清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：计01　姓名：容逸朗　编号：2020010869　科目：概统　第 1 页

1. 记 $X$ 为某一页的错误数量的随机变量.

则 $P(X=k)=\binom{200}{k}\cdot\left(\frac{1}{300}\right)^k\left(1-\frac{1}{300}\right)^{200-k}=\binom{200}{k}\cdot\left(\frac{\alpha}{200}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{200}\right)^{200-k}$，$\alpha=\frac{2}{3}$

由 Poisson 定律，$P(X=k)\approx\pi_k\left(\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k!}$

故 $P(X\geq 2)=1-P(X=1)-P(X=0)\approx 1-e^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1!}-e^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^0}{0!}=1-\frac{5}{3}\cdot e^{-\frac{2}{3}}$

2. 记 $X$ 为某个班用左手写字的学生数.

则 $P(X=k)=\binom{25}{k}\left(\frac{4}{100}\right)^k\left(1-\frac{4}{100}\right)^{25-k}=\binom{25}{k}\left(\frac{1}{25}\right)^k\left(1-\frac{1}{25}\right)^{25-k}\approx\pi_k(1)$

故 $P(X=0)=\binom{25}{0}\left(\frac{4}{100}\right)^0\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)^{25}=\left(\frac{24}{25}\right)^{25}\approx e^{-1}\cdot\frac{1^0}{0!}=e^{-1}$

3. 记 $X$：掷出六个面的情况

则 $P(X=k)=\binom{200}{k}\cdot\left(\frac{6!}{6^6}\right)^k\left(1-\frac{6!}{6^6}\right)^{200-k}=\binom{200}{k}\left(\frac{5}{324}\right)^k\left(1-\frac{5}{324}\right)^{200-k}=\binom{200}{k}\left(\frac{\alpha}{200}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{200}\right)^{200-k}$，$\alpha=\frac{1000}{324}$

故 $P(X=k)\approx\pi_k\left(\frac{1000}{324}\right)=e^{-\frac{1000}{324}}\cdot\frac{\left(\frac{1000}{324}\right)^k}{k!}$，$k=0,1,2,3,4,5$.

6. 注意到 $B_k(n;p)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$，则 $\frac{B_{k+1}(n;p)}{B_k(n;p)}=\frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}=\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$

若 $\frac{B_{k+1}(n;p)}{B_k(n;p)}\leq 1$，则 $B_k(n;p)$ 为最大值，此时有 $\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}\leq 1\Rightarrow k\geq np+p-1=\lfloor(n+1)p\rfloor$；($(n+1)p$ 不是整数.

当 $(n+1)p$ 为整数时，$k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$ 取到最大值（此时 $k=(n+1)p-1$，故 $B_{k+1}(n;p)=B_k(n;p)$，均为最大）.

否则，$k=\lfloor(n+1)p\rfloor$ 取最大值.

7. 当 $\frac{\pi_{k+1}(\alpha)}{\pi_k(\alpha)}\leq 1$，即 $\frac{e^{-\alpha}\cdot\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}}=\frac{\alpha}{k+1}\leq 1\Rightarrow k\geq\alpha-1=\lfloor\alpha\rfloor$ 时有最大值（$\alpha$ 非整数）

特别地，若 $\alpha$ 为整数，则 $k=\alpha$ 和 $k=\alpha-1$ 均可取到最大值（上式等号均成立，有 $\pi_\alpha(\alpha)=\pi_{\alpha-1}(\alpha)$）.

8. $$E(e^{-\lambda X})=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=c+kh)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda(c+kh)}\cdot\pi_k(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda(c+kh)}\cdot e^{-\alpha}\cdot\frac{\alpha^k}{k!}$$

$$=e^{-\alpha-\lambda c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdot e^{-\lambda h})^k}{k!}=e^{-\alpha-\lambda c}\cdot e^{\alpha\cdot e^{-\lambda h}}=e^{-\lambda c+\alpha(e^{-\lambda h}-1)}$$

9. 记分布为 $\pi_k(\alpha)$ 的随机变量为 $X$，$\pi_k(\beta)$ 的随机变量为 $Y$.

则 $$c_n=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\cdot P(Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\pi_k(\alpha)\pi_{n-k}(\beta)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\alpha}\cdot\frac{\alpha^k}{k!}\cdot e^{-\beta}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{e^{-\alpha}e^{-\beta}}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot\alpha^k\beta^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{n!}(\alpha+\beta)^n$$

$$=\pi_n(\alpha+\beta)$$

故令 $n=k$，$\pi_k(\alpha+\beta)$ 为所求.