8.3. 必要性：由于S为交换半群，故对 $\forall a,b \in S$，有 $a\cdot b = b\cdot a$

因此，$(ab)^2 = (ab)(ab) = a(ba)b = a(a\cdot b)b = a\cdot a\cdot b\cdot b = a^2b^2$

充分性：已知 $(ab)^2 = a^2b^2$，即 $(ab)(ab) = (a\cdot a)(b\cdot b)$，由S为半群知 · 满足结合律，故 $a(b\cdot a)b = a\cdot(a\cdot b)b$，又因为S满足左、右消去律，故 $b\cdot a = a\cdot b$，即S满足交换律，因此S为交换半群。

8.6 由于 $\sigma: S \to T$ 为同构，故T中任一元素都可以写成 $\sigma(x)$ 的形式。

对 $\forall\, \sigma(x) \in T$，有：

$$\sigma(x) * \sigma(e) = \sigma(x\cdot e) = \sigma(x)$$
$$\sigma(e) * \sigma(x) = \sigma(e\cdot x) = \sigma(x)$$

因此 $\sigma(e)$ 是 $(T, *)$ 的单位元。

8.7. 对 $\forall a,b \in G$，令 e 为 G中单位元，又因为G满足封闭性，故 $a\cdot b \in G$

由于G中任意元的逆元都是它自身，故

$(a\cdot b)(a\cdot b) = e$，即 $a\cdot b\cdot a\cdot b = e$，故 $a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot b\cdot a = e\cdot b\cdot a \Rightarrow a\cdot b\cdot a\cdot(b\cdot b)\cdot a = b\cdot a$

$\Rightarrow a\cdot b\cdot a\cdot e\cdot a = b\cdot a \Rightarrow a\cdot b(a\cdot a) = b\cdot a \Rightarrow a\cdot b = b\cdot a$，因此G是交换群。

8.10. 首先，$x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$ 为方程的一个解。

验算：$xaxba = (a^{-1}bca^{-1}b^{-1})a\cdot(a^{-1}bca^{-1}b^{-1})ba = a^{-1}bca^{-1}c$

$xbc = (a^{-1}bca^{-1}b^{-1})bc = a^{-1}bca^{-1}c$，即等号两边相等，$x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$ 为方程的解。

假设 x' 为方程的另一个解且 $x' \neq x$，由于 $x' \in G$，故 x' 有逆元，不妨记之为 $(x')^{-1}$，代 x' 入原方程，得 $x'ax'ba = x'bc$，左边乘上 $(x')^{-1}$，有 $(x')^{-1}x'ax'ba = (x')^{-1}x'bc \Rightarrow ax'ba = bc$

$\Rightarrow a^{-1}\cdot ax'ba = a^{-1}bc \Rightarrow x'ba = a^{-1}bc \Rightarrow x'\cdot ba\cdot a^{-1}b^{-1} = a^{-1}bca^{-1}b^{-1} \Rightarrow x' = a^{-1}bca^{-1}b^{-1} = x$

矛盾！故方程在G中有且仅有一个解 $x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$。

8.11 先证结合律：$[(a,b)(c,d)](e,f) = (ac, b+cd)(e,f) = (ace, b+cd+ef)$

$(a,b)[(c,d)(e,f)] = (a,b)(ce, ef+d) = (ace, b+ce^2f+ced)$

显然 $[(a,b)(c,d)](e,f) \neq (a,b)[(c,d)(e,f)]$，即G不满足结合律，因此G不为群。

8.12 充分性：已知：$aba = a$ 和 $ab^2a = e$，则有

$ab = abe = ab(ab^2a) = (aba)\cdot b^2a = a\cdot b^2a = e$

$ba = e\cdot ba = (ab^2a)ba = ab^2\cdot(aba) = a\cdot b^2\cdot a = e$，即 a 有可逆元 b。

必要性：若 a 有可逆元 b，则 $ab = e$，$ba = e$，故：

$aba = a\cdot(ba) = a\cdot e = a$，$ab^2a = (ab)\cdot(ba) = e\cdot e = e$。