班级：计01　姓名：[illegible]　编号：2020010869　科目：离散　

1. 反证法，假设每个域的边界数都大于等于5，此时有：$5d \le 2m$

又因为 $d = m-n+2$，故 $5m-5n+10 \le 2m \Rightarrow 3m \le 5n-10$

注意到 $d<12$，即 $m-n+2<12$，故 $m-n<10$，与上式相加并整理得 $2m<3n$

另一方面，由于每点的度 $d(v_i) \ge 3$，故 $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 3n$ 即 $2m \ge 3n$，矛盾！

故必存在至少一个域的边界数小于5.

3. 反证法，假设G和$\bar{G}$都是平面图，此时 $m_G \le 3n-6$，$m_{\bar{G}} \le 3n-6$

由于 $G+\bar{G} = K_n$，故 $m_G + m_{\bar{G}} = \frac{1}{2}n(n-1) \le 6n-12$

化简得 $n^2-13n+24 \le 0 \Rightarrow n(n-13)+24 \le 0$

当 $n=11$ 时 $11\times(11-13)+24 = 2>0$，矛盾！

当 $n=12$ 时 $12\times(12-13)+24 = 12>0$，矛盾！

当 $n \ge 13$ 时 $n(n-13) \ge 0$，故 $n(n-13)+24>0$，矛盾！

综上所述，结点数大于10的简单图，G和$\bar{G}$至少有一个非平面图.

7. 反证法，假设存在平面图满足题意，则取其对偶图 G^*，此时 $n^* = d = 5$

又因为图G中任意域之间都有一条公共边，因此 G^* 中任意两个结点都有边相连，

故 $G^* = K_5$，为非平面图，矛盾！

因此不存在图G满足题意.

8. 记 V_i 为度数为 i 的结点总数，有 $\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} V_i = n \\ \sum_{i=0}^{\infty} iV_i = 2m \end{cases}$

故 $2m = \sum_{i=0}^{5} iV_i + \sum_{i=6}^{\infty} iV_i \ge \sum_{i=0}^{5} iV_i + 6\sum_{i=6}^{\infty} V_i = \sum_{i=0}^{5} iV_i + 6\left(n - \sum_{i=0}^{5} V_i\right) = 6n + \sum_{i=0}^{5}(i-6)V_i$

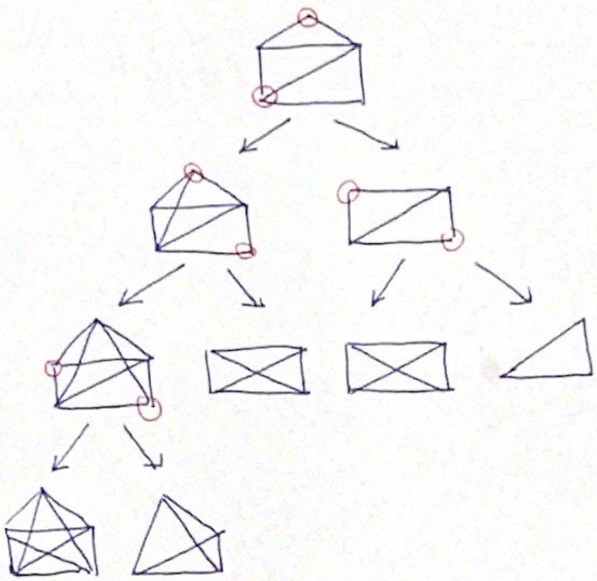
即 $\sum_{i=0}^{5}(6-i)V_i \ge 6n-2m \ge 6n-2(3n-6) = 12$

若 $V_0, V_1, V_2 \ne 0$，则可以进行加边操作，使得每个结点的度都大于2（极大平面图任意结点度 ≥ 3，故永远可以通过加边使得 $V_2 = V_1 = V_0 = 0$，记新图为 G'，由于 n', m' 仍满足上式

故 $6V_0+5V_1+4V_2+3V_3+2V_4+V_5 = 3V_3+2V_4+V_5 \ge 12$，故 $3(V_3+V_4+V_5) \ge 12$ 即

$V_3+V_4+V_5 \ge 4$，图 G' 中存在至少4点度不大于5，由于 G' 是由G加边而成的图，G中也必存在4点，其度不大于5.

