1. 1 根 290mm, 2 根 315mm, 2 根 455mm
2. 5 根 350mm
3. 2 根 290mm, 1 根 350mm, 2 根 455mm

最优解中有 14 根钢管采用切割方案 1、4 根钢管采用切割方案 2、1 根钢管采用切割方案 3。