13.



故 $\gamma(G)=\min\left\{\gamma(\overline{G_{ij}}),\ \gamma(\mathring{G}_{ij})\right\} = 3$

色数多项式 $f(G,t) = f(K_5,t) + 3\cdot f(K_4,t) + f(K_3,t)$

$= t(t-1)(t-2)^3$

5. 由于一个图可平面等价于它是可球面的，因此我们可以用平面图G来表示正凸多面体，此时图G的域代表几何体的面，边代表几何体的棱，点代表几何体的顶点。

由欧拉公式：$d-m+n=2$.

设每个域的边界数为 i，每个点在 j 个域的边界上，则有

$d\cdot i = 2m$ （每个域有 i 条边，每条边与两个域相邻）以及

$n\cdot j = 2m$ （每个域上点数与边数相等，故对所有域而言，顶点总数为 $d\cdot i$，对点而言，顶点总数为 $n\cdot j$，故 $n\cdot j = d\cdot i = 2m$）

代入欧拉公式有，$\frac{2m}{i} - m + \frac{2m}{j} = 2 \Rightarrow \frac{1}{i}+\frac{1}{j}-\frac{1}{2}=\frac{1}{m}>0 \Rightarrow \frac{1}{i}+\frac{1}{j}-\frac{1}{2}>0$

注意到 $i,j \geq 3$，若 $i,j\geq 6$ 时 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，故 $i,j<6$

$i\backslash j$	3	4	5
3	2/3 ✓	7/12 ✓	8/15 ✓
4	7/12 ✓	1/2 ✗	9/20 ✗
5	8/15 ✓	9/20 ✗	2/5 ✗

从左表易知 $(i,j) = (3,3)\ (3,4)\ (4,3)\ (3,5)\ (5,3)$ 可行，

它们分别对应 正四面体，正八面体，正六面体，正十二面体和正二十面体。

14. 中心点的颜色与外回路上的点不同，当外回路点数 $n-1$ 为偶数时，需要 $1+2=3$ 种颜色，若 $n-1$ 为奇数，则需要 $1+3=4$ 种颜色。

注意到 n 个结点回路 C_n 的色数多项式 $f(C_n,t)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$

因此图 W_n 的色数多项式 $f(W_n,t)=t(C_{n-1},t-1)=t(t-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot t\cdot(t-2)$

16. 若回路 a 或回路 b 其中一个回路的结点数为奇，则 $\gamma(G)=3$，否则若两个回路的结点数均为偶，则 $\gamma(G)=2$。

由定理 4.6.7 知，$f(C_{m+n-2},t)=f(\bar{G_{ij}},t)+f(\mathring{G_{ij}},t)=f(G,t)+f(\mathring{G_{ij}},t)$

注意到 $f(\mathring{G_{ij}},t)=\dfrac{f(C_{m-1},t)\cdot f(C_{n-1},t)}{t}$　（分别计算两个环的色数，且两环交点要同色）。

因此 $f(G,t)=f(C_{m+n},t)-f(\mathring{G_{ij}},t)$

$$=(t-1)^{m+n-2}+(-1)^{m+n-2}\cdot(t-1)-\frac{1}{t}\left[(t-1)^{m-1}+(-1)^{m-1}(t-1)\right]\left[(t-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-1)\right]$$

9. 观察对偶图 G^*，此时原题转化为 G^* 的顶点不能 2 染色，且只有一点的度不被 α 整除

假设 G^* 能红蓝 2 染色，那么我们可以把度不被 α 整除的点和其相邻边染上红色，其他点及相应边则按需染上蓝或红色，（由于 G^* 也为平面图，每条边有两个端点，即每条边都被染色两次，更进一步来说，如果图能二染色，则每条边分别被染为红、蓝色各一次，故以红色、蓝色染色的边数相等）那么，染上红色的边数不被 α 整除，而染上蓝色的边数被 α 整除，边数不等，故　图 G^* 的顶点不能 2 染色，即图 G 的域不能 2 染色